Отзыв о дипломной работе "Размерность зарядов с малым преобразованием Фурье" Н. П. Добронравова

30 мая 2021 г.

В качестве дипломной работы я предложил Никите Добронравову следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть μ — комплекснозначная мера в $\mathbb{R}^d$, носитель которой имеет конечную α-меру Хаусдорфа, а преобразование Фурье суммируемо со степенью p. Если $2d = \alpha p$ и $p \in (2, \infty)$, то $\mu = 0$.*

К сожалению, Никита не доказал и не опроверг гипотезу. Тем не менее, его дипломную работу я считаю отличной. Во введении дипломной работы история вопроса описана подробно, и поэтому я лишь отмечу, что в той или иной степени гипотезу можно считать семидесятилетней (аналогичное утверждение в случае $d = 1$ и с более сильным предположением $2d > \alpha p$ доказал Берлинг в 1951 году, конечно, он явно не формулировал указанную выше гипотезу; отмечу, что гипотеза открыта даже в размерности $d = 1$). Трудность здесь состоит в том, что условие $\hat{\mu} \in L_p$ при $p > 2$ неудобно; большая часть подходов основана на приближении этого соотношения условием принадлежности меры μ некоторому гильбертовому пространству и доказательства аналогичного принципа неопределенности для него. Рассмотрено много частных случаев и упрощений, но, по-видимому, для окончательного разрешения вопроса здесь требуется привлечение существенно новых идей.

Что же сделано в работе? Во-первых, Никита, опираясь на результаты своей курсовой работы третьего курса (специальное усиление леммы Фростмана), смог приблизить условие $\hat{\mu} \in L_p$ условием принадлежности μ некоторому потенциальному пространству Соболева отрицательной гладкости и вывел отсюда, что если $2d > \alpha p$, то не просто μ не может быть сосредоточена на множестве размерности α, но даже не может не обнуляться на таком множестве. Это новый нетривиальный результат. По-видимому, основной "ингредиент" здесь — всё же прошлогодняя лемма Фростмана. Остальная часть доказательства — аккуратное применение теории интерполяции и соображения ортогональности.

Во-вторых, Никита показал, что если гипотеза и верна, то она невероятно точна. Этот результат формулируется в терминах обобщенных мер Хаусдорфа, построенных по произвольным функциям роста. Аккуратное определение меры $\mathcal{H}_g$, построенной по функции g, можно найти в дипломной работе, я лишь скажу, что классической мере $\mathcal{H}_\alpha$ соответствует функция $g(r) = r^\alpha$. Пусть $g(r) = o(r^\alpha)$ при $r \to 0$. Никита доказал существование компакта $C \subset \mathbb{R}^d$, такого что $\mathcal{H}_g(C) < \infty$, и вероятностной меры μ, сосредоточенной на C и такой что $\hat{\mu} \in L_p$, где $2d = \alpha p$.

Никита именно "доказал существование", а не построил компакт и меру. Конструкция случайна (то есть, мера и компакт строятся как случайные объекты, с вероятностью 1 удовлетворяющие требованиям), и судя по всему, нова. Для оценки L_p-нормы $\hat{\mu}$ используется индукция по шкалам, что тоже весьма неожиданно. Это действительно что-то новое в этом сюжете, и как мне кажется, совершенно нетривиальное.

Я верю, что в скором времени Никита найдёт ответ на исходный вопрос. Уже проделанная работа, тем не менее, заслуживает оценки "отлично".

Д. М. Столяров, научный руководитель Н. П. Добронравова, к. ф.-м. н., доцент.