Санкт-Петербургский государственный университет

ДОБРОНРАВОВ Никита Петрович

Выпускная квалификационная работа

Размерность зарядов с малым преобразованием Фурье

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
доцент, Лаборатория
им. П. Л. Чебышева, СПбГУ,
кандидат ф.-м. наук
Столяров Дмитрий Михайлович

Рецензент:
профессор Института Математики
Польской Академии Наук,
PhD, doc. hab.
Михал Войцеховски

Санкт-Петербург
2021 год

1 Введение

Принцип неопределённости в математическом анализе — это семейство фактов о том, что функция и её преобразование Фурье не могут быть одновременно малы (см. [6]). Одной из версий это принципа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, такой что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть обобщённая функция ζ такая что $\operatorname{supp}(\zeta) \subset S$ и $\hat{\zeta} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $p < \frac{2d}{\alpha}$. Тогда $\zeta = 0$.*

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$—это α—мера Хаусдорфа. Пока что неизвестно, верен ли этот принцип в предельном случае $p = \frac{2d}{\alpha}$.

Гипотеза 1. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, такой что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$, и пусть обобщённая функция ζ такая что $\operatorname{supp}(\zeta) \subset S$ и $\hat{\zeta} \in L_{\frac{2d}{\alpha}}(\mathbb{R}^d)$. Тогда $\zeta = 0$.*

В случае $d = 1$ непредельную версию теоремы доказал Бёрлинг в работе [3]. В работе [1] были доказаны результаты из которых выводится теорема 1, но сама теорема была не доказана. После этого Эдгар и Розенблатт разобрали случай $d - 1 \leqslant \alpha$ (см. [4]). Кахан доказал следующую теорему (см. [7]). (Кахан, Эдгар и Розенблатт не знали о работе [1]).

Теорема 2. *Пусть компакт $S \subset \mathbb{R}^d$ такой что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$, и пусть обобщённая функция ζ такая что $\operatorname{supp}(\zeta) \subset S$ и $\zeta \in W_2^{\frac{\alpha-d}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Тогда $\zeta = 0$.*

Здесь $W_p^\alpha(\mathbb{R}^d)$ — это пространство Соболева с показателем суммируемости p и показателем гладкости α. Для $1 < p < \infty$ это пространство можно задать формулой.

$$W_p^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f| \quad (1 - \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L_p(\mathbb{R}^d)\}. \tag{1}$$

Здесь Δ — это лапласиан.

Из этой теоремы следует теорема 1, так как преобразование Фурье действует из $L_p(\mathbb{R}^d)$ в $W_2^{\frac{d}{p} - \frac{d}{2} - \varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ для $p > 2$ и $\varepsilon > 0$ (см. [8]).

Предельный случай в теореме 1 ($p = \frac{2d}{\alpha}$) доказан в некоторых частных ситуациях. Так, Розенблатт показал, что ненулевая обобщённая функция ζ такая что $\hat{\zeta} \in L_{\frac{2d}{d-1}}$, не может концентрироваться на гладкой поверхности размерности $d - 1$ (см. [10]). Аргановский и Нараянан разобрали случай, когда S — это C^1 — гладкая поверхность произвольной размерности (см. [2]). Затем Раани доказала предельный случай теоремы для упаковочной меры (см. [9]). В работе [5] Хэйе и Рогинская показали, что для заряда ξ такого, что $\|\xi\|_{W_2^{\frac{\alpha-d}{2}}} < \infty$, верно $\dim_H(\xi) \geqslant \alpha$.

Под зарядом мы понимаем комплексно-значную меру. Здесь $\dim_H(\xi)$—это нижняя размерность Хаусдорфа заряда ξ, которая определяется по формуле

$$\dim_H(\xi) = \inf(\alpha| \ \exists B \subset \mathbb{R}^d \ \dim_H(B) = \alpha \ \ \xi(B) \neq 0). \tag{2}$$

Мне удалось обобщить теорему 2, а именно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть ξ заряд такой что $\xi \in W_p^{\frac{\alpha-d}{p'}}(\mathbb{R}^d)$ для $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда для любого множества A, такого что $\mathcal{H}_\alpha(A) < \infty$, верно равенство $\xi(A) = 0$.*

В частности из этой теоремы следует результат Хэйе и Рогинской.

Также я доказал что, если минимально ослабить условие Гипотезы 1, то она станет неверной. Для формулировки этого результата напомним определение f—мер Хаусдорфа.

Определение 1. *Пусть* $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *— неубывающая функция, такая что* $f(0) = 0$. *Тогда мера* Λ_f *определяется следующей формулой.*

$$\Lambda_f(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\substack{A\subset\cup B_j \\ \mathrm{diam}(B_j)<\delta}} \sum_j f(\mathrm{diam}(B_j)). \tag{3}$$

Если взять $f(t) = t^\alpha$, то $\Lambda_f = \mathcal{H}_\alpha$. Теперь сформулируем наш результат.

Теорема 4. *Путь функция* f *такая, что* $f(t) = o(t^{\frac{2d}{p}})$ *для* $p > 2$. *Тогда существует компакт* $A \subset \mathbb{R}^d$ *и вероятностная мера* μ, *такие что* $\mathrm{supp}(\mu) \subset A$, $\Lambda_f(A) < \infty$ *и* $\hat{\mu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Будет построен пример такого множества, и такой меры на нём. Множество и мера будут случайными, и будет доказано, что они нам подходят с вероятностью 1.

В главе 2 будет доказана теорема 4, а в главе 3 будет доказана теорема 3.

2 Пример

Сначала докажем вспомогательное неравенство.

Лемма 1. *Пусть* $p > 2$, *и пусть* X_j *— последовательность независимых, одинаковораспределённых, центрированных случайных величин. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^M X_j\right|^p \leqslant C_p M^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}|X_1|^p, \tag{4}$$

где константа C_p *зависит только от* p.

Эта лемма — простое следствие неравенства Марцинкевича—Зигмунда, а именно, следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* X_j *— последовательность независимых, центрированных случайных величин. Тогда выполнено неравенство*

$$c_p \mathbb{E}\left(\sum_j |X_j|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \mathbb{E}\left|\sum_j X_j\right|^p \leqslant C_p \mathbb{E}\left(\sum_j |X_j|^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{5}$$

где константы C_p *и* c_p *зависят только от* p.

Доказательство леммы 1. Сначала воспользуемся неравенством Марцинкевича–Зигмунда, мы получим неравенство

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^M X_j\right|^p \leqslant C_p \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^M |X_j|^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{6}$$

Дальше воспользуемся неравенством о средних:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^M |X_j|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \mathbb{E} M^{\frac{p}{2}-1} \sum_{j=1}^M |X_j|^p = M^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}|X_1|^p. \tag{7}$$

В совокупности эти оценки дают искомое неравенство. ◻

2.1 Конструкция носителя

Зафиксируем функцию f как в условии Теоремы 4. Сначала зафиксируем выбор некоторых констант. Пусть число $N > 4 \cdot 3^p C_p$. Построим последовательность натуральных чисел M_j, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$M_j > \max(100 C_p^{\frac{2}{p}}, 2^{\frac{2d}{p}} N^{\frac{2}{p}}), \tag{8}$$

$$f\left(2d^{\frac{1}{2}} \frac{N^{\frac{n}{d}}}{\prod_{j=1}^{n} M_j^{\frac{p}{2d}}}\right) \prod_{j=1}^{n} M_j < 1. \tag{9}$$

Будем строить эту последовательность последовательно. Пусть мы построили числа M_j для $j \leqslant k$. Посмотрим на выражение (9) для $n = k+1$. Числа M_j для $j \leqslant k$ фиксированны, а M_{k+1} устремим к бесконечности. Тогда левая часть выражения устремится к нулю, так как $f(x) = o(x^{\frac{2d}{p}})$, а значит, при достаточно большом M_{k+1} это соотношение будет выполнено.

Заведём семейство независимых случайных величин $\gamma_{n,k,j}$, где величина $\gamma_{n,k,j}$ равномерно распределена на кубике $\left[-1 + \frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_{n+k-1}^{\frac{p}{2d}}}, 1 - \frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_{n+k-1}^{\frac{p}{2d}}}\right]^d$.

Теперь приступим к конструкции носителя. Построим множества A_n (на самом деле, $A_n(\omega)$; множество — это случайная величина). Для начала построим множества $A_{n,k}$. Множества $A_{n,k}$ будем строить индуктивно так, чтобы $A_{n,k+1} \subset A_{n,k}$, и множество $A_{n,k}$ было бы объединением $\prod\limits_{j=n}^{n+k-1} M_j$ кубов размера $\delta_{n,k}$ (не обязательно дизъюнктное), где

$$\delta_{n,k} = 2 \frac{N^{\frac{k}{d}}}{\prod\limits_{j=n}^{n+k-1} M_j^{\frac{p}{2d}}}. \tag{10}$$

Заметим, что $\delta_{n,k+1} = \frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_{n+k}} \delta_{n,k}$. Множество $A_{n,0}$ положим равным $[-1,1]^d$. Пусть мы построили множество $A_{n,k}$, построим множество $A_{n,k+1}$. Множество $A_{n,k}$ — это объединение кубов, пусть центры этих кубов это $x_1,\ x_2, \ldots$. В каждый из этих кубов поместим M_{n+k} кубов размера $\delta_{n,k+1}$ следующим образом. У куба центр x_i, тогда у кубов лежащих внутри него центры $x_i + \frac{\delta_{n,k}}{2} \gamma_{n,k+1,j}$, для $(i-1) M_{n+k} \leqslant j < i M_{n+k}$.

Положим $A_n = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_{n,j}$.

По построению, множество A_n выглядит следующим образом. Начинаем построение с куба $[-1,1]^d$, в нём выбираем M_n кубов, в каждом из этих кубов мы выбираем M_{n+1} куб, в каждом из этих выбираем по M_{n+2} и так далее. Рассмотрим сужение на конкретный куб первого поколения, внутри него происходит алгоритм построения множество A_{n+1}. Получается множество A_n состоит из M_n независимых уменьшенных копий множества A_{n+1}.

На самом деле носитель искомой меры будет лежать в множестве A_1, а множества A_n нужны для оценки.

Лемма 3. *Верно неравенство* $\Lambda_f(A_1) \leqslant 1$.

Доказательство. Заметим, что множество A_1—это подмножество множества $A_{1,k}$, а множество $A_{1,k}$—это объединение $\prod\limits_{j=1}^{k} M_j$ кубов размера $\delta_{1,k}$. При каждом k эти кубы образуют покрытие множества A_1. Оценим эти покрытия. Диаметр одного куба — это $d^{\frac{1}{2}}\delta_{1,k}$.

$$f(d^{\frac{1}{2}}\delta_{1,k})\prod_{j=1}^{k}M_j = f\left(2d^{\frac{1}{2}}\frac{N^{\frac{k}{d}}}{\prod_{j=1}^{k}M_j^{\frac{p}{2d}}}\right)\prod_{j=1}^{k}M_j < 1, \tag{11}$$

по формуле (9). Соответственно, эти покрытия показывают, что $\Lambda_f(A_1) \leqslant 1$. □

2.2 Конструкция мер

Построим меры μ_n с носителями в множествах A_n. Для начала построим меру $\mu_{n,k}$ с носителем в множестве $A_{n,k}$. Множество $A_{n,k}$ — это объединение кубов, рассмотрим меру Лебега на каждом из этих кубиков, сложим эти меры Лебега и нормируем, так чтобы получилась вероятностная мера, эта мера и будет $\mu_{n,k}$. Мера μ_n — это *-слабый предел мер $\mu_{n,k}$. Мера μ_n восстанавливается по конструкции множества A_n, а множество A_n состоит из M_n независимых копий множества A_{n+1}, следовательно мера μ_n состоит из независимых копий меры μ_{n+1}.

Лемма 4. *Выполнено соотношение*

$$\hat{\mu}_n(x) \overset{D}{=} \frac{1}{M_n}\sum_{j=1}^{M_n} e^{2\pi i<\beta_{n,j},x>} l_{n,j}(x). \tag{12}$$

Здесь $l_{n,j}(x)$ — это независимые копии величины $\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)$, а $\beta_{n,j}$ — независимые случайные величины равномерно распределённые на кубике $\left[-1+\frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}, 1-\frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right]^d$; знак $\overset{D}{=}$ обозначает равенство по распределению случайных величин.

Доказательство. Множество A_n покрывается M_n кубами размера $2\frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}$, согласно конструкции, центры этих кубов равномерно распределены на кубике $\left[-1+\frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}, 1-\frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right]^d$. Внутри каждого из этих кубов находится независимая уменьшенная копия множества A_{n+1}. На каждом из этих множеств сосредоточена независимая копия меры μ_{n+1}, и соответственно, мера μ_n — это среднее арифметическое этих независимых копий, а значит, её преобразование Фурье — это среднее от преобразований Фурье этих независимых копий. Преобразование Фурье каждой независимой копии — это

$$e^{2\pi i<\beta_{n,j},x>} l_{n,j}(x), \tag{13}$$

экспоненциальный множитель появляется, так как центр кубика не в нуле, а растяжение — так как носитель уменьшен. Если мы возьмём среднее от таких слагаемых. мы получим искомую формулу. □

2.3 Оценка примера

Лемма 5. *Существует такая константа C_0, не зависящая от n, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant C_0. \tag{14}$$

Доказательство. По лемме 4,

$$\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x) = \mathbb{E}\frac{1}{M_n}\sum_{j=1}^{M_n} e^{2\pi i<\beta_{n,j},x>} l_{n,j}(x) = \mathbb{E}e^{2\pi i<\beta_{n,1},x>}\mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right). \tag{15}$$

Мера μ_{n+1} вероятностная, следовательно, её преобразование Фурье не превосходит единицы. Пусть $h(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, и пусть $a_n = 1 - \frac{N^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}$. По неравенству (8), $a_n > \frac{1}{2}$, и мы можем написать следующие оценки:

$$|\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)| = \left|\mathbb{E}e^{2\pi i<\beta_{n,1},x>}\mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)\right| \leqslant |\mathbb{E}e^{2\pi i<\beta_{n,1},x>}| = \left|\prod_{j=1}^{d} h\left(2\pi a_n x_j\right)\right| \leqslant \prod_{j=1}^{d}\min\left(1, \frac{1}{|x_j|}\right). \tag{16}$$

В последней оценке мы воспользовались неравенством $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{|t|}\right)$. Напишем финальную оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}\min\left(1, \frac{1}{|x_j|}\right)^p = C_0 < \infty. \tag{17}$$

□

Лемма 6. *Для любого n выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant C_0, \tag{18}$$

где C_0—константа из предыдущей леммы.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $R > 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{|x|<R} \mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant C_0. \tag{19}$$

Будем доказывать это индукцией по R, а именно, будем доказывать следующее утверждение: если неравенство выполнено для R и для всех n, то неравенство выполнено для $R_1 = 2R$ и для всех n.

База: неравенство выполнено для достаточно малых R. Меры μ_n вероятностные следовательно $|\hat{\mu}_n(x)| \leqslant 1$, а значит $|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)| \leqslant 2$, от сюда $\mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p \leqslant 2^p$. При достаточно малых R соответствующий интеграл можно оценить как 2^p умножить на меру области.

Шаг: пусть неравенство (19) выполнено для R. По лемме 4 выполнено соотношение

$$\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x) \overset{D}{=} \frac{1}{M_n}\sum_{j=1}^{M_n}\left(e^{2\pi i<\beta_{n,j},x>} l_{n,j}(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)\right). \tag{20}$$

Применим лемму 1:

$$\mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p = \mathbb{E}\left|\frac{1}{M_n}\sum_{j=1}^{M_n}\left(e^{2\pi i<\beta_{n,j},x>}l_{n,j}(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)\right)\right|^p \leqslant$$

$$C_p M_n^{-\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left|e^{2\pi i<\beta_{n,1},x>}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)\right|^p \leqslant$$

$$C_p M_n^{-\frac{p}{2}}3^p\left(\mathbb{E}\left|\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right) - \mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)\right|^p + \left|\mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)\right|^p + |\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p\right). \quad (21)$$

В последней оценке мы воспользовались неравенством $|a+b+c|^p \leqslant 3^p(|a|^p + |b|^p + |c|^p)$. Проинтегрируем получившуюся оценку

$$\int\limits_{|x|<2R} \mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant$$

$$\int\limits_{|x|<2R} C_p M_n^{-\frac{p}{2}}3^p\left(\mathbb{E}\left|\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right) - \mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)\right|^p + \left|\mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}\left(\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}\right)\right|^p + |\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p\right)dx. \quad (22)$$

В первом и втором слагаемом сделаем замену переменной (новая переменная — это $\frac{xN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}$). Пусть $R_0 = \frac{2RN^{\frac{1}{d}}}{M_n^{\frac{p}{2d}}}$, заметим, что по неравенству (8) $R_0 \leqslant R$. Мы получим

$$\int\limits_{|x|<2R} \mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant$$

$$C_p M_n^{-\frac{p}{2}}3^p\left(\frac{M_n^{\frac{p}{2}}}{N}\int\limits_{|x|<R_0}\mathbb{E}\left|\hat{\mu}_{n+1}(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}(x)\right|^p + \frac{M_n^{\frac{p}{2}}}{N}\int\limits_{|x|<R_0}\left|\mathbb{E}\hat{\mu}_{n+1}(x)\right|^p + \int\limits_{|x|<2R}\left|\mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)\right|^p dx\right). \quad (23)$$

Первое слагаемое оценивается по предположению индукции, а второе и третье по лемме 5. Мы получим неравенство

$$\int\limits_{|x|<2R} \mathbb{E}|\hat{\mu}_n(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_n(x)|^p dx \leqslant \frac{C_p 3^p}{N}C_0 + \frac{C_p 3^p}{N}C_0 + C_p 3^p M_n^{-\frac{p}{2}}C_0 \leqslant$$

$$\frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{4}C_0 + \left(\frac{9C^{\frac{2}{p}}}{M_n}\right)^{\frac{p}{2}} C_0 \leqslant C_0 \quad (24)$$

□

Доказательство Теоремы 4. Докажем, что преобразование Фурье меры μ_1 почти наверное лежит в L_p. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\hat{\mu}_1(x)|^p dx < \infty. \quad (25)$$

Докажем его:

$$\mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}_1(x)|^p dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}|\hat{\mu}_1(x)|^p dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} 2^p(\mathbb{E}|\hat{\mu}_1(x) - \mathbb{E}\hat{\mu}_1(x)|^p + |\mathbb{E}\hat{\mu}_1(x)|^p) dx \leqslant 2^{p+1}C_0 < \infty. \tag{26}$$

□

3 Оценки

Лемма 7. *Пусть φ — радиально симметричная, радиально невозрастающая функция с носителем в единичном шаре, $\varphi(x) = 1$ если $|x| \leqslant \frac{3}{4}$. Пусть μ—мера со знаком локально конечной вариации, и пусть для некоторого $\beta > 0$ выполнено следующие условие: для любого дизъюнктного семейства шаров $\mathfrak{B}$ имеет место неравенство*

$$\sum_{B_r(x)\in\mathfrak{B}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right) d\mu(y) \right| \lesssim \left(\sum_{B_r(x)\in\mathfrak{B}} r^\alpha \right)^\beta. \tag{27}$$

Тогда верно заключение:

$$\forall A \subset \mathbb{R}^d \quad |\mu|(A) \lesssim (\mathcal{H}^\alpha(A))^\beta. \tag{28}$$

Эта лемма была доказана в моей курсовой. До этого более слабая версия этой теоремы была доказана в работе [11].

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция с носителем в единичном шаре, а функция $\varphi_{B_r(x)}$ задана формулой

$$\varphi_{B_r(x)}(y) = \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right). \tag{29}$$

Лемма 8. *Пусть X—банахово пространство, такое что вложения $S(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow X \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^d)$ непрерывны и класс Шварца плотен в X. Пусть также $\alpha < d$, $\beta > 0$ и для любого дизъюнктного семейства шаров $\mathfrak{B}$, в котором радиусы шаров не больше 1, выполнено неравенство*

$$\left\| \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} \varphi_{B_{r_j}(x_j)} \right\|_{X'} \lesssim \left(\sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} r^\alpha \right)^\beta, \tag{30}$$

Тогда для любого заряда $\xi \in X$ и для любого множества A такого, что $\mathcal{H}_\alpha(A) < \infty$, выполнено соотношение $\xi(A) = 0$.

Здесь, $S(\mathbb{R}^d)$ — это класс Шварца на $\mathbb{R}^d$, а $S'(\mathbb{R}^d)$ — это класс обобщённых функций умеренного роста.

Доказательство. Для дизъюнктного семейства шаров $\mathfrak{B}$ и для заряда $\xi \in X$ напишем неравенство

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} \varphi_{B_{r_j}(x_j)}(y) d\xi(y) \right| \leqslant \|\xi\|_X \left\| \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} \varphi_{B_{r_j}(x_j)}(y) \right\|_{X'} \lesssim \|\xi\|_X \left(\sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} r^\alpha \right)^\beta. \tag{31}$$

Пусть множество A такое, что $\mathcal{H}_\alpha(A) < \infty$. Соответственно, по лемме 7, выполнено соотношение $|\xi(A)| \lesssim \|\xi\|_X(\mathcal{H}_\alpha(A))^\beta$. Пусть $f_n \in S(\mathbb{R}^d)$ — последовательность функций таких, что $f_n \xrightarrow{X} \xi$. Мы можем написать финальную цепочку неравенств (отождествляем функцию f_n и заряд $f_n(x)dx$):

$$|\xi(A)| = |\xi(A) - f_n(A)| \lesssim \|\xi - f_n\|_X(\mathcal{H}_\alpha(A))^\beta \to 0. \tag{32}$$

□

Лемма 9. *Пусть $\alpha \leqslant d$. Для любого дизъюнктного семейства шаров $\mathfrak{B}$, в котором радиусы шаров не больше* 1, *выполнено неравенство*

$$\left\| \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} \varphi_{B_{r_j}(x_j)} \right\|_{W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}} \lesssim \left(\sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} r^\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{33}$$

Доказательство. Зафиксируем семейство $\mathfrak{B}$. Введём оператор $T_\mathfrak{B}$, действующий из последовательностей в пространство функций и заданный формулой

$$T_\mathfrak{B}\{a_j\} = \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} a_j \varphi_{B_{r_j}(x_j)}. \tag{34}$$

На натуральный числах введём меру μ_α, такую что $\mu_\alpha\{j\} = r_j^\alpha$. Докажем, что оператор $T_\mathfrak{B}$ непрерывно действует из пространства $l_p(\mu_\alpha)$ в $W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}$, и норма оператора не зависит от семейства $\mathfrak{B}$. Сначала докажем это утверждение в случае, когда $\frac{d-\alpha}{p}$—целое число. В этом случае на пространстве Соболева рассмотрим следующую норму

$$\|f\|_{W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}} = \sum_{|\beta|\leqslant\frac{d-\alpha}{p}} \|\partial^\beta f\|_{L_p}. \tag{35}$$

Оценим $\|\partial^\beta T_\mathfrak{B}\{a_j\}\|_{L_p}$:

$$\|\partial^\beta T_\mathfrak{B}\{a_j\}\|_{L_p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} a_j \partial^\beta \varphi_{B_{r_j}(x_j)}(y) \right|^p dy = \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} |a_j|^p \int_{B_{r_j}(x_j)} \left| \partial^\beta \varphi_{B_{r_j}(x_j)}(y) \right|^p dy \lesssim$$
$$\sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} |a_j|^p r_j^{d-\beta p} \leqslant \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} |a_j|^p r_j^\alpha = \|\{a_j\}\|_{l_p(\mu_\alpha)}. \tag{36}$$

Случай $\frac{d-\alpha}{p} \in \mathbb{N}_0$ рассмотрен.

Теперь рассмотрим комплексную интерполяцию. Для пространств Соболева

$$\left[W_p^{\frac{d-\alpha_0}{p}}, W_p^{\frac{d-\alpha_1}{p}} \right]_\theta = W_p^{\frac{d-\alpha_\theta}{p}}, \tag{37}$$

где $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ (см. [8] Theorem 10). А также $[l_p(\mu_{\alpha_0}), l_p(\mu_{\alpha_1})]_\theta = l_p(\mu_{\alpha_\theta})$, так как это интерполяция между l_p с разными весами. Соответственно, по интерполяционной теореме оператор $T_\mathfrak{B}$ действует из $l_p(\mu_\alpha)$ в $W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}$ при всех α.

Теперь напишем что $\|T_\mathfrak{B}\{a_j\}\|_{W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}} \lesssim \|\{a_j\}\|_{l_p(\mu_\alpha)}$ для $a_j = 1$, и получим неравенство

$$\left\| \sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} \varphi_{B_{r_j}(x_j)} \right\|_{W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}} = \|T_\mathfrak{B}\{1\}\|_{W_p^{\frac{d-\alpha}{p}}} \lesssim \|\{1\}\|_{l_p(\mu_\alpha)} = \left(\sum_{B_{r_j}(x_j)\in\mathfrak{B}} r_j^\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{38}$$

$\square$

Доказательство Теоремы 3. Заметим, что пространства $W_p^{\frac{\alpha-d}{p'}}$ и $W_{p'}^{\frac{d-\alpha}{p'}}$ двойственны друг к другу (см. [8] Theorem 12), следовательно лемма 8 и лемма 9 в совокупности доказывают эту теорему. $\square$

Список литературы

[1] D. R. Adams, J. C. Polking, *The equivalence of two definitions of capacity*, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973) 529-534.

[2] M. L. Agranovskiy, E. K. Narayanan, L_p *integrability, support of Fourier transform, and uniqueness theorem for convolution equations*, Journal of Fourier Analysis and Appl. 10:3 (2004), 315-324.

[3] A. Beurling, *On a closure problem*, Ark. Mat. 1 (1951), 301-303.

[4] G. A. Edgar, J. M. Rosenblatt, *Difference equations over locally compact abelean groups*, Transactions AMS 253 (1979), 273-289.

[5] K. E. Hare, M. Roginskaya, *The energy of signed measures*, Proceedings AMS 132:2 (2003), 397-406.

[6] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty principle in harmonic analysis*, Springer, 1994.

[7] J.-P.-Kahane, *Dimension capacitaire et dimension de Hausdorff*, Colloque de Theorie du Potentiel, Springer Lecture Notes in Mathematics, 393-400, 1984 (in French).

[8] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke University Mathematical Series I, Duke University, 1976.

[9] K. S. Senthil Raani, L^p*-integrability, dimensions of supports of Fourier transforms and applications*, Journal of Fourier Analysis and Appl. 20:4 (2014), 801-815

[10] J. M. Rosenblatt, *Linear independence of translations*, Journ. Austral. Math. Soc. 59 (1995), 131-133.

[11] D. M. Stolyarov, M. Wojciechowsi, *Dimension of gradient measures*, C. R. Math. 352:10 (2014), 791-795.

N.P. Dobronravov,
e-mail:dobronravov1999@mail.ru .