

Отзыв научного руководителя о дипломной работе студента 4 курса  
факультета математики и компьютерных наук  
Санкт-Петербургского государственного университета  
Георгия Вепрева  
“Масштабированная энтропия и ее приложения”.

Дипломная работа Георгия относится к эргодической теории, метрической теории динамических систем. Георгий занимался изучением и развитием теории масштабированной энтропии, ее приложениями. Понятие масштабированной энтропии, численного метрического инварианта динамической системы энтропийного типа, было предложено к изучению в работах А. М. Вершика конца 90-х. Схожие инварианты рассматривались в работах С. Ференци и А. Б. Катка–Ж. П. Туveno примерно в то же время. Масштабирующая последовательность описывает динамику метрик на фиксированном пространстве с мерой, показывая, насколько быстро растут так называемые эpsilon-энтропии допустимой метрики при усреднении под действием сохраняющего меру преобразования (или группы преобразований). Масштабирующая последовательность существенно не зависит от выбора усредняемой допустимой метрики и является эффективным инвариантом для систем с нулевой метрической энтропией (Колмогорова–Синяя). Теория масштабированных энтропийных последовательностей получила свое развитие в серии работ А. М. Вершика, Ф. В. Петрова и П. Б. Затицкого, однако, очень многие вопросы теории остаются открытыми.

Одним из результатов дипломной работы Георгия является отрицательный ответ на важный вопрос о существовании для любого автоморфизма масштабированной последовательности, в существенном не зависящей от epsilon. Георгий строит пример эргодического автоморфизма, для которого масштабированная последовательность зависит от epsilon в существенном. Построенный пример демонстрирует, что масштабированная последовательность оказывается более содержательным инвариантом, чем предполагалось ранее, и требует некоторого переосмысления. Георгий вводит серию определений: динамические системы, для которых масштабированная последовательность в существенном не зависит от epsilon, называет стабильными, остальные — нестабильными. Далее вводится определение масштабированной энтропии, которое напрямую обобщает изучаемое ранее понятие масштабированной последовательности — в стабильном случае масштабированная энтропия в некотором смысле совпадает с масштабированной последовательностью. Георгий показывает, что масштабированная энтропия является метрическим инвариантом динамических систем, описывает всевозможные “значения” этого инварианта.

Во второй половине дипломной работы Георгий приводит красивое применение теории масштабированной энтропии — решает вопрос о (не)существовании универсальных систем нулевой энтропии. В энтропийной теории динамических систем хорошо известен вариационный принцип для действия аменабельных групп. Пусть аменабельная группа  $G$  действует гомеоморфизмами на метрическом компакте  $(K, d)$ , пусть  $M(K, G)$  — множество всех борелевских вероятностных мер на  $K$ , инвариантных относительно действия группы. Тогда топологическая энтропия  $h_{top}(K, G)$  этого действия равна супремуму метрических энтропий действий  $h(K, \mu, G)$  по  $\mu \in M(K, G)$ . В связи с этим был задан такой вопрос. Пусть дана некоторая аменабельная группа  $G$ . Верно ли, что существует действие с нулевой топологической энтропией группы  $G$  на некотором компакте  $(K, d)$ , универсальное для метрических действий нулевой энтропии, в том смысле, что для любой эргодической системы  $(X, \nu, G)$  нулевой метрической энтропии найдется такая мера  $\mu \in M(K, G)$ , что системы  $(K, \mu, G)$  и  $(X, \nu, G)$  метрически изоморфны?

Данный вопрос, по словам В. В. Рыжикова, был (устно) задан Ж. П. Туveno для случая одного преобразования, то есть для действия  $G = \mathbb{Z}$ . Георгий довольно быстро справился с этим случаем и дал отрицательный ответ, используя уже существовавшие на тот момент конструкции автоморфизмов с промежуточным ростом масштабированной последовательности. После этого нами была обнаружена работа Я. Серафина 2013 года, в которой ровно этот же вопрос решается для действия группы  $\mathbb{Z}$ . Автор указывает, что вопрос был задан

Б. Вейссом (тоже устно), и что вопрос для аменабельных групп остается открытым. В своей работе Георгий, используя конструкцию коиндуцированного действия, строит примеры действий аменабельных групп с промежуточным ростом масштабирующей последовательности. Отсюда выводится, что не существует универсальной системы нулевой топологической энтропии для действий аменабельной группы.

Основные результаты дипломной работы содержатся в двух препринтах Георгия на arXiv.org: одна работа опубликована в «Записках ПОМИ», еще одна подана в высокорейтинговый профильный журнал. По материалам, вошедшим в дипломную работу, Георгий делал доклады на семинарах в ПОМИ РАН, ENS Paris, Политехническом университете Вроцлава, а также двух конференциях ММИ Эйлера.

Хочется отметить высокий уровень математической грамотности Георгия, глубокое погружение в тему исследований, а также большую самостоятельность и активность в работе над проектом. Считаю, что дипломная работа Георгия, безусловно, заслуживает оценки «отлично».



07.06.2021

П. Б. Затицкий, к.ф.-м.н., доцент СПбГУ, н.с. ПОМИ РАН