Санкт-Петербургский государственный университет

ВЕПРЕВ Георгий Анатольевич

Выпускная квалификационная работа

Масштабированная энтропия и её приложения

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
доцент СПбГУ
кандидат ф.-м. наук
Затицкий П. Б.

Рецензент:
профессор МГУ
доктор ф.-м. наук
Рыжиков В. В.

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Введение

В данной работе изучается инвариант метрических динамических систем медленного энтропийного типа — *масштабированная энтропия*. Данный инвариант был предложен А. М. Вершиком в работах [18, 2]. Теория масштабированной энтропии получила развитие в работах [19, 6, 7, 8].

В настоящей работе мы предъявляем пример динамической системы, не допускающей *масштабированной энтропийной последовательности* и приводим обобщенное определение масштабированной энтропии. Для нового определения мы обобщаем результаты о субаддитивности [7] и приводим исчерпывающее семейство примеров.

В качестве приложения теории масштабированной энтропии мы обобщаем результат статьи [14] на случай непериодической аменабельной группы G. А именно, мы доказываем, что не существует системы нулевой топологической энтропии, универсальной для действий группы G нулевой метрической энтропии. В настоящей работе мы доказываем нижнюю оценку на энтропию усреднения метрик (лемма 7), которая позволяет вычислить масштабирующую энтропию для серии примеров действий группы G. Существование такой (см. определение 7) серии примеров влечёт отсутствие универсальной топологической системы нулевой энтропии.

1.1. Классические понятия

Напомним классические понятия энтропийной теории динамических систем (см., например, [12]). Счетная группа G называется *аменабельной* если она удовлетворяет условию Фёльнера, то есть, существует такая последовательность конечных подмножеств $F_n \subset G$, что для любого $g \in G$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Такую последовательность F_n мы будем называть левой последовательностью Фёльнера. Аналогично определяется правая последовательность Фельнера. Мы будем рассматривать левые действия группы G на пространствах Лебега, не содержащих атомов, то есть, на пространствах, изоморфных единичному отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега.

1.1.1. Топологическая энтропия

Пусть аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X, d). Топологическая энтропия действия определяется следующим образом:

$$h_{top}(X, G) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|F_n|} \log \operatorname{spn}(d, F_n, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|F_n|} \log \operatorname{sep}(d, F_n, \varepsilon),$$

где $\operatorname{spn}(d, F_n, \varepsilon)$ и $\operatorname{sep}(d, F_n, \varepsilon)$ — размер минимальной ε–сети и максимального ε–разделенного множества соответственно для метрики

$$G^n_{max} d(x, y) = \max_{g \in F_n} d(gx, gy), \qquad x, y \in X.$$

Величина $h_{top}(X, G)$ не зависит от выбора фёльнеровской последовательности множеств F_n и является инвариантом топологической динамической системы.

1.1.2. Метрическая энтропия

Предположим, что группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Для измеримого разбиения ξ пространства (X, μ) символом $H(\xi)$ обозначим его *энтропию*, т. е. следующую неотрицательную величину:

$$H(\xi) = -\int\limits_X \log \mu(\xi(x))\, \mathrm{d}\mu(x),$$

где символом $\xi(x)$ обозначен элемент разбиения ξ, содержащий точку $x \in X$. Далее, для измеримого разбиения ξ с конечной энтропией $H(\xi)$ определим его энтропию относительно действия группы G:

$$h(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|F_n|} H\left(\bigvee_{g \in F_n} g^{-1}\xi \right),$$

где символом $\vee$ обозначено произведение разбиений. *Метрическая энтропия действия группы* G определяется следующим образом:

$$h(X, \mu, G) = \sup\{h(\xi) \colon H(\xi) < +\infty\}.$$

Метрическая энтропия не зависит от выбора фёльнеровской последовательности F_n и является инвариантом метрической динамической системы.

1.1.3. Вариационный принцип

Хорошо известен вариационный принцип для действия аменабельной группы G. А именно, пусть $M_G(X)$ есть множество G–инвариантных вероятностных борелевских мер на компактном метрическом пространстве X. Тогда

$$h_{top}(X, G) = \sup_{\mu \in M_G(X)} h(X, \mu, G),$$

в частности, множество $M_G(X)$ не пусто. Отметим также, что $h_{top}(X, G) \geqslant h(X, \mu, G)$, в частности, если топологическая энтропия равна нулю, то метрическая энтропия любой инвариантной меры μ на X также равна нулю.

1.2. Масштабированная энтропия

1.2.1. Эпсилон–энтропия и масштабирующая энтропийная последовательность

Основным объектом изучения настоящей работы является понятие масштабированной энтропии, введенное в работах Вершика [18, 2]. В работах Ференци [10] и Катка–Тувено [11] рассматривалось близкое понятие метрической сложности динамической системы, использующее символическое кодирование и метрики Хэмминга. Предложенный Вершиком подход основывается на динамике функций нескольких переменных, а именно, *допустимых полуметрик* (см. [19]). Теория масштабированной энтропии получила развитие в работах Вершика, Петрова и Затицкого [19, 6, 7, 8]. Напомним основные понятия и утверждения этой теории.

Пусть $\rho\colon (X^2,\mu^2) \to [0,+\infty)$ — измеримая полуметрика на пространстве с мерой (X,μ), то есть измеримая по мере μ^2 неотрицательная симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника. Для положительного ε определим её ε–*энтропию* $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)$ следующим образом. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого пространство X можно представить в виде объединения измеримых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_k$, таких, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и при $i = 1,\ldots,k$, диаметр множества X_i в полуметрике ρ меньше ε. Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = \log_2 k.$$

Если же такого k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = +\infty$.

Отметим, что при фиксированной полуметрике ρ эпсилон–энтропия является убывающей функцией по ε. Также, для любых полуметрик ρ и ω, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,y) \geqslant \omega(x,y),\ x,y \in X$, при всех $\varepsilon > 0$ выполнено $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\omega)$.

Полуметрика называется *допустимой*, если она сепарабельна на некотором подмножестве $X_0 \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus X_0) = 0$. В работе [19] изучаются свойства допустимых полуметрик. В частности, доказано, что полуметрика допустима тогда и только тогда, когда её ε–энтропия конечна при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Для элемента $g \in G$ символом $g^{-1}\rho$ мы будем обозначать сдвинутую полуметрику: $g^{-1}\rho(x,y) = \rho(gx,gy)$, $x,y \in X$. Ясно, что полуметрика $g^{-1}\rho$ допустима тогда и только тогда, когда полуметрика ρ является таковой.

Зафиксируем некоторую последовательность $\lambda = \{S_n\}_{n=1}^\infty$ конечных подмножеств группы G, будем называть ее *оснащением* группы G. Измеримая полуметрика ρ называется *порождающей* относительно (G,λ), если ее сдвиги под действием элементов $\cup_n S_n$ разделяют точки mod 0, т. е. существует такое подмножество $X_0 \subset X$ полной меры, что для любых различных $x,y \in X_0$ найдется такой элемент $g \in \cup_n S_n$, что $g^{-1}\rho(x,y) > 0$. Отметим, что измеримая метрика всегда является порождающей. Символом $G_{av}^n\rho$ мы будем обозначать усреднение сдвигов полуметрики ρ под действием элементов множества S_n:

$$G_{av}^n\rho(x,y) = \frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\rho(gx,gy), \qquad x,y\in X.$$

Рассмотрим следующую величину

$$\Phi(n,\varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,G_{av}^n\rho).$$

Априори, функция $\Phi(n,\varepsilon)$ зависит от n, ε и полуметрики ρ. Однако, предполагается, что асимптотическое поведение по n этой функции в некотором смысле не зависит от полуметрики ρ и числа ε (см. [18, 2]). Напомним определение, предложенное в работах [7, 8].

Определение 1. Пусть $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ — действие группы G с оснащением λ автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Пусть ρ — допустимая полуметрика на (X,μ). Последовательность $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ называется *масштабирующей энтропийной последовательностью* для полуметрики ρ и действия группы G с оснащением λ, если при достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,G_{av}^n\rho)\asymp h_n.$$

Здесь и далее для двух последовательностей ϕ и ψ соотношение $\phi(n)\asymp\psi(n)$ означает, что существуют такие положительные константы c и C, что $c\phi(n)\leqslant\psi(n)\leqslant C\phi(n)$. Отметим, что, вообще говоря, имеет смысл говорить сразу о классе масштабирующих последовательностей. Действительно, как видно из определения 1, если последовательность $\{h_n\}$ является масштабирующей и для некоторой другой последовательности $\{h'_n\}$ имеет место соотношение $h'_n\asymp h_n$, то $\{h'_n\}$ тоже является масштабирующей.

В работах [6, 8] доказано, что, если последовательность h_n является масштабирующей для какой-то суммируемой допустимой метрики ρ, то она является масштабирующей и для любой другой суммируемой допустимой метрики. Суммируемость полуметрики ρ означает, что её интеграл по множеству X^2 конечен, то есть $\rho\in L_1(X^2,\mu^2)$, в частности, любая ограниченная измеримая полуметрика заведомо является суммируемой. Отметим, что данная независимость справедлива для любого оснащения λ, но рассматриваются лишь настоящие метрики. Для порождающих полуметрик необходимо наложить некоторые условия на оснащение λ (см. работу [8]).

Определение 2. Оснащение $\lambda=\{S_n\}$ группы G называется *подходящим*, если для любого $g\in\cup S_n$ и любого $\delta>0$ существует такое $k\in\mathbb{N}$, что для любого $n\in\mathbb{N}$

найдутся такие $g_1, \dots, g_k \in G$, что выполнено неравенство

$$\left| gS_n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} S_n g_j \right| \leqslant \delta |S_n|.$$

Отметим, что любая (левая) последовательность Фёльнера аменабельной группы является подходящим оснащением. Для действия группы G с подходящим оснащением в работах [6, 8] доказано, что если последовательность h_n является масштабирующей для какой-то суммируемой допустимой порождающей полуметрики ρ, то она является масштабирующей и для любой другой суммируемой допустимой порождающей полуметрики. Таким образом, класс масштабирующих последовательностей не зависит от выбора полуметрики и образует метрический инвариант действия группы с оснащением.

Также необходимо отметить, что масштабирующая последовательность действия группы, вообще говоря, априори может зависеть от выбора оснащения. В работе [7] показано, что при некоторых условиях на оснащение λ счетной группы G, если масштабирующая энтропийная последовательность существует, то существует такая возрастающая субаддитивная функция $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h_n \asymp f(|S_n|)$. Однако, на данный момент не известно, можно ли выбрать такую функцию f одновременно для всех оснащений. Более того, не известно, зависит ли стабильность (см. пункт 2) системы от выбора оснащения λ.

В работе [7] показано, что для действия одного автоморфизма (т. е. группы $\mathbb{Z}$ с естественным оснащением отрезками) класс масштабирующих последовательностей, если не является пустым, содержит возрастающую субаддитивную последовательность, а в работе [8] были построены примеры автоморфизмов с наперед заданными возрастающими субаддитивными масштабирующими последовательностями, тем самым были полностью описаны непустые классы масштабирующих последовательностей автоморфизмов. Кроме того, в работе [8] были построены примеры действий группы $\bigoplus \mathbb{Z}_2$ с наперед заданными масштабирующими последовательностями промежуточного роста, и эта конструкция может быть с легкостью модифицирована для случая действия групп $\bigoplus_k \mathbb{Z}_{r_k}$ для произвольной последовательности натуральных чисел $\{r_k\}$.

1.2.2. Оценки эпсилон–энтропии

Сформулируем несколько технических лемм, необходимых в дальнейшем. Каждому измеримому разбиению ξ пространства (X, μ) канонически соответствует *разрезная полуметрика* $\rho_\xi(x, y)$, принимающая значение 0, если x и y лежат в одном элементе ξ, и значение 1 иначе. Следующая лемма, доказанная в работе [6], связывает ε–энтропию полуметрики ρ_ξ с энтропией $H(\xi)$ измеримого разбиения.

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения между энтропией разбиений и ε–энтропией полуметрик.*

1. *Для любого измеримого разбиения ξ стандартного вероятностного пространства (X, μ) и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_\xi) \leqslant \frac{H(\xi)}{\varepsilon},$$

где ρ_ξ — соответствующая разбиению разрезная полуметрика.

2. *Пусть $m, k \in \mathbb{N}$ и пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ — семейство конечных измеримых разбиений пространства (X, μ), каждое из которых состоит из не более чем m элементов. Пусть $\xi = \bigvee_{i=1}^k \xi_i$ — произведение этих разбиений, $\rho = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_{\xi_i}$ — усреднение соответствующих этим разбиениям разрезных полуметрик. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ справедлива следующая оценка*

$$\frac{H(\xi)}{k} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)}{k} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \frac{1}{k}.$$

Следующая техническая лемма доказана в работе [7], она даёт оценки ε–энтропии усреднений полуметрик.

Лемма 2. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ — допустимые полуметрики на (X, μ), причём $\rho_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$.*

1. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i) > 0$. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}\left(X, \mu, \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_i\right) \leqslant 2\sum_{i=1}^k \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i).$$

2. *Существует такое $m \leqslant k$ что*

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X, \mu, \rho_m) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon\left(X, \mu, \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_i\right).$$

2. Пример нестабильной динамической системы

В настоящем разделе мы показываем, что масштабирующая последовательность существует не всегда, даже для действия группы $\mathbb{Z}$. Системы, для которых масштабирующая последовательность существует, мы будем называть *стабильными.* Таким образом, следующая теорема гарантирует существование *нестабильной системы.*

Теорема 1. *Существует такая эргодическая система* (X, μ, T) *и допустимая полуметрика* ρ *на* (X, μ), *что асимптотическое поведение величины* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)$ *существенным образом зависит от* ε, *то есть, для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* δ, $\varepsilon > \delta > 0$, *что*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) \prec \mathbb{H}_\delta(X, \mu, T^n_{av}\rho).$$

Здесь и далее соотношение $\phi(n) \prec \psi(n)$ для двух последовательностей ϕ и ψ означает, что $\lim_n \frac{\phi(n)}{\psi(n)} = 0$. Соотношение $\phi(n) \lesssim \psi(n)$ означает, что существует такая положительная константа C, что $\phi(n) \leqslant C\psi(n)$ при всех n.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство возрастающих субаддитивных функций на $\mathbb{N}$, удовлетворяющее асимптотическому соотношению $\phi_m \prec \phi_{m+1}$. Примером такого семейства может служить, например, $\phi_m(n) = \log^m(n)$. Согласно работе [8], существует такое семейство соответствующих эргодических систем $S_m = (X_m, \mu_m, T_m)$, что для любого m, любой допустимой порождающей полуметрики ρ_m на (X_m, μ_m) и любого достаточно малого ε

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_m, \mu_m, (T_m)^n_{av}\rho_m) \asymp \phi_m(n).$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ зафиксируем допустимую полуметрику $\rho_m \leqslant 1$ на (X_m, μ_m). Определим систему $\tilde{U}_{\mathcal{A}}$ как декартово произведение систем S_m:

$$\tilde{U}_{\mathcal{A}} = \left(\prod_{m=1}^{\infty} X_m, \prod_{m=1}^{\infty} \mu_m, \prod_{m=1}^{\infty} T_m \right),$$

где автоморфизм $T = \prod_{m=1}^{\infty} T_m$ действует на m-ном факторе преобразованием T_m. В силу эргодичности систем S_m, почти каждая компонента эргодического разложения меры $\prod_{m=1}^{\infty} \mu_m$ имеет координатные проекции, совпадающие с мерами μ_m. Выберем произвольную эргодическую компоненту μ на $X = \prod_{m=1}^{\infty} X_m$ с такими проекциями. Таким образом, мы построили эргодический джойнинг:

$$U_{\mathcal{A}} = \left(\prod_{m=1}^{\infty} X_m, \mu, \prod_{m=1}^{\infty} T_m \right).$$

Определим полуметрику ρ следующим образом. Пусть $x, y \in \prod_{m=1}^{\infty} X_m$

$$\rho(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \rho_m(x_m, y_m). \tag{1}$$

Ясно, что ρ является порождающей. Ниже мы покажем, что ε–энтропия ρ конечна при любом $\varepsilon > 0$. Таким образом, ρ является порождающей и допустимой полуметрикой.

Лемма 3. *Для построенной системы $U_{\mathcal{A}}$ и полуметрики ρ выполнено следующее неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_{\mathcal{A}}, T_{av}^n \rho) \leqslant \sum_{m=1}^{R(\varepsilon)} \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}}(X_m, \mu_m, (T_m)_{av}^n \rho_m), \quad \varepsilon > 0,$$

где $R(\varepsilon) = \lceil -\log(\varepsilon) \rceil$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого X_m рассмотрим его представление в виде объединения таких множеств $A_0^{(m)}, \ldots, A_{k_m}^{(m)}$ что $\mu_m \left(A_0^{(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}$ и $\operatorname{diam}_{T_{av}^n \rho_m} \left(A_i^{(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}$ для всех $i > 0$, где

$$\log k_m = \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}}(X_m, \mu_m, (T_m)_{av}^n \rho_m).$$

Символом π_m обозначим стандартную проекцию из X на X_m. По построению меры μ, отображение π_m переводит меру μ в меру μ_m. Обозначим

$$\hat{A}_i^{(m)} = \pi_m^{-1} \left(A_i^{(m)}\right).$$

Определим исключительное множество $K_0 = \bigcup\limits_{m=1}^{R} \hat{A}_0^{(m)}$, где $R = R(\varepsilon) = -\log(\varepsilon)$. Ясно, что

$$\mu(K_0) \leqslant \sum_{m=1}^{R} \hat{A}_0^{(m)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для каждого $J = (j_1, \ldots, j_R)$, $j_m \in \{1, \ldots, k_m\}$, определим

$$K_J = \bigcap_{m=1}^{R} \hat{A}_{j_m}^{(m)} \setminus K_0.$$

В силу формулы (1),

$$\operatorname{diam}_{T_{av}^n \rho}(K_J) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{diam}_{T_{av}^n \rho_m} \pi_m(K_J) \leqslant \\ \sum_{m=1}^{R} \frac{1}{2^m} \operatorname{diam}_{T_{av}^n \rho_m} A_{j_m}^{(m)} + \sum_{m=R+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{diam}_{T_{av}^n \rho_m} X_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2R} + 2^{-R-1} < \varepsilon.$$

Таким образом, мы построили такое разбиение $\mathcal{K} = \{K_J\}_J \cup \{K_0\}$, что $\mu(K_0) < \varepsilon$ и

$\mathrm{diam}_{T^n_{av}\rho}\, K_J < \varepsilon$. Размер множества $\mathcal{K}$ не превосходит $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_R + 1$. Следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_{\mathcal{A}}, T^n_{av}\rho) \leqslant \log\left(|\mathcal{K}| - 1\right) \leqslant \sum_{m=1}^{R(\varepsilon)} \log k_m = \sum_{m=1}^{R(\varepsilon)} \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}}(X_m, \mu_m, (T_m)^n_{av}\, \rho_m),$$

что и требовалось. $\square$

Допустим теперь, что система $U_{\mathcal{A}}$ стабильна, то есть, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) \asymp \mathbb{H}_{\varepsilon_0}(X, \mu, T^n_{av}\rho).$$

Тогда по лемме 3

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) \lesssim \sum_{k=1}^{R(\varepsilon_0)} \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon_0}{2R(\varepsilon_0)}}(X_k, \mu_k, (T_k)^n_{av}) \lesssim \phi_{R(\varepsilon_0)}(n). \tag{2}$$

Пусть h_n масштабирующая энтропийная последовательность системы $U_{\mathcal{A}}$. Тогда h_n асимптотически не превосходит $\phi_{R(\varepsilon_0)}(n)$ в силу формулы (2). Однако, в работе [6] доказано, что масштабирующая энтропийная последовательность фактора не превосходит масштабирующей последовательности самой системы. Следовательно, для любого m

$$h_n \gtrsim \phi_m(n).$$

Взяв $m = R(\varepsilon_0) + 1$, получаем противоречие. Следовательно, наше предположение не верно и система $U_{\mathcal{A}}$ не является стабильной. $\square$

3. Инвариантность

В пункте 2 мы построили эргодическую динамическую систему, у которой нет масштабированной энтропийной последовательности. Тем самым, естественно возникает вопрос о существовании аналогичных энтропийных инвариантов для нестабильных систем.

В этом разделе мы приводим определение масштабированной энтропии действия группы с оснащением, обобщающее случай стабильной системы. Инвариант в предлагаемом определении является специальным классом эквивалентности функций от двух переменных. Определим используемое нами отношение эквивалентности.

Определение 3. Пусть $\Phi, \Psi \colon \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ две функции, убывающие по своим вторым аргументам. Будем писать, что $\Phi \preceq \Psi$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ что

$$\Phi(n, \varepsilon) \lesssim \Psi(n, \delta).$$

Две функции Ψ и Φ назовём эквивалентными, если одновременно $\Psi \preceq \Phi$ и $\Phi \preceq \Psi$. Класс эквивалентности функции Φ относительно такого отношения мы будем обозначать символом $[\Phi]$.

Отметим, что отношение $\preceq$ естественным образом переносится на множество классов эквивалентности и образует на этом множестве частичный порядок. Для действия группы G с оснащением λ и полуметрики ρ рассмотрим функцию $\Phi_\rho(n, \varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\rho)$ и соответствующий класс эквивалентности

$$\mathcal{H}_\rho(X, \mu, G, \lambda) = \Big[\Phi_\rho(n, \varepsilon)\Big].$$

Следующая теорема доказана в работах [6, 8] (см. лемму 9 работы [6] и аналогичные утверждения работы [8]).

Теорема. *Пусть $G \curvearrowright (X, \mu)$ — действие группы G с подходящим оснащением λ. Пусть ρ — некоторая допустимая порождающая суммируемая полуметрика на (X, μ). Тогда для любой допустимой суммируемой полуметрики ω и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие положительные константы c и δ, что при всех n*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\omega) \leqslant c\mathbb{H}_\delta(X, \mu, G^n_{av}\rho).$$

Следствие 1. *Для любых двух допустимых порождающих суммируемых полуметрик ρ и ω*

$$\mathcal{H}_\rho(X, \mu, G, \lambda) = \mathcal{H}_\omega(X, \mu, G, \lambda).$$

Таким образом, класс эквивалентности функции $\Phi_\rho(n,\varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,G^n_{av}\rho)$ не зависит от полуметрики ρ и образует метрический инвариант $\mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda)$ действия группы (G,λ).

Определение 4. Масштабированной энтропией действия группы G с подходящим оснащением λ назовём следующий класс

$$\mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda) = \Big[\Phi_\rho(n,\varepsilon)\Big], \tag{3}$$

где ρ — произвольная допустимая порождающая суммируемая полуметрика.

Примером такой полуметрики является разрезная полуметрика, соответствующая порождающему разбиению конечной энтропии. Отметим, что система является стабильной тогда и только тогда, когда в классе $\mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda)$ можно найти функцию $\Phi(n,\varepsilon) = \phi(n)$, не зависящую от ε.

Отметим также полезное следствие об энтропии фактор–системы.

Следствие 2. *Пусть* $\Big(\hat{X},\hat{\mu},G\Big)$ *является фактором системы* (X,μ,G). *Тогда для любого подходящего* λ

$$\mathcal{H}\Big(\hat{X},\hat{\mu},G,\lambda\Big) \preceq \mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda).$$

Масштабированная энтропия также априори зависит от выбора оснащения. Однако, отметим, что если два подходящих оснащения $\lambda = \{S_n\}$ и $\theta = \{W_n\}$ таковы, что $|S_n \triangle W_n| = o(|S_n|)$, то $\mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda) = \mathcal{H}(X,\mu,G,\theta)$ для любого сохраняющего меру действия (X,μ,G). Действительно, в этом случае для любой допустимой ограниченной полуметрики ρ, любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n, разность $\left|G^{S_n}_{av}\rho(x,y) - G^{W_n}_{av}\rho(x,y)\right| < \varepsilon$ для $x,y \in X$.

В теореме 5 настоящей работы показано, что для любой аменабельной группы G с оснащением фёльнеровской последовательностью $\lambda = \{F_n\}$, любой $\Phi \in \mathcal{H}(X,\mu,G,\lambda)$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\Phi(n,\varepsilon) \lesssim |F_n|. \tag{4}$$

Эквивалентность в (4) достигается в том и только том случае, когда метрическая энтропия системы (X,μ,G) положительна. В работе [8] построены примеры стабильных систем для действия групп $\mathbb{Z}$ почти полного роста (см. определение 7) для стандартного оснащения отрезками, то есть автоморфизмов, допускающих масштабированную последовательность $h_n \not\lesssim \phi(n)$, для данной сублинейной функции $\phi(n)$.

Одна из основных теорем данной работы (теорема 8) гарантирует существование действий почти полного роста для любой непериодической аменабельной группы относительно любого Фёльнеровского оснащения. Несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действия непериодических аменабельных групп доказывается в теореме 6 с помощью построенных действий с масштабированной энтропией почти полного роста.

4. Масштабированная энтропия одного преобразования

В этом разделе мы приводим обобщение результатов [7] о субаддитивности для нестабильных действий группы $\mathbb{Z}$. А именно, мы доказываем, что масштабированная энтропия $\mathcal{H}(X,\mu,T)$ всегда содержит возрастающую субаддитивную по n функцию, убывающую по ε. Обратно, для любой такой функции $\Phi(n,\varepsilon)$ найдется система (X,μ,T), удовлетворяющая $\Phi \in \mathcal{H}(X,\mu,T)$.

4.1. Субаддитивность

Определение 5. Функцию $\Phi(n,\varepsilon)$ назовём субаддитивной, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых $k, m \in \mathbb{N}$

$$\Phi(k+m,\varepsilon) \leqslant \Phi(k,\varepsilon) + \Phi(m,\varepsilon).$$

Теорема 2. *Пусть (X,μ,T) — метрическая динамическая система. Тогда существует такая возрастающая по n и убывающая по ε субаддитивная функция $\Phi(n,\varepsilon)$, что*

$$\Phi \in \mathcal{H}(X,\mu,T).$$

Доказательство. Пусть $\rho \leqslant 1$ — допустимая порождающая суммируемая полуметрика и $\Psi(m,\varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{av}^m\rho)$. Докажем следующее предложение

Предложение 1. *Для достаточно малого ε справедливы неравенства*

1. *Для всех $k, n \in \mathbb{N}$*

$$\Psi(kn,\varepsilon) \leqslant 2k\Psi\left(n, \frac{\varepsilon^2}{4}\right).$$

2. *Для любых $k, n \in \mathbb{N},\ k \leqslant n$*

$$\Psi(n,\varepsilon) \geqslant \Psi\left(k, 2\sqrt{2\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Отметим, что для любого $\varepsilon < \frac{1}{3}\int\limits_{X^2}\rho$ ε–энтропия полуметрики ρ положительна. Также, усредненная полуметрика $T_{av}^m\rho$ имеет тот же интеграл, что и ρ, тем самым, её ε–энтропия также положительна. Зафиксируем такое $\varepsilon > 0$ и некоторые $k, n \in \mathbb{N}$. Для $i \leqslant k$ определим

$$\rho_i = T^{-(i-1)n}\ T_{av}^n\rho.$$

Ясно, что

$$T_{av}^{kn}\rho = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\rho_i.$$

Применяя лемму 2, получаем:

$$\mathbb{H}_\varepsilon\big(X,\mu,T_{av}^{kn}\rho\big) \leqslant 2\sum_{i=1}^{k}\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon^2}{4}}(X,\mu,\rho_i) = 2k\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon^2}{4}}(X,\mu,T_{av}^{n}\rho).$$

Первая часть леммы доказана.

Докажем второе неравенство. Пусть $n = km + r$, где $r < k$. Отметим, что $r \leqslant \frac{n}{2}$. Тогда

$$T_{av}^{n}\rho \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{km-1}T^{-i}\rho \geqslant \frac{n-r}{n}\frac{1}{km-1}\sum_{i=0}^{km}T^{-i}\rho \geqslant \frac{1}{2}T_{av}^{km}\rho.$$

Таким образом,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{av}^{n}\rho) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon\left(X,\mu,\frac{1}{2}T_{av}^{km}\rho\right) \geqslant \mathbb{H}_{2\varepsilon}\big(X,\mu,T_{av}^{km}\rho\big).$$

Далее применим вторую часть леммы 2 для полуметрик $\rho_i = T^{-(i-1)k}\,T_{av}^{k}\rho$, $i = 1,\ldots,m$. Получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{av}^{n}\rho) \geqslant \mathbb{H}_{2\varepsilon}\big(X,\mu,T_{av}^{km}\rho\big) \geqslant \mathbb{H}_{2\sqrt{2\varepsilon}}\big(X,\mu,T_{av}^{k}\rho\big).$$

□

Лемма 4. *Пусть $\eta(n),\phi(n)$ и $\psi(n)$, $n\in\mathbb{N}$, – последовательности неотрицательных вещественных чисел. Предположим, что*

$$\phi(kn) \leqslant k\psi(n) \quad \textit{для } k,n\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

а также

$$\phi(n) \geqslant \eta(k) \quad \textit{для } k\leqslant n. \tag{6}$$

Тогда существует такая возрастающая субаддитивная функция $\theta(n)$, что

$$\eta(n) \leqslant \theta(n) \leqslant 2\psi(n).$$

Доказательство. Пусть

$$\hat{\phi}(n) = \inf_{m\geqslant n}\phi(m) \leqslant \phi(n).$$

Ясно, что $\hat{\phi}$ возрастает. В силу (6) для любых $k\leqslant n$ выполнено

$$\hat{\phi}(n) \geqslant \eta(k).$$

Также, в силу (5) для всех $k,n\in\mathbb{N}$

$$\hat{\phi}(kn) \leqslant \phi(kn) \leqslant k\psi(n).$$

Определим $\hat{\theta}$ следующим образом:

$$\hat{\theta}(n) = \sup_{k>0} \frac{\hat{\phi}(kn)}{k} \leqslant \psi(n).$$

Очевидно, что $\hat{\theta}(n) \geqslant \hat{\phi}(n)$. Заметим, что $\hat{\theta}$ возрастает, так как функция $\hat{\phi}$ возрастает. А также

$$\hat{\theta}(kn) = \sup_{m>0} \frac{\hat{\phi}(mkn)}{m} = k \sup_{m>0} \frac{\hat{\phi}(mkn)}{mk} \leqslant k \sup_{l>0} \frac{\hat{\phi}(ln)}{l} = k\hat{\theta}(n).$$

Наконец, определим последовательность θ:

$$\theta(n) = n \sup_{m \geqslant n} \frac{\hat{\theta}(m)}{m} \geqslant \hat{\theta}(n) \geqslant \hat{\phi}(n) \geqslant \eta(n).$$

Во–первых, θ возрастает. Действительно,

$$\theta(n) = \max\left(\hat{\theta}(n), n \sup_{m \geqslant n+1} \frac{\hat{\theta}(m)}{m}\right) \leqslant \max\left(\hat{\theta}(n+1), (n+1) \sup_{m \geqslant n+1} \frac{\hat{\theta}(m)}{m}\right) = \theta(n+1).$$

Во–вторых, θ субаддитивна:

$$\theta(k+n) = (k+n) \sup_{m \geqslant k+n} \frac{\hat{\theta}(m)}{m} \leqslant k \sup_{m \geqslant k} \frac{\hat{\theta}(m)}{m} + n \sup_{m \geqslant n} \frac{\hat{\theta}(m)}{m} = \theta(k) + \theta(n).$$

Осталось лишь показать, что $\theta(n) \leqslant 2\psi(n)$.

$$\theta(n) = n \sup_{m \geqslant n} \frac{\hat{\theta}(m)}{m} \leqslant n \sup_{m \geqslant n} \frac{\hat{\theta}\left(n\left[\frac{m}{n}\right] + n\right)}{m} \leqslant \sup_{m \geqslant n} \frac{n\left[\frac{m}{n}\right] + n}{m}\ \hat{\theta}(n) \leqslant 2\psi(n).$$

$\square$

Теперь завершим доказательство теоремы 2. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ воспользуемся леммой 4 при $\eta(n) = \Psi\big(n, 2\sqrt{2\varepsilon}\big)$, $\phi(n) = \Psi(n, \varepsilon)$, и $\psi(n) = 2\Psi\Big(n, \frac{\varepsilon^2}{4}\Big)$. Условия (5) и (6) леммы 4 выполнены в силу предложения 1. Мы получаем такую возрастающую субаддитивную функцию $\Theta(n, \varepsilon)$, что

$$\Psi\Big(n, 2\sqrt{2\varepsilon}\Big) \leqslant \Theta(n, \varepsilon) \leqslant 4\Psi\left(n, \frac{\varepsilon^2}{4}\right). \tag{7}$$

Осталось только получить убывание по ε. Для этого рассмотрим такую последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\Theta(n, \varepsilon_k) < 4\Theta(n, \varepsilon_{k+1})$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и ε_k стремится к нулю. Это всегда возможно добиться в силу неравенства (7). Для $\varepsilon > 0$ обозначим символом $\gamma(\varepsilon)$ минимальное k такое, что $\varepsilon_k < \varepsilon$. Положим

$$\Phi(n, \varepsilon) = 4^{\gamma(\varepsilon)} \Theta\big(n, \varepsilon_{\gamma(\varepsilon)}\big).$$

Легко видеть, что Φ является монотонной по ε и $\Phi \sim\Theta \sim \Psi$, откуда $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, T)$. $\square$

4.2. Описание возможных значений

Оказывается, справедливо и обратное утверждение, завершающее полное описание возможных классов, которые могут являться масштабированной энтропией некоторого преобразования.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(n, \varepsilon)$ *– неотрицательная функция, убывающая по* ε*, возрастающая и субаддитивная по* n*. Тогда найдётся такая эргодическая система* (X, μ, T)*, что*

$$\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, T).$$

Доказательство. Мы будем использовать конструкцию нестабильной системы, описанную в пункте 2. Пусть

$$\phi_m(n) = \Phi\left(n, \frac{1}{m}\right).$$

Отметим, что $\phi_m(\cdot)$ — субаддитивная возрастающая последовательность при каждом m. Пусть $\mathcal{A} = \{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Рассмотрим систему $U_{\mathcal{A}}$ и покажем, что $\Phi \in \mathcal{H}(U_{\mathcal{A}})$. Лемма 3 даёт верхнюю оценку при любом $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_{\mathcal{A}}, T_{av}^n \rho) \leqslant \sum_{k=1}^{R(\varepsilon)} \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}}(X_k, \mu_k, (T_k)_{av}^n \rho_k) \lesssim \phi_{R(\varepsilon)}(n).$$

Следовательно,

$$\mathcal{H}(U_{\mathcal{A}}) \preceq \Phi.$$

Однако, $U_{\mathcal{A}}$ имеет стабильный фактор (A_m, μ_m, T_m). Тогда, для всех $m \geqslant 1$

$$\mathcal{H}(U_{\mathcal{A}}) \succeq \phi_m(n).$$

Таким образом, $\mathcal{H}(U_{\mathcal{A}}) \ni \Phi$. □

4.3. О минимальности отношения эквивалентности

В данном разделе обсуждаются свойства отношения эквивалентности в определении 3, определяющего масштабированную энтропию системы. Может показаться, что предложенное определение слишком сильное, то есть, не различает существенно различные функции двух переменных. Возможно ли контролировать δ в определении 3 некоторой функцией от ε? Отметим, что в доказательстве теоремы 2 о субаддитивности, достаточно рассматривать только $\delta = 4\varepsilon^2$. Если бы более тонкое отношение, выдерживающее замену измеримой метрики, существовало, изучаемый инвариант мог бы быть более эффективен. Следующая теорема показывает, что в этом смысле определение 3 точно.

Теорема 4. *Пусть $f\colon (0,1) \to (0,1)$ — возрастающая функция. Тогда существует эргодическая динамическая система (X, μ, T) и такие две допустимые порождающие суммируемые полуметрики ρ и ω на X, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, удовлетворяющее*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\omega) \gtrsim\!\!\!\!\!/\ \mathbb{H}_{f(\varepsilon)}(X, \mu, T^n_{av}\rho). \tag{8}$$

Доказательство. Сначала докажем следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть $h\colon (0,1) \to (0,1)$ — некоторое отображение. Тогда существует такое $\kappa \in (0,1)$, что множество $h^{-1}(\kappa, 1)$ содержит бесконечную возрастающую последовательность.*

Доказательство предложения очевидно, так как любое подмножество вещественной прямой, не содержащее бесконечной возрастающей последовательности, не более чем счетно.

Пусть $\{\psi_\alpha(n)\}$, $\alpha \in (0,1)$, — такое семейство возрастающих субаддитивных функций, что $\psi_{\alpha_1}(n) \prec \psi_{\alpha_2}(n)$ для любого $\alpha_1 < \alpha_2$. Подойдет, например, семейство $\psi_\alpha(n) = \log^{1+\alpha}(n)$. Рассмотрим соответствующие стабильные системы $(Y_\alpha, \nu_\alpha, R_\alpha)$ и допустимые порождающие суммируемые полуметрики $\tau_\alpha \leqslant 1$. То есть, для каждого α и для любого положительного $\varepsilon < h(\alpha)$ выполнено

$$\mathbb{H}_\varepsilon(Y_\alpha, \nu_\alpha, (R_\alpha)^n_{av}\tau_\alpha) \asymp \psi_\alpha(n).$$

Такие автоморфизмы существуют в силу [8]. Пользуясь предложением 2, выберем $\kappa > 0$ и возрастающую последовательность $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющую $h(\alpha_m) > \kappa$ для всех $m > 0$. Определим $\phi_m = \psi_{\alpha_m}$, $\mathcal{A}$ — семейство функций ϕ_m. Далее, как и в пункте 2 построим эргодический джойнинг $U_\mathcal{A}$ систем $(Y_{\alpha_m}, \nu_{\alpha_m}, R_{\alpha_m}) = (X_m, \mu_m, T_m)$.

Пусть ρ — стандартная полуметрика на $U_\mathcal{A}$:

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2^m}\rho_m(x_m, y_m),$$

где $\rho_m = \tau_{\alpha_m}$. Мы будем искать ω в виде аналогичной линейной комбинации полуметрик:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^\infty C_m \rho_m(x_m, y_m),$$

где $1 > C_m > 0$, и $\sum_{m=1}^\infty C_m$ конечно. Отметим, что любая такая полуметрика является порождающей допустимой и суммируемой.

Для любых $m, n \geqslant 1$

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_\mathcal{A}, T^n_{av}\omega) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(U_\mathcal{A}, C_m T^n_{av}\rho_m) = \mathbb{H}_\varepsilon(X_m, \mu_m, C_m (T_m)^n_{av}\rho_m).$$

Используя неравенство $C_m \leqslant 1$, мы получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_m, C_m T_{av}^n \rho_m) \geqslant \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{C_m}}(X_m, T_{av}^n \rho_m) \asymp \phi_m(n),$$

при $\frac{\varepsilon}{C_m} \leqslant \kappa$. Таким образом,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_{\mathcal{A}}, T_{av}^n \omega) \gtrsim \phi_m(n),$$

для всех m, удовлетворяющих $C_m \geqslant \kappa^{-1}\varepsilon$. Пусть $K(\varepsilon)$ есть наибольшее такое m.

Лемма 3 дает верхнюю оценку ε–энтропии усреднения ρ:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(U_{\mathcal{A}}, T_{av}^n \rho) \lesssim \phi_{R(\varepsilon)}(n),$$

где $R(\varepsilon) = -\log \varepsilon$. Значит,

$$\mathbb{H}_{f(\varepsilon)}(U_{\mathcal{A}}, T_{av}^n \rho) \lesssim \phi_{R(f(\varepsilon))}(n).$$

Неравенство (8) выполнено для всех ε, удовлетворяющих

$$K(\varepsilon) > R(f(\varepsilon)).$$

Что, в свою очередь, выполнено при

$$C_{R(f(\varepsilon))+1} > \kappa^{-1}\varepsilon.$$

Положим $\varepsilon_p = \kappa 2^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$, и $C_{R(f(\varepsilon_p))+1} = 2\kappa^{-1}\varepsilon_p \leqslant 1$. Если некоторый коэффициент C_m остался не определен, положим $C_m = 2^{-m}$. Ясно, что полученная полуметрика ω искомая. $\square$

5. Метрическая энтропия и масштабирующая последовательность

В этом разделе мы изучаем связь масштабированной энтропии с метрической энтропией. Следующая теорема является аналогом теоремы 7 работы [6] для случая действия аменабельной группы с оснащением фёльнеровской последовательностью.

Теорема 5. *Пусть аменабельная группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). И пусть $\lambda = \{F_n\}$ — последовательность Фёльнера группы G. Пусть $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \lambda)$.*

1. *Предположим, что метрическая энтропия $h(X, \mu, G)$ положительна. Тогда система (X, μ, G) стабильна, и при достаточно малых ε*

$$\Phi(n, \varepsilon) \asymp |F_n|.$$

2. *Если же $h(X, \mu, G) = 0$, то при всех ε*

$$\Phi(n, \varepsilon) = o(|F_n|).$$

Доказательство. Предположим, что метрическая энтропия $h(X, \mu, G)$ положительна. Пусть ξ есть некоторое конечное измеримое разбиение, $\zeta_n = \bigvee_{g \in F_n} g^{-1}\xi$. Пусть ρ_ξ — разрезная полуметрика, соответствующая ξ. Также, пусть $\xi_g = g^{-1}\xi$ для $g \in F_n$ и $m = |\xi| = |\xi_g|$ — количество элементов разбиения. По 2 пункту леммы 1 имеем:

$$\frac{H(\zeta_n)}{|F_n|} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\rho_\xi)}{|F_n|} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \frac{1}{|F_n|}. \tag{9}$$

В силу того, что $h(X, \mu, G) > 0$, разбиение ξ можно выбрать так, что

$$h(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|F_n|} H(\zeta_n) > 0.$$

Значит, из неравенства (9) при достаточно малом ε следует, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\rho_\xi) \gtrsim |F_n|. \tag{10}$$

Отметим, что полуметрика ρ_ξ может не быть порождающей (если разбиение ξ не является порождающим), однако для любой измеримой допустимой метрики ω на X функция $\rho_\xi + \omega$ также является измеримой допустимой метрикой. Тогда функция $\Psi(n, \varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}(\rho_\xi + \omega))$ лежит в $\mathcal{H}(X, \mu, G, \lambda)$. При этом

$$\Psi(n, \varepsilon) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\rho_\xi) \gtrsim |F_n|.$$

Верхняя оценка на рост масштабированной энтропии сразу следует из леммы 2. Действительно, пусть $\rho \leqslant 1$ — некоторая допустимая порождающая полуметрика. Применяя лемму 2 для полуметрик $g^{-1}\rho$ при $g \in F_n$, получаем

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X, \mu, G_{av}^n \rho) \leqslant 2|F_n| \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho).$$

Это означает, что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \lambda)$ и достаточно малого (а тогда и для любого) $\varepsilon > 0$

$$\Phi(n, \varepsilon) \lesssim |F_n|.$$

Тем самым, первый пункт теоремы доказан.

Пусть теперь энтропия $h(X, \mu, G)$ равна нулю. В этом случае рассмотрим порождающее разбиение ξ конечной энтропии и соответствующую ему (порождающую) допустимую полуметрику ρ_ξ. Как и раньше, пусть $\zeta_n = \bigvee_{g \in F_n} g^{-1}\xi$. Первый пункт леммы 1 гарантирует следующее неравенство:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n \rho_\xi) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_{\zeta_n}) \leqslant \frac{H(\zeta_n)}{\varepsilon}.$$

Однако, равенство $h(X, \mu, G) = 0$ означает, что $H(\zeta_n) = o(|F_n|)$, а значит, для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \lambda)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\Phi(n, \varepsilon) = o(|F_n|).$$

$\square$

6. Универсальные системы

В работе [14] предложено следующее определение, удобное в контексте данной работы.

Определение 6. Топологическая система (X, G) называется *универсальной* для класса $\mathcal{S}$ эргодических метрических действий группы G, если выполняются следующие два условия.

1. Для любой эргодической $\mu \in M_G(X)$ система (X, μ, G) принадлежит классу $\mathcal{S}$.

2. Для любой системы $(Y, \nu, G) \in \mathcal{S}$ существует инвариантная мера μ на (X, G), такая, что метрическая система (X, μ, G) изоморфна (Y, ν, G).

В работе [14] обсуждается восходящий к Б. Вейссу вопрос о существовании универсальной топологической системы для класса $\mathcal{S}$, состоящего из систем нулевой энтропии. В силу вариационного принципа и первого свойства из определения 6, такая топологическая система должна обладать нулевой топологической энтропией.

Вопрос 1. Существует ли система (X, G) нулевой топологической энтропии, универсальная для класса всех действий нулевой метрической энтропии?[1]

В работе [14] дан отрицательный ответ на вопрос 1 для действия группы $\mathbb{Z}$, однако вопрос для действия аменабельных групп остается открытым. Подход работы [14] основан на понятии символической и метрической сложности динамической системы (см. также [10]), а также специальных конструкциях динамических систем с промежуточным ростом метрической сложности. Автор указывает, что данный подход для аменабельных групп не дал искомого результата ввиду недостаточной степени развития теории символических продолжений. Стоит отметить, что понятие метрической сложности тесно связано с понятием масштабированной энтропии, используемой нами. Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема, дающая отрицательный ответ на поставленный вопрос 1 для случая непериодической аменабельной группы G.

Теорема 6. *Пусть счетная непериодическая аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X, d). Предположим, что для любой эргодической динамической системы (Y, ν, G) нулевой метрической энтропии существует мера μ на X, инвариантная относительно G, такая, что*

$$(X, \mu, G) \cong (Y, \nu, G).$$

Тогда топологическая энтропия системы (X, d, G) положительна.

[1]Отметим, что часто термин “универсальная” употребляется в чуть ином смысле — требуется выполнение лишь второго условия из определения 6. В таком случае вопрос становится не столь содержательным — сдвиг на $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ допускает реализацию любого эргодического автоморфизма T с метрической энтропией $h(T)$ меньшей 1, это следует из теоремы Кригера об образующей [13]. Теорема Кригера справедлива для действий аменабельных групп [15].

7. Несуществование универсальной системы нулевой энтропии

В этой секции мы доказываем несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действий непериодических аменабельных групп. Приведенное ниже доказательство, однако, имеет дело с более общим классом аменабельных групп.

Определение 7. Мы будем говорить, что группа G с оснащением $\lambda = \{F_n\}$ *допускает эргодические действия почти полного роста*, если для любой неотрицательной функции $\phi(n) = o(|F_n|)$ существует такая эргодическая система (X, μ, G), что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \lambda)$ и достаточно малого ε выполнено

$$\Phi(n, \varepsilon) \not\lesssim \phi(n) \text{ и } \Phi(n, \varepsilon) = o(|F_n|).$$

Отметим, что в силу теоремы 5 второе условие в определении 7 эквивалентно тому, что метрическая энтропия системы (X, μ, G) равна нулю.

Теорема 7. *Пусть аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X, d). Предположим, что G допускает эргодические действия почти полного роста для некоторого фёльнеровского оснащения $\theta = \{W_n\}$. Предположим, что для любой эргодической динамической системы (Y, ν, G) нулевой метрической энтропии существует мера μ на X, инвариантная относительно G, такая что*

$$(X, \mu, G) \cong (Y, \nu, G).$$

Тогда топологическая энтропия системы (X, d, G) положительна.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что топологическая энтропия $h_{top}(X, G) = 0$. Тогда

$$\sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{|W_n|} \log \operatorname{spn}(d, W_n, \varepsilon) = 0.$$

Стало быть, для всех $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{|W_n|} \log \operatorname{spn}(d, W_n, \varepsilon) = 0.$$

Ясно, что существует такая функция $\phi(n)$, что $\frac{\phi(n)}{|W_n|} \to 0$ и для всех $\varepsilon > 0$

$$\phi(n) \gtrsim \log \operatorname{spn}(d, W_n, \varepsilon).$$

По предположению, группа G с оснащением θ допускает действия почти полного роста. Значит, существует такое эргодическое действие $\alpha\colon G \curvearrowright (Y, \nu)$ нулевой энтропии, что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(Y, \nu, G, \theta)$ и достаточно малого ε

$$\Phi(n, \varepsilon) \not\lesssim \phi(n). \tag{11}$$

Также по предположению теоремы, данное действие может быть реализовано в топологической системе (X, d, G). То есть существует такая инвариантная мера μ на X, что $(X, \mu, G) \cong (Y, \nu, G)$. В частности, $\mathcal{H}(Y, \nu, G, \theta) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \theta)$. Отметим, что метрика d на X, очевидно, допустима. Значит,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n d) \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \theta).$$

Однако,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n d) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{max}^n d) \leqslant \log \operatorname{spn}\left(d, W_n, \frac{\varepsilon}{2}\right) \lesssim \phi(n),$$

что противоречит соотношению (11). □

В силу теоремы 7, для доказательства отсутствия универсального топологического действия нулевой энтропии непериодической аменабельной группы G (то есть теоремы 6) нам остается показать, что такая группа допускает действия почти полного роста. Этому посвящена оставшаяся часть работы.

8. Коиндуцированные действия

Для построения действий почти полного роста мы будем использовать конструкцию коиндуцирования.

8.1. Коиндуцированные действия и лемма о расслоении

В данном пункте мы напомним конструкцию коиндуцированного действия. Пусть G — счетная аменабельная группа и пусть $H \leqslant G$. Пусть $H \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ — действие группы H автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Рассмотрим разложение G на смежные классы по подгруппе H:

$$G = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} g_i H,$$

где g_i — представители смежных классов. Можно считать, что $g_0 = e$. Рассмотрим пространство

$$(X^{G/H}, \mu^{G/H}) = \prod_{i=0}^{\infty} (X_i, \mu_i),$$

где (X_i,μ_i) — изоморфная копия (X,μ), соответствующая элементу g_i. Для $x \in X^{G/H}$ символом x_i, $i \geq 0$, будем обозначать его i−ю координату, $x_i \in X_i$. Для любого $g \in G$ и каждого i существуют единственные $k(i,g) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $h(i,g) \in H$, такие, что $gg_i = g_{k(i,g)} h(i,g)$. Определим действие $\mathrm{CInd}_H^G\,\alpha$ группы G на пространстве $X^{G/H}$ следующим образом. Пусть $x \in X^{G/H}$, положим

$$g(x)_i = h(i,g^{-1})^{-1}\big(x_{k(i,g^{-1})}\big).$$

Здесь и далее мы отождествляем множество классов смежности с некоторой фиксированной трансверсалью $\{g_i\}$.

Лемма 5. *Пусть H – подгруппа счетной аменабельной группы G и $\tilde{W}_n$ — последовательность Фёльнера в G. Тогда существует последовательность Фёльнера $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ в группе G, такая, что $\left|\tilde{W}_n \triangle W_n\right| = o(|W_n|)$, и W_n представимо в виде*

$$W_n = \bigcup S_n^i g_i^{-1},$$

где $S_n^i \subset H$ таковы, что для любого $h \in H$, $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\left|hS_n^i \triangle S_n^i\right| \leqslant \varepsilon \left|S_n^i\right|.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое $h \in H$ и $n \in \mathbb{N}$. Символом $\varepsilon(n,h)$ обозначим величину $|h\tilde{W}_n \triangle \tilde{W}_n| \cdot |\tilde{W}_n|^{-1}$. Ясно, что $\varepsilon(n,h)$ стремится к 0 при любом фиксированном h. Множество $\tilde{W}_n$ представляется единственным образом в виде $\bigcup_i S_n^i g_i^{-1}$, где

S_n^i есть некоторые конечные подмножества H. Пусть $\tilde{I}(n,h)$ есть множество тех индексов i, для которых $|hS_n^i \triangle S_n^i| > \varepsilon^{\frac{1}{2}}(n,h)|S_n^i|$, и пусть $E(n,h) = \cup_{i\in\tilde{I}(n,h)} S_n^i g_i^{-1}$. Левое умножение на h сохраняет каждый правый смежный класс Hg_i^{-1}. Следовательно,

$$|E(n,h)| = \sum_{i\in\tilde{I}(n,h)} \left|S_n^i\right| < \varepsilon(n,h)^{\frac{1}{2}} \left|\tilde{W}_n\right|.$$

Пусть $\tau\colon H \to \mathbb{N}$ — произвольная нумерация элементов группы H. Определим

$$W_n = \tilde{W}_n \setminus \bigcup_{h\colon\, \varepsilon(n,h)<2^{-\tau(h)}} E(n,h).$$

Ясно, что последовательность $\{W_n\}$ является искомой. Действительно, имеем

$$\left|\tilde{W}_n \triangle W_n\right| \leqslant \sum_{\varepsilon(n,h)<2^{-\tau(h)}} |E(n,h)| < \sum_{\varepsilon(n,h)<2^{-\tau(h)}} \varepsilon(n,h)^{\frac{1}{2}} \left|\tilde{W}_n\right| = o(|\tilde{W}_n|).$$

Последнее соотношение справедливо, например, в силу теоремы Лебега. □

Определение 8. Множество S целых чисел назовём ε–инвариантным для некоторого положительного ε, если $|(S+1)\triangle S| < \varepsilon|S|$.

Замечание. В случае $H = \mathbb{Z}$ из леммы 5 следует существование такой подпоследовательности n_j, что все множества $S_{n_j}^i$ являются $\frac{1}{j}$–инвариантными.

8.2. Масштабированная энтропия коиндуцированного действия

В этом разделе мы приводим оценки масштабированной энтропии коиндуцированного действия. Мы сводим вопрос существования действий почти полного роста для произвольной непериодической аменабельной группы к случаю группы $\mathbb{Z}$, который будет рассмотрен в разделе 9.

Теорема 8. *Пусть $\lambda = \{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность Фёльнера счётной непериодической аменабельной группы G. Тогда группа G с оснащением λ допускает эргодические действия почти полного роста.*

Доказательство. Пусть $h \in G$ — элемент бесконечного порядка и $H = \langle h \rangle$ — порождённая им подгруппа, а $\{g_i\}$ — трансверсаль к ней, причём $g_0 = e$. Лемма 5 утверждает, что существует такая последовательность Фёльнера $\theta = \{W_n\}$ в группе G, что

$$|F_n \triangle W_n| = o(|F_n|), \tag{12}$$

и $W_n = \bigcup S_n^i g_i^{-1}$, где S_n^i таковы, что для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\left|hS_n^i \triangle S_n^i\right| \leqslant \varepsilon \left|S_n^i\right|.$$

Соотношение (12) гарантирует, что для любого сохраняющего меру действия α группы G выполняется равенство $\mathcal{H}(\alpha,\lambda)=\mathcal{H}(\alpha,\theta)$. Таким образом, достаточно доказать, что группа G с оснащением θ допускает действия почти полного роста.

Пусть $\phi(n)$ — некоторая неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности. Воспользуемся следующей леммой, которая будет доказана в разделе 9.

Лемма 6. *Пусть дана последовательность конечных семейств $\{S_n^i\}_{i=1}^{k_n}$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}$, такая, что каждое множество S_n^i является $\frac{1}{n}$–инвариантным. Пусть также $\phi(n)$ — некоторая последовательность положительных чисел, возрастающая к бесконечности. Тогда существует автоморфизм T стандартного вероятностного пространства (X,μ) и последовательность $\{n_j\}$, такие, что для любой порождающей полуметрики ρ, достаточно малого $\varepsilon>0$ справедливо следующее соотношение:*

$$\frac{\left|S_{n_j}^i\right|}{\phi(n_j)} \lesssim \mathbb{H}_\varepsilon\left(X,\mu,T_{av}^{S_{n_j}^i}\rho\right) \lesssim \left|S_{n_j}^i\right|, \qquad i=1,\ldots,k_{n_j}. \tag{13}$$

В частности, автоморфизм T имеет нулевую энтропию, и для любого достаточно малого ε при достаточно большом j

$$\frac{\left|S_{n_j}^i\right|}{\phi(n_j)} < \mathbb{H}_{4\varepsilon}\left(X,\mu,T_{av}^{S_{n_j}^i}\rho\right) < \left|S_{n_j}^i\right|,\ i=1,\ldots,k_{n_j}. \tag{14}$$

Рассмотрим действие $\alpha=\mathrm{CInd}_H^G T$ группы G, коиндуцированное с подгруппы H. Пусть $\tilde{\rho}\leqslant 1$ — некоторая допустимая метрика на (X,μ). Определим допустимую порождающую полуметрику ρ на $(X,\mu)^{G/H}$ следующим образом:

$$\rho(x,y)=\tilde{\rho}(x_0,y_0), \qquad x,y\in X.$$

Так как G действует на ${}^{G}\!/_{H}$ транзитивно, то ρ является порождающей. Отметим, что представители классов смежности были выбраны так, что $g_0=e$, следовательно элементы H не переставляют нулевую координату $(X,\mu)^{G/H}$. Таким образом, для любых $x,y\in X^{G/H}$

$$\rho(hx,hy)=\tilde{\rho}(hx_0,hy_0).$$

Тогда

$$H_{av}^{S_{n_j}^i}\rho(x,y)=H_{av}^{S_{n_j}^i}\tilde{\rho}(x_0,y_0).$$

Для каждого g_i (выделенного представителя класса смежности) определим полуметрику ρ_i на $(X,\mu)^{G/H}$:

$$\rho_i=g_iH_{av}^{S_{n_j}^i}\rho.$$

Каждая полуметрика ρ_i зависит только от i-ой координаты:

$$\rho_i(x,y)=(H_{av}^{S_{n_j}^i}\rho)(g_i^{-1}x,g_i^{-1}y)=(H_{av}^{S_{n_j}^i}\tilde{\rho})(x_i,y_i), \qquad x,y\in(X,\mu)^{G/H},$$

поэтому можно считать ее полуметрикой на X_i. Усреднение полуметрики ρ под действием W_{n_j} выражается через ρ_i следующим образом:

$$G_{av}^{W_{n_j}}\rho = \frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i}\sum_{s\in S^i_{n_j}} g_i s^{-1}\rho = \frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i} g_i \sum_{s\in S^i_{n_j}} s^{-1}\rho =$$
$$\frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i}\left|S^i_{n_j}\right| g_i H_{av}^{S^i_{n_j}}\rho = \frac{1}{\sum\limits_i \left|S^i_{n_j}\right|}\sum_{g_i}\left|S^i_{n_j}\right|\rho_i. \quad (15)$$

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная в пункте 10 этой работы.

Лемма 7. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\phi > 1$ фиксированы. Рассмотрим конечное семейство допустимых полуметрических троек (X_i, μ_i, ρ_i), $i = 1, \ldots, k$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^k$ таковы, что $\phi^{-1}s_i < \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i, \mu_i, \rho_i) < s_i$. Зададим полуметрику ρ на $\prod_{i=1}^k (X_i, \mu_i) = (X, \mu)$ следующим образом:*

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^k s_i}\sum_{i=1}^k s_i\rho_i(x_i, y_i),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Тогда

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X, \mu, \rho) \geqslant \frac{1}{\phi}\varepsilon^3\sum_{i=1}^k \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i, \mu_i, \rho_i) - k - 1.$$

При больших значениях j выполняются неравенства (14). Следовательно, лемма 7 применима для полуметрик ρ_i, весов $s_i = \left|S^i_{n_j}\right|$ и $\phi = \phi(n_j)$. Получим следующую оценку:

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X^{G/H}, \mu^{G/H}, G_{av}^{W_{n_j}}\rho) \geqslant \frac{1}{\phi(n_j)}\varepsilon^3\sum_{i=1}^{k_{n_j}} \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X, \mu, H_{av}^{S^i_{n_j}}\tilde{\rho}) - k_{n_j} - 1 \geqslant \frac{1}{\phi(n_j)^2}\varepsilon^3\left|W_{n_j}\right| - 2k_{n_j}, \quad (16)$$

где k_{n_j} — количество непустых $S^i_{n_j}$. Очевидно, для любой последовательности $\varphi(n)$, растущей к бесконечности, существует такая неубывающая $\phi(n)$, растущая к бесконечности, что $\phi^2(n) = o(\varphi(n))$. Отметим, что $k_n = o(|W_n|)$, поэтому последовательность ϕ можно выбрать настолько медленной, что $k_n = o(\phi(n)^{-2}|W_n|)$. Тогда, для действия α, построенного по такой последовательности ϕ, для любой $\Phi \in \mathcal{H}(\alpha, \theta)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\Phi(n_j, \varepsilon) \succ \frac{\left|W_{n_j}\right|}{\varphi(n_j)},$$

следовательно, $\Phi(n, \varepsilon) \not\precsim \frac{|W_n|}{\varphi(n)}$.

Действие α имеет нулевую энтропию, так как любое действие, коиндуцированное с действия нулевой энтропии, также имеет нулевую энтропию.

Осталось показать, что построенные действия являются эргодическими. Это действительно так, если индекс подгруппы H в группе G бесконечен. В этом случае эргодичность коиндуцированного действия выводится тем же образом, что и эргодичность действия Бернулли. Действительно, положим от противного, что существует нетривиальное инвариантное подмножество $E \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Это подмножество может быть аппроксимировано цилиндрическим множеством C: $\mu(E \triangle C) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Ясно, что для любого $g \in G$ множество $g^{-1}C$ также является цилиндрическим, и $\mu(g^{-1}C \triangle C) < 2\varepsilon$. Однако, для любого цилиндрического C существует такой $g \in G$, что основания C и $g^{-1}C$ не пересекаются, и, следовательно, $\mu(g^{-1}C \cap C) = \mu(C)^2 < \mu(C) - 2\varepsilon$. Что влечёт противоречие.

В случае конечного индекса коиндуцированное действие может не быть эргодическим. Рассмотрим в этом случае эргодическую компоненту ν, проекции которой совпадают с мерами μ_i. Так как α имеет нулевую энтропию, мера ν может быть выбрана так, что её энтропия также равна нулю. Оценка масштабированной энтропии в этом случае получается проще, без использования леммы 7. Пусть L есть индекс подгруппы H в группе G. Тогда существует некоторое $S_{n_j}^{i_0}$ удовлетворяющее $|S_{n_j}^{i_0}| \geqslant \frac{1}{L}|W_{n_j}|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(X^{G/H}, \nu, G_{av}^{W_{n_j}}\rho) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X^{G/H}, \nu, L^{-1}\rho_{i_0}) \geqslant \\ \mathbb{H}_{L\varepsilon}(X^{G/H}, \nu, \rho_{i_0}) = \mathbb{H}_{L\varepsilon}(X_{i_0}, \mu_{i_0}, \rho_{i_0}) > \frac{1}{\phi(n_j)}\left|S_{n_j}^{i_0}\right| \geqslant \frac{1}{L\phi(n_j)}\left|W_{n_j}\right|. \quad (17)\end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях искомые действия построены. □

9. Адическое преобразование на графе упорядоченных пар

9.1. Граф упорядоченных пар

Для построения систем почти полного роста мы будем использовать конструкцию адического преобразования (автоморфизм Вершика) на графе упорядоченных пар. Этот граф был подробно изучен в работах [3] и [8].

Рассмотрим бесконечный градуированный граф $\Gamma = (V, E)$. Множество вершин V графа Γ есть дизъюнктное объединение множеств $V_n = \{0,1\}^{2^n}$, $n \geq 0$. Множество рёбер E определяется одновременно с раскраской $\mathfrak{c}\colon E \to \{0,1\}$ следующим образом. Пусть $v_n \in V_n$ и $v_{n+1} \in V_{n+1}$. Ребро $e = (v_n, v_{n+1})$ принадлежит E, если слово v_n является началом или концом слова v_{n+1} и помечено символом 0 или 1 соответственно. Если v_n является одновременно началом и концом v_{n+1}, то в графе Γ проводятся два ребра между v_n и v_{n+1}, соответствующие цветам 0 и 1. Вершины v_n и v_{n+1} мы будем назвать началом и концом ребра e соответственно, и обозначать символами $s(e)$ и $r(e)$.

Путь в графе Γ есть такая последовательность рёбер $\{e_i\}$, что $s(e_{i+1}) = r(e_i)$ и $s(e_i) \in V_i$. На множестве X всех бесконечных путей естественным образом вводится цилиндрическая топология. Борелевская мера на пространстве X называется центральной, если при фиксированном хвосте пути все его начала равновероятны, то есть, любые два цилиндрических множества, порождающие конечные пути которых заканчиваются в одной вершине, имеют равную меру.

Определим *адическое преобразование* T на пространстве путей X. Пусть $x = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый бесконечный путь. Найдём наименьшее такое n, что $\mathfrak{c}(e_i) = 0$. Определим путь $T(x) = \{u_i\}$ следующим образом. При $i \geqslant n+1$ выполнено $u_i = e_i$; $\mathfrak{c}(u_n) = 1$, и $\mathfrak{c}(u_i) = 0$ для всех $i < n$ (см. рис. 1). Относительно любой центральной меры μ преобразование T является автоморфизмом пространства (X, μ).

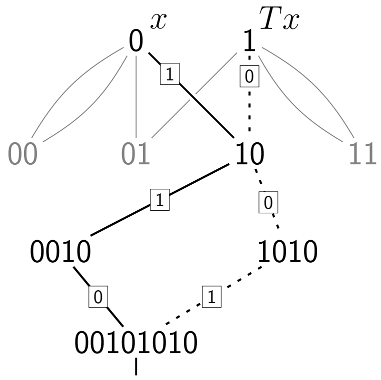

Рис. 1: Адическое преобразование

Зафиксируем некоторую последовательность $\sigma = \{\sigma_n\}$ состоящую из нулей и единиц. Построим соответствующую ей центральную меру μ^σ на пространстве X. Борелевская мера μ на пространстве X однозначно определяется согласованной системой мер μ_n на цилиндрических множествах, соответствующих конечным путям длины n. В терминах μ_n центральность меры μ означает, что для любого n мера μ_n зависит лишь от конца пути. Пусть X_n есть множество всех конечных путей длины n. Определим меру ν_n на V_n следующим образом:

$$\nu_n(v) = \sum_{\substack{x \in X_n, \\ r(x)=v}} \mu_n(x).$$

Согласованная система мер ν_n однозначно определяет центральную меру μ.

Построим последовательность множеств V_n^σ, где $V_n^\sigma \subset V_n$. Положим $V_0^\sigma = V_0$. При $n \geqslant 1$ если $\sigma_n = 1$ определим $V_n^\sigma = \{ab\colon a, b \in V_{n-1}^\sigma\}$; если $\sigma_n = 0$ положим $V_n^\sigma = \{aa\colon a \in V_{n-1}^\sigma\}$. Обозначим символом ν_n^σ равномерную меру на множестве $V_n^\sigma \subset V_n$. Построенная по этой системе мера μ^σ определена корректно и является центральной (см. [8]).

В работе [8] доказано, что, *относительно стандартного оснащения* группы $\mathbb{Z}$ отрезками, система (X, μ^σ, T) является стабильной, и последовательность $h_n = 2^{s^\sigma(\log n)}$, где $s^\sigma(t) = \sum_{i<t} \sigma_i$, является масштабирующей последовательностью этой системы. Также, для любой последовательности σ, содержащей бесконечное число единиц, преобразование T является эргодическим; его энтропия положительна в том и только том случае, когда в σ есть лишь конечное число нулей. Лемма 6 настоящей работы имеет дело с более сложной системой множеств, по которым производится усреднение. Однако, нам достаточно ограничиться оценками ε–энтропии снизу.

Пусть $x = \{e_i\} \in X$ — некоторый бесконечный путь. Символом $\mathfrak{b}_n(x)$ мы будем обозначать его вершину с номером n. А символом $\mathfrak{o}_n(x)$ обозначим величину $\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(e_i)2^i$. Легко видеть, что при $\mathfrak{o}_n(x) < 2^n - 1$ выполняется равенство $\mathfrak{b}_n(Tx) = \mathfrak{b}_n(x)$ и $\mathfrak{o}_n(Tx) = \mathfrak{o}_n(x) + 1$.

Итак, описание конструкции графа упорядоченных пар и адического преобразования на нем закончено. Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы 6.

9.2. Доказательство леммы 6

Мы будем строить последовательность σ, нули в которой встречаются очень редко. Позиции, на которых они находятся, мы будем определять индуктивно. Отметим, что для любой σ с бесконечным числом нулей метрическая энтропия адического преобразования равна нулю, поэтому правое неравенство (13) выполнено автоматически. Действительно, ведь последовательность, составленная из всех множеств S_n^i, удовлетворяет условию Фёльнера.

Левую часть неравенства (13) достаточно проверять на любой (не обязательно порождающей) полуметрике. Действительно, если оно выполнено для какой-то полуметрики, то выполнено и для любой порождающей. Пусть ρ есть разрезная полуметрика, соответствующая двуэлементному разбиению, различающему пути по первой вершине.

Можно считать, что все множества S_n^i состоят из положительных чисел. Предположим, что уже выбрано p чисел — $q_1, \dots, q_p$, и числа $n_1, \dots, n_p$, такие, что левая часть неравенства (13) выполнена при $j = 1, \dots, p$ для любой σ, имеющей среди первых q_p позиций ровно p нулей $q_1, \dots, q_p$. На первом шаге положим $p = 0$.

Для всякого $l > n_p$ найдём такое $n = n(l)$, что все множества $\{S_l^i\}_{i=1}^{k_l}$ лежат в интервале $\{0, \dots, 2^n - 1\}$. Пусть $N = N(l)$ достаточно велико (а именно, положим N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство (19)). Пусть $v \in V_N$ и $0 \leqslant k \leqslant 2^N - 1$. Символом v_k обозначим бит, находящийся в слове v в позиции k. Отметим, что равенство $\rho(x, y) = 0$ эквивалентно $\mathfrak{b}_N(x)_{\mathfrak{o}_N(x)} = \mathfrak{b}_N(y)_{\mathfrak{o}_N(y)}$. Таким образом,

$$T_{av}^{S_l^i}\rho(x,y) = \frac{1}{|S_l^i|}\sum_{j\in S_l^i}\rho(T^jx, T^jy) = \frac{1}{|S_l^i|}\bigl|\{j \in S_l^i \colon \mathfrak{b}_N(T^jx)_{\mathfrak{o}_N(T^jx)} \neq \mathfrak{b}_N(T^jy)_{\mathfrak{o}_N(T^jy)}\}\bigr|.$$

На множестве $A^{S_l^i} = \{0,1\}^{S_l^i}$ определим меру $\mu^\sigma_{S_l^i}$ следующим образом

$$\mu^\sigma_{S_l^i}(w) = \mu^\sigma(x \in X \colon \mathfrak{b}_N(T^jx)_{\mathfrak{o}_N(T^jx)} = w_j,\ j \in S_l^i).$$

Отображение

$$\Phi \colon x \mapsto \bigl(\mathfrak{b}_N(T^jx)_{\mathfrak{o}_N(T^jx)}\bigr)_{j\in S_l^i}$$

задаёт изоморфизм полуметрических троек $(X, \mu^\sigma, T_{av}^{S_l^i}\rho)$ и $(A^{S_l^i}, \mu^\sigma_{S_l^i}, \rho^H)$, где ρ^H есть метрика Хэмминга на $A^{S_l^i}$. Заметим, что при $\mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n$

$$\Phi(x) = \bigl(\mathfrak{b}_N(x)_{\mathfrak{o}_N(x)+j}\bigr)_{j\in S_l^i}.$$

В силу центральности меры μ^σ для любого $N > n$ выполнено

$$\mu^\sigma(x \in X \colon \mathfrak{o}_N(x) \geqslant 2^N - 2^n) = 2^{n-N}.$$

Следовательно, при фиксированном l мера $\mu^\sigma_{S_l^i}$ аппроксимируется поточечно при больших N одновременно для всех i мерой

$$\mu^\sigma_{S_l^i,N}(w) = \frac{1}{1-2^{n-N}}\mu^\sigma(x \colon \Phi(x) = w,\ \mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n) = \\ \frac{1}{1-2^{n-N}}\sum_{k=0}^{2^N-2^n-1}\nu_N^\sigma(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S_l^i). \quad (18)$$

Выбирая $N(l)$ так, чтобы $\mu^\sigma_{S^i_l,N} < 2\mu^\sigma_{S^i_l}$, получим оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l}, \rho^H) \geqslant \mathbb{H}_{2\varepsilon}(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N}, \rho^H). \tag{19}$$

Мы будем считать, что ещё не выбранное q_{p+1} будет больше N. Тогда, при k, отличающихся на 2^{q_p}, слагаемые в выражении (18) совпадают в силу конструкции меры ν^σ_N. Поэтому, при $n > q_p$

$$\mu^\sigma_{S^i_l,N}(w) = \frac{1}{2^{q_p}} \sum_{k=0}^{2^{q_p}-1} \nu^\sigma_N(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S^i_l).$$

Но ε–энтропия полуметрики относительно выпуклой комбинации мер не меньше, чем ε–энтропия этой полуметрики относительно какой-то из усредняемых мер. Поэтому, достаточно оценить снизу ε–энтропию $(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N,k}, \rho^H)$ при $k = 0, \ldots, 2^{q_p} - 1$, где

$$\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}(w) = \nu^\sigma_N(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S^i_l).$$

Относительно $\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}$ все координаты w разбиваются на группы равных, причём разные группы независимы. Действительно, мера ν_N на двоичных словах длины 2^N такова, а $\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}$ получается из неё проекцией на пространство, порождённое несколькими выбранными координатами.

При больших l все множества S^i_l являются $\frac{1}{l}$–инвариантными. Рассмотрим интервалы, составляющие некоторое S^i_l. Их количество не больше, чем $\frac{1}{l}|S^i_l|$. Число групп, пересекающихся с данным интервалом, но не лежащих в нем целиком, не превосходит 2^{q_p+1}, так как длина каждой группы не больше 2^{q_p}. Тогда суммарный размер таких групп не превосходит

$$\frac{2^{q_p+1}}{l}\left|S^i_l\right| < l^{-\frac{1}{2}}\left|S^i_l\right| \tag{20}$$

при достаточно большом l. Рассмотрим $\tilde{\rho}^H$ — метрику Хемминга на координатах, составляющих группы, лежащие целиком в S^i_l. При больших l выполнено неравенство

$$\tilde{\rho}^H(x,y) \leqslant \frac{1}{1 - l^{-\frac{1}{2}}}\rho^H(x,y) \leqslant 2\rho^H(x,y) \quad x, y \in A^{S^i_l}.$$

Тогда

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N,k}, \rho^H) \geqslant \mathbb{H}_{4\varepsilon}(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N,k}, \tilde{\rho}^H). \tag{21}$$

Правая часть формулы (21) есть 4ε–энтропия двоичного куба размерности хотя бы $|S^i_l|2^{-p-1}$, что, в свою очередь, не меньше

$$c(\varepsilon)\frac{|S^i_l|}{2^{p+1}} > \frac{|S^i_l|}{\phi(l)}. \tag{22}$$

Осталось только выбрать такое $l = n_{p+1}$, удовлетворяющее соотношению (22), и соответствующее ему N. После чего положим $q_{p+1} = N + 1$.

10. Доказательство леммы 7

Теперь приступим к доказательству последнего шага в доказательстве теоремы 6, а именно, леммы 7. Сначала построим для каждого пространства (X_i, μ_i) специальное разбиение следующим образом. Символом b_i обозначим величину $2^{\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i,\mu_i,\rho_i)}$. Так как полуметрика ρ_i допустима, то её ε^2-энтропия конечна. Рассмотрим соответствующее разбиение пространства X_i. Так как пространство стандартно, измельчим его до разбиения $Y_0, \dots, Y_r$, для которого $\mu(Y_0) < 2\varepsilon^2$, $\operatorname{diam}_\rho(Y_j) < \varepsilon^2$ при $j > 0$, и $\mu(Y_{j_1}) = \mu(Y_{j_2})$ для всех $j_1, j_2 > 0$.

Для любого измеримого подмножества $Z \subset X_i$, такого, что $\mu(Z) < 4\varepsilon$, в множестве $X_i \setminus Z$ существует 2ε–разделённое множество размера b_i. Рассмотрим $Z_0 = Y_0$ и выберем соответствующее 2ε–разделённое множество $\{p_1, \dots, p_{b_i}\}$ в разности $X_i \setminus Z_0$. Для каждого p_j найдём содержащее его множество Y_j и обозначим его $a^i_{1,j}$. Таким образом, получим набор $\{a^i_{1,j}\}_{j=1}^{b_i}$ дизъюнктных множеств. Символом A^i_1 обозначим объединение этого набора. Заметим, что для любых $x_i \in a^i_{1,j_1},\ y_i \in a^i_{1,j_2}$ таких, что $j_1 \neq j_2$, расстояние между x_i и y_i в силу неравенства треугольника не меньше, чем $2\varepsilon - 2\varepsilon^2 > \varepsilon$. Если $\mu(A^i_1) < \varepsilon$, выберем $Z_1 = Z_0 \cup A^i_1$ и выделим аналогичным способом множество A^i_2 в $X_i \setminus Z_1$, являющееся объединением подмножеств $a^i_{2,j},\ j = 1, \dots, b_i$. Повторяя данную процедуру пока это возможно, получим следующее разбиение пространства (X_i, μ_i):

$$X_i = \bigcup_{l=0}^{m_i} A^i_l,$$

где $\mu_i(A^i_0) \leqslant 1 - \varepsilon$, а каждое множество A^i_l при $l > 0$ допускает подразбиение

$$A^i_l = \bigcup_{j=1}^{b_i} a^i_{l,j},$$

такое, что для любых $x \in a^i_{l,j_1}$ и $y \in a^i_{l,j_2}$ расстояние в полуметрике ρ_i между x и y не меньше ε, и все множества $a^i_{l,j},\ l = 1, \dots, m_i,\ j = 1, \dots, b_i$, имеют равную меру.

Оценим снизу ε^4–энтропию пространства (X, μ, ρ). Пусть множество $E \subset X$ меры меньше ε^4 выбрано. Будем искать ε^4–разделённое множество в его дополнении. Для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_k) \in X$ определим последовательность $w = w(x) \in \prod_i \{1, \dots, m_i\}$ из k целых неотрицательных чисел $\{w_r\}_{r=1}^k$ следующим образом:

$$x_r \in A^r_{w_r} \text{ для } r = 1, \dots, k.$$

Зафиксируем такую последовательность w, что

$$\sum_{w_r \neq 0} s_r \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i=1}^k s_i. \tag{23}$$

Рассмотрим множество $S_w = \{x \in X \colon w(x) = w\}$. Ясно, что это множество представляется как следующее дизъюнктное объединение

$$S_w = \bigcup_{i_r=1,\ldots,b_r} a^1_{w_1,i_1} \times a^2_{w_2,i_2} \times \cdots \times a^k_{w_k,i_k}, \tag{24}$$

где объединение производится по тем индексам i_r для которых $w_r \neq 0$, а в качестве множителя соответствующего $w_r = 0$ выступает A^r_0. Отметим, что все множества в объедении имеют равную меру. Множества из объединения в правой части формулы (24) мы будем называть клетками, составляющими S_w. Для точки $x_i \in A^r_l$ обозначим символом $a^r_l(x_i)$ множество $a^r_{l,j}$, содержащее x_i.

Пусть $x, y \in S_w$, тогда

$$\rho(x,y) \geqslant \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{a^r_{w_r}(x_r) \neq a^r_{w_r}(y_r)\} \geqslant \frac{\varepsilon^3}{\sum\limits_{w_r \neq 0} s_r} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{a^r_{w_r}(x_r) \neq a^r_{w_r}(y_r)\}.$$

Предположим, что в множество E целиком попало менее половины клеток, составляющих S_w. Оценим снизу размер максимального ε^4–разделённого множества в $S_w \backslash E$. Для этого достаточно оценить сверху меру ε–шара на пространстве $\prod_{w_r \neq 0}\{1, \ldots, b_r\}$ с равномерной мерой и метрикой $\tilde{\rho}$, заданной следующим образом:

$$\tilde{\rho}(u,v) = \frac{1}{\sum\limits_{w_r \neq 0} s_r} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r \neq v_r\}.$$

Случайные величины u_r независимы и равномерно распределены на множествах $\{1, \ldots, b_r\}$. Тогда достаточно оценить вероятность

$$\mathbb{P}\left\{ \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r \neq 1\} \leqslant \varepsilon \sum_{w_r \neq 0} s_r \right\} = \mathbb{P}\left\{ \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r = 1\} \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{w_r \neq 0} s_r \right\} \leqslant$$
$$\mathbb{P}\left\{ \sum_{w_r \neq 0} \log b_r \mathbb{1}\{u_r = 1\} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\phi} \sum_{w_r \neq 0} s_r \right\} \leqslant e^{-\frac{(1-\varepsilon) \sum\limits_{w_r \neq 0} s_r}{\phi}} \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{w_r \neq 0} e^{\log b_r \mathbb{1}\{u_r = 1\}} \right). \tag{25}$$

Последний переход справедлив в силу экспоненциального неравенства Чебышева. Оценим первый множитель.

$$\exp\left(-\frac{(1-\varepsilon) \sum\limits_{w_r \neq 0} s_r}{\phi} \right) \leqslant \exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2 \sum\limits_{i=1}^{k} s_i}{\phi} \right) \leqslant$$
$$\exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2 \sum\limits_{i=1}^{k} \log b_i}{\phi} \right) = \left(\prod_{i=1}^{k} b_i \right)^{-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2}{\phi}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{k} b_i \right)^{-\frac{\varepsilon^3}{\phi}}. \tag{26}$$

Оценим второй множитель, пользуясь независимостью входящих в него случайных величин:

$$\prod_{w_r \neq 0} \mathbb{E}\big(b_r^{\mathbb{1}\{u_r=1\}}\big) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b_i}{b_i} + \frac{b_i - 1}{b_i}\right) \leqslant 2^k. \tag{27}$$

Итого, искомая вероятность не превосходит $\left(\prod_{i=1}^k b_i\right)^{-\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^k$. Следовательно, размер максимального ε^4–разделённого множества в $S_w \setminus E$ не меньше, чем $\frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^k b_i\right)^{\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^{-k}$. Таким образом,

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X, \mu, \rho) \geqslant \log\left(\left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right)^{\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^{-k-1}\right) = \frac{1}{\phi}\varepsilon^3 \sum_{i=1}^{k} \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i, \mu_i, \rho_i) - k - 1.$$

Стало быть, если утверждение леммы неверно, то множество E содержит целиком хотя бы половину клеток каждого множества S_w, при w, удовлетворяющей условию (23).

Оценим меру тех $x \in X$, для которых условие (23) не выполнено:

$$\mu\Big\{x \in X\colon \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbb{1}\{x_i \in A_0^i\} \geqslant (1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{k} s_i\Big\} \leqslant \\ \frac{\mathbb{E}\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbb{1}\{x_i \in A_0^i\}}{(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{k} s_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i \mu_i(A_0^i)}{(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{k} s_i} \leqslant \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

Следовательно, те $x \in X$, для которых условие (23) выполнено, составляют меру хотя бы $\frac{\varepsilon}{2}$. Стало быть, $\mu(E) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, что противоречит выбору множества E.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю, П. Б. Затицкому, за множество ценных обсуждений и незаменимую помощь, и А. М. Вершику за внимание к работе. Автор также благодарен В. В. Рыжикову, который привлек его внимание к вопросу об универсальной системе нулевой энтропии.

Список литературы

[1] А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика*, Математика 20-ого века: взгляд из Петербурга, МЦНМО, 47– 76, 2010.

[2] А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром*, Алгебра и анализ, 23:1, 111–135, 2011.

[3] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, *Универсальная адическая аппроксимация, инвариантные меры и масштабированная энтропия*, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4, 68–107, 2017.

[4] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, *Комбинаторные инварианты метрических фильтраций и автоморфизмов; универсальный адический граф*, Функц. анализ и его прил., 52:4, 23–37, 2018.

[5] Г. А. Вепрев, *Масштабированная энтропия нестабильных систем*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 498, 5–17, 2020.

[6] П. Б. Затицкий, *Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 432, 128–161, 2015.

[7] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *О субаддитивности масштабирующей энтропийной последовательности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 436, 167–173, 2015.

[8] П. Б. Затицкий, *О возможной скорости роста масштабирующей энтропийной последовательности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 436, 136–166, 2015.

[9] T. Downarowicz, J. Serafin, *Universal Systems for Entropy Intervals*, J. Dyn. Diff. Equat. 29, 1411–1422, 2017.

[10] S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel Journal of Mathematics 100, 187–207, 1997.

[11] A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations*, Annales de Institut Henri Poincare 33, 323–338, 1997.

[12] D. Kerr, H. Li, *Ergodic Theory: Independence and Dichotomies*, Springer, 2017.

[13] W. Krieger, *On entropy and generators of measure-preserving transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 149, 453–464, 1970.

[14] J. Serafin, *Non-existence of a universal zero-entropy system*, Israel Journal of Mathematics 194, no. 1, 349–358, 2013.

[15] B. Seward. *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups I*, Invent. math. 215, 265–310, 2019.

[16] O. Shilon, B. Weiss, *Universal minimal topological dynamical systems*, Israel Journal of Mathematics 160, 119–141, 2007.

[17] G. Veprev, *Non-existence of a universal zero entropy system for non-periodic amenable group actions*, `https://arxiv.org/abs/2010.09806`.

[18] A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants*, Markov Processes and Related Fields, 16:1, 169–185, 2010.

[19] A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces*, Central European Journal of Mathematics, 11 (3), 379–400, 2013.

[20] B. Weiss, *Countable generators in dynamics-universal minimal models*, Contemp. Math. 94, 321–326, 1989.