Санкт-Петербургский государственный университет

ПРИЕЗЖЕВ Василий Андреевич

Выпускная квалификационная работа

Вероятностное отслеживание для убывающих погрешностей с переменной скоростью

Уровень образования:
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
Профессор факультета МКН,
Доктор физико-математических наук,
Сергей Борисович Тихомиров

Рецензент:
Доцент кафедры теории вероятностей и
математической статистики СПбГУ,
Доктор физико-математических наук,
Сергей Геннадьевич Крыжевич

Санкт-Петербург
2021

1 Постановка задачи

Пусть $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Наделим Σ стандартной вероятностной мерой ν и следующей метрикой

$$\operatorname{dist}(\{\omega^i\}, \{\tilde{\omega}^i\}) = \frac{1}{2^k}, \quad \textit{где } k = \min\{|i| : \omega^i \neq \tilde{\omega}^i\}.$$

Для последовательности $\omega = \{\omega^i\} \in \Sigma$ обозначим за $t(\omega)$ 0-ой элемент последовательсти: $t(\omega) = \omega^0$. Определим "сдвиг" как

$$(\sigma(\omega))^i = \omega^{i+1}.$$

Рассмотрим пространство $Q = \Sigma \times \mathbb{R}$. Наделим Q мерой произведения $\mu = \nu \times \text{Leb}$ и метрикой:

$$\operatorname{dist}((\omega, x), (\tilde{\omega}, \tilde{x})) = \max(\operatorname{dist}(\omega, \tilde{\omega}), \operatorname{dist}(x, \tilde{x})).$$

Для $q \in Q$ и $a > 0$ обозначим за $B(a, q)$ открытый шар радиуса a с центром в q.

Зафиксируем $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$0 < \lambda_0 < 1 < \lambda_1, \quad \lambda_0\lambda_1 > 1. \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $f \colon Q \to Q$, определённое следующим образом:

$$f(\omega, x) = (\sigma(\omega), \lambda_{t(\omega)} x).$$

Определение 1. Для интервала $I = (a, b) \cap \mathbb{Z}$, где $a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ последовательность точек $\{y_k\}_{k \in I}$ называется d_k-псевдотраекторией, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(y_{k+1}, f(y_k)) < d_{k+1}, \ \ k \in \mathbb{Z}, \ \ k, k+1 \in \text{I}.$$

Определение 2. Отображение f обладает свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$ такое, что для любой d-псевдотраектрории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что

$$\operatorname{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 3. Пусть даны отображение f, убывающие положительные последовательности $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Мы говорим, что d_n-псевдотраектория $\{y_n\}$ является ε_n-отслеживаемой, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon_k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

для некоторой траектории $\{x_k\}$.

Определение 4. Отображение f обладает свойством Липшицева отслеживания, если существуют константы $\varepsilon_0, \ L_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с $d = \varepsilon / L_0$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что неравенство (2) выполнено.

Заметим, что определения 1, 2, 4 являются классическими определениями теории отслеживания [1]. Определение 3 является более специальным.

Лемма 1. *Если* $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}}$, *где* $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 2$ *или* $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}} \le \alpha_2 e^{\theta_2}$, *где* $1 \le \alpha_1 e^{\theta_1} \le \alpha_2 e^{\theta_2} \le 2$, *то* d_n- *псевдотраектория сдвига Бернулли является* d_n- *отслеживаемой.*

Доказательство. Пусть $\omega, \omega' \in \Sigma$. Для того, чтобы выполнялось неравенство $\mathrm{dist}(\omega, \omega') < d_n$, необходимо и достаточно, чтобы элементы этих последовательностей с номерами $-[\log \frac{1}{d_n}], ..., [\log \frac{1}{d_n}]$ совпадали ($[x]$ обозначает целую часть числа x, $\log$ обозначает логарифм по основанию 2).

По данной d_n-псевдотраектории $\{\omega_n\}$ построим траекторию $\{x_n\}$, которая d_n отслеживает данную псевдотраекторию.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}}$, где $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 2$.

На каждом шаге n будем определять элементы x_{n+1} с номерами $-[\log \frac{1}{d_{n+1}}]$, ..., $[\log \frac{1}{d_{n+1}}]$ равными соответствующим элементам ω_{n+1} .

Т.к. $x_{n+1} = \sigma(x_n)$, то нужно проверить, что при определении элементов для x_{n+1} уже определённые элементы для x_n останутся теми же.

Т.к. $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 2$, то это означает, что элементы с номерами $-[\log \frac{1}{d_n}], ..., [\log \frac{1}{d_n}]$ у последовательности ω_n должны совпадать с элементами с номерами $-[\log \frac{1}{d_n}] - 1, ..., [\log \frac{1}{d_n}] - 1$ у последовательности ω_{n+1}.

Т.к. $\mathrm{dist}(\sigma(\omega_n), \omega_{n+1}) < d_{n+1}$, то $\sigma(\omega_n)$ совпадает с ω_{n+1} на элементах с номерами от $-[\log \frac{1}{d_{n+1}}]$ до $[\log \frac{1}{d_{n+1}}]$.

Из неравенств $[\log \frac{d_n}{d_{n+1}}] \ge [\log(\alpha_1 e^{\theta_1})] \ge 1$ следует слеующее включение интервалов: $\left(\left[-[\log \frac{1}{d_n}] - 1, [\log \frac{1}{d_n}] - 1\right] \cap \mathbb{Z}\right) \subset \left(\left[-[\log \frac{1}{d_{n+1}}], [\log \frac{1}{d_{n+1}}]\right] \cap \mathbb{Z}\right)$.

Значит, элементы с номерами от $-[\log \frac{1}{d_n}]$ до $[\log \frac{1}{d_n}]$ у последовательности ω_n совпадают с элементами с номерами от $-[\log \frac{1}{d_n}] - 1$ до $[\log \frac{1}{d_n}] - 1$ у последовательности ω_{n+1}.

Таким образом, задание членов точной последовательности корректно.

Также из построения следует, что выполняется: $\mathrm{dist}(\omega_k, x_k) < d_k$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha_1 e^{\theta_1} \le \frac{d_k}{d_{k+1}} \le \alpha_2 e^{\theta_2}$, где $1 \le \alpha_1 e^{\theta_1} \le \le \alpha_2 e^{\theta_2} \le 2$.

Определим элементы x_0 с номерами $-[\log \frac{1}{d_0}], ..., [\log \frac{1}{d_0}]$ равными соответствующим элементам ω_0. Тогда верно, что $\mathrm{dist}(x_0, \omega_0) < d_0$. Будем определять теперь x_n следующим образом: пусть для x_{n-1} верно, что $\mathrm{dist}(x_{n-1}, \omega_{n-1}) < d_{n-1}$, и элементы x_{n-1} с номерами $[\log \frac{1}{d_{n-1}}] + 1, ...$ не были прежде определены. Т.к. $x_n = \sigma(x_{n-1})$, то элементы x_n с номерами $[\log \frac{1}{d_{n-1}}], ...$ не определены. Тогда для x_n определим элемент с номером $[\log \frac{1}{d_{n-1}}]$ и, если $[\log(\frac{1}{d_n})] - [\log(\frac{1}{d_n-1})] \ge 1$, то определим также элемент с номером $[\log \frac{1}{d_n}]$ равными соответствующим элементам ω_n. Поскольку $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 1$, то для x_n будет тоже верно, что элементы x_n с номерами $[\log \frac{1}{d_n}] + 1, ...$ не определены. При этом т.к.

$$\mathrm{dist}(x_{n-1}, \omega_{n-1}) < d_{n-1}, \quad x_n = \sigma(x_{n-1}), \quad \alpha_2 e^{\theta_2} \le 2,$$

то элементы x_n с номерами $-[\log\frac{1}{d_n}], ..., [\log\frac{1}{d_{n-1}}]-1$ совпадают с соответствующими элементами ω_n. А равенство элементов с номерам $[\log\frac{1}{d_{n-1}}]$ и, если $[\log(\frac{1}{d_n})]-[\log(\frac{1}{d_n-1})]\geq 1$, то также с номером $[\log\frac{1}{d_n}]$ выполняется из построения x_n. То есть получили, что $\operatorname{dist}(x_n,\omega_n)<d_n$, что завершает доказательство леммы.

$\square$

Для $q\in Q, N\in\mathbb{N}$, последовательности $\{d_n\}$, такой что $d_n\ >\ 0$, обозначим за $\Omega_{q,d_n,N}$ множество d_n-псевдотраекторий длины N, начинающихся в $q_0=q$. Если мы рассматриваем q_{k+1} как случайную точку в $B(d_{k+1}, f(q_k))$, выбранную равномерно по отношению к мере μ, то $\Omega_{q,d_n,N}$ образует конечную Марковскую цепь. Это наделяет $\Omega_{q,d_n,N}$ вероятностной мерой P.

Для последовательности $\{\varepsilon_n\}$, такой что $\varepsilon_n>0$, обозначим за $p(q,d_n,N,\varepsilon_n)$ вероятность того, что псевдотраектория из $\Omega_{q,d_n,N}$ является ε_n- отслеживаемой. Заметим, что это событие измеримо, так как оно образует открытое подмножество в $\Omega_{q,d_n,N}$.

Лемма 2. *Пусть* $q=(\omega,x),\tilde{q}=(\omega,0)$. *Тогда для последовательностей* $\{d_n\},\{\varepsilon_n\}$, *таких что* $d_n,\varepsilon_n>0$, *выполнено следующее:*

$$p(q,d_n,N,\varepsilon_n)=p(\tilde{q},d_n,N,\varepsilon_n).$$

Доказательство. Рассмотрим $\{q_k=(\omega_k,x_k)\}\in\Omega_{q,d_n,N}$. Положим

$$r_k:=x_{k+1}-\lambda_{t(\omega_k)}x_k.$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{q}_k=(\omega_k,\tilde{x}_k)\}$, где

$$\tilde{x}_0=0,\quad \tilde{x}_{k+1}=\lambda_{t(\omega_k)}\tilde{x}_k+r_k.$$

Тогда выполнено следующее:

1. Соответствие $\{q_k\}\leftrightarrow\{\tilde{q}_k\}$ между пространствами $\Omega_{q,d_n,N}$ и $\Omega_{(\omega,0),d_n,N}$ взаимооднозначно и сохраняет меру.

2. Для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ d_n- псевдотраектория ε_n-отслеживаема траекторией точки (ω,x) тогда и только тогда, когда $\{\tilde{q}_k\}$ ε_n-отслеживаема траекторией точки $(\omega,x-x_0)$.

Эти предложения завершают доказательство леммы. $\square$

Для $N\in\mathbb{N}$, последовательностей $\{d_n\},\{\varepsilon_n\}$, таких что $d_n,\varepsilon_n\ >\ 0$, определим

$$p(d_n,N,\varepsilon_n)=\int_{\omega\in\Sigma}p((\omega,0),d_n,N,\varepsilon_n)d\nu.$$

Заметим, что интеграл существует, так как для фиксированных $\{d_n\},\{\varepsilon_n\},N$ значение $p((\omega,0),d_n,N,\varepsilon_n)$ зависит только от конечного числа вхождений ω. При этом $p(d_n,N,\varepsilon_n)$ может быть интерпретировано как вероятность того, что d_n-псевдотраектория длины N является ε_n-отслеживаемой.

В работе Сергея Борисовича Тихомирова [2] была доказана следующая теорема:

Теорема 1 (С.Б.Тихомиров). *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_0 < \infty$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$, выполняется:*

1. *если $c < c_0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 0$;*
2. *если $c > c_0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} p(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 1$.*

Пусть теперь дана последовательность $\{d_n\}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

Условие 1.

$$\exists \theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 : 0 < \theta_1 < \theta_2 < |\ln \lambda_0|,\ \forall M\ \forall k : \alpha_1 e^{\theta_1 M} \le \frac{d_k}{d_{k+M}} \le \alpha_2 e^{\theta_2 M};$$

При этом верно одно из двух: либо $\alpha_1 e^{\theta_1} \ge 2$, либо $1 \le \alpha_1 e^{\theta_1} \le \alpha_2 e^{\theta_2} \le 2$.

Условие 2.

$$\liminf_{N\to\infty} \left(\max_{\substack{\beta \ln N \le j \le \ln^2 N \\ 0 \le s \le N - \ln^2 N}} \frac{1}{j} \ln \frac{d_s}{d_{s+j}} \right) = \theta_1, \quad \limsup_{N\to\infty} \left(\min_{\substack{\beta \ln N \le s \le N \\ 0 < j \le N - s}} \frac{1}{j} \ln \frac{d_s}{d_{s+j}} \right) = \theta_2,$$

где $\beta-$ единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\ln\lambda_0 + \theta_2}{\ln\lambda_0 + \theta_1}\frac{1}{\beta}} + e^{\frac{\ln\lambda_1 + \theta_2}{\ln\lambda_0 + \theta_1}\frac{1}{\beta}} \right) = 1.$$

Если обозначить $a_0 = \ln\lambda_0, a_1 = \ln\lambda_1$ и $b'-$ единственный положительный корень уравнения:

$$\frac{1}{2}\left(e^{-b'(a_0+\theta_2)} + e^{-b'(a_1+\theta_2)} \right) = 1,$$

то β можно записать так: $\beta = -\frac{1}{b'(a_0+\theta_1)}$.

В работе Приезжева Петра [3] доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), и любой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условию 1, существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c' \le c'' < \infty$, такие, что для всех $L > 0$, где $Ld_n < \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено:*

1. *если $c < c'$, то $\lim_{N\to\infty} p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;*
2. *если $c > c''$, то $\lim_{N\to\infty} p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.*

В данной работе мы докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению (1), и любой последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей условиям 1,2, верно, что для всех c таких, что $0 < c' < c < c'' < \infty$ и для всех $L > 0$, где $Ld_n < \varepsilon_0$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется следующее:*

1. $\liminf_{N\to\infty} p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;
2. $\limsup_{N\to\infty} p(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Перед тем как доказывать теорему, приведём пример последовательности, удовлетворяющей условиям 1,2.

2 Пример

Разобьём $\mathbb{N}$ на конечные отрезки так, чтобы для n- ого отрезка $[a, b]$ было верно $b \geq e^{an}$. Зададим последовательность следующим образом:

$$\frac{1}{d_0} = 1, \quad \frac{1}{d_k} = \begin{cases} e^{\theta_1} \frac{1}{d_{k-1}}, & \text{при } k, \text{ принадлежащим промежутку с чётным номером} \\ e^{\theta_2} \frac{1}{d_{k-1}}, & \text{при } k, \text{ принадлежащим промежутку с нечётным номером.} \end{cases}$$

Покажем, что

$$e^{\theta_1 M} \leq \frac{d_k}{d_{k+M}} \leq e^{\theta_2 M}.$$

Действительно, $\frac{1}{d_{k+M}} = e^{\theta_{i_1}} \cdot ... \cdot e^{\theta_{i_M}} \frac{1}{d_k}$, где $\theta_1 \leq \theta_{i_j} \leq \theta_2$. Значит

$$M\theta_1 \leq \ln \frac{d_k}{d_{k+M}} = \theta_{i_1} + ... + \theta_{i_M} \leq M\theta_2.$$

При этом

$$\frac{d_k}{d_{k'}} = \begin{cases} e^{\theta_1(k'-k)} & \text{при } k, k', \text{ принадлежащих одному и тому же промежутку с чётным номером,} \\ e^{\theta_2(k'-k)} & \text{при } k, k', \text{ принадлежащих одному и тому же промежутку с нечётным номером.} \end{cases}$$

Лемма 3. *Пример удовлетворяет условию 2.*

Доказательство. Докажем утверждение для $\liminf$. Для $\limsup$ доказывается аналогично. Для этого покажем , что для любого $\theta : \theta_1 < \theta < \theta_2$ существует бесконечно много N таких, что выполнено следующее:

$$\max_{\substack{\beta \ln N \leq i \leq \ln^2 N \\ 0 \leq k \leq N - \ln^2 N}} \frac{1}{i} \ln \frac{d_k}{d_{k+i}} < \theta. \tag{3}$$

В качестве N будем брать такие b, что $F = [a, b]-$ чётный отрезок разбиения из примера и $b > \exp\left(\frac{1}{\beta}(\frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} + 1)a\right)$.

Из конструкции примера имеем $\ln \frac{d_k}{d_{k+i}} = l\theta_2 + m\theta_1$, где $l + m = i$. Чтобы выполнялось (3), хотим:

$$l\theta_2 + m\theta_1 < (l+m)\theta.$$

Получаем условие на m :

$$m > \frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} l.$$

Заметим, что l и m зависят от i и от k. Далее для i из промежутка F из конструкции примера выполняется равенство $\frac{1}{d_i} = e^{\theta_1} \frac{1}{d_{i-1}}$ и, следовательно, неравенство $l \leq a$. Заметим, что это неравенство выполняется независимо от $k : 0 \leq k \leq N - \ln^2 N$, при условии, что для $\tau : \beta \ln N \leq \tau \leq N$ верно $\tau \in F$. Тогда из последнего замечания и условия на m для выполнения соотношения (3) на промежутке F достаточно, чтобы

$$b - a > \frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} a + (b - \beta \ln b).$$

А это равносильно следующему неравенству:

$$b > \exp\left(\frac{1}{\beta}(\frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} + 1)a\right),$$

что верно для отрезка F.

□

3 Эквивалентная формулировка

Пусть $a_0 = \ln \lambda_0$, $a_1 = \ln \lambda_1$.

Рассмотрим следующее распределение:

$$\gamma = \begin{cases} a_0, & \text{с вероятностью } 1/2 \\ a_1, & \text{с вероятностью } 1/2 \end{cases}$$

Зафиксирум $N > 0$. Рассмотрим случайное блуждание $\{A_i\}_{i \in [0,\infty)}$, порождённое γ и независимые равномерно распределённые на отрезке $[-1;1]$ величины $\{r_i\}_{i \in [0,\infty)}$. Определим последовательность $\{z_i\}_{i \in [0,\infty)}$ следующим образом:

$$z_0 = 0, \quad z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1} \cdot d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}. \tag{4}$$

Для данных $(\{A_i\}_{i \in [0,N)}, \{r_i\}_{i \in [0,N)})$ определим:

$$B(k,n) := \frac{e^{A_n + A_k} |z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}, \quad 0 \leq k < n \leq N,$$

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) := \max_{0 \leq k < n \leq N} B(k,n),$$

$$s(N,L) := P(K(\{A_i\}_{i \in [0,N]}, \{r_i\}_{i \in [0,N]}) < L).$$

Лемма 4. *Существуют* $\varepsilon_0 > 0$, $L_0 > 0$ *такие, что, если последовательность* $\{d_n\}$ *удовлетворяет условию (1),* $L > L_0$, $N \in \mathbb{N}$, $Ld_n < \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *то выполнено следующее равенство:*

$$p(d_n, N, Ld_n) = s(N, L).$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0, L_0 > 0$ такие, что, если $\operatorname{dist}(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon_0$, то $t(\omega) = t(\tilde{\omega})$ и, если $\{d_n\}$ удовлетворяет условию 1, то при отображении σ для любой d_n-псевдотраектории при $L > L_0$, $Ld_n < \varepsilon_0$ существует траектория, которая Ld_n-отслеживает данную псевдотраекторию.

Зафиксируем последовательность $\{d_n\}$, $N \in \mathbb{N}$, $L > L_0$, такие, что $Ld_n < \varepsilon_0$ и d_n удовлетворяет условию 1.

Выберем ω произвольным образом по отношению к мере ν и псевдотраекторию $\{q_k\} = \{(\omega_k, x_k)\} \in \Omega_{(\omega,0),d_n,N}$ по отношению к мере P.

Введём последовательности:

$$\gamma_k = a_{t(\omega_k)}, \quad A_k = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i, \quad r_k = (x_k - \lambda_{t(\omega_{k-1})} x_{k-1})/d_k.$$

Заметим, что все r_k независимы и одинаково распределены в $[-1, 1]$ и γ_k независимы и одинаково распределены в соответствии с γ.

Докажем, что $\{q_k\}$ является Ld_n – отслеживаемой тогда и только тогда, когда выполняется:

$$L \geq K(\{A_i\}, \{r_i\}). \tag{5}$$

Предположим, что псевдотраектория (ω_k, x_k) Ld_n–отслеживаема траекторией (ξ_k, y_k). По выбору ε_0 верно:

$$t(\omega_k) = t(\xi_k). \tag{6}$$

Заметим, что

$$y_{k+1} = \lambda_{t(\xi_k)} y_k = e^{\gamma_k} y_k, \quad y_n = e^{A_n - A_k} y_k, \tag{7}$$

$$x_n = e^{A_n - A_k} x_k + e^{A_n}(z_n - z_k),$$

где z_k определены по (4). Следовательно,

$$y_n - x_n = e^{A_n - A_k}(y_k - x_k) - e^{A_n}(z_n - z_k)$$

.

Домножим обе части на $\frac{e^{A_k}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}$

Тогда получится:

$$\frac{e^{A_n + A_k}(z_n - z_k)}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{d_k e^{A_n}}{d_k e^{A_n} + d_n e^{A_k}} \frac{y_k - x_k}{d_k} - \frac{d_n e^{A_k}}{d_k e^{A_n} + d_n e^{A_k}} \frac{y_n - x_n}{d_n}$$

Из этого равенства легко видеть, что

$$\max\left(\frac{|y_k - x_k|}{d_k}, \frac{|y_n - x_n|}{d_n}\right) \geq B(k, n),$$

и равенство достигается, если $\frac{y_k-x_k}{d_k} = -\frac{y_n-x_n}{d_n}$. Следовательно, неравенство (5) выполняется.

Теперь предположим, что (5) выполняется. Докажем, что тогда (ω_k, x_k) может быть Ld_n-отслеживаема. Выберем траекторию ξ_k, которая Ld_n - отслеживает $\{\omega_k\}$. Тогда равенство (6) выполняется.

Для $y_0 \in \mathbb{R}$ определим y_k по соотношению (7) и зададим функцию $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом

$$F(y_0) = \max_{0 \le k \le N} \frac{|y_k - x_k|}{d_k}.$$

Так как функция F непрерывна, то она достигает минимума для некоторй точки y_0. Обозначим $L' := \min_{y_0 \in \mathbb{R}} F(y_0)$ и пусть y_0 такая точка, что $L' = F(y_0)$. Пусть $D = \{k \in [0, N] : \frac{|y_k-x_k|}{d_k} = F(y_0)\}$. Тогда возможны следующие два случая:

Случай 1.

Для всех $k \in D$ значения $\frac{y_k-x_k}{d_k}$ имеют один и тот же знак. Без потери общности, мы считаем, что все эти значения положительные. Тогда для достаточно маленького $\delta > 0$ неравенство $F(y_0 - \delta) < F(y_0)$ выполняется, что противоречит выбору y_0.

Случай 2.

Существуют $k, n \in D$ такие, что значения $\frac{y_k-x_k}{d_k}$ и $\frac{y_n-x_n}{d_n}$ имеют противоположные знаки. Тогда $\frac{y_k-x_k}{d_k} = -\frac{y_n-x_n}{d_n}$ и, следовательно, $L' = B(k, n) \le K(\{A_i\}, \{z_i\})$. □

В дальнейшем мы считаем, что $\lambda_0 \lambda_1 > 1$.

Обозначим $v := E(\gamma) = (a_0 + a_1)/2 > 0$ и $\omega := v/2$.

Мы будем пользоваться следующими двумя фактами:

Лемма 5. *(Large Deviation Principle, [4, Section 3]).*

Существует возрастающая функция $h : (0; \infty) \to (0; \infty)$ такая, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и для достаточно большого n, выполняются следующие неравенства:

$P(\frac{A_n}{n} - E(\gamma) < -\varepsilon) < e^{-(h(\varepsilon)-\delta)n}$,

$P(\frac{A_n}{n} - E(\gamma) < -\varepsilon) > e^{-(h(\varepsilon)+\delta)n}$.

Лемма 6. *(Ruin Problem, [5, Chapter XII, §4,5]).*

Пусть b единственный положительный корень уравнения:

$$\frac{1}{2}(e^{-ba_0} + e^{-ba_1}) = 1.$$

Тогда для любых $\delta > 0$ и для достаточно больших $C > 0$, выполняются следующие неравенства:

$$P(\exists i \ge 0 : A_i \le -C) \le e^{-C(b-\delta)},$$

$$P(\exists i \ge 0 : A_i \le -C) \ge e^{-C(b+\delta)}.$$

4 Доказательство теорем.

Согласно лемме 4 теоремы 2 и 3 переписываются как теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Пусть $\{d_k\}$ удовлетворяет условию 1.*
Пусть $a_0 + \theta_2 < 0$.
Пусть b'– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b'(a_0+\theta_2)} + e^{-b'(a_1+\theta_2)}) = 1.$$

Пусть b''– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b''(a_0+\theta_1)} + e^{-b''(a_1+\theta_1)}) = 1.$$

Тогда:
(S1') если $c < 1/b'$, то $\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0$,
(S2') если $c > 1/b''$, то $\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1$.

Теорема 5. *Пусть $\{d_k\}$ удовлетворяет условиям 1 и 2.*
Пусть $\frac{1}{b'} < c < \frac{1}{b''}$. Тогда:
(S1") $\liminf s(N, N^c) = 0$,
(S2") $\limsup s(N, N^c) = 1$.

Доказательство. (Доказательство (S1")) Возьмём θ такое, что выполняются следующие два условия:
1)$\theta_1 < \theta < \theta_2$,
2)$\frac{1}{b} > c$, где b– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b(a_0+\theta)} + e^{-b(a_1+\theta)}) = 1.$$

Такое θ существует из условия, что $\frac{1}{b'} < c < \frac{1}{b''}$.
Обозначим $v := E(\gamma) = (a_0 + \theta + a_1 + \theta)/2 > 0$ и $\omega := v/2$.
Выберем $c_1 \in (c, \frac{1}{b})$ и $\delta > 0$ такие, что

$$c_1(b + \delta) < 1. \tag{8}$$

Возьмём $M = \ln^2 N$. Будем рассматривать N такие, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{d_k}{d_{k+i}} \le e^{\theta i}, \text{ при } \frac{-c_1 \ln N}{a_0 + \theta} \le i \le \ln^2 N, \quad 0 \le k \le N - \ln^2 N. \tag{9}$$

Такие N существуют по следующей причине:
Так как

$$\liminf_{N\to\infty} \left(\max_{\substack{\beta \ln N \le i \le \ln^2 N \\ 0 \le k \le N - \ln^2 N}} \frac{1}{i} \ln \frac{d_k}{d_{k+i}} \right) = \theta_1 \text{ для } \beta = -\frac{1}{b'(a_0 + \theta_1)},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N_0 > 0$ существует $N > N_0$ такое, что

$$\max_{\substack{\beta \ln N \le i \le \ln^2 N \\ 0 \le k \le N - \ln^2 N}} \frac{1}{i} \ln \frac{d_k}{d_{k+i}} < \theta_1 + \varepsilon.$$

Поэтому, так как $\beta = -\frac{1}{b'(a_0+\theta_1)} < -\frac{c_1}{a_0+\theta}$, и если взять $\varepsilon < \theta - \theta_1$, то верно:

$$\max_{\substack{-\frac{c_1}{a_0+\theta} \ln N \le i \le \ln^2 N \\ 0 \le k \le N - \ln^2 N}} \frac{1}{i} \ln \frac{d_k}{d_{k+i}} < \theta_1 + \varepsilon < \theta,$$

что равносильно (9).

Рассмотрим следующие события:

$$I = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta \le -c_1 \ln N; \text{ и } A_{2M} + 2M\theta \ge 0\}$$

$$I_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta \le -c_1 \ln N\}$$

$$I_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta \le -\omega M\}$$

$$I_3 = \{A_{2M} - A_M + M\theta \le \omega M\}$$

Предложение 1. Верно следующее:

$$I_1 \subset I \cup I_2 \cup I_3.$$

Доказательство. Пусть совершилось событие I_1. Предположим, что события I и I_3 не совершились. Тогда

$$A_{2M} + 2M\theta < 0 \text{ и } A_{2M} - A_M + M\theta > \omega M.$$

Откуда

$$A_M + M\theta < -\omega M.$$

Следовательно, совершилось событие I_2. □

Из предложения 1 следует, что

$$P(I) \ge P(I_1) - P(I_2) - P(I_3). \tag{10}$$

Оценим вероятности событий I_1, I_2, I_3 :

Используя Ruin Problem и Large deviation principle, получим:

$$P(I_1) \ge P(\exists i \ge 0 : A_i + i\theta \le -c_1 \ln N) - P(\exists i > M : A_i + i\theta \le -c_1 \ln N) \ge$$

$$\ge e^{-c_1 \ln N (b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} P(A_i + i\theta \le 0) \quad \ge N^{-c_1(b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} e^{-ih(v)}$$

$$\geq N^{-c_1(b+\delta)} - \frac{1}{1-e^{-h(v)}} e^{-(M+1)h(v)} \geq N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \qquad (11)$$

Из Ruin problem получаем:

$$P(I_2) \leq P(\exists i \geq 0 : A_i + i\theta \leq -\omega M) \leq e^{-M\omega(b-\delta)} = o(N^{-2}), \qquad (12)$$

Из Large deviation principle следует:

$$P(I_3) \leq e^{-M(h(\omega)-\delta)} = o(N^{-2}) \qquad (13)$$

Из неравенств (10)- (13) получается:

$$P(I) \geq N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}) \qquad (14)$$

Теперь предположим, что событие I совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству: $A_i + i\theta < -c_1 \ln N$. Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы $i > \frac{-c_1 \ln N}{a_0+\theta}$ (так как длина шага вниз случайного блуждания A_i равна $|a_0 + \theta|$). Тогда из соотношения 9 верно, что

$$\frac{1}{d_i} < e^{\theta i}.$$

Далее заметим, что из соотношения (4) следует, что следующие события независимы:

$$J_1 = \{r_i \in [1/2; 1]\}, \qquad J_2 = \{z_{2M} - z_0 \geq \frac{r_i d_i}{e^{A_i}}\}$$

Так как $\frac{1}{d_i} < e^{\theta i}$ и события J_1, J_2 независимы, получаем, что

$$P(z_{2M} - z_0 \geq \frac{1}{2e^{A_i+i\theta}}) \geq P(z_{2M} - z_0 \geq \frac{r_i d_i}{e^{A_i}}) \geq$$
$$\geq P(J_1)P(J_2) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8.$$

Т.к. $B(0, 2M) = \frac{e^{A_{2M}}|z_{2M}-z_0|}{d_{2M}+e^{A_{2M}}}$ и при достаточно больших M выполняется неравенство $\frac{e^{A_{2M}}}{d_{2M}+e^{A_{2M}}} \geq \frac{1}{2}$, то

$$P(B(0; 2M) > \frac{N^{c_1}}{4}) \geq \frac{1}{8} P(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется: $N^c < \frac{N^{c_1}}{4}$, и следовательно:

$$P(B(0, 2M) > N^c) \geq \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Для любого $k \in [0, N - 2M]$ аналогично выполняется:

$$P(B(k, k + 2M) > N^c) \geq \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что события в выражении

$$P(B(k,k+2M) > N^c) \geq \frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})$$

для

$$k = 0, 2M, 2\cdot 2M, ..., ([N/(2M)]-1)\cdot 2M$$

независимы, и следовательно:

$$P(\exists k \in [0, N-2M] : B(k,k+2M) > N^c) \geq$$

$$\geq 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)\right)^{[N/(2M)]}. \quad (15)$$

Используя (8), мы получаем:
$\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)[N/(2M)] \geq \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)\left(\frac{N}{2(\ln^2 N)} - 1\right)$

$$= \frac{1}{16\ln^2 N}N^{1-c_1(b+\delta)} + o(1) \longrightarrow \infty.$$

и следовательно:

$$\left(1 - \left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)} + o(1)\right)\right)^{[N/(2M)]} \longrightarrow 0. \quad (16)$$

Из (15), (16) получаем:

$$P(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]}, \{r_i\}_{i\in[0,N]}) > N^c) \longrightarrow 1.$$

Следовательно,

$$\liminf_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0.$$

□

Доказательство. (Доказательство $S2''$)
Возьмём θ такое, что выполняются следующие два условия:
1)$\theta_1 < \theta < \theta_2$,
2)$\frac{1}{b} < c$, где $b-$ единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b(a_0+\theta)} + e^{-b(a_1+\theta)}) = 1.$$

Такое θ существует из условия, что $\frac{1}{b'} < c < \frac{1}{b''}$.
Обозначим $v := E(\gamma) = (a_0 + \theta + a_1 + \theta)/2 > 0$ и $\omega := v/2$.
Выберем $c_1 \in (\frac{1}{b}, c)$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие неравенству

$$c_1(b-\delta) > 1.$$

Возьмём $M = \ln^2 N$.

Согласно (4) последовательность $\{z_i\}$ определяется по $z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1}d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}$. Тогда для $n > k$ выполняется:

$$e^{A_k}|z_n - z_k| \le \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i$$

и

$$\frac{e^{A_n}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{1}{d_k} \cdot \frac{e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}}{e^{A_k} + e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}} \le \frac{1}{d_k}.$$

Значит, $\forall k, n:$

$B(k,n) = \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} \le \frac{1}{d_k} \cdot \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k}$.

Тогда:

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) = \max_{0 \le k < n \le N} B(k,n) \le \max_{0 \le k < n \le N} \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} \le$$
$$\le \max_{0 \le k \le N} \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} =: D(\{A_i\}). \quad (17)$$

Будем рассматривать такие N, чтобы

$$\frac{d_i}{d_k} \le e^{\theta(k-i)} \text{ при } -\frac{c_1}{a_0 + \theta} \ln N \le k \le i \le N, \quad (18)$$

при этом заметим, что так как $\beta = -\frac{1}{b'(a_0 + \theta_1)}$, то $\beta \le -\frac{c_1}{a_0 + \theta}$. Существование таких N для неравенства (18) доказывается так же, как и для неравенства (9).

Обозначим $l = -\frac{c_1}{a_0 + \theta} \ln N$. Верно следующее:

$$P\left(D(\{A_i\}) < N^c\right) = 1 - P\left(\exists k \in [0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_i}{d_k} \ge N^c\right) =$$
$$= 1 - P\left(\exists k \in [0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_{k+(i-k)}}{d_k} \ge N^c\right) \ge$$
$$\ge 1 - \left(P\left(\exists k \in [0,l] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_{k+(i-k)}}{d_k} \ge N^c\right) + P\left(\exists k \in [l,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_i}{d_k} \ge N^c\right)\right) \ge$$
$$\ge 1 - P\left(\exists k \in [0,l] : \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i + i\theta_1 - A_k - k\theta_1)} \ge \alpha_1 N^c\right) - P\left(\exists k \in [l,N] : \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i + i\theta - A_k - k\theta)} \ge N^c\right) \ge$$
$$\ge 1 - lP\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta_1)} \ge \alpha_1 N^c\right) - NP\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta)} \ge N^c\right).$$

Заметим, что если $\sum_{i=0}^{N} e^{-A_i+i\theta} > N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0, M] : e^{-A_i+i\theta} > \frac{1}{2}\frac{N^c}{M}$$
$$\exists i \in [M, N] : e^{-A_i+i\theta} > \frac{1}{2}N^{c-1}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{1}{2}\frac{N^c}{M} > N^{c_1}, \quad \frac{N^{c-1}}{2} > e^{-\omega M},$$

и, следовательно (также, как в S1”), для достаточно больших N выполняется:

$P\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-A_i+i\theta} > N^c\right) \leq P(\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta < -c_1 \ln N) + P(\exists i \in [M, N] : A_i + i\theta < \omega M) \leq e^{-(b-\delta)c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})$.

Оценим теперь вероятность $P\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-A_i+i\theta_1} > \alpha_1 N^c\right)$.

Пусть b''– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-b''(a_0+\theta_1)} + e^{-b''(a_1+\theta_1)}) = 1.$$

Обозначим $v'' := E(\gamma) = (a_0 + \theta_1 + a_1 + \theta_1)/2 > 0$ и $\omega'' := v''/2$.

Заметим, что если $\sum_{i=0}^{N} e^{-A_i+i\theta_1} > \alpha_1 N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0, M] : e^{-A_i+i\theta_1} > \frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M}$$
$$\exists i \in [M, N] : e^{-A_i+i\theta_1} > \frac{\alpha_1}{2}N^{c-1}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M} > N^{c_1}, \quad \alpha_1\frac{N^{c-1}}{2} > e^{-\omega'' M},$$

и, следовательно (также, как в S1”), для достаточно больших N выполняется:

$P\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-A_i+i\theta_1} > \alpha_1 N^c\right) \leq P(\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta_1 < -c_1 \ln N) + P(\exists i \in [M, N] : A_i + i\theta < \omega'' M) \leq e^{-(b''-\delta)c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2})$.

Наконец,

$$P(D(\{A_i\}) \leq N^c) \geq$$
$$\geq 1 - N\left(N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})\right) -$$
$$- \frac{-c_1}{a_0+\theta}\ln N\left(N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2})\right) \xrightarrow{N\to\infty} 1.$$

и, следовательно, из соотношения (17) следует:

$$\limsup_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1.$$

$\square$

Список литературы

[1] Sergei Yu. Pilyugin, Kazuhiro Sakai. *Shadowing and Hyperbolicity*// Lecture Notes in Mathematics 2193. — 1994 — p. 2–5.

[2] Tikhomirov S. *Shadowing in linear skew products.* J. Math. Sci. (N.Y.) 209 (2015), no. 6, 979–987.

[3] Приезжев П. *Вероятностное отслеживание для убывающих погрешностей с постоянной скоростью*, Выпускная квалификационная работа, СПбГУ, 2021.

[4] S. R. S. Varadhan. *Large deviations and applications.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 46. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1984.

[5] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.,* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971.