ОТЗЫВ

Научного руководителя о выпускной квалификационной работе

студента основной образовательной программы СВ.5000.2017 “Математика”

Санкт-Петербургского государственного университета

Виктора Валерьевича МИГРИНА,

На тему **”Комбинаторика многогранников, связанных с системами корней”**

Диплом Виктора Мигрина посвящен изучению различных комбинаторных и геометрических вопросов, связанных однородными многогранниками исключительных типов симметрии E_6, E_7 и E_8. Делается это чисто алгебраическими методами с использованием таких стандартных в теории алгебр Ли, алгебраических групп и их представлений. Основные используемые инструменты это системы корней и группы Вейля, и различные комбинаторные структуры, связанные с весами.

Первые однородные многогранники с исключительными группами симметрии были открыты в XIX веке и связаны с именами Шлефли, Гессе и Госсета. Позже, уже в XX веке Эльте, Коксетер и другие открыли дальнейшие такие многогранники. Ключевой момент здесь состоит в том, что такие многогранники заканчиваются в размерности 8 и связаны с арифметикой октонионов.

Особенно интересны, конечно, три открытых в XIX веке полуправильных многогранника в размерностях 6, 7 и 8, имеющие тип симметрии E_6, E_7 и E_8, соответственно. Целью работы как раз и было детальное понимание структуры таких многогранников и перечисление различных связанных с ними комбинаторных объектов.

Надо сказать, что Виктор с этим **блестяще** справился, в том объеме, который естественно ожидать от дипломной работы. Первый основной результат состоит в том, что используя технику весовых диаграмм и некоторые табличные сведения о системах корней и группах Вейля, Виктор вычислил цикловые индексы группы Вейля $W(E_6)$ при действии на 27 вершинах полуправильного многогранника типа E_6 с 27 и группы Вейля $W(E_7)$ при действии на 56 вершинах полуправильного многогранника E_7.

Изучение соответствующей техники заняло довольно много времени, но Виктор блестяще ей овладел и собственно само вычисление *вручную* для двух этих случаев заняло в общей сложности около недели – при том, что это вполне серьезное вычисление, в получающихся многочленах по много десятков мономов с коэффициентами порядка нескольких сотен тысяч. При этом в полученном Виктором довольно длинном ответе я обнаружил одну (одну!) опечатку, неправильно взятый из таблиц Картера порядок одного из классов сопряженных элементов. После ее исправления удалось сразу получить на компьютере все обычные в теории Пойа--Редфилда следствия, в частности, значения для количества раскрасок в небольшое число цветов.

Признаюсь, что я был совершенно поражен получающимися при этом числами. Например, уже число существенно различных раскрасок *вершин* многогранника Гессе в *два* цвета оказалось равным 2533248480. В этот момент мне стало ясно, что я существенно недооценивал, что такое *полиномиальный* рост – это все еще много меньше 2^{56}.

В силу двойственности (тройственности?) для многогранников Госсета—Эльте отсюда удалось вывести также количество существенно различных раскрасок граней наибольшей размерности корневого многогранника типа E_6. Снова уже для двух цветов количество таких раскрасок 27+27 пятимерных граней оказалось равным 350661193456 – что, конечно, все еще много меньше 2^{54}.

Ясно, что тем же методом Виктор мог бы *в принципе* посчитать цикловые типы и для других ситуаций (другие типы граней, дальнейшие исключительные многогранники и т.д.). С другой стороны, теперь, когда технология подобных вычислений отработана, проще, наверное, написать компьютерную программу.

В связи с этой работой нами было получено несколько дальнейших результатов, связанных со структурой исключительных многогранников Госсета—Эльте (примыканием граней различных типов, вписанные многогранники и т.д.), о которых мы с Виктором рассказывали в апреле 2021 года на PCA2021, но решили не включать в текст диплома, из-за ограничений объема.

С другой стороны, хотел бы упомянуть один из вспомогательных результатов, который представляется мне как чрезвычайно интересным и сам по себе, так и наиболее перспективным с точки зрения дальнейших обобщений и приложений. А именно, Дынкин и Минченко построили то, что они называют enhanced Dynkin dioagram, которая содержит в себе базы всех подсистем корней.

В настоящей работе приводится конкретная конструкция диаграммы Дынкина---Минченко в гиперболических реализациях систем корней E_6, E_7 и E_8, в которой дополнительно типом ребра (сплошные vs пунктирные) отражены знаки скалярных произведений. Оказывается --- и это **совершенно замечательное наблюдение**! --- в таком виде эти диаграммы содержат не только диаграммы Дынкина подсистем корней, но и все диаграммы Картера--Стекольщика классов сопряженных элементов групп Вейля $W(E_6)$, $W(E_7)$ и $W(E_8)$.

К сожалению, *проверка* этого в работе проведена case by case, непосредственно по таблицам в статье Картера. Но, если бы удалось провести априорное доказательство этого факта, не зависящее от классификации, это было бы *концептуальным объяснением* списка диаграмм Картера и называлось бы главой кандидатской диссертации, а не дипломной работой.

Хотя мы начали работу над этим проектом довольно давно, в феврале 2020 года, из-за различных привходящих обстоятельств основные результаты были получены нами только в апреле—мае 2021 года. Поэтому диплом написан в некоторой спешке.

С другой стороны, собственно *математическое* качество работы не вызывает у меня сомнения. Это один из *лучших* дипломов, выполненных под моим руководством, который имеет все шансы в течение пары лет превратиться в полноценную кандидатскую диссертацию. Кроме расширенного абстракта по геометрии самих многогранников нами уже сдана статья с гиперболической конструкцией enhanced Dynkin diagram и в ближайшее время будет завершена статья с вычислением цикловых типов. Здесь открывается несколько *чрезвычайно* интересных возможностей для дальнейших продвижений в понимании абсолютно классических вещей.

Хочу также отметить **огромный** профессиональный рост Виктора за последний год--полтора. За это время он реально овладел широким спектром методов из нескольких разделов алгебры, геометрии и комбинаторики и научился *мастерски* применять эти знания в вычислениях. Собственно сами вычисления цикловых индексов проведены Виктором полностью самостоятельно. Для меня честь быть руководителем этой работы.

Считаю, что работа Виктора Мигрина на тему ”Комбинаторика многогранников, связанных с системами корней” удовлетворяет всем обычным требованиям к выпускным квалификационным работам, а с точки зрения содержания, и более высоким требованиям. Ее результаты частично уже опубликованы, и, в любом случае, послужат основой еще нескольких публикаций. С моей точки зрения, эта работа *безусловно* заслуживает оценки “**отлично**”. Прошу комиссию поддержать это мнение.

Научный руководитель, профессор,

доктор физико-математических наук Н.А.ВАВИЛОВ