

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Мигрин Виктор Валерьевич

Выпускная квалификационная работа

**«Комбинаторика многогранников,
связанных с системами корней»**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.01 «Математика»

Основная образовательная программа СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор

Николай Александрович Вавилов

Рецензент:

д. ф.-м. н., профессор

Николай Леонидович Гордеев

Санкт-Петербург

2021 г.

1 Вступление

Цель этой дипломной работы — изучить структуру и геометрию двух исключительных многогранников типа E_6 и E_7 , а также объяснить, как это делается для E_8 . Эти многогранники были открыты аж в XIX веке и широко изучались вместе с правильными многогранниками многими замечательными математиками, в том числе Коксетер [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], Конвей и Слоан [6, 7], Муди и Патера [29, 30], МакМаллен [23, 24, 25, 26] и Шаевска [33, 34], последняя работа которой в какой-то мере и вдохновила меня на более детальное изучение этого вопроса.

Правильные и полуправильные многогранники обладают одним замечательным свойством — *все* они, начиная с некоторой небольшой размерности, остаются только нескольких простых типов. Поэтому исключительные случаи E_6 , E_7 и E_8 оказываются самыми сложными из полуправильных многогранников, хотя находятся всего в 6, 7 и 8-мерном пространстве. Может показаться, что за столько лет про три конкретных фигуры должно быть уже известно всё, что только можно, однако в этой работе разрабатывается новый, более простой подход к их комбинаторным и геометрическим свойствам. В частности, предлагается новый способ посчитать *число принципиально различных способов раскраски их вершин и граней в несколько цветов*.

Основные инструменты — это **весовые диаграммы**, **корневые подсистемы** и **классы сопряжённости групп Вейля** — элементарны и стандартны в теории представлений алгебраических групп. Знание последних безусловно играет основную роль в наших вычислениях. При этом, в процессе изучения исключительных многогранников, нам удалось заметить, что все 26 диаграмм Картера, являющихся самыми сложными для представления, можно буквально за пару секунд обнаружить на *одной обогащённой диаграмме Дынкина* для E_8 , рисунок 4 которой содержит *всего* 16 вершин и 32 ребра!

Как иллюстрация методов, которые считаются новыми, в § 8 и Приложениях А и В доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. *Цикловой индекс действия группы Вейля $W(E_6)$ на вершинах (E_6, ϖ_1) равен:*

$$\begin{aligned} Z_{27}[x_1, \dots, x_{12}] = \frac{1}{51840} & \left(x_1^{27} + 36x_1^{15}x_2^6 + 270x_1^7x_2^{10} + 240x_1^9x_3^6 + 585x_1^3x_2^{12} + \right. \\ & 1440x_1^3x_2^3x_3^4x_6 + 1620x_1^5x_2x_4^5 + 2160x_1^3x_2^3x_3^4x_6 + 560x_3^9 + 3780x_1x_2^3x_4^5 + \\ & 5184x_1^2x_5^5 + 1440x_1^3x_2^3x_6^3 + 540x_1^3x_4^6 + 1440x_3^5x_6^2 + 5184x_2x_5^3x_{10} + \\ & \left. 6480x_3x_6^4 + 6480x_1x_2x_8^3 + 4320x_1x_4^2x_6x_{12} + 4320x_3x_{12}^2 + 5760x_9^3 \right) \end{aligned}$$

Теорема 2. Цикловой индекс действия группы Вейля $W(E_7)$ на вершинах (E_7, ϖ_7) равен:

$$Z_{56}[x_1, \dots, x_{30}] = \frac{1}{2903040} \left(x_1^{56} + 3^2 \cdot 7 x_1^{32} x_2^{12} + 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^{16} x_2^{20} + 2^5 \cdot 3 \cdot 7 x_1^{20} x_3^{12} + (2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5 \cdot 7) x_1^8 x_2^{24} + (3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 3^2 \cdot 7 + 1) x_2^{28} + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x_1^8 x_2^6 x_3^8 x_6^2 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^{12} x_2^2 x_4^{10} + 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^4 x_2^8 x_3^4 x_6^4 + (2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 5 \cdot 7) x_1^2 x_3^{18} + (2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) x_1^4 x_2^6 x_4^{10} + (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) x_2^8 x_4^{10} + 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7 x_1^6 x_5^{10} + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x_1^8 x_2^6 x_6^6 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^8 x_4^{12} + (2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^5 \cdot 3 \cdot 7) x_2^{10} x_6^6 + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x_1^2 x_3^{10} x_6^4 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_2^2 x_3^4 x_4^2 x_{12}^2 + 2^8 \cdot 3^4 \cdot 7 x_1^2 x_2^2 x_5^6 x_{10}^2 + (2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) x_1^2 x_3^2 x_6^8 + (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 5 \cdot 7 + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) x_2 x_6^9 + (2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 + 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) x_2^4 x_4^{12} + 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 x_1^4 x_2^2 x_8^6 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^4 x_4^4 x_6^2 x_{12}^2 + (2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) x_2^2 x_4^4 x_6^2 x_{12}^2 + 2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 x_3^2 x_5^4 x_{15}^2 + 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 x_7^8 + 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 x_2^4 x_8^6 + (2^8 \cdot 3^4 \cdot 7 + 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7) x_2^3 x_{10}^5 + (2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 + 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) x_4^2 x_8^6 + 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_1^2 x_3^2 x_{12}^4 + 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x_1^2 x_9^6 + 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x_2 x_{18}^3 + 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 x_{14}^4 + 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 x_2 x_6 x_{12}^4 + 2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 x_6 x_{10}^2 x_{30} \right)$$

Естественно, при помощи используемых инструментов аналогичные цикловые индексы можно вычислить вручную и для более легких случаев. Однако следующий логичный случай E_8 требует использование компьютеров, даже после всех возможных упрощений. Многие параграфы этой работы взяты из [27], писавшейся параллельно, и как раз для которой доказывалась Теорема 1.

2 Полуправильные многогранники

В этом параграфе мы очень кратко опишем наши три исключительных многогранника E_6 , E_7 , E_8 , а также их место в общем мире.

- Многогранник называется **правильным**, если его группа симметрии транзитивно действует на *флагах* (вершина + ребро из неё, ребро + 2-грань из него, и т. д.).

- Многогранник называется **однородным**, если его группа симметрии *вершинно транзитивна* и его гиперграни сами по себе *однородны*.

- *Однородный* многогранник называется **полуправильным** (по Госсету), если его гиперграни — *правильные* многоугольники.

Последнее определение — не единственное. Эльте определил полуправильность *индуктивно*, по его определению сами гиперграни тоже должны были бы быть *полуправильными*.

Классификацию полуправильных многогранников размерности $n = 3$ получил Кеплер ещё в 1596-1620 годах, а в 1900 году Госсет опубликовал список из 7 полуправильных многогранников, 3 в размерности $n = 4$, и по одному в размерностях $n = 5, 6, 7, 8$, четыре замечательных полуправильных многогранника типов симметрии D_5 , E_6 , E_7 и E_8 — **многогранник Клебша** 1_{21} , **многогранник Шлефли** 2_{21} , **многогранник Хессе** 3_{21} и **многогранник Госсета** 4_{21} соответственно. В 1912 году Эльте ослабил понятие полуправильности и построил исключительные многогранники типов симметрии E_6 , E_7 и E_8 — **многогранники Эльте** 1_{22} , 2_{31} , 1_{32} , 2_{41} .

Что касается полной классификации во всех измерениях — принято считать, что она была завершена Коксетером в 1948 году. Но это не совсем так. Фактически, мы не думаем, что даже полнота списка Госсета была проверена до 1990-х годов. Даже для $n = 4$ первое принятое доказательство было опубликовано только в 1988 году Петром Макаровым [20, 21]. Полнота списка для размерностей $d \geq 5$ была установлена только Блиндами [1] в 1991 году как результат их классификации многогранников с правильными гранями. И это всё — только про *выпуклые* многогранники!

То же самое можно сказать и про комбинаторную структуру. Госсет описал лишь их *гиперграни* и сформулировал *некоторые* свойства инцидентности следующего типа: $(d - 3)$ -грань d -мерного многогранника содержится в двух $(d - 1)$ -гипероктаэдрах и одном $(d - 1)$ -симплексе и др.

3 Корневые системы

Во всём, что касается *корневых систем*, включая нумерацию простых корней, я буду следовать Бурбаки [2], также [18]. В частности, Φ — приведённая фундаментальная система корней ранга l , $W = W(\Phi)$ — группа Вейля, порождённая отражениями относительно корней из Φ . Для каждого $\alpha \in \Phi$ через $w_\alpha \in W$ обозначим соответствующее *корневое отражение*.

Группы Вейля интересующих нас исключительных многогранников имеют следующие порядки:

$$\begin{cases} |W(E_6)| = 51840 = 72 \cdot 6! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5, \\ |W(E_7)| = 2903040 = 72 \cdot 8! = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7, \\ |W(E_8)| = 696729600 = 192 \cdot 10! = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{cases}$$

Зафиксируем порядок на Φ , пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — множество простых корней, Φ^+ и Φ^- — соответствующие положительные и отрицательные корни. При фиксированном порядке можно вместо w_{α_i} писать w_i , т.е. $W = W(\Phi) = \langle w_1, \dots, w_l \rangle$.

За $\bar{\Pi}$ обозначим расширенную фундаментальную систему Φ . Она получается из Π добавлением $\alpha_0 = -\delta$, где δ — максимальный корень Φ относительно Φ . В форме Дынкина максимальные корни E_6 , E_7 и E_8 выражаются так:

$$\frac{12321}{2}, \quad \frac{234321}{2}, \quad \frac{2465432}{3}.$$

Расширенные диаграммы Дынкина, полученные добавлением корня α_0 , изображены на рисунке 1.

Для двух систем корней Δ и Σ обозначим за $\Delta + \Sigma$ их ортогональную сумму. В частности, $k\Delta = \Delta + \dots + \Delta$ — ортогональная сумма k изоморфных слагаемых. Также $A_0 = D_0 = D_1 = \emptyset$.

В интересующих нас диаграммах отсутствуют мультирёбра, в таком случае корни обычно нормируются так, что $(\alpha, \alpha) = 2$.

4 Гиперболическая реализация E_l

Для понимания скалярных произведений корней удобно представлять их не в виде линейной комбинации простых, а в гиперболическом виде. Такой переход очень популярен и описывается, например, в [17, 22].

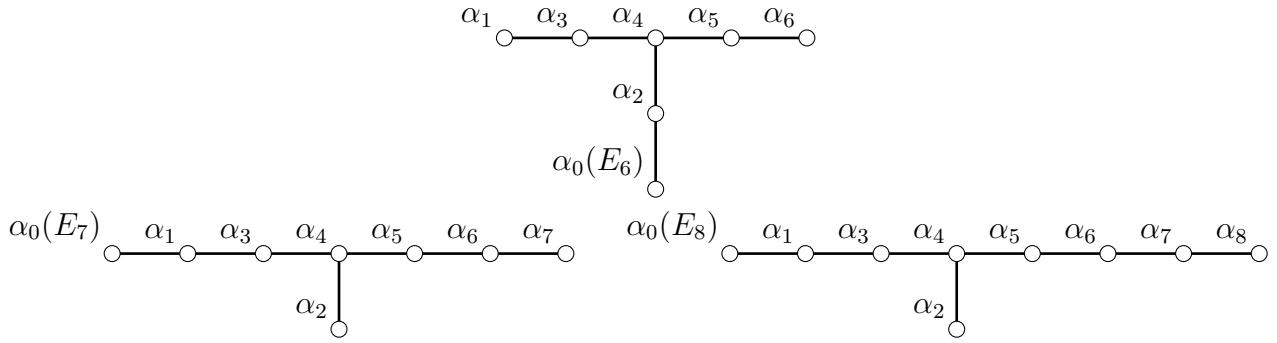


Рис. 1: Расширенные диаграммы Дынкина для E_6 , E_7 и E_8 .

Рассмотрим вещественное векторное пространство $U = R^{l+1}$ размерности $l+1$, наделённое невырожденным симметричным скалярным произведением $(\cdot, \cdot): U \times U \rightarrow R$ сигнатуры $(l, 1)$. Зафиксируем ортонормированный базис e_0, e_1, \dots, e_l такой, что $(e_0, e_0) = -1$ и $(e_i, e_i) = 1$ для всех $1 \leq i \leq l$. Рассмотрим случай $l = 8$, остальные случаи получатся из него некоторым упрощением. В этой реализации каждый элемент $\Phi = E_8$, с точностью до знака, имеет одну из следующих форм:

$$\begin{cases} \beta_{ij} = e_i - e_j, \text{ где } i > j, \\ \gamma_{ijh} = e_0 + e_i + e_j + e_h, \\ \eta_{ij} = 2e_0 + e_1 + \dots + \hat{e}_i + \dots + \hat{e}_j + \dots + e_8, \\ \zeta_i = 3e_0 + e_1 + \dots + 2e_i + \dots + e_8, \end{cases}$$

где индексы $i, j, h = 1, \dots, 8$ попарно различны, а шляпка над индексом означает, что этот индекс следует пропустить.

Зафиксируем следующую фундаментальную систему $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ в $\Phi = E_8$: $\alpha_1 = e_2 - e_1$, $\alpha_2 = e_0 + e_1 + e_2 + e_3$, $\alpha_3 = e_3 - e_2$, $\alpha_4 = e_4 - e_3$, $\alpha_5 = e_5 - e_4$, $\alpha_6 = e_6 - e_5$, $\alpha_7 = e_7 - e_6$, $\alpha_8 = e_8 - e_7$.

Корневая система $\Phi = E_7$ и ее фундаментальная корневая система получается из приведённой выше отбрасыванием e_8 и α_8 (тем самым исчезает последний тип корней). Корневая система $\Phi = E_6$ получается отбрасыванием и e_8 с α_8 , и e_7 с α_7 (тем самым третий тип корней сводится к единственному корню $2e_0 + e_1 + \dots + e_6$).

5 Классы сопряжённости группы Вейля

Большинство моих реальных вычислений напрямую зависит от явного знания **классов сопряжённости групп Вейля**. Картер [4, 5] описывает ситуацию примерно следующим образом:

- Большинство классов сопряжённости группы Вейля $W(\Phi)$ получаются из **подсистем** и представлены классом $C(\Delta)$ элементов Коксетера $cox_\Delta = w_{\beta_1} \dots w_{\beta_r}$, где β_i — фундаментальные корни подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$.

- Есть ровно **два** случая, когда для двух несопряжённых подсистем $\Delta, \Sigma \subseteq \Phi$ их классы Коксетера $C(\Delta)$ и $C(\Sigma)$ совпадают в $W(\Phi)$, но оба они в этой работе нам не интересны.

dim Δ	$\Delta \subseteq E_6$	$\Delta \subseteq E_7$
0	\emptyset	\emptyset
1	A_1	A_1
2	$2A_1 \quad A_2$	$2A_1 \quad A_2$
3	$3A_1 \quad A_2 + A_1 \quad A_3$	$(3A_1)' \quad (3A_1)'' \quad A_2 + A_1 \quad A_3$
4	$4A_1 \quad A_2 + 2A_1 \quad 2A_2 \quad A_3 + A_1$ $A_4 \quad D_4 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1)$	$(4A_1)' \quad (4A_1)'' \quad A_2 + 2A_1 \quad 2A_2 \quad (A_3 + A_1)'$ $(A_3 + A_1)'' \quad A_4 \quad D_4 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1)$
5	$2A_2 + A_1 \quad A_3 + 2A_1 \quad A_4 + A_1$ $A_5 \quad D_5 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$	$5A_1 \quad A_2 + 3A_1 \quad 2A_2 + A_1 \quad (A_3 + 2A_1)'$ $(A_3 + 2A_1)'' \quad A_3 + A_2 \quad A_4 + A_1 \quad (A_5)' \quad (A_5)''$ $D_4 + A_1 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1 \quad D_5 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$
6	$3A_2 \quad (A_5 + A_1)'' \quad E_6$ $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2)$	$6A_1 \quad 3A_2 \quad A_3 + 3A_1 \quad A_3 + A_2 + A_1 \quad 2A_3$ $A_4 + A_2 \quad (A_5 + A_1)' \quad (A_5 + A_1)'' \quad A_6 \quad D_4 + 2A_1$ $D_5 + A_1 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1 \quad D_6 \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_2)$ $E_6 \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2)$
7		$7A_1 \quad 3A_2 + A_1 \quad A_5 + A_2 \quad A_7$ $D_4 + 3A_1 \quad D_6 + A_1 \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_2) + \mathbf{A}_1 \quad E_7$ $\mathbf{E}_7(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_2) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_3) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_4)$

Таблица 1: Все подсистемы и графы Картера для E_6 и E_7 .

• Остальные классы сопряжённости приходят из **графов Картера**, которые представляют собой двудольные диаграммы Дынкина с циклами. Вершины диаграммы C разбиваются на два множества $C = C_1 \sqcup C_2$ из попарно ортогональных корней, и оставшиеся классы сопряжённости представляются произведением двух инволюций $w = w_1 w_2$, где w_i — это произведение всех корневых отражений w_α , $\alpha \in C_i$.

Классификация всех подсистем корневых систем давно произведена в том числе в [5], таблица из которой представлена в виде таблиц 1 и 2 (жирным выделены “особые” ситуации — графы Картера), однако схожие таблицы получены и в [17], см. также [15].

Две подсистемы Δ и Σ одного типа *почти всегда* сопряжены, за исключением одного особого случая, который в таблицах 1 и 2 помечен как $(\Delta)'$ и $(\Delta)''$. Они обе подсистемы типа Δ , только $(\Delta)'$ из таблицы 1 содержится в A_7 , а $(\Delta)''$ — нет, а $(\Delta)'$ из таблицы 2 содержится в A_8 , а $(\Delta)''$ — нет. В [5] показано, что эти подсистемы в действительности не сопряжены. Стоит ещё обратить внимание на то, что в [5] $(\Delta)'$ и $(\Delta)''$ несут ровно противоположный смысл, чем в моей работе, а также ортогональные части у Картера перемножаются, а не складываются. Говорят, так сложилось *исторически*.

Графы Картера $\Delta(a_i)$ не являются диаграммами Дынкина подсистем, их диаграммы приведены в таблице 3. Вообще говоря, циклы в этих диаграммах бывают длины не только 4, однако Рафаэль Стекольщик в [32] доказал, что диаграммы Картера с циклом большей длины эквивалентны диаграммам, содержащим только циклы длины 4. Из его работы, например, следует, что

$$E_7(a_2) \simeq E_7(b_2), \quad E_8(a_3) \simeq E_8(b_3), \quad E_8(a_5) \simeq E_8(b_5).$$

Поэтому, например, в таблицах 1 и 2 не присутствует ни одного $E_i(b_j)$, так как они все эквивалентны $E_i(a_j)$. Подробнее про графы Картера я расскажу в следующем параграфе.

dim Δ	$\Delta \subseteq E_8$
0	\emptyset
1	A_1
2	$2A_1 \quad A_2$
3	$3A_1 \quad A_2 + A_1 \quad A_3$
4	$(4A_1)' \quad (4A_1)'' \quad A_2 + 2A_1 \quad 2A_2 \quad A_3 + A_1 \quad A_4 \quad D_4 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1)$
5	$5A_1 \quad A_2 + 3A_1 \quad 2A_2 + A_1 \quad (A_3 + 2A_1)' \quad (A_3 + 2A_1)'' \quad A_3 + A_2 \quad A_4 + A_1 \quad A_5$ $D_4 + A_1 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1 \quad D_5 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$
6	$6A_1 \quad A_2 + 4A_1 \quad 2A_2 + 2A_1 \quad 3A_2 \quad A_3 + 3A_1 \quad A_3 + A_2 + A_1 \quad (2A_3)' \quad (2A_3)''$ $A_4 + 2A_1 \quad A_4 + A_2 \quad (A_5 + A_1)' \quad (A_5 + A_1)'' \quad A_6 \quad D_4 + 2A_1 \quad D_4 + A_2$ $\mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_2 \quad D_5 + A_1 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1 \quad D_6 \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_2) \quad E_6 \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2)$
7	$7A_1 \quad 3A_2 + A_1 \quad A_3 + 4A_1 \quad A_3 + A_2 + 2A_1 \quad 2A_3 + A_1 \quad A_4 + A_2 + A_1 \quad A_4 + A_3$ $A_5 + 2A_1 \quad A_5 + A_2 \quad A_6 + A_1 \quad (A_7)' \quad (A_7)'' \quad D_4 + 3A_1 \quad D_4 + A_3 \quad \mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_3$ $D_5 + 2A_1 \quad D_5 + A_2 \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_2 \quad D_6 + A_1 \quad \mathbf{D}_6(\mathbf{a}_2) + \mathbf{A}_1 \quad E_6 + A_1 \quad \mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1$ $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2) + \mathbf{A}_1 \quad D_7 \quad \mathbf{D}_7(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{D}_7(\mathbf{a}_2) \quad E_7 \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_2) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_3) \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_4)$
8	$8A_1 \quad 4A_2 \quad 2A_3 + 2A_1 \quad 2A_4 \quad A_5 + A_2 + A_1 \quad A_7 + A_1 \quad A_8 \quad D_4 + 4A_1 \quad 2D_4$ $2\mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_3 \quad D_6 + 2A_1 \quad D_8 \quad \mathbf{D}_8(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{D}_8(\mathbf{a}_2) \quad \mathbf{D}_8(\mathbf{a}_3) \quad E_6 + A_2$ $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2) + \mathbf{A}_2 \quad E_7 + A_1 \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_2) + \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{E}_7(\mathbf{a}_4) + \mathbf{A}_1 \quad E_8 \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_1) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_2)$ $\mathbf{E}_8(\mathbf{a}_3) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_4) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_5) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_6) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_7) \quad \mathbf{E}_8(\mathbf{a}_8)$

Таблица 2: Все подсистемы и графы Картера для E_8 .

В той же таблице 1 видно, что с точностью до сопряженности E_6 содержит 20 подсистем + пустое множество + 4 диаграммы Картера, а E_7 — 46 подсистем + пустое множество + 13 диаграмм Картера, что уже является достаточно большим числом для перебора без компьютера. Из таблицы 2 видно, что для E_8 будет 76 подсистем + пустое множество + 35 диаграмм Картера, их суммарное количество будет 112, что почти в 3 раза (*а по моим скромным ощущениям — во все 4*) усложняет подсчёт циклового индекса ручным перебором в этом случае.

6 Обогащённые диаграммы Дынкина

В этом параграфе мы построим **обогащённые диаграммы Дынкина** из работы Евгения Дынкина и Андрея Минченко [16] для E_6 , E_7 и E_8 , указывая не только на смежность вершин, но и на знак скалярного произведения, как это делал Рафаэль Стекольщик [32]. Две вершины со скалярным произведением -1 будут соединены сплошной линией, тогда как две вершины со скалярным произведением $+1$ будут соединены пунктирной линией. Подробное содержание этого параграфа будет изложено в статье [28], которая на момент написания этой дипломной работы ещё не опубликована.

Теорема 3. *Обогащённые диаграммы Дынкина для E_6 , E_7 и E_8 изображены на рисунках 2, 3 и 4 соответственно.*

Доказательство. Строятся они пошагово и последовательно, сначала для E_6 , затем для E_7 , а в конце для E_8 . Как видно из рисунков, каждая следующая обогащённая диаграмма целиком содержит предыдущую.

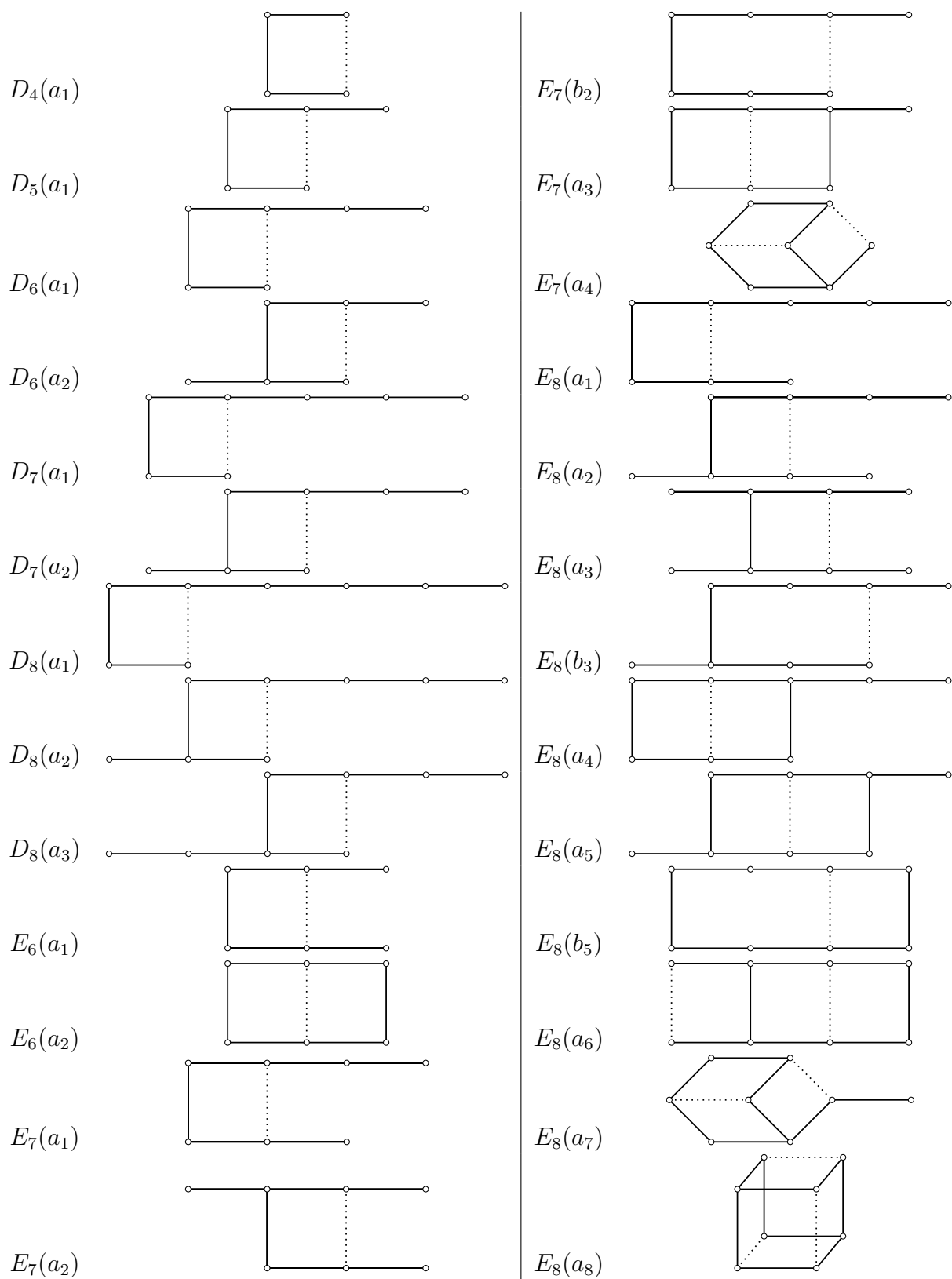


Таблица 3: Диаграммы Картера.

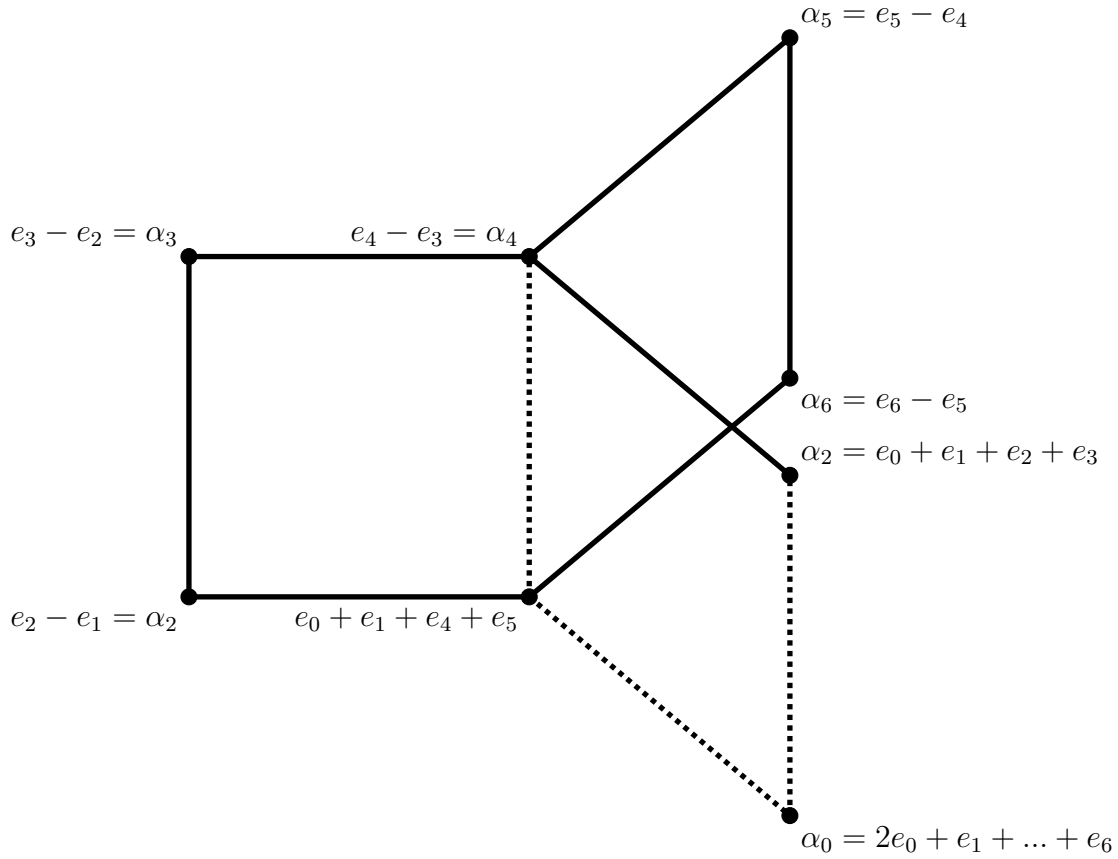


Рис. 2: Обогащённая диаграмма Дынкина для E_6 .

Построение для E_6 :

1. В диаграмме Дынкина для E_6 находится вершина степени 3 — в самом начале это простой корень α_4 , который соединён с тремя простыми корнями α_2 , α_3 и α_5 . Рассмотрим эти четыре корня как D_4 .
2. В этом D_4 считается максимальный корень, наносится на диаграмму и, в зависимости от скалярного произведения, соединяется с уже имеющимися вершинами. В форме Дынкина этот максимальный корень выражается так: $\begin{smallmatrix} 01210 \\ 1 \end{smallmatrix}$.
3. Шаги 1 и 2 повторяются, пока на диаграмме присутствует хотя бы одна вершина степени 3. Однако надо иметь в виду, что если у нас внутри D_4 на шаге 2 есть пунктирные рёбра, то при подсчёте максимального корня их висячие концы следует взять со знаком минус.

Построение для E_7 :

1. На обогащённую диаграмму Дынкина для E_6 добавляется корень α_7 вместе с рёбрами, зависящими от скалярного произведения.
2. Для всех вершин степени 3 *одновременно* вычисляется максимальный корень в их D_4 и наносится на диаграмму. И здесь если в D_4 присутствуют пунктирные рёбра, то их висячие концы точно также следует взять со знаком минус.
3. Шаг 2 повторяется, пока на диаграмме есть хотя бы одна вершина степени 3.

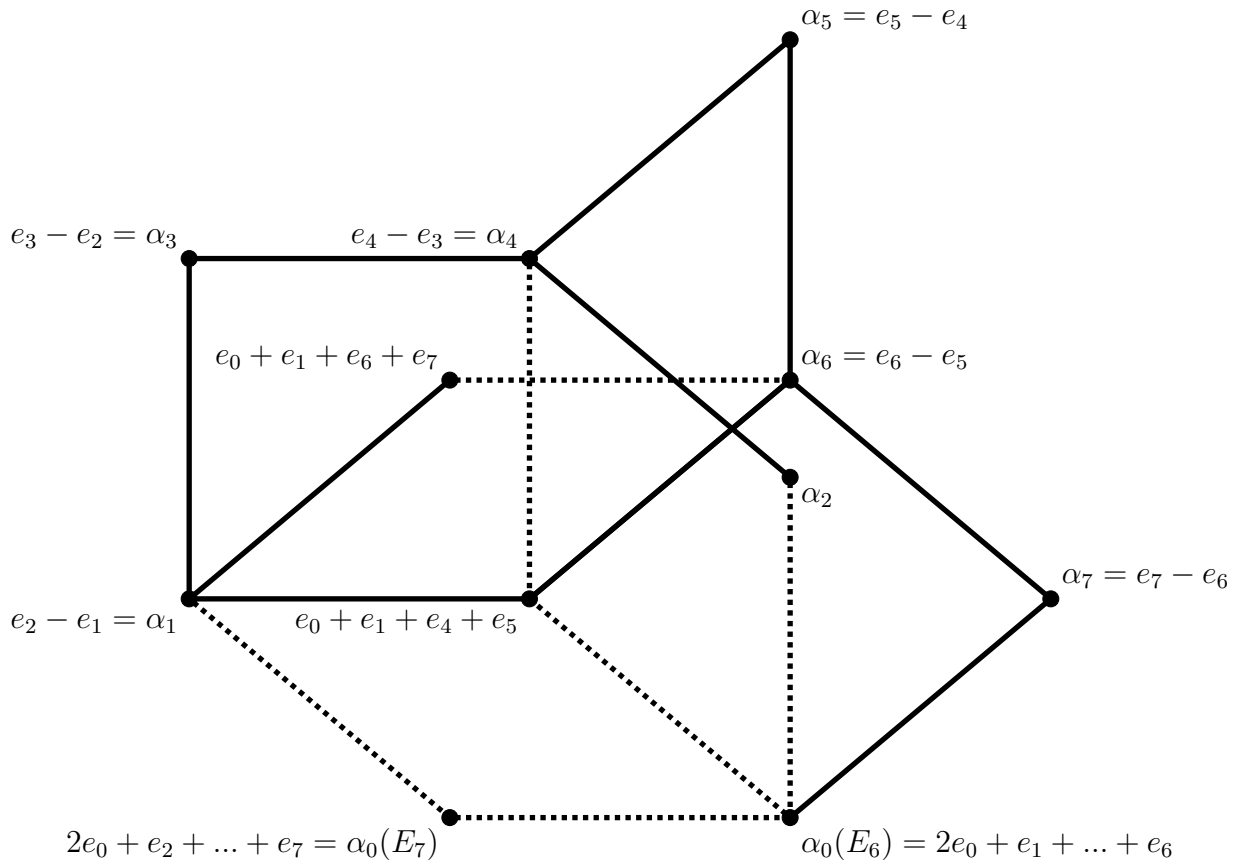


Рис. 3: Обогащённая диаграмма Дынкина для E_7 .

Построение для E_8 :

1. На обогащённую диаграмму Дынкина для E_7 добавляется корень α_8 вместе с рёбрами в уже имеющиеся вершины.
2. Для всех вершин степени 3 одновременно вычисляется максимальный корень в их D_4 и наносится на диаграмму. Если в D_4 присутствуют пунктирные рёбра, то их висячие концы точно также следует взять со знаком минус.
3. Шаг 2 повторяется, пока на диаграмме есть хотя бы одна вершина степени 3.

□

Теорема 4. Обогащённые диаграммы Дынкина для E_6 , E_7 и E_8 содержат все диаграммы Картера классов сопряженности групп Вейля $W(E_6)$, $W(E_7)$ и $W(E_8)$.

Доказательство. Как говорится, “оставляется читателю в качестве несложного упражнения”. Нужно просто обнаружить каждую диаграмму из таблицы 3 на рисунках 2–4. Например, чтобы найти на обогащённой диаграмме Дынкина для E_7 диаграмму Картера $E_7(a_4)$ — достаточно взглянуть на неё с разных сторон и взять на свой вкус или $\{\alpha_1, \gamma_{167}, \alpha_6, \alpha_7, \eta_{78}, \eta_{18}, \gamma_{145}\}$, или $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2, \eta_{78}, \eta_{18}, \gamma_{145}\}$, или $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \gamma_{167}, \gamma_{145}\}$, или...

□

Стоит обратить внимание, что обогащённые диаграммы определяются *однозначно* из самой корневой системы Φ по построению с точностью до следующей операции:

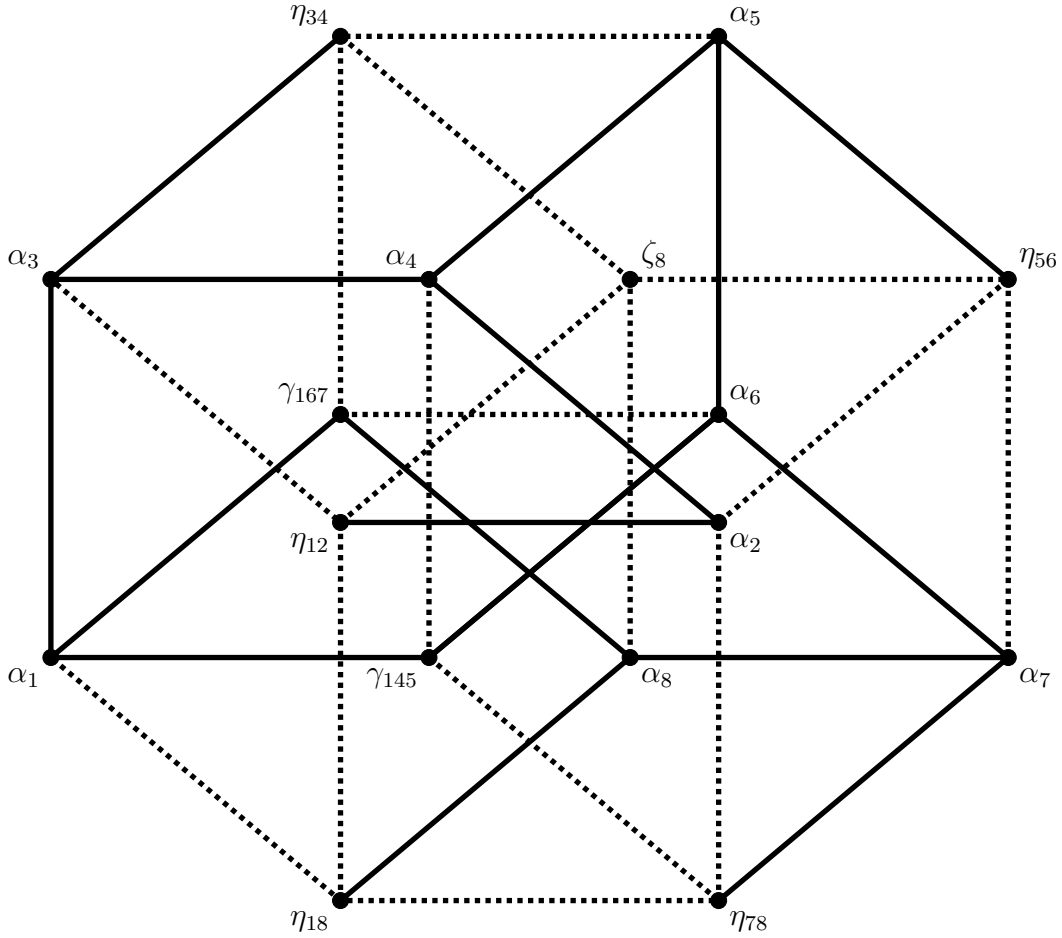


Рис. 4: Обогащённая диаграмма Дынкина для E_8 .

можно изменить знак любой вершины и одновременно переключить все типы рёбер, смежных с ней. Фактически, приведённые на рисунках 2 и 3 диаграммы отличаются от эквивалентных им тем, что все их корни — *положительные*. Это как раз достигается за счёт того, что на 2 шаге построения для E_7 и E_8 мы выбираем *одновременно* все вершины степени 3. Если каждый раз брать случайную вершину степени 3, легко получить отрицательный корень (у меня таким изначально получался η_{12} в диаграмме для E_8). Для E_6 процесс завершается слишком быстро после последовательного добавления двух новых вершин, поэтому там такой проблемы не возникает.

7 Весовые диаграммы

Основным местом для изучения E_6 , E_7 и E_8 будут **весовые диаграммы**. Подробнее про них написано в [31], здесь же я приведу буквально только их изображения и совсем немного расскажу про их свойства.

Весовые диаграммы появились в следствие того, что работать с геометрическим анализом проекций из 6, 7 или 8 измерения крайне затруднительно. Ведь даже E_6 имеет 72 вершины, из-за чего его 2D проекция со всеми рёбрами и вершинами начинает потихоньку сливаться в одно пятно. По ссылке [19] можно увидеть все координаты всех корней корневой системы E_8 , однако даже в такой красивой интерпретации

понимать что-то про рёбра и тем более грани вообще не представляется возможным.

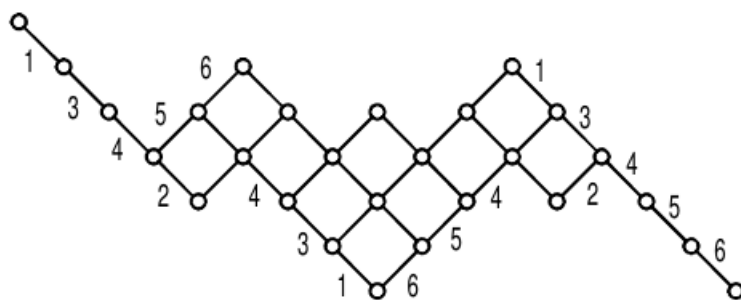


Рис. 5: Весовая диаграмма (E_6, ϖ_1)

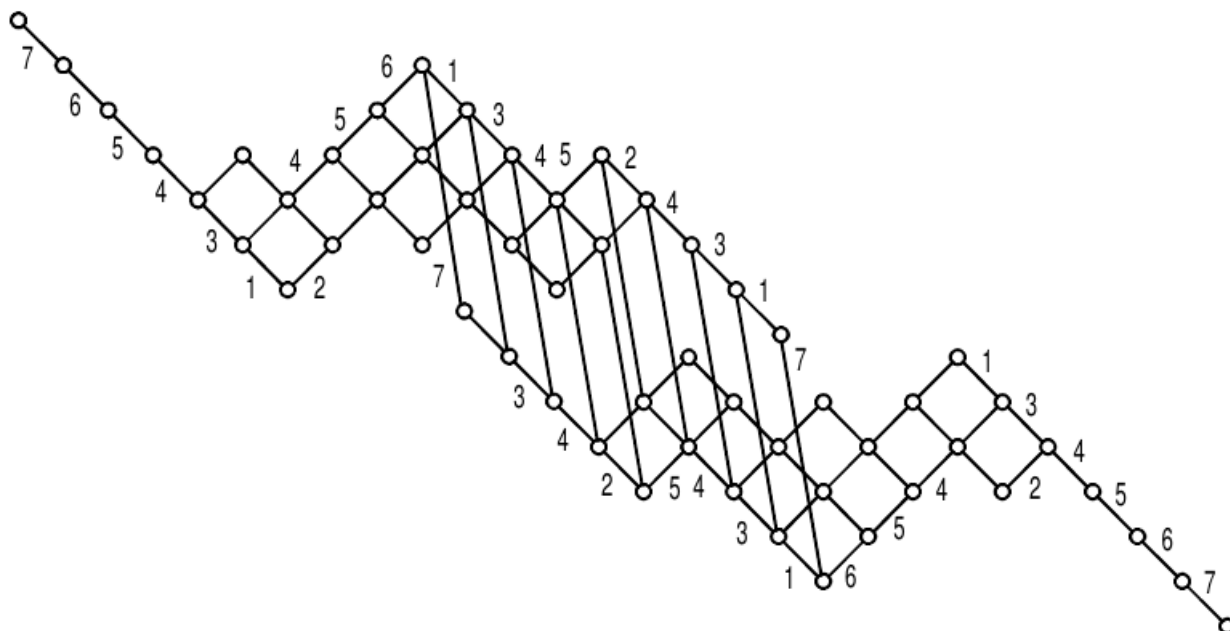


Рис. 6: Весовая диаграмма (E_7, ϖ_7)

На рисунках 5, 6 и 7 изображены весовые диаграммы (E_6, ϖ_1) , (E_7, ϖ_7) и (E_8, ϖ_8) , первые две из которых я буду активно использовать в Приложениях *A* и *B* соответственно. Рёбра здесь устроены таким образом, что под действием отражения w_i концы ребра с меткой i меняются местами. Именно это свойство весовых диаграмм и является в этой работе *самым важным*, однако при помощи них можно понимать, например, сколько рёбер выходит из каждой вершины многогранника, сколько есть граней каждой размерности и как они устроены (например, из-за того, что из левого верхнего узла (E_7, ϖ_7) выходят единственные пути длины 1, 2, 3 и 4, можно сделать вывод о том, что грани размерности 1-4 — это соответственные симплексы).

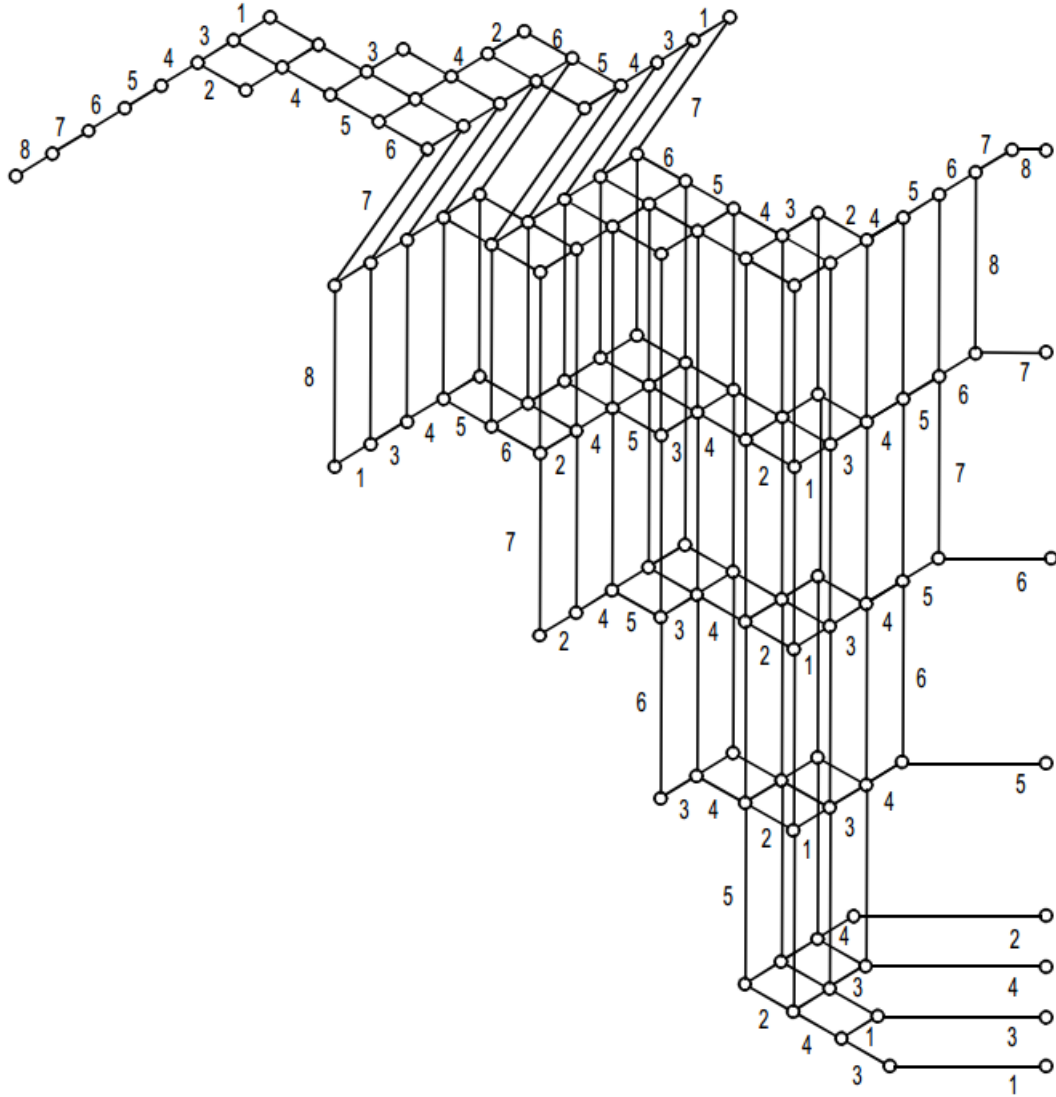


Рис. 7: Весовая диаграмма (E_8, ϖ_8)

8 Раскраски исключительных многогранников

Этот параграф будет посвящён доказательству двух теорем из вступления. Но для начала предъявлю несколько следствий:

Следствие 1. *Количество принципиально различных раскрасок вершин корневого многогранника типа E_6 в n цветов = $Z_{27}[n, \dots, n]$.*

Следствие 2. *Количество принципиально различных раскрасок вершин корневого многогранника типа E_7 в n цветов = $Z_{56}[n, \dots, n]$.*

Следствие 3. *Количество принципиально различных раскрасок граней корневого многогранника типа E_6 в n цветов = $Z_{27}[n^2, \dots, n^2]$. В частности, для $n = 2$ это число будет 350 661 193 456, а для $n = 3$ — 1 121 791 681 317 791 814 588.*

Доказательство. Первое и второе утверждения напрямую получаются из **теории перечислений Пойа**, см. [3]. Третье утверждение выводится из того, что элементы $W(E_6)$ — *вещественные* (т. е. совпадают со своими *сопряжёнными*), поэтому действие на (E_6, ϖ_6) будет абсолютно такое же, как и на (E_6, ϖ_1) . А это как раз и означает, что для расчёта действия $W(E_6)$ на грани (E_6, ϖ_2) нужно только заменить все переменные их квадратами, после чего вновь воспользоваться теорией перечисления Пойа и подставить конкретные значения. Для $W(E_7)$ схожее утверждение будет неверно, так как его гиперграни устроены иначе. \square

Доказательство Теорем 1 и 2. Подсчёт этих цикловых индексов будет сделан ручным перебором. Для случая E_8 уже необходим компьютер, хотя все упрощения задачи проведены.

Для подсчёта всего многочлена необходимо посчитать отдельно *цикловой одночлен*, соответствующий действию каждой подсистемы. Коэффициент, с которым этот одночлен войдёт в итоговый индекс, взят из таблиц 9 и 10 в конце [5].

Для каждой подсистемы выбираются корни, которые её образуют. Если подсистема не содержит цикл, то рассматривается композиция отражений относительно этих корней в произвольном порядке. Если же подсистема содержит цикл (см. таблица 3), то она представляет собой двудольный граф. Тогда в этом случае рассматривается сначала композиция отражений относительно корней одной доли в произвольном порядке, затем относительно другой.

Как говорилось ранее, на весовой диаграмме действие отражения w_{a_i} меняет местами концы рёбер с меткой i . Если мы хотим сделать отражение относительно сложного корня $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$, то для начала нужно найти все цепочки длины k , состоящие из i_1, i_2, \dots, i_k в любом порядке. Тогда $w_{a_{i_1+a_{i_2}+\dots+a_{i_k}}}$ меняет местами концы таких цепочек (на иллюстрациях они соединены тонкими линиями своего цвета).

Затем нужно проследить, куда под действием композиции отражений перейдёт каждая вершина. Вершины, получающиеся одна из другой после действия композиции отражений, на иллюстрациях помечались одним цветом. Если вершина после действия всех отражений переходит сама в себя, то она помечалась белым цветом. Таким образом итоговая диаграмма оказалась окрашена в некоторое количество цветов. По этой раскраске легко восстанавливается цикловой одночлен — x_1 в него входит в степени количества белых вершин (это циклы длины 1), x_2 — в степени количества циклов длины 2 (т. е. количество цветов, в которые оказались покрашены ровно 2 вершины) и т. д.

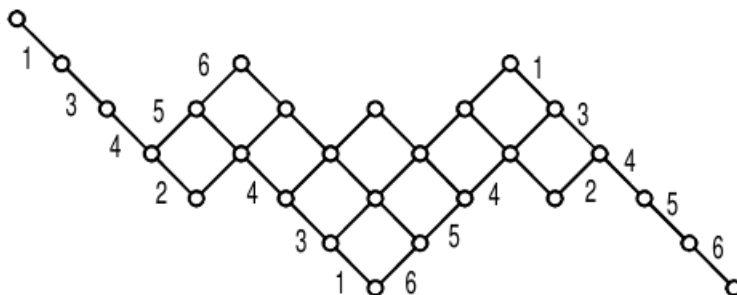
Следующие два приложения как раз содержат все необходимые иллюстрации. Эти результаты были получены до осознания того, что вершины всех диаграмм Картера можно выбирать среди вершин одной обогащенной диаграммы Дынкина для E_8 , но мы не стали на этом этапе менять выбор представителей, поэтому подходящие корни взяты не самым рациональным образом, хотя также присутствует некоторая *наследственность*. \square

Комментарий 1. Стоит также заметить, что всё для подсчёта циклового индекса действия группы Вейля $W(E_8)$ на вершинах (E_8, ϖ_8) всё уже готово — есть весовая диаграмма на рисунке 7, в таблице 2 перечислены все подсистемы и графы Картера, из рисунка 4 можно легко подобрать для каждого из них представителей. Дальше остаётся только узнать классы сопряжённости группы Вейля,

что делается абсолютно также, как описано выше — через нахождение циклов на весовой диаграмме. Таким образом мы узнаём цикловые одночлены, их коэффициенты точно также берутся из [5], только из таблицы 11. Осталось только всё сложить и привести подобные одночлены, и вуаля — цикловой индекс подсчитан! Правда, за скобками здесь оказался поиск цикленного разбиения весовой диаграммы для каждого из 112 обитателей таблицы 2, что немного останавливает “руки”, но не остановит компьютер.

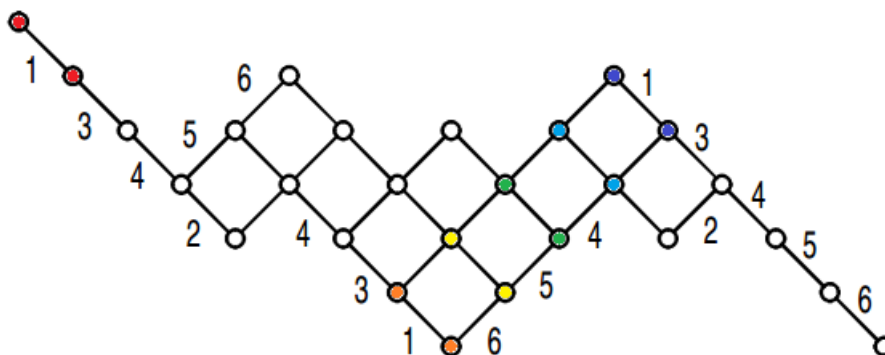
А Цикловой индекс E_6

1) \emptyset — соответствует тождественное отображение, оно оставляет все элементы на месте:



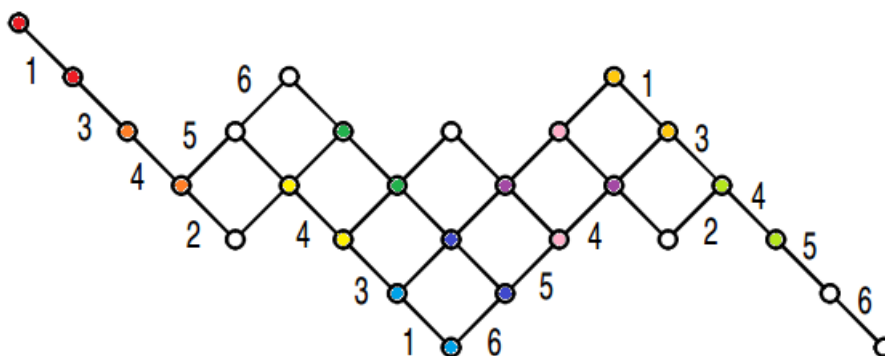
Все циклы типа 1, одночлен — x_1^{27} , коэффициент — 1.

2) A_1 — соответствует симметрия относительно одного из корней, для примера подойдёт w_{a_1} . Оно меняет местами элементы на концах 1, остальные оставляет на месте:



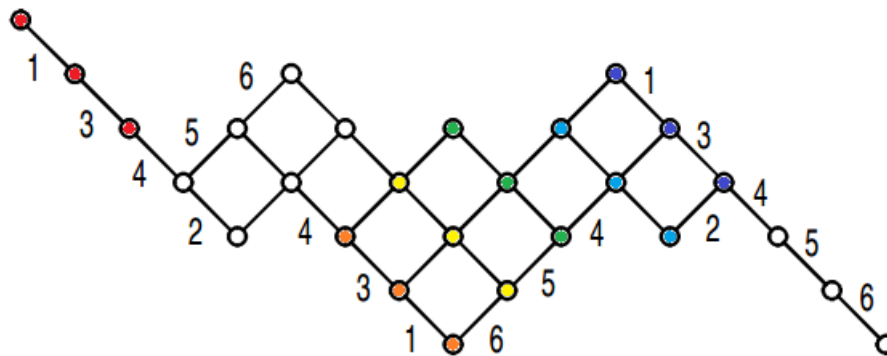
Видно 6 циклов типа 2 и 15 циклов типа 1, одночлен — $x_1^{15}x_2^6$, коэффициент — 36.

3) $2A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух перпендикулярных корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_4}$. Оно меняет местами сначала элементы на концах 4, затем на концах 1, остальные оставляет на месте:



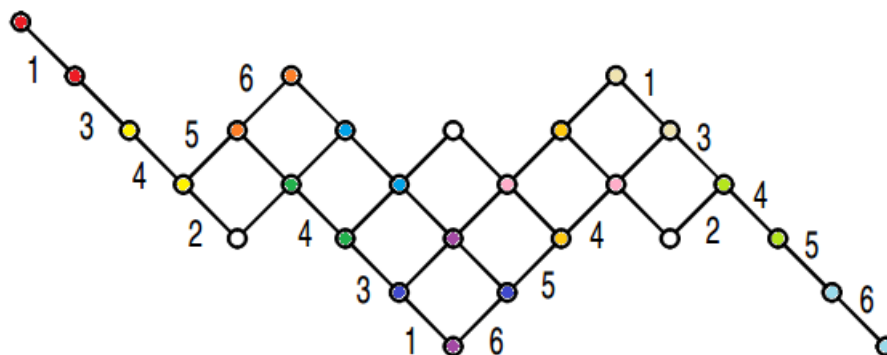
Видно 10 циклов типа 2 и 7 циклов типа 1, одночлен — $x_1^7x_2^{10}$, коэффициент — 270.

4) A_2 — соответствует последовательной симметрии относительно двух соседних корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_3}$:



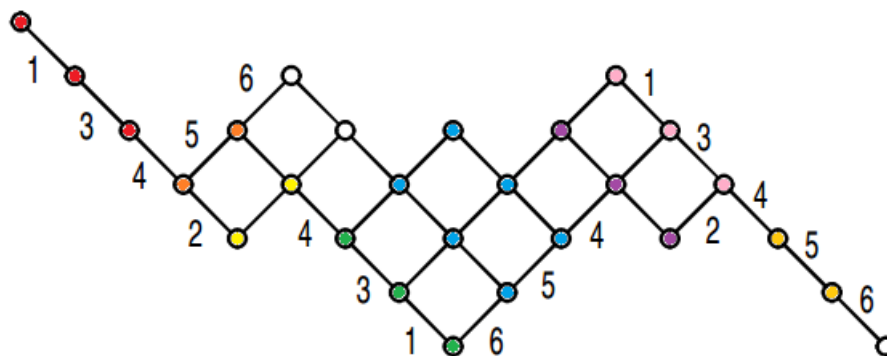
Видно 6 циклов типа 3 и 9 циклов типа 1, одночлен — $x_1^9 x_3^6$, коэффициент — 240.

5) $3A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно трёх перпендикулярных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_4} w_{a_6}$:



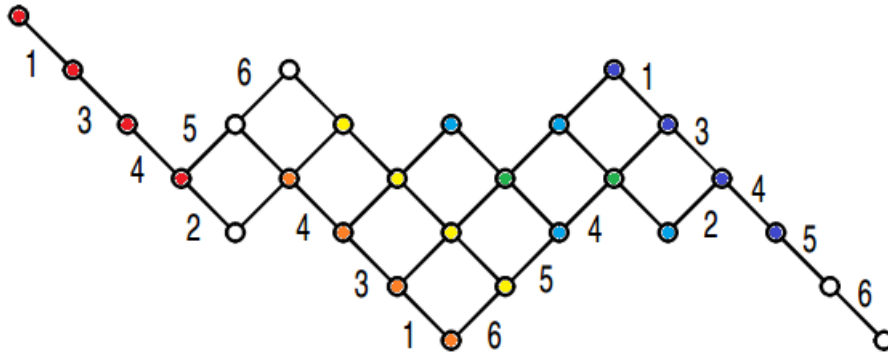
Видно 12 циклов типа 2 и 3 цикла типа 1, одночлен — $x_1^3 x_2^{12}$, коэффициент — 540.

6) $A_2 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух соседних и одного перпендикулярного им корня, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5}$:



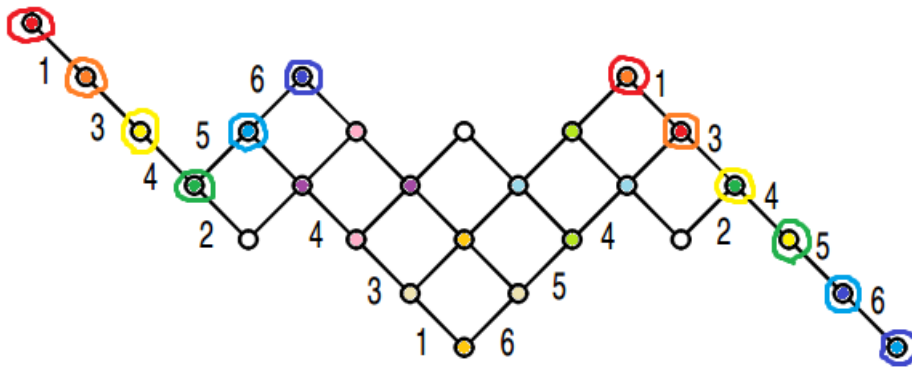
Видно 1 цикл типа 6, 4 цикла типа 3, 3 цикла типа 2 и 3 цикла типа 1, одночлен — $x_1^3 x_2^3 x_3^4 x_6$, коэффициент — 1440.

7) A_3 — соответствует последовательной симметрии относительно трёх последовательных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4}$:



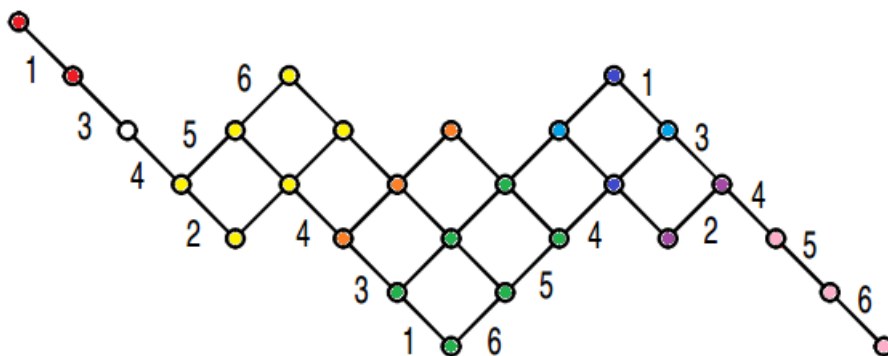
Видно 5 циклов типа 4, 1 цикл типа 2 и 5 циклов типа 1, одночлен — $x_1^5 x_2 x_4^5$, коэффициент — 1620.

8) $4A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно четырёх перпендикулярных корней, вариант их расположения всего один — это $w_{a_0} w_{a_1} w_{a_4} w_{a_6}$, где a_0 — максимальный корень, на диаграмме он связывает обведённые соответственным цветом вершины:



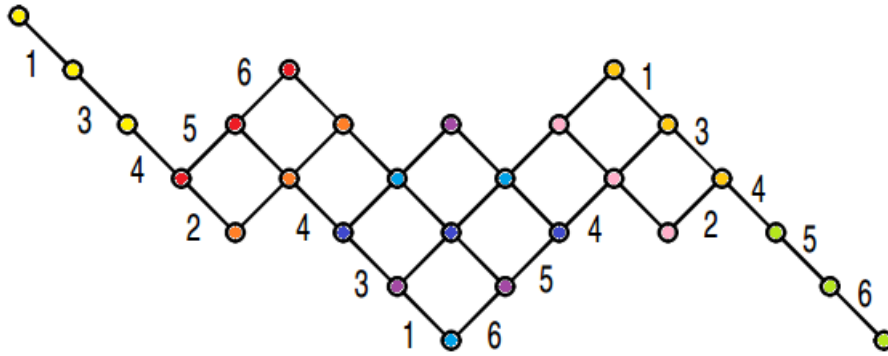
Видно 12 циклов типа 2 и 3 цикла типа 1, одночлен — $x_1^3 x_2^{12}$, коэффициент — 45.

9) $A_2 + 2A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух смежных и двух ортогональных остальным корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_5} w_{a_6}$:



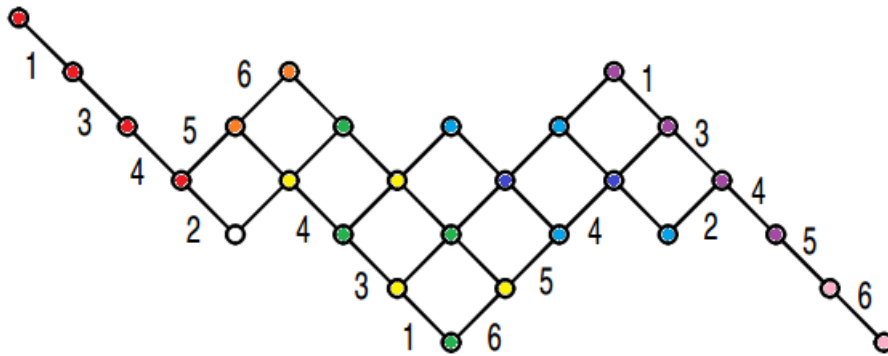
Видно, что 2 цикла типа 6, 2 цикла типа 3, 4 цикла типа 2 и 1 цикл типа 1, одночлен — $x_1 x_2^4 x_3^2 x_6^2$, коэффициент — 2160.

10) $2A_2$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух ортогональных пар смежных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6}$:



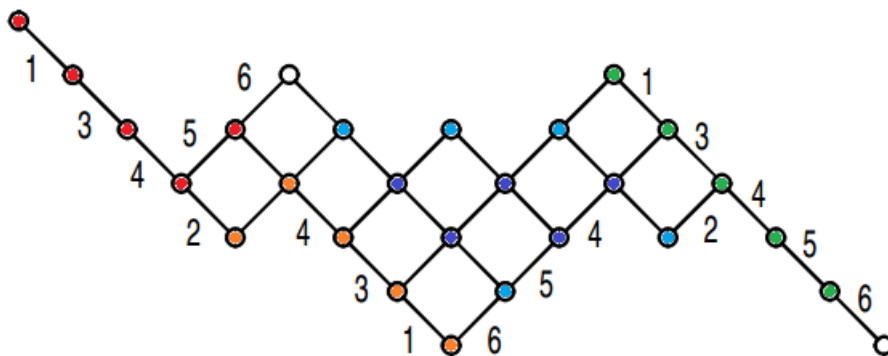
Видно 9 циклов типа 3, одночлен — x_3^9 , коэффициент — 480.

11) $A_3 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно ортогонального корня и трёх смежных корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_6}$:



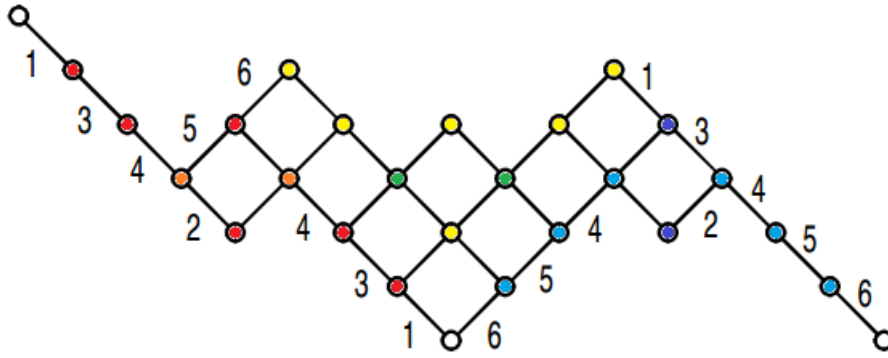
Видно 5 циклов типа 4, 3 цикла типа 2 и 1 цикл типа 1, одночлен — $x_1x_2^3x_4^5$, коэффициент — 3240.

12) A_4 — соответствует симметрии относительно четырёх последовательных корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}$:



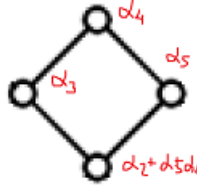
Видно 5 циклов типа 5 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2x_5^5$, коэффициент — 5184.

13) D_4 — соответствует симметрии относительно четырёх корней, образующих «букву Г», то есть $w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}$:



Видно 3 цикла типа 6, 3 цикла типа 2 и 3 цикла типа 1, одночлен $-x_1^3 x_2^3 x_6^3$, коэффициент -1440 .

14) $\mathbf{D}_4(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особая картинка, а именно замкнутый цикл из четырёх. То есть нам нужно найти 4 корня, противоположные из которых будут перпендикулярны, а остальные — нет. Для этого подойдут, например:

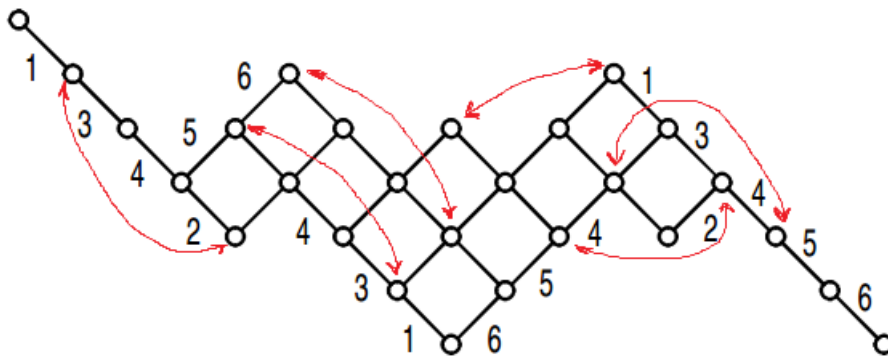


Давайте поймём, что они подходят. Для этого перепишем корни иначе:

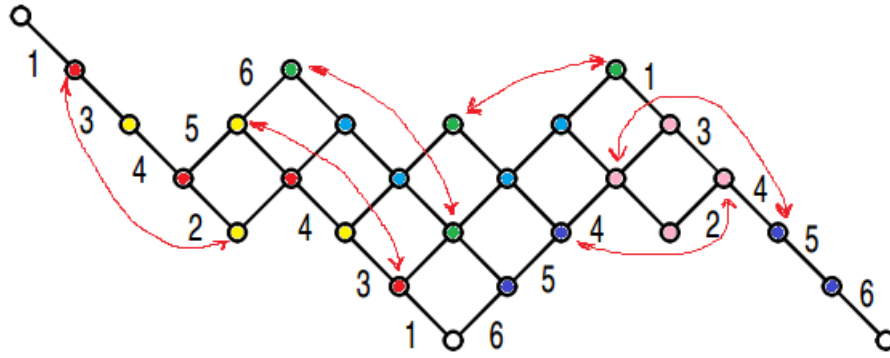
$$a_3 = e_3 - e_2, a_4 = e_4 - e_3, a_5 = e_5 - e_4 \text{ и } a_2 = e_0 + e_1 + e_2 + e_3.$$

Тогда $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$ и $a_3 a_4 = a_4 a_5 = a_5(a_2 + a_3 + a_4) = -1$, $(a_2 + a_3 + a_4)a_3 = 1$, а $a_3 a_5 = (a_2 + a_3 + a_4)a_4 = 0$.

Теперь нужно понять, как выглядит отражение относительно них. Устроено оно следующим образом — наш граф является двудольным, поэтому отражение будет сначала относительно корней одной доли, затем относительно корней другой доли, то есть это $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_4} w_{a_2 + a_3 + a_4}$, где последнее отражение работает следующим образом — оно переставляет концы цепочки из 2, 3 и 4 в любом порядке. Таких цепочек у нас 6:

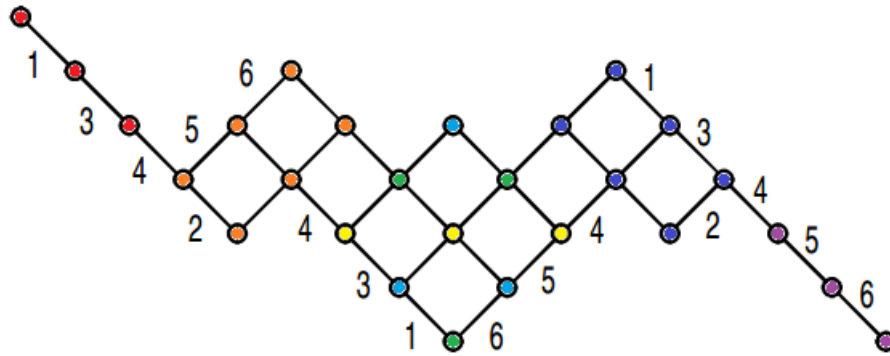


Отсюда получается следующее циклическое разбиение:



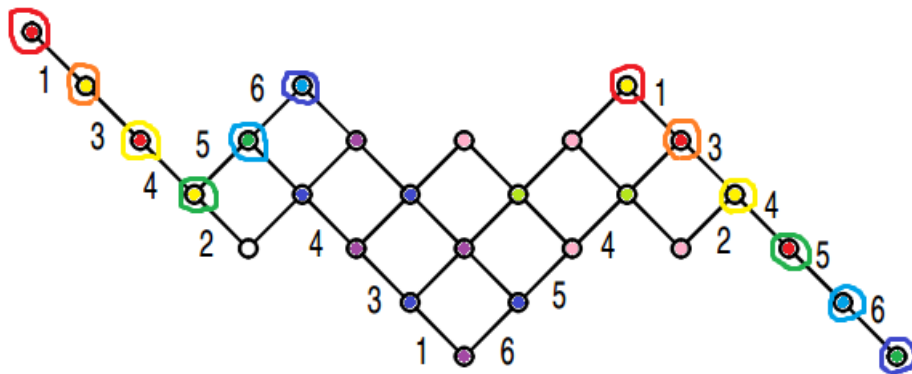
Видно 6 циклов типа 4 и 3 цикла типа 1, одночлен — $x_1^3 x_4^6$, коэффициент — 540.

15) $2A_2 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух пар и одиночного корня, всех перпендикулярных между собой, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6}$:



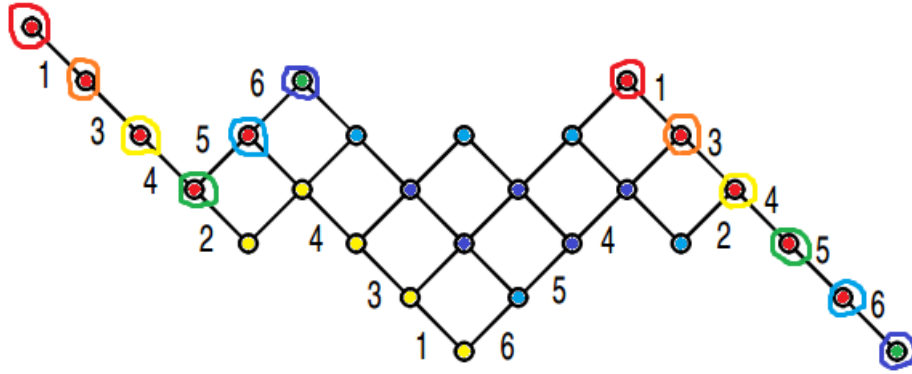
Видно 2 цикла типа 6 и 5 циклов типа 3, одночлен — $x_3^5 x_6^2$, коэффициент — 1440.

16) $A_3 + 2A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно тройки и двух одиночных корней, всех перпендикулярных между собой, для примера подойдёт $w_{a_0} w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_6}$:



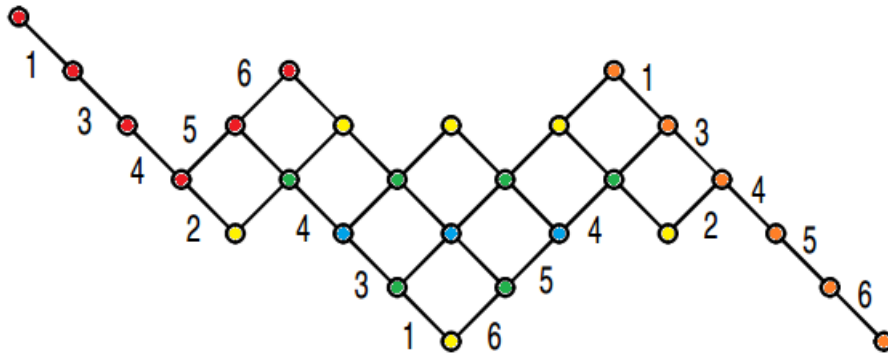
Видно 5 циклов типа 4, 3 цикла типа 2 и 1 цикл типа 1, одночлен — $x_1 x_2^3 x_4^5$, коэффициент — 540.

17) $A_4 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно перпендикулярных четвёрки и одиночного корня, для примера подойдёт $w_{a_0} w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5}$:



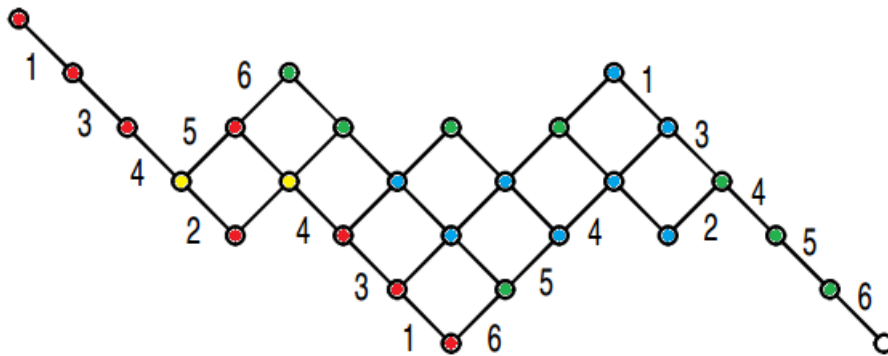
Видно 1 цикл типа 10, 3 цикла типа 5 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2x_5^3x_{10}$, коэффициент — 5184.

18) A_5 — соответствует симметрии относительно пятёрки, то есть $w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}$:



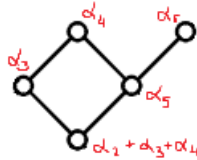
Видно 4 цикла типа 6 и 1 цикл типа 3, одночлен — $x_3x_6^4$, коэффициент — 4320.

19) D_5 — соответствует симметрии относительно пятёрки вида «удлинённая Г», для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}$:

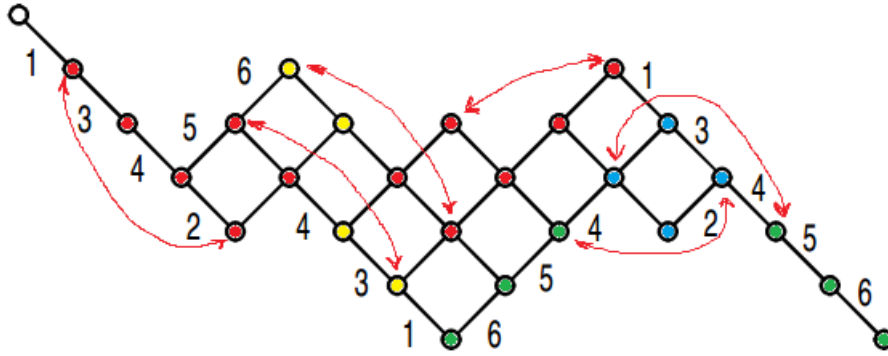


Видно 3 цикла типа 8, 1 цикл типа 2 и 1 цикл типа 1, одночлен — $x_1x_2x_8^3$, коэффициент — 6480.

20) $D_5(a_1)$ — также соответствует особая картинка, замкнутый цикл из четырёх с ребром наружу. Подходящие корни такие же, как и в $D_4(a_1)$, с добавленным a_6 :

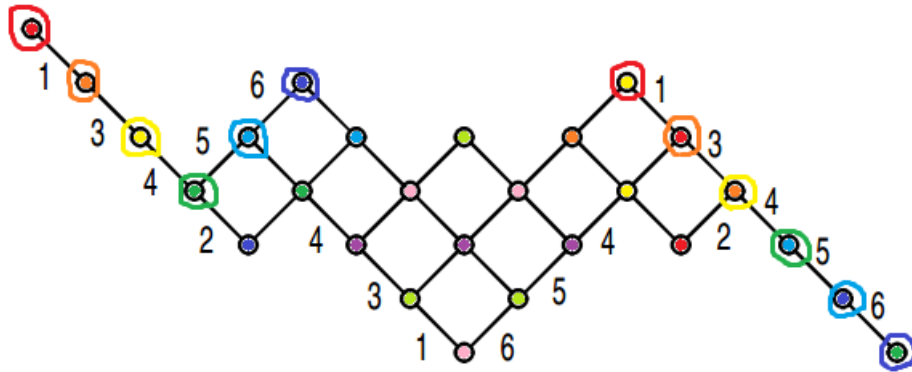


Действительно, нужно проверить только то, что a_6 перпендикулярен всем, кроме a_5 . $a_6 = e_6 - e_5$, из чего будет следовать требуемое. Соответствующее отражение будет устроено как $w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_4}w_{a_2+a_3+a_4}$ и цикленное разбиение будет:



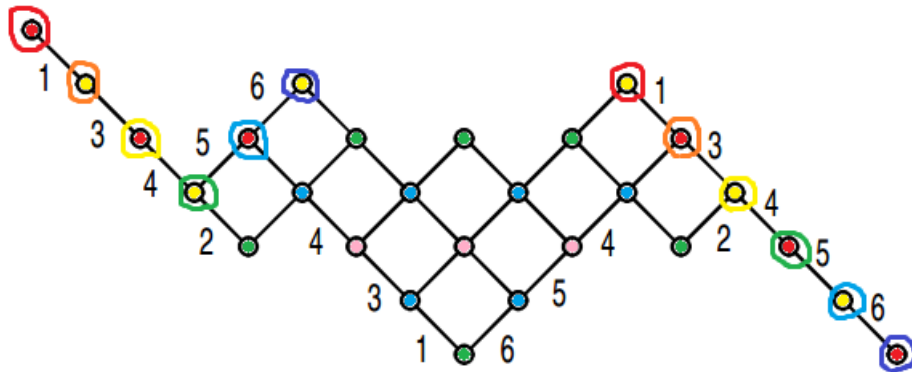
Видно 1 цикл типа 12, 1 цикл типа 6, 2 цикла типа 4 и 1 цикл типа 1, одночлен — $x_1x_4^2x_6x_{12}$, коэффициент — 4320.

21) $3A_2$ — соответствует трём попарно перпендикулярным парам, то есть $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}$:



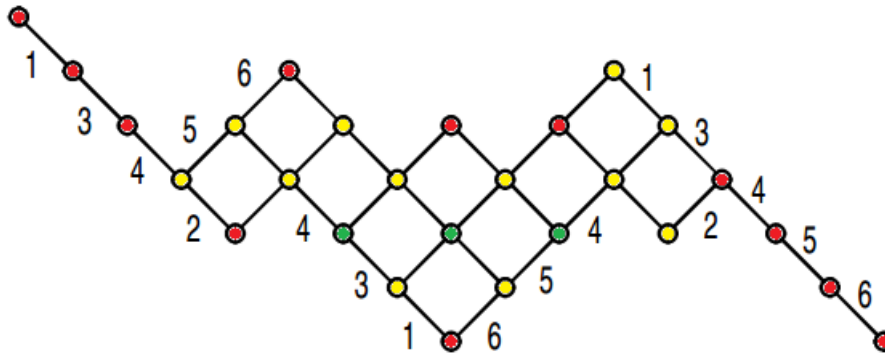
Видно 9 циклов типа 3, одночлен — x_3^9 , коэффициент — 80.

22) $A_5 + A_1$ — соответствует перпендикулярной пятёрке и одиночному корню, то есть $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}$:



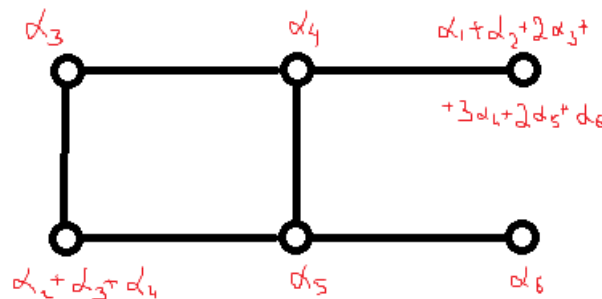
Видно 4 цикла типа 6 и 1 цикл типа 3, одночлен — $x_3x_6^4$, коэффициент — 1440.

23) E_6 — соответствует $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}$:

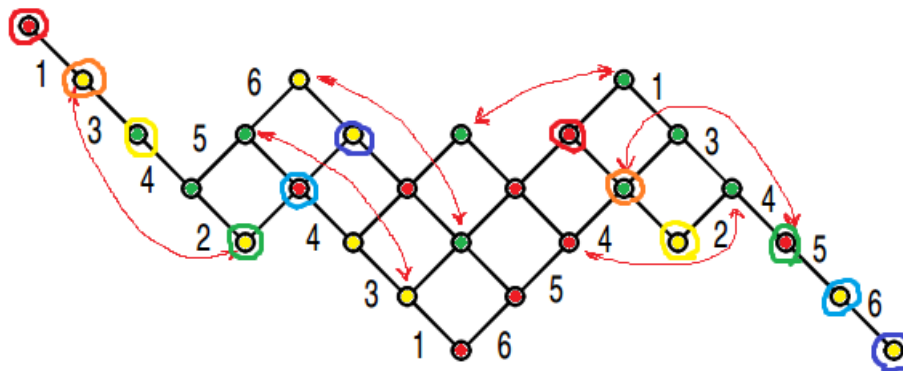


Видно 2 цикла типа 12 и 1 цикл типа 3, одночлен — $x_3x_{12}^2$, коэффициент — 4320.

24) $E_6(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особая картинка, цикл из четырёх с двумя рёбрами наружу из соседних вершин. Подходящие корни, например, такие:

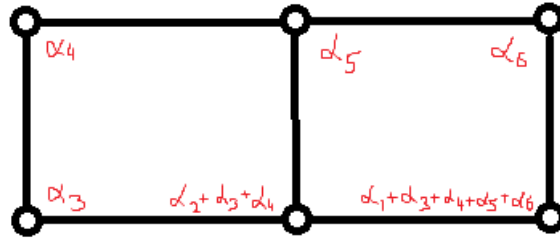


Нетрудно убедиться, что новый корень $a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = e_0 + e_4 + e_5 + e_6$ не ортогонален $a_4 = e_4 - e_3$ и ортогонален всем остальным. Единственная нетривиальная ортогональность $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$ следует из того, что $e_0^2 = -1$. Соответствующее отражение будет $w_{a_1+a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6}w_{a_5}w_{a_3}w_{a_6}w_{a_4}w_{a_2+a_3+a_4}$:

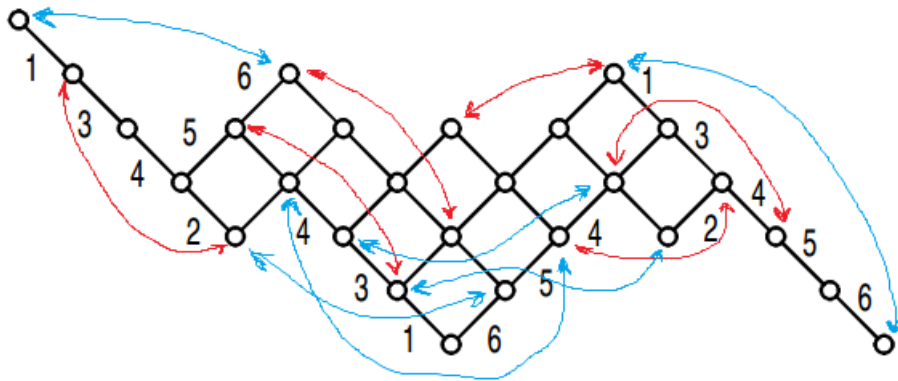


Видно 3 цикла типа 9, одночлен — x_9^3 , коэффициент — 5760.

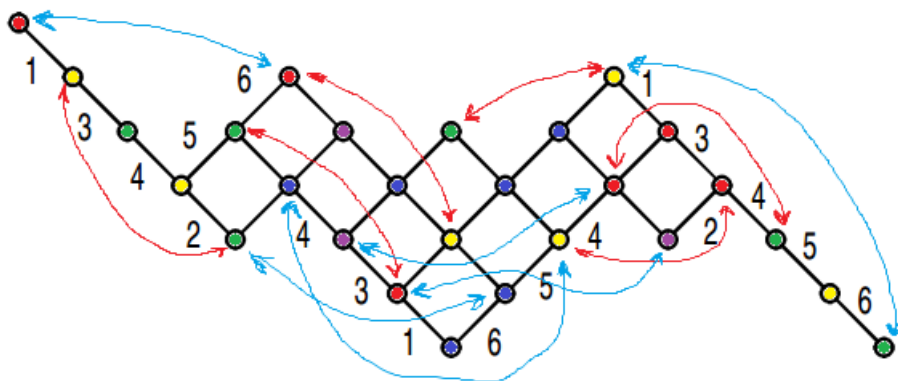
25) $E_6(\mathbf{a}_2)$ — соответствует особая картинка, цикл из четырёх с двумя рёбрами из соседних вершин цикла в соединённые снаружи вершины. Подходящие корни, например, такие:



Нетрудно убедиться в том, что новый $a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = e_6 - e_1$ не ортогонален $a_6 = e_6 - e_5$ и $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$ и ортогонален всем остальным. Значит, соответственное отражение будет иметь вид $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$, где $w_{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6}$ меняет местами концы голубых линий:



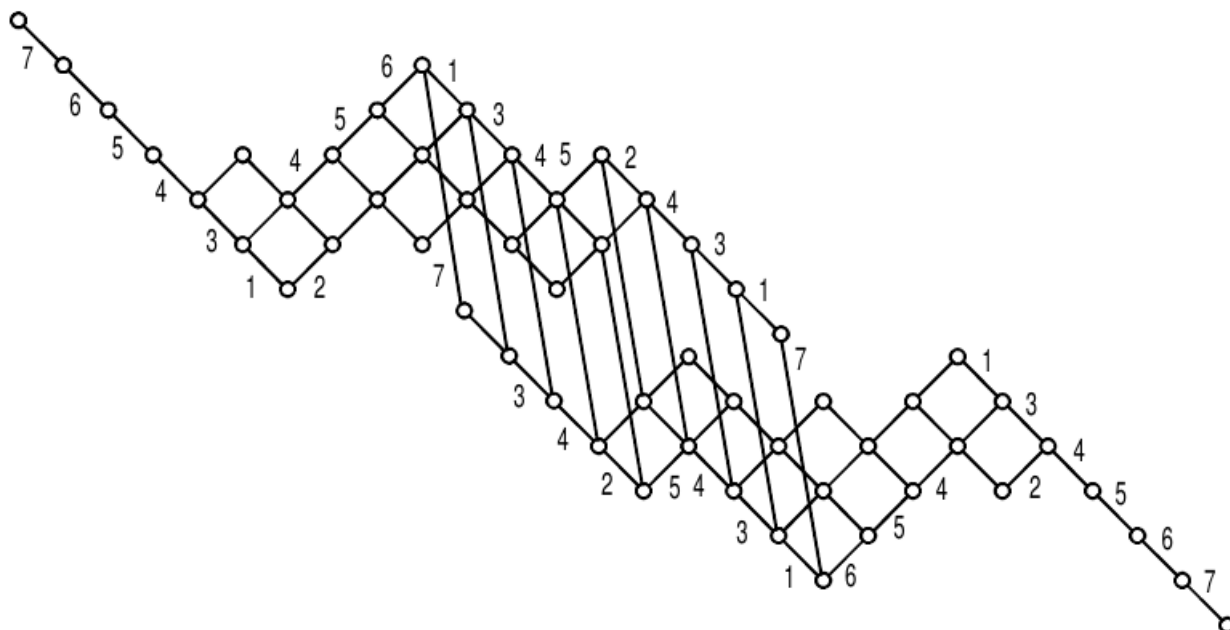
Тогда цикленное разбиение устроено так:



Видно 4 цикла типа 6 и 1 цикл типа 3, одночлен $-x_3 x_6^4$, коэффициент -720 .

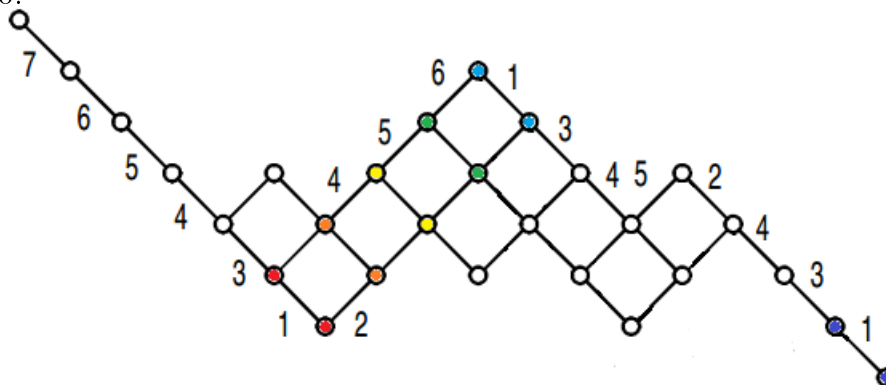
В Цикловой индекс E_7

1) \emptyset — соответствует тождественное отображение, оно оставляет все элементы на месте:



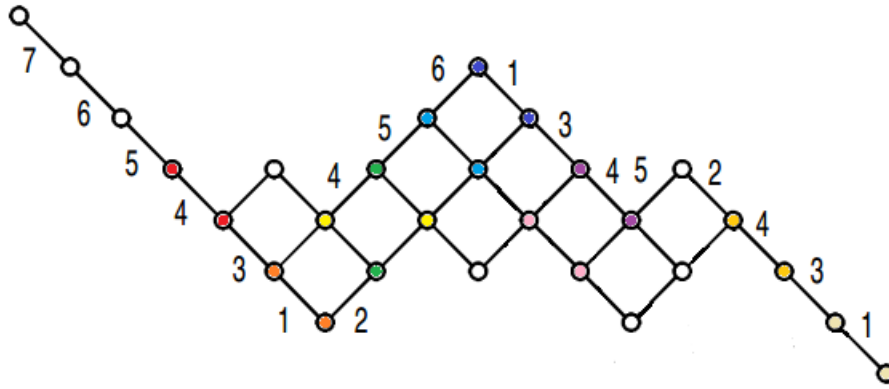
Все циклы типа 1, одночлен — x_1^{56} , коэффициент — 1.

2) A_1 — соответствует симметрия относительно одного из корней, для примера подойдёт w_{a_1} . Оно меняет местами элементы на концах 1, остальные оставляет на месте. В дальнейшем, пока не будет возникать w_{a_7} , можно рассматривать не всю диаграмму, а только верхнюю её половину, так как в другой части всё происходит аналогично:



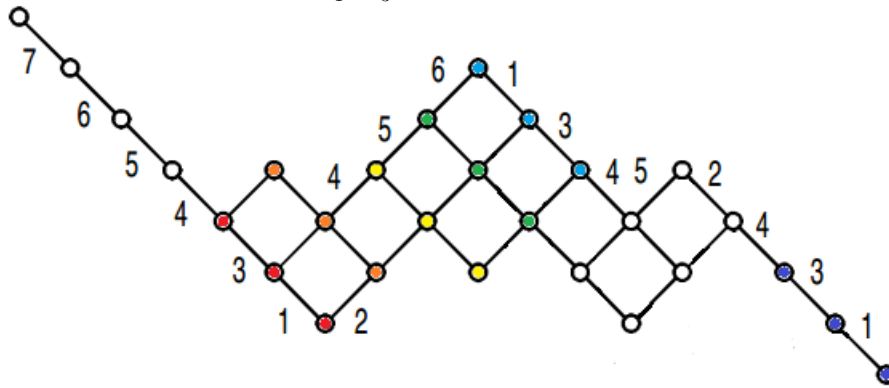
Видно 12 циклов типа 2 и 32 цикла типа 1, одночлен — $x_1^{32}x_2^{12}$, коэффициент — $3^2 \cdot 7$.

3) $2A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух перпендикулярных корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_4}$. Оно меняет местами сначала элементы на концах 4, затем на концах 1, остальное оставляет на месте:



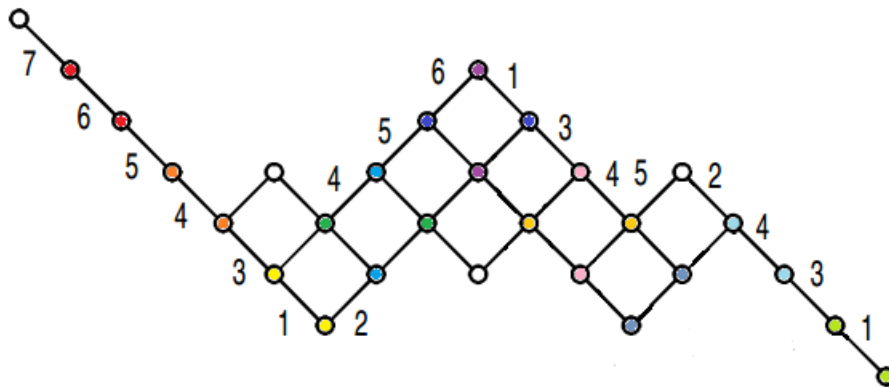
Видно 20 циклов типа 2 и 16 циклов типа 1, одночлен — $x_1^{16}x_2^{20}$, коэффициент — $3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

4) \mathbf{A}_2 — соответствует последовательной симметрии относительно двух соседних корней, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_3}$:



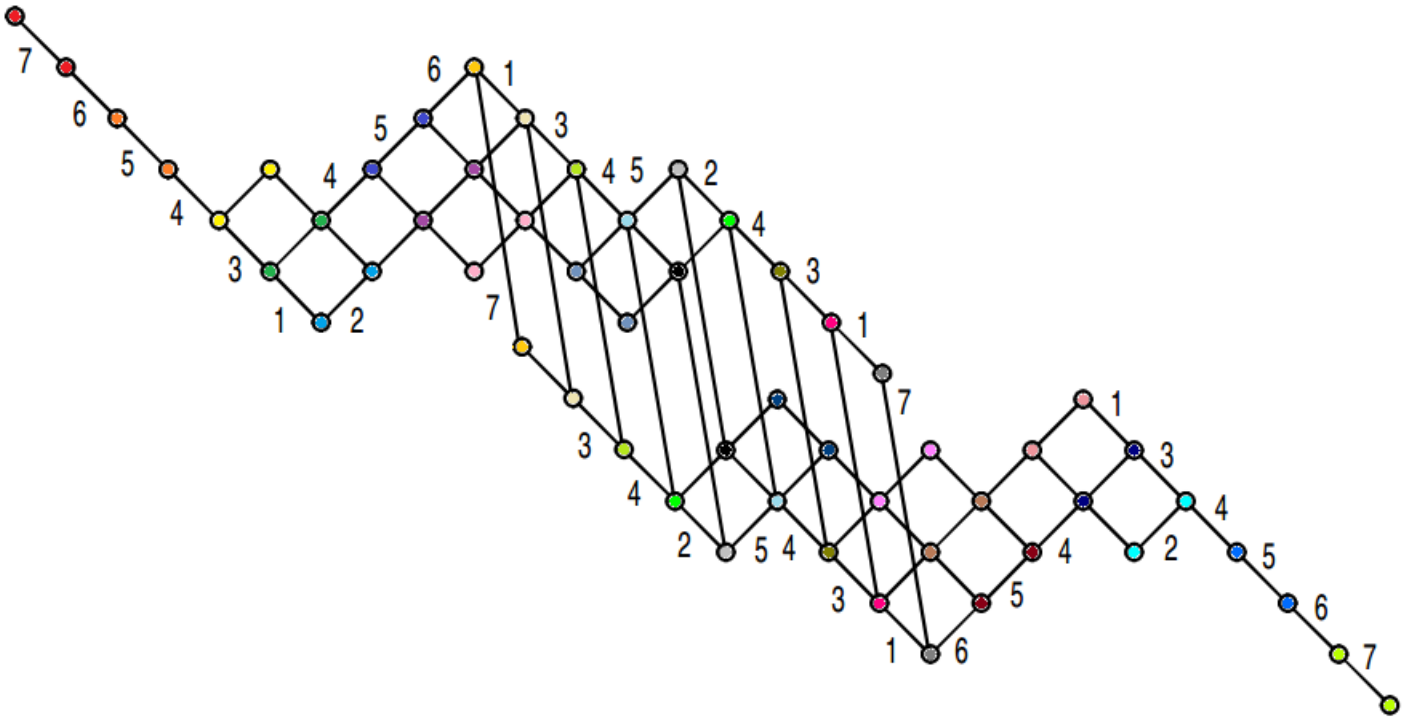
Видно 12 циклов типа 3 и 20 циклов типа 1, одночлен — $x_1^{20}x_3^{12}$, коэффициент — $2^5 \cdot 3 \cdot 7$.

5) $(\mathbf{3A}_1)'$ — соответствует последовательной симметрии относительно трёх перпендикулярных корней, ни один из которых не является a_2 , для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_4}w_{a_6}$:



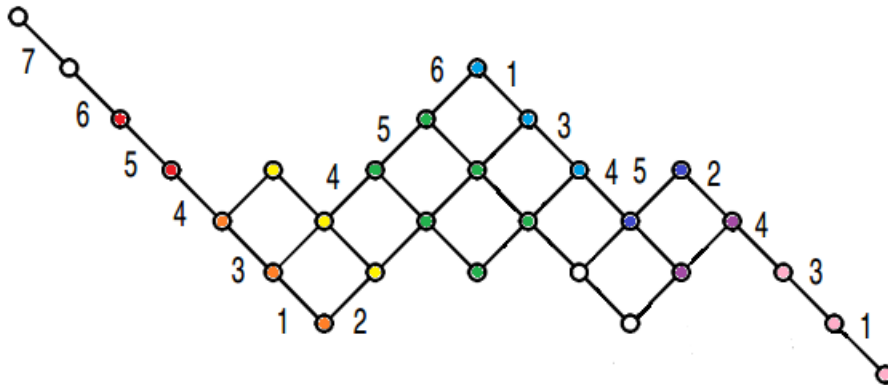
Видно 24 цикла типа 2 и 8 циклов типа 1, одночлен — $x_1^8x_2^{24}$, коэффициент — $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

6) $(\mathbf{3A}_1)''$ — получается из $(\mathbf{3A}_1)'$ заменой a_3 или a_5 на a_2 . Так как в нашем примере для $(\mathbf{3A}_1)'$ выше использовалось $w_{a_1}w_{a_4}w_{a_6}$, которое не содержит ни a_3 , ни a_5 , то здесь придётся для $(\mathbf{3A}_1)'$ взять пример $w_{a_3}w_{a_5}w_{a_7}$ и заменить в нём a_3 на a_2 , получив $w_{a_2}w_{a_5}w_{a_7}$:



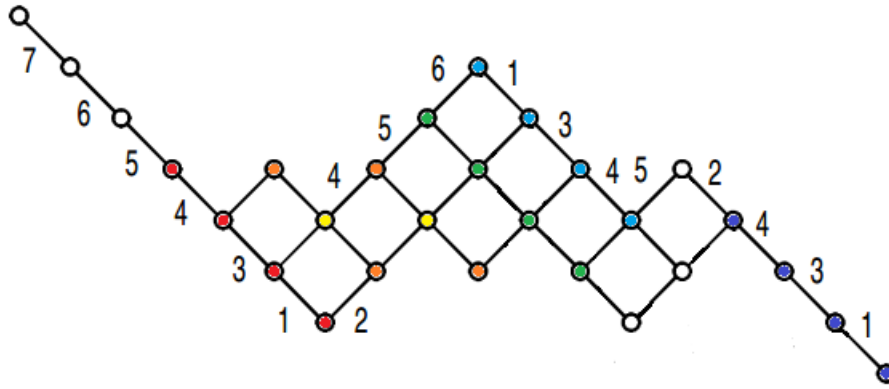
Видно 28 циклов типа 2, одночлен — x_2^{28} , коэффициент — $3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

7) $\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух соседних и одного перпендикулярного им корня, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5}$:



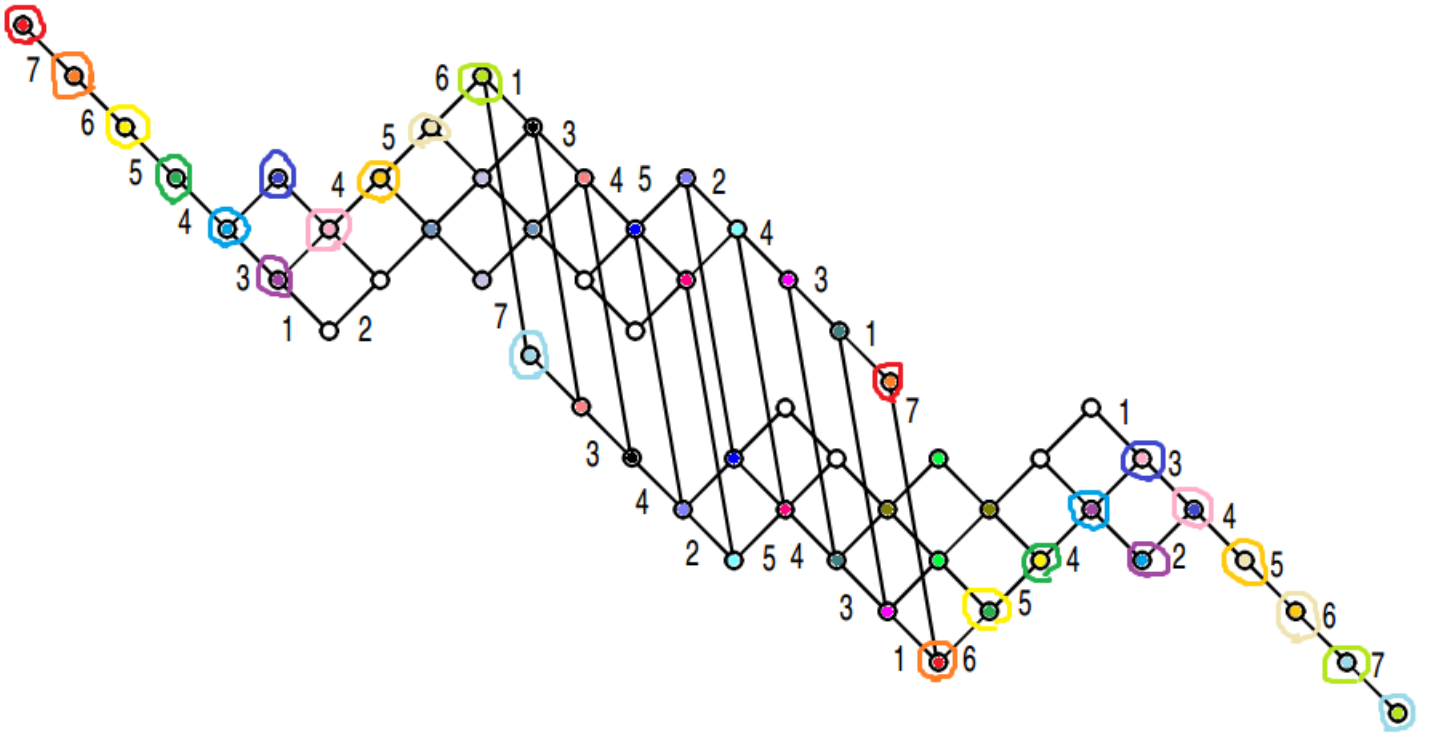
Видно 2 цикла типа 6, 8 циклов типа 3, 6 циклов типа 2 и 8 циклов типа 1, одночлен — $x_1^8 x_2^6 x_3^8 x_6^2$, коэффициент — $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

8) \mathbf{A}_3 — соответствует последовательной симметрии относительно трёх последовательных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4}$:



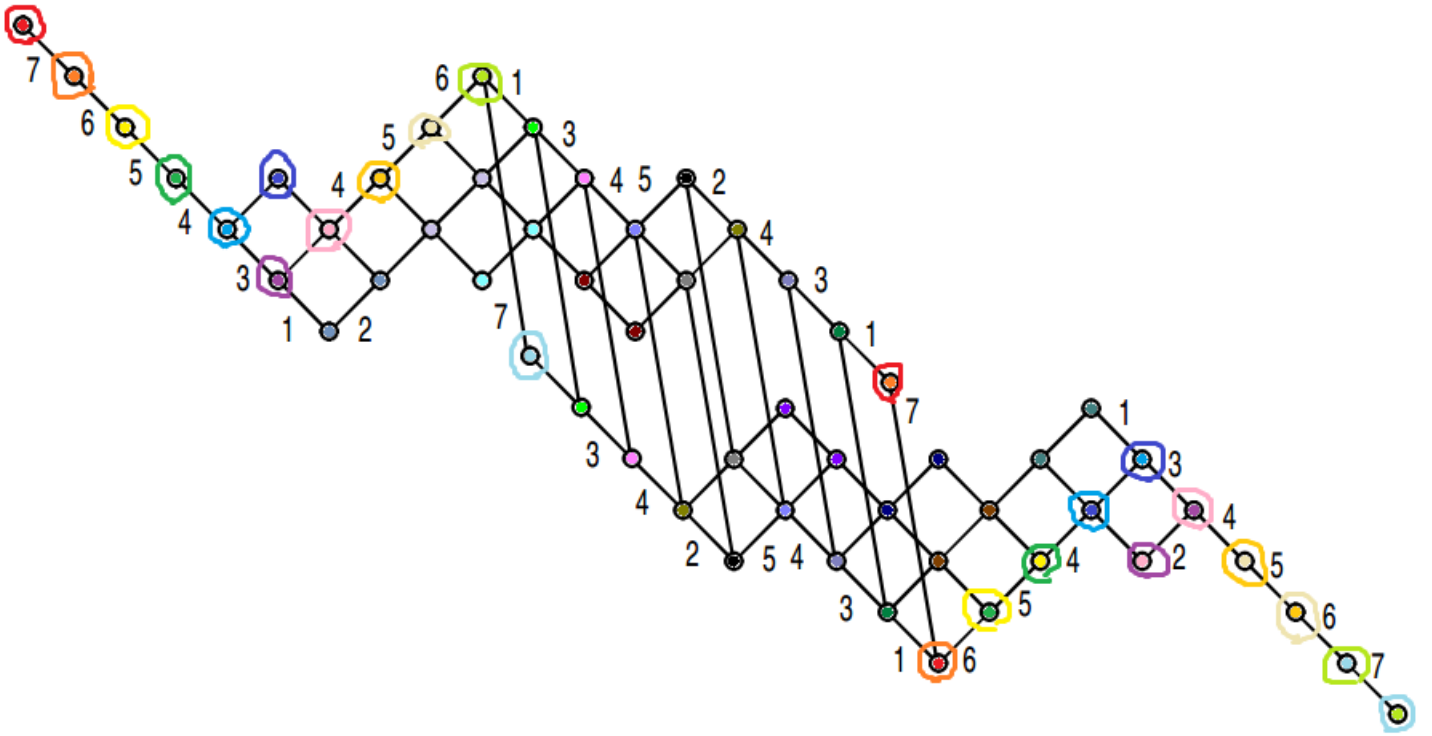
Видно 10 циклов типа 4, 2 цикла типа 2 и 12 циклов типа 1, одночлен — $x_1^{12}x_2^2x_4^{10}$, коэффициент — $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

9) $(4A_1)'$ — соответствует последовательной симметрии относительно четырёх перпендикулярных корней, без задеиствия a_2 , для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_7}$, где a_0 — максимальный корень, на диаграмме он связывает обведённые соответственным цветом вершины:



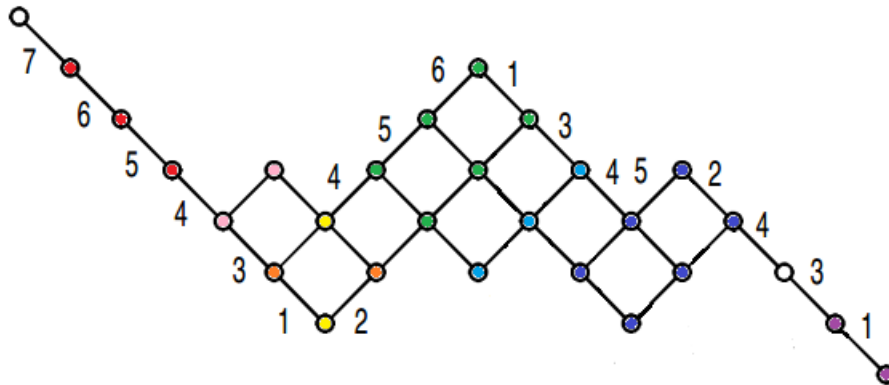
Видно 24 цикла типа 2 и 8 циклов типа 1, одночлен — $x_1^8x_2^{24}$, коэффициент — $3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

10) $(4A_1)''$ — получается из $(3A_1)'$ заменой a_3 или a_5 на a_2 , для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_2}w_{a_5}w_{a_7}$:



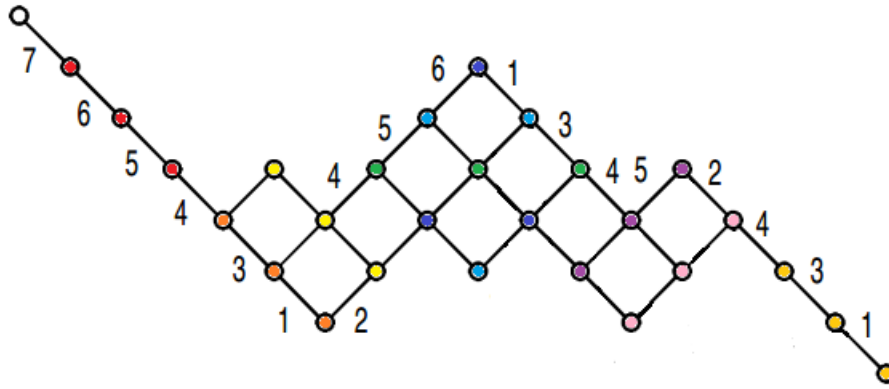
Видно 28 циклов типа 2, одночлен $-x_2^{28}$, коэффициент $-2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

11) $A_2 + 2A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух смежных и двух ортогональных остальным корням, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_5} w_{a_6}$:



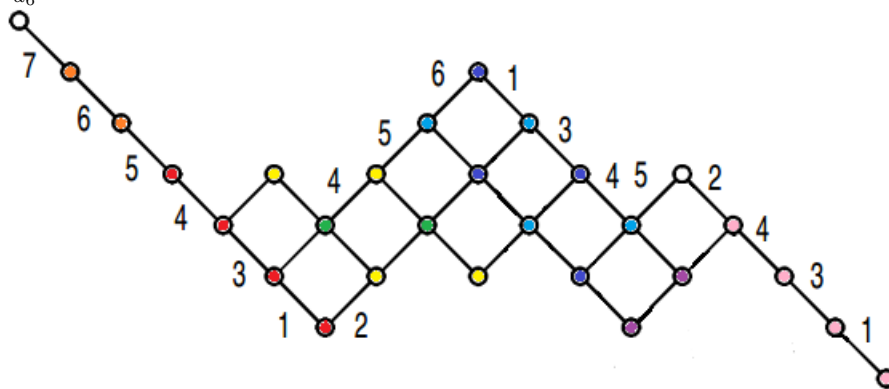
Видно, что 4 цикла типа 6, 4 цикла типа 3, 8 циклов типа 2 и 4 цикла типа 1, одночлен $-x_1^4 x_2^8 x_3^4 x_6^4$, коэффициент $-2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

12) $2A_2$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух ортогональных пар смежных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6}$:



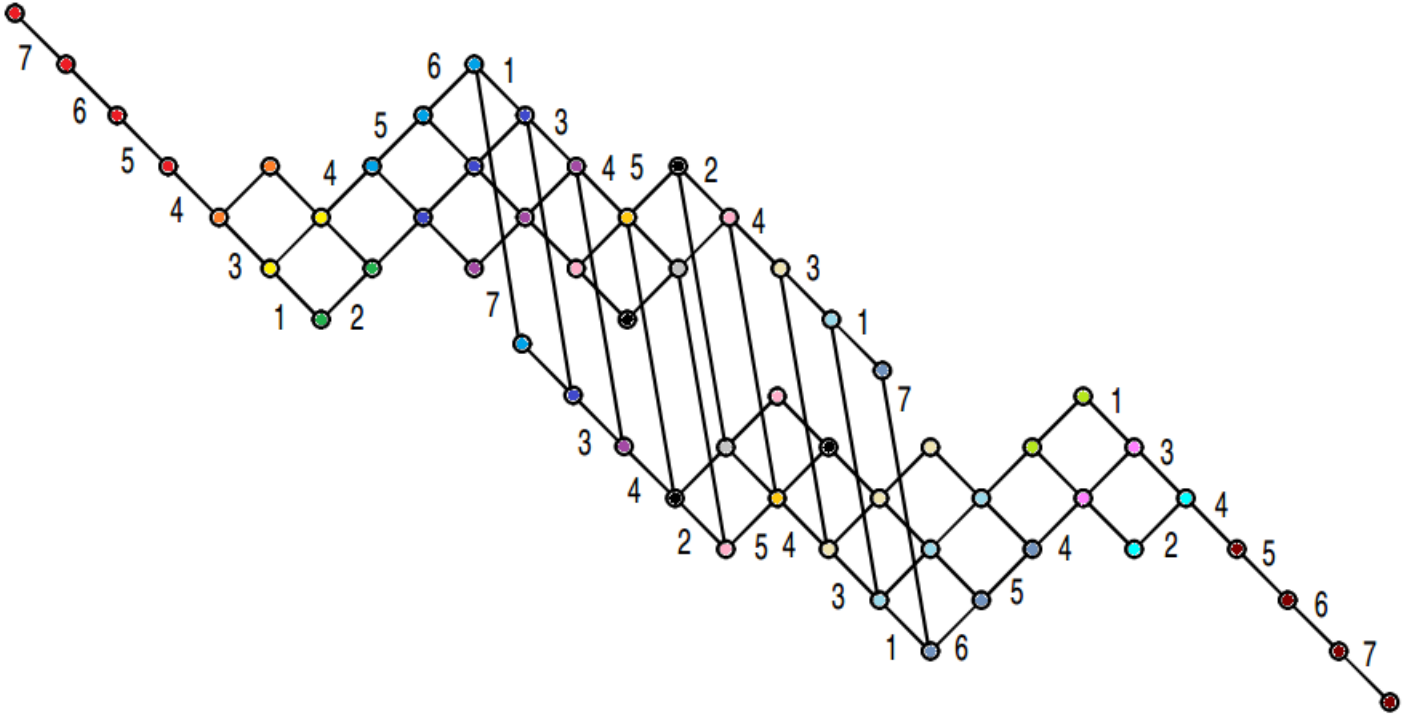
Видно 18 циклов типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен $-x_1^2 x_3^{18}$, коэффициент $-2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

13) $(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1)'$ — соответствует последовательной симметрии относительно ортогонального корня и трёх смежных корней, без задействия a_2 , для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_6}$:



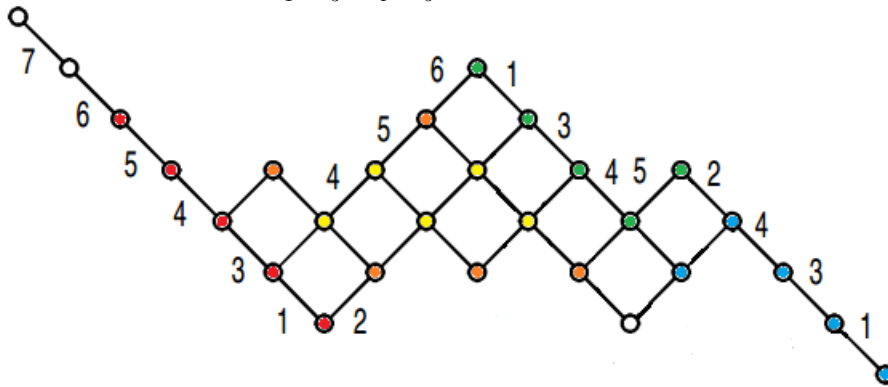
Видно 10 циклов типа 4, 6 циклов типа 2 и 4 цикла типа 1, одночлен $-x_1^4 x_2^6 x_4^{10}$, коэффициент $-2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

14) $(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1)''$ — получается из $(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1)'$ задействием a_2 вместо a_3 или a_5 , для примера на $(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1)'$ подойдёт $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$, тогда в этом случае будет $w_{a_2} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



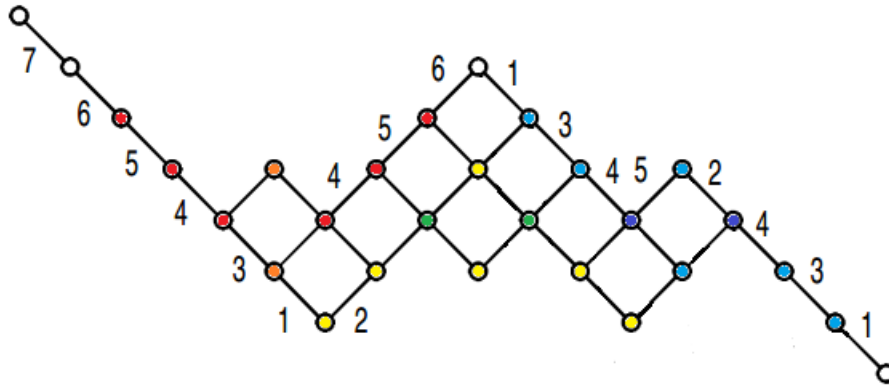
Видно 10 циклов типа 4 и 8 циклов типа 2, одночлен — $x_2^8 x_4^{10}$, коэффициент — $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

15) A_4 — соответствует симметрии относительно четырёх последовательных корней, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5}$:



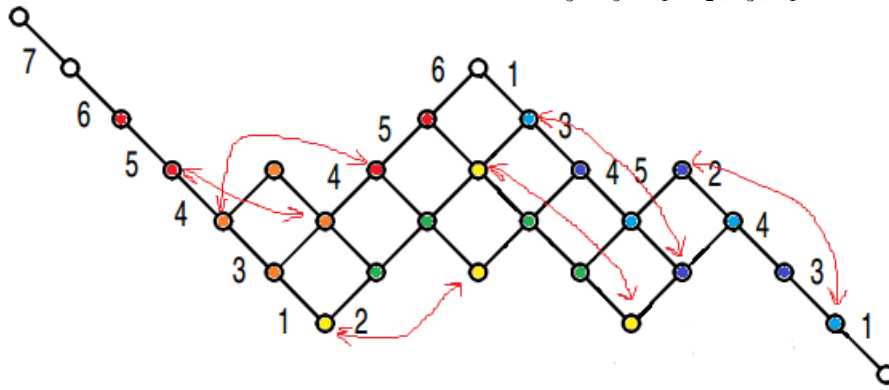
Видно 10 циклов типа 5 и 6 циклов типа 1, одночлен — $x_1^6 x_5^{10}$, коэффициент — $2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$.

16) D_4 — соответствует симметрии относительно четырёх корней, образующих «букву Г», то есть $w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5}$:



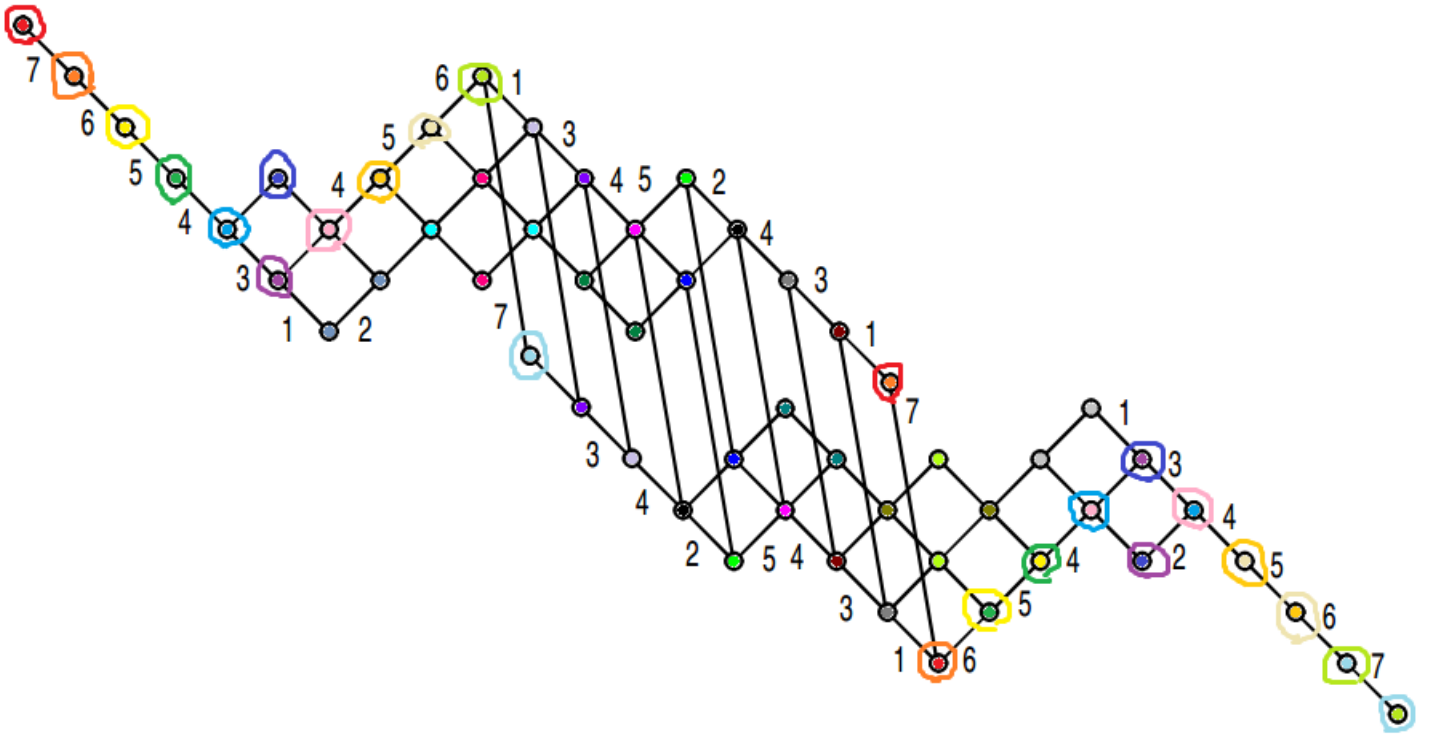
Видно 6 циклов типа 6, 6 циклов типа 2 и 8 циклов типа 1, одночлен — $x_1^8 x_2^6 x_6^6$, коэффициент — $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

17) $D_4(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особая картинка, а именно замкнутый цикл из четырёх, точно такая же, как и для E_6 , то есть это $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$:



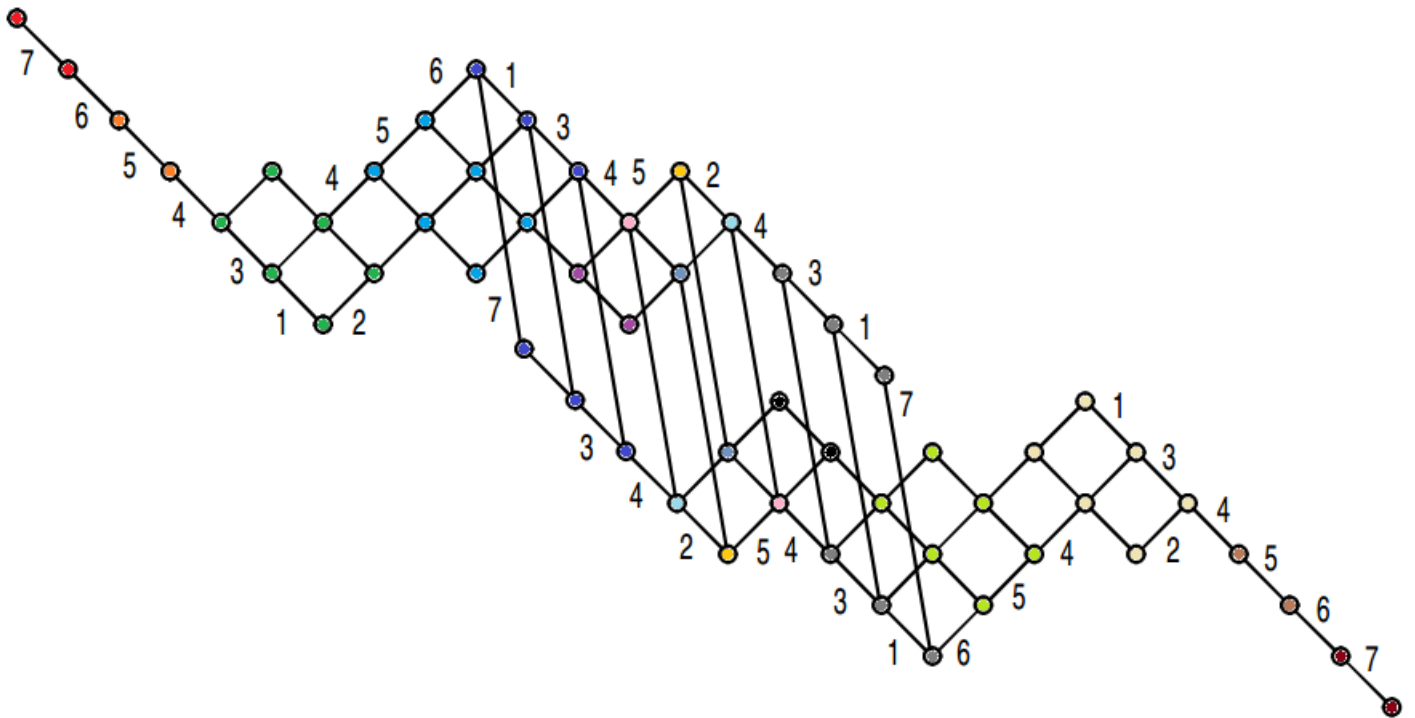
Видно 12 циклов типа 4 и 8 циклов типа 1, одночлен — $x_1^8 x_4^{12}$, коэффициент — $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

18) $5A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно пяти перпендикулярных корней, это бывает только для $w_{a_0} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_7}$:



Видно 28 циклов типа 2, одночлен $-x_2^{28}$, коэффициент $-3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

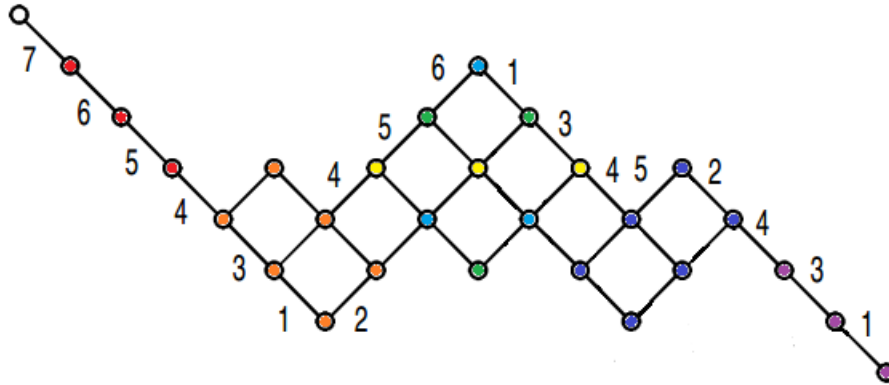
19) $A_2 + 3A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно пары и тройки одиночного корня, всех перпендикулярных между собой, для примера пойдёт $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_7}$:



Видно 6 циклов типа 6 и 10 циклов типа 2, одночлен $-x_2^{10}x_6^6$, коэффициент $-2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

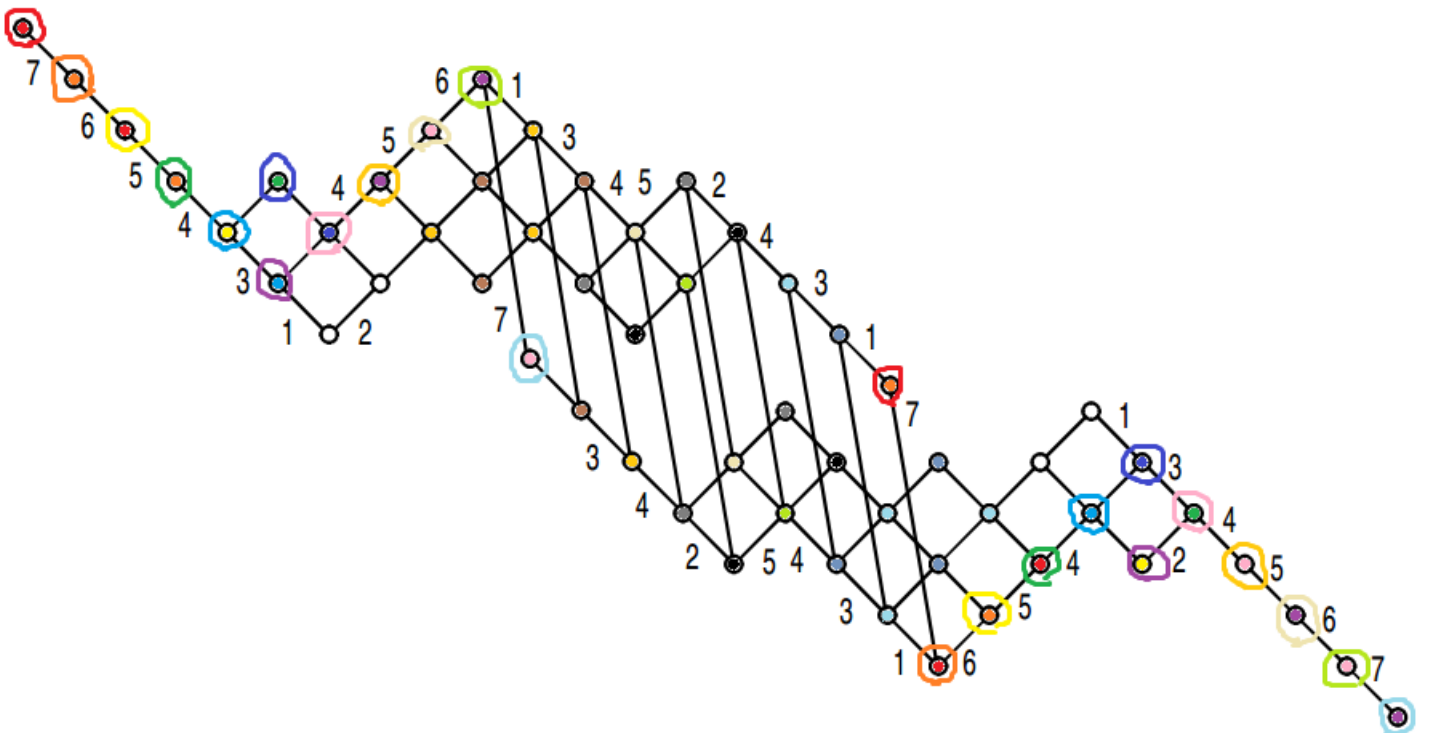
20) $2A_2 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно двух

пар и одиночного корня, всех перпендикулярных между собой, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}$:



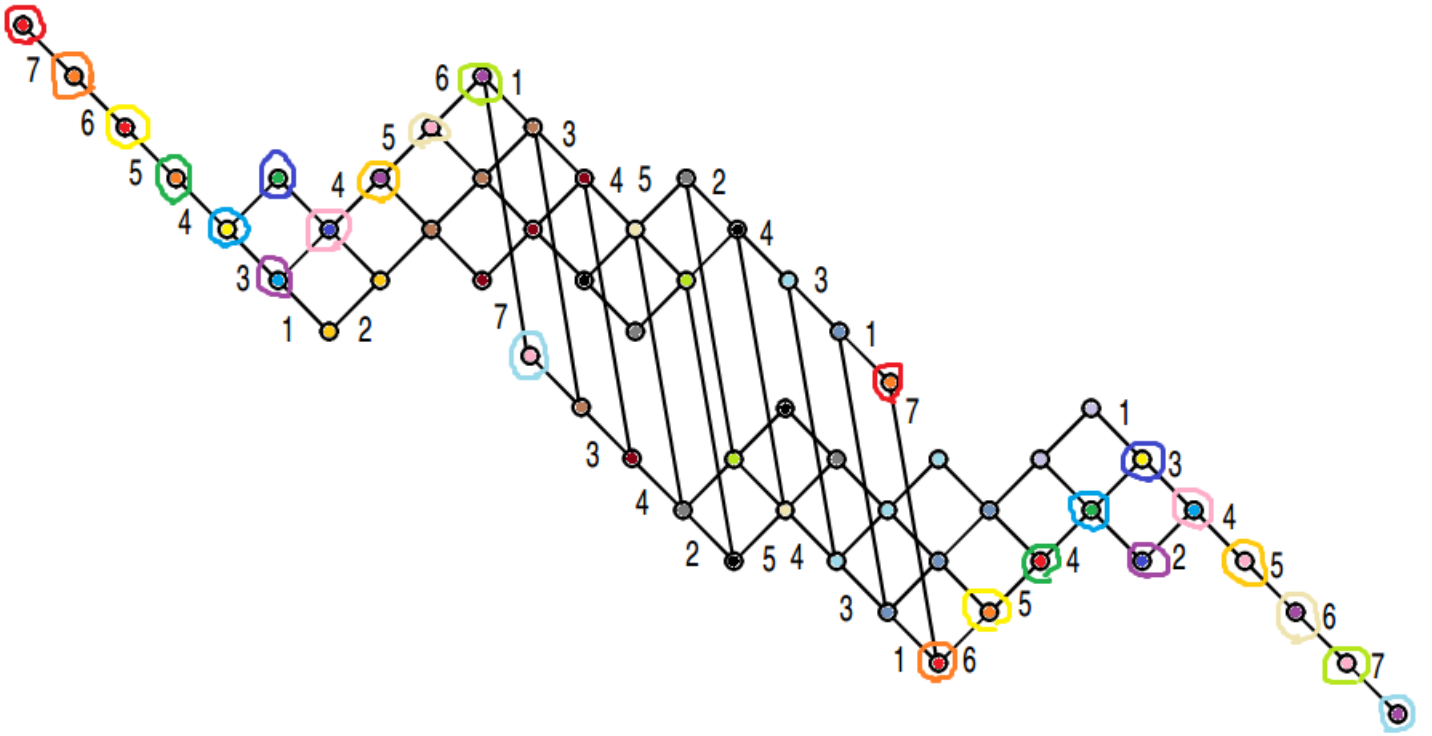
Видно 4 цикла типа 6, 10 циклов типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2x_3^{10}x_6^4$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

21) $(A_3 + 2A_1)'$ — соответствует последовательной симметрии относительно тройки и двух одиночных корней, всех перпендикулярных между собой и без задеиствия a_2 , для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



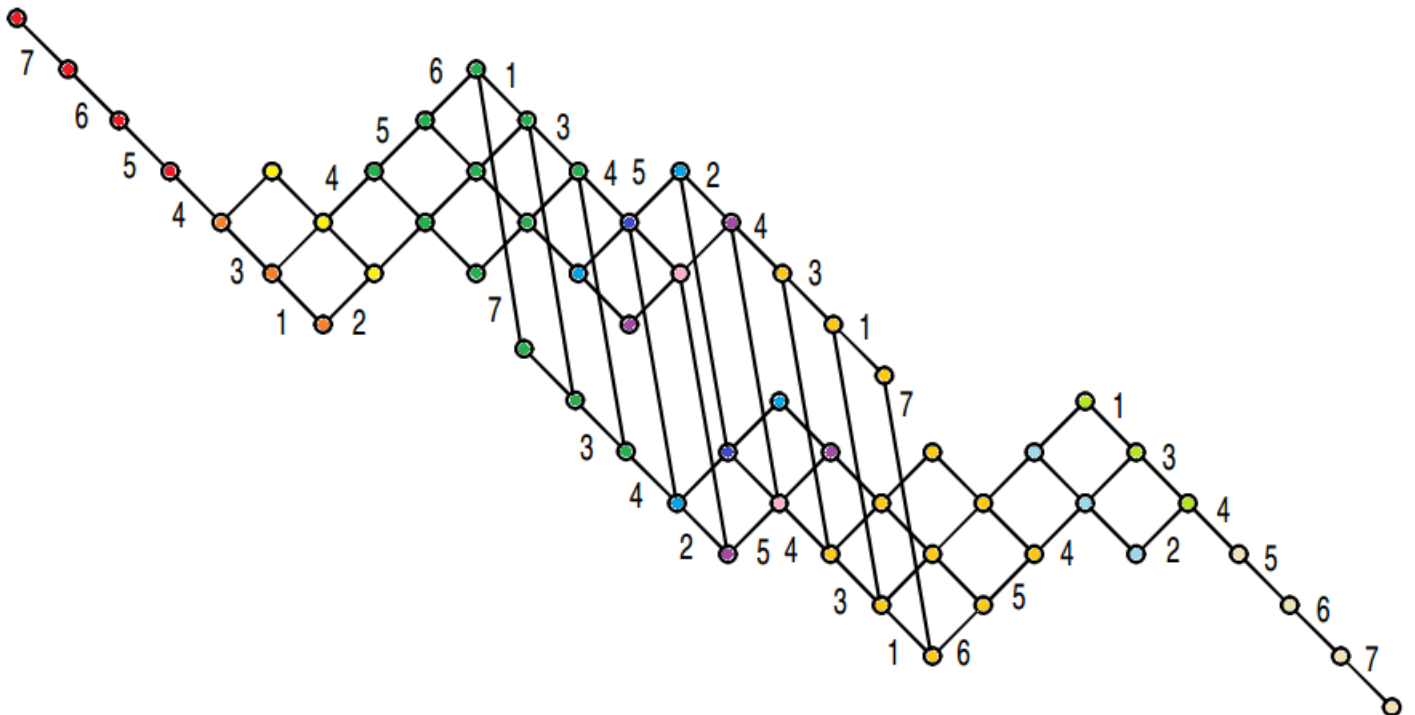
Видно 10 циклов типа 4, 6 циклов типа 2 и 4 цикла типа 1, одночлен — $x_1^4x_2^6x_4^{10}$, коэффициент — $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

22) $(A_3 + 2A_1)''$ — получается из $(A_3 + 2A_1)'$ заменой a_3 на a_2 , то есть $w_{a_0}w_{a_2}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



Видно 10 циклов типа 4 и 8 циклов типа 2, одночлен — $x_2^8 x_4^{10}$, коэффициент — $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

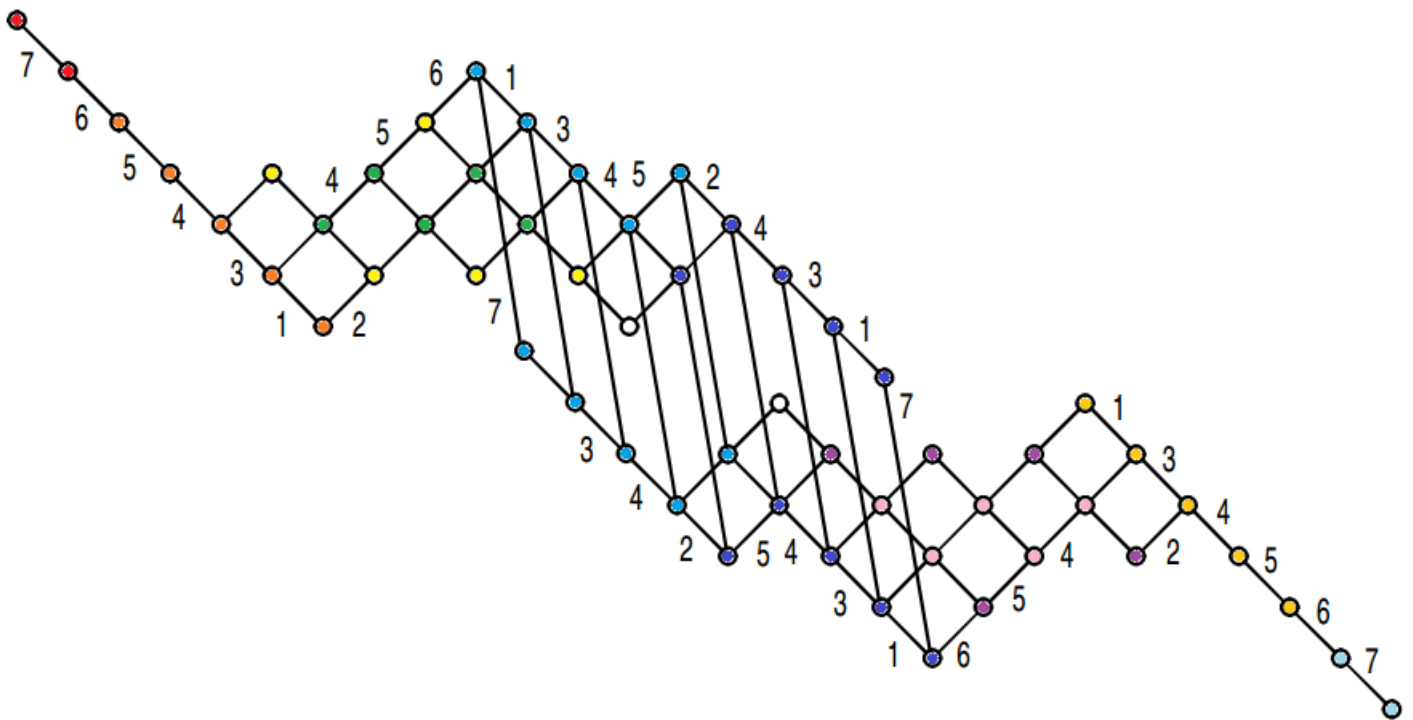
23) $A_3 + A_2$ — соответствует последовательной симметрии относительно тройки и пары, перпендикулярных между собой, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



Видно 2 цикла типа 12, 4 цикла типа 4, 4 цикла типа 3 и 2 цикла типа 2, одночлен — $x_2^2 x_3^4 x_4^4 x_{12}^2$, коэффициент — $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

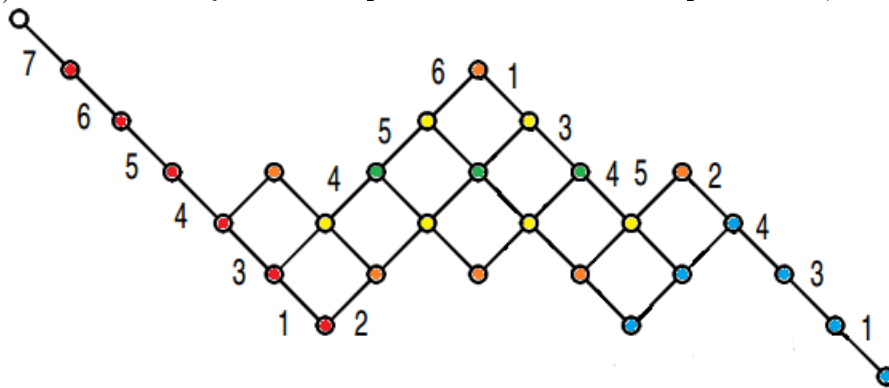
24) $A_4 + A_1$ — соответствует последовательной симметрии относительно перпен-

дикулярных четвёрки и одиночного корня, для примера подойдёт $w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_7}$:



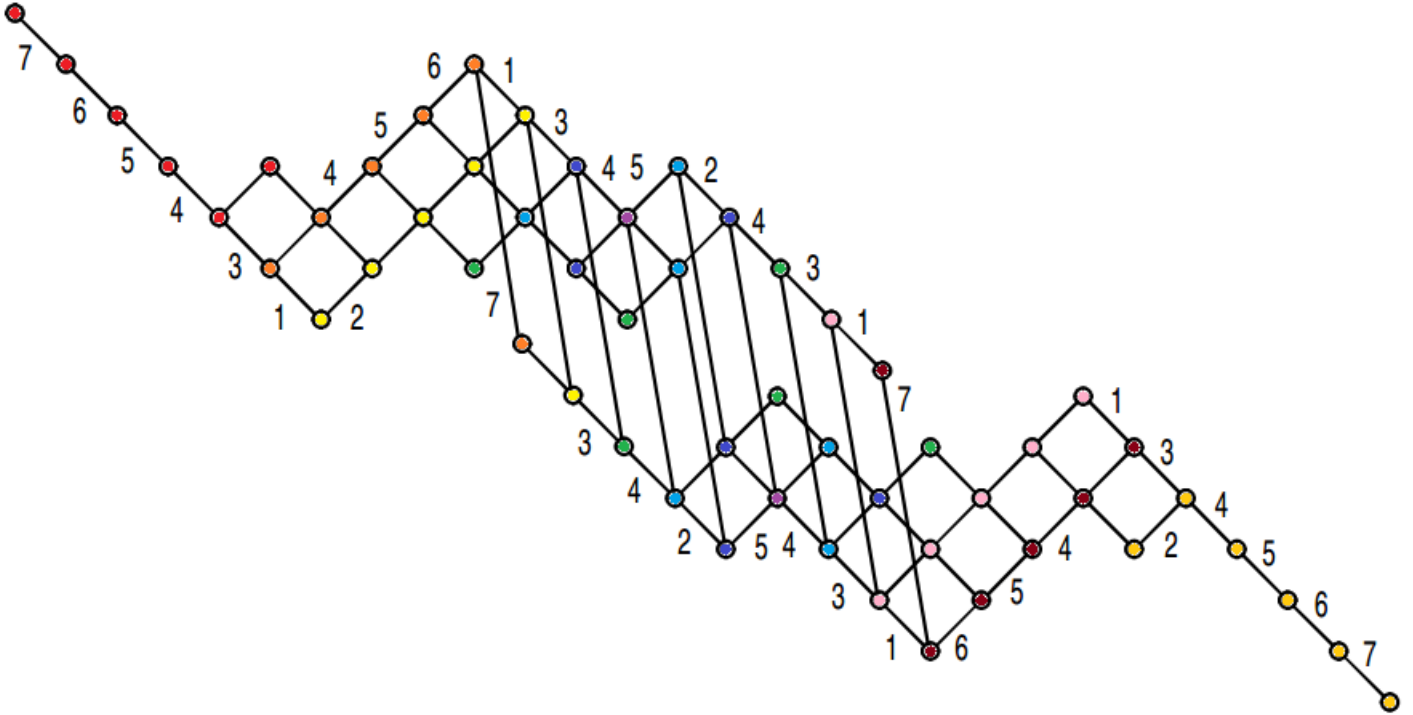
Видно 2 цикла типа 10, 6 циклов типа 5, 2 цикла типа 2 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2x_2^2x_5^6x_{10}^2$, коэффициент — $2^8 \cdot 3^4 \cdot 7$.

25) $(A_5)'$ — соответствует симметрии относительно пятёрки без a_2 , то есть $w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}$:



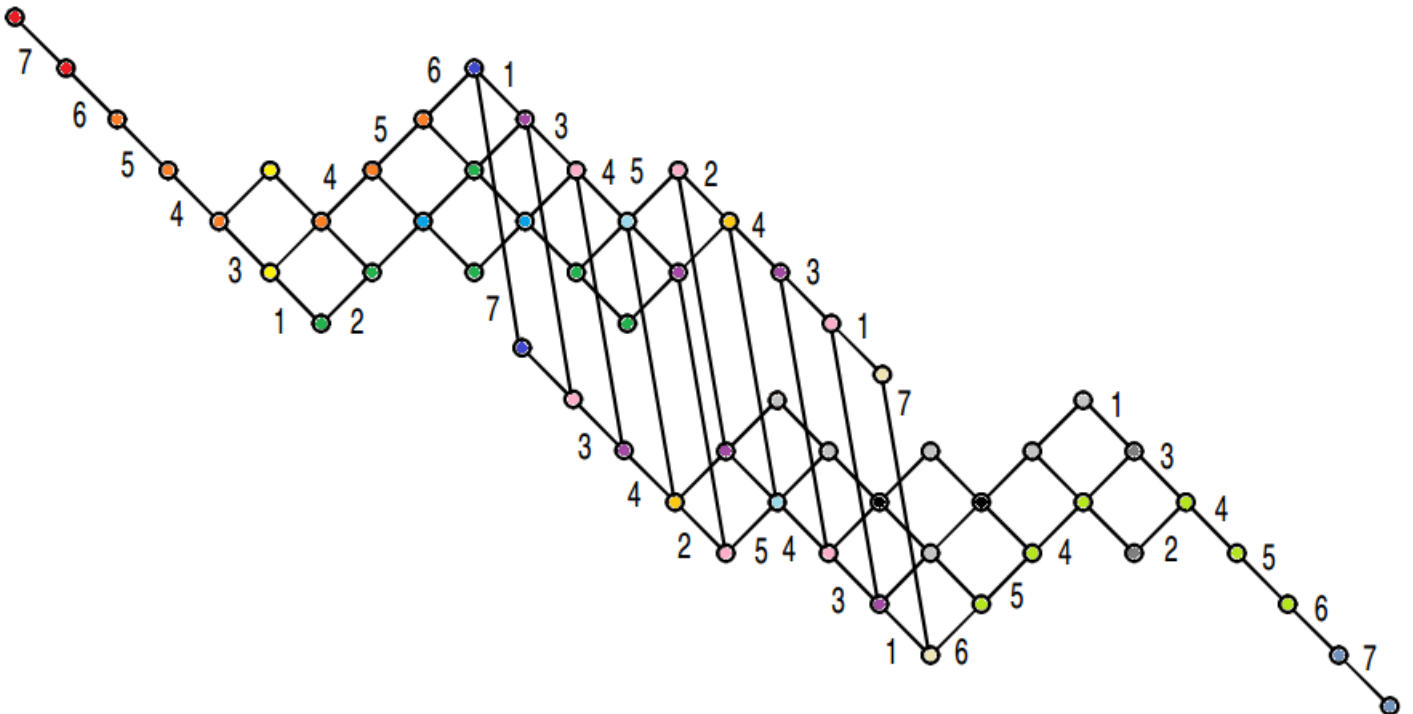
Видно 8 циклов типа 6, 2 цикла типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2x_3^2x_6^8$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

26) $(A_5)''$ — получается из $(A_5)'$ заменой a_3 на a_2 , то есть $w_{a_2}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



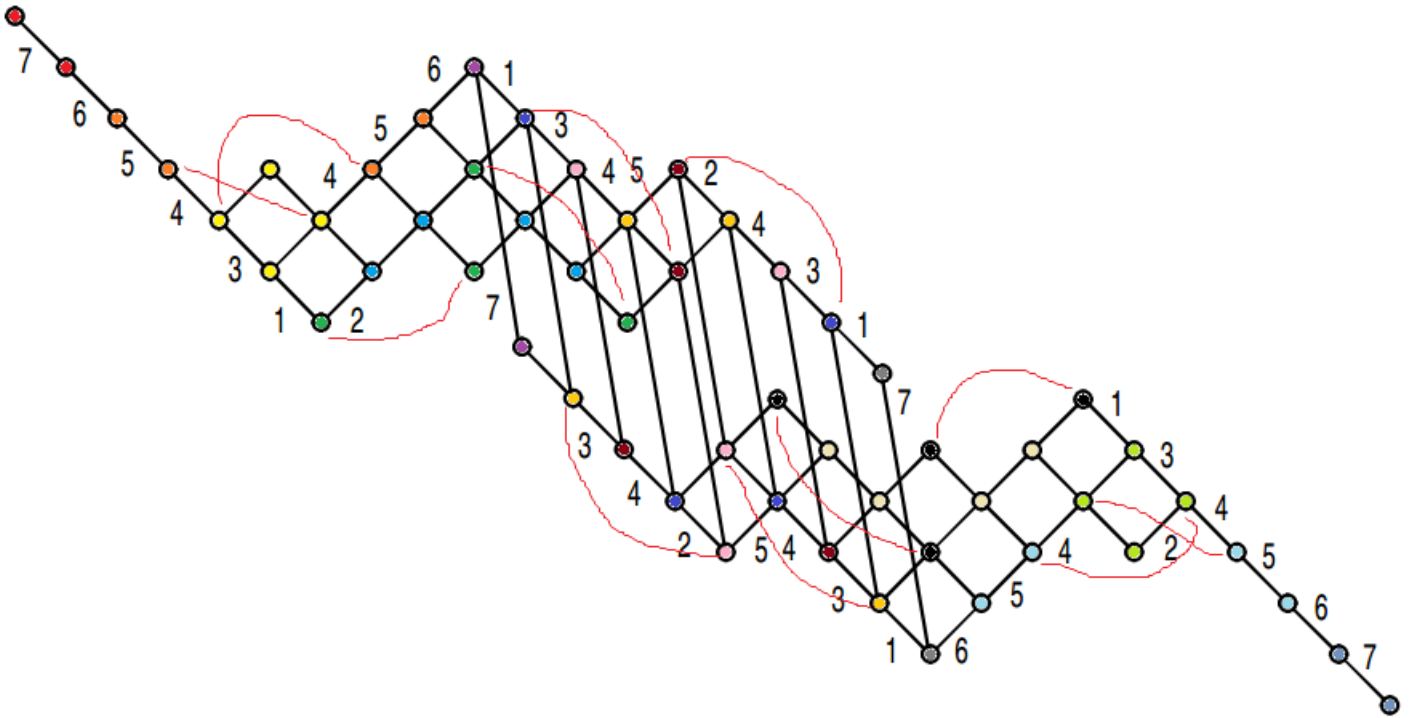
Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2 x_6^9$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

27) $D_4 + A_1$ — соответствует симметрии относительно четвёрки вида «Г» и перпендикулярного ей корня, для примера подойдёт $w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_7}$:



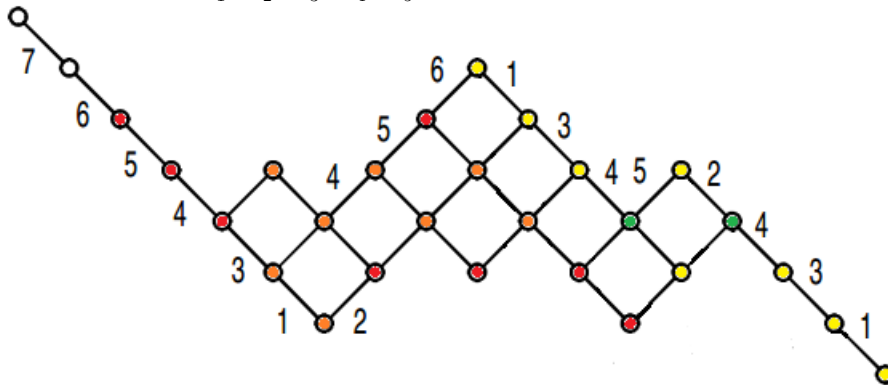
Видно 6 циклов типа 6 и 10 циклов типа 2, одночлен — $x_2^{10} x_6^6$, коэффициент — $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

28) $D_4(a_1) + A_1$ — соответствует симметрии относительно $D_4(a_1)$ и перпендикулярного ей корня, для примера подойдёт $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_7} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$:



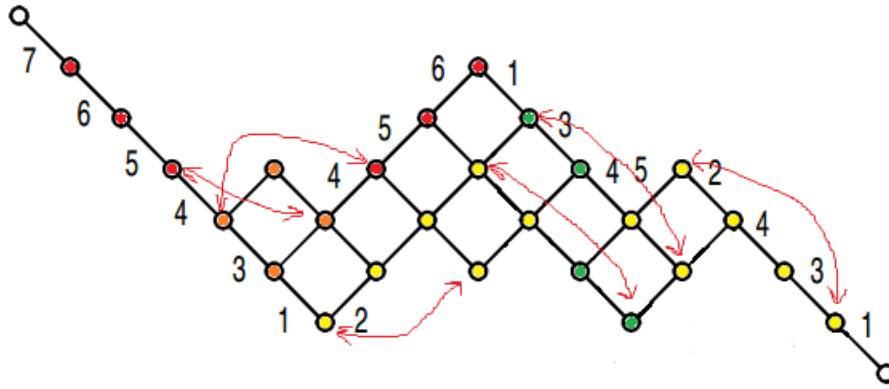
Видно 12 циклов типа 4 и 4 цикла типа 2, одночлен $-x_2^4 x_4^{12}$, коэффициент $-2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

29) D_5 — соответствует симметрии относительно пятёрки вида «удлинённая Г», для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5}$:



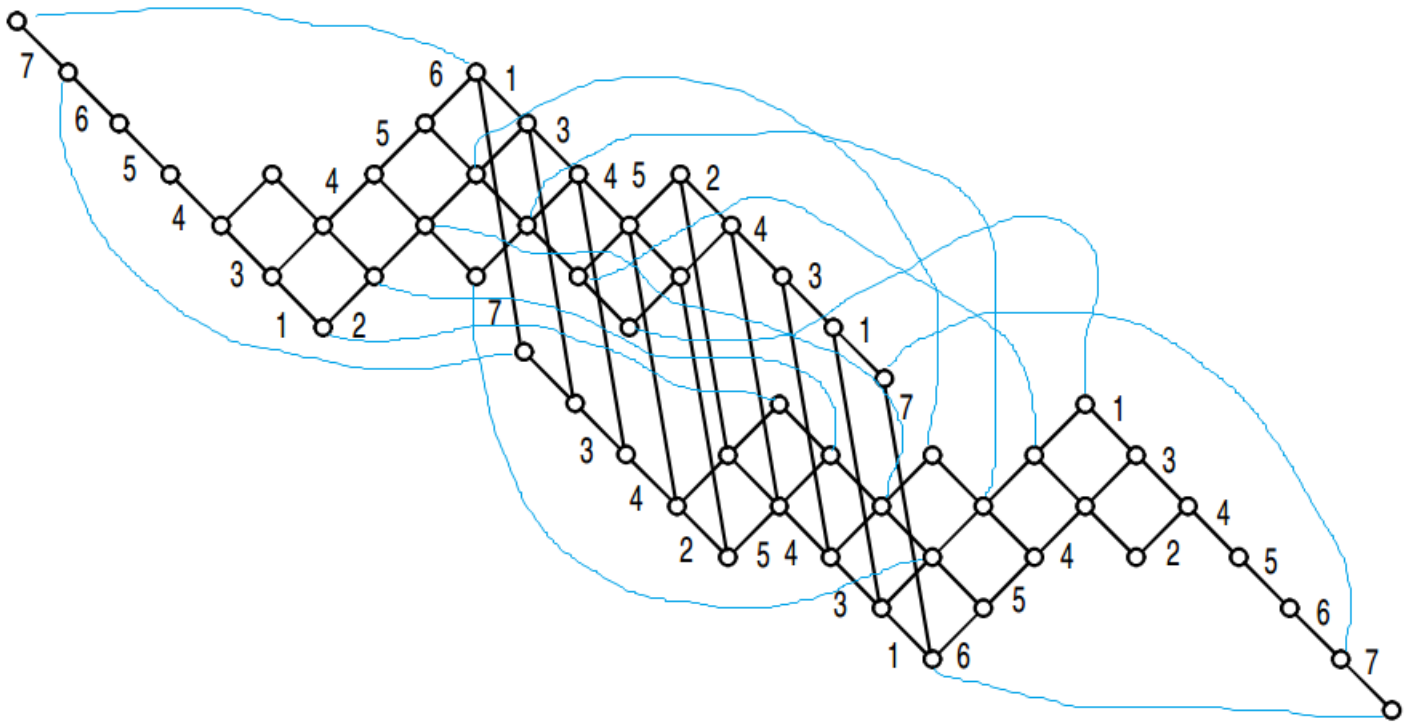
Видно 6 циклов типа 8, 2 цикла типа 2 и 4 цикла типа 1, одночлен $-x_1^4 x_2^2 x_8^6$, коэффициент $-2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

30) $D_5(a_1)$ — соответствует особая картинка, а именно замкнутый цикл из четырёх с ребром наружу, точно такая же, как и для E_6 , то есть отражение будет устроено как $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$ и цикленное разбиение будет:

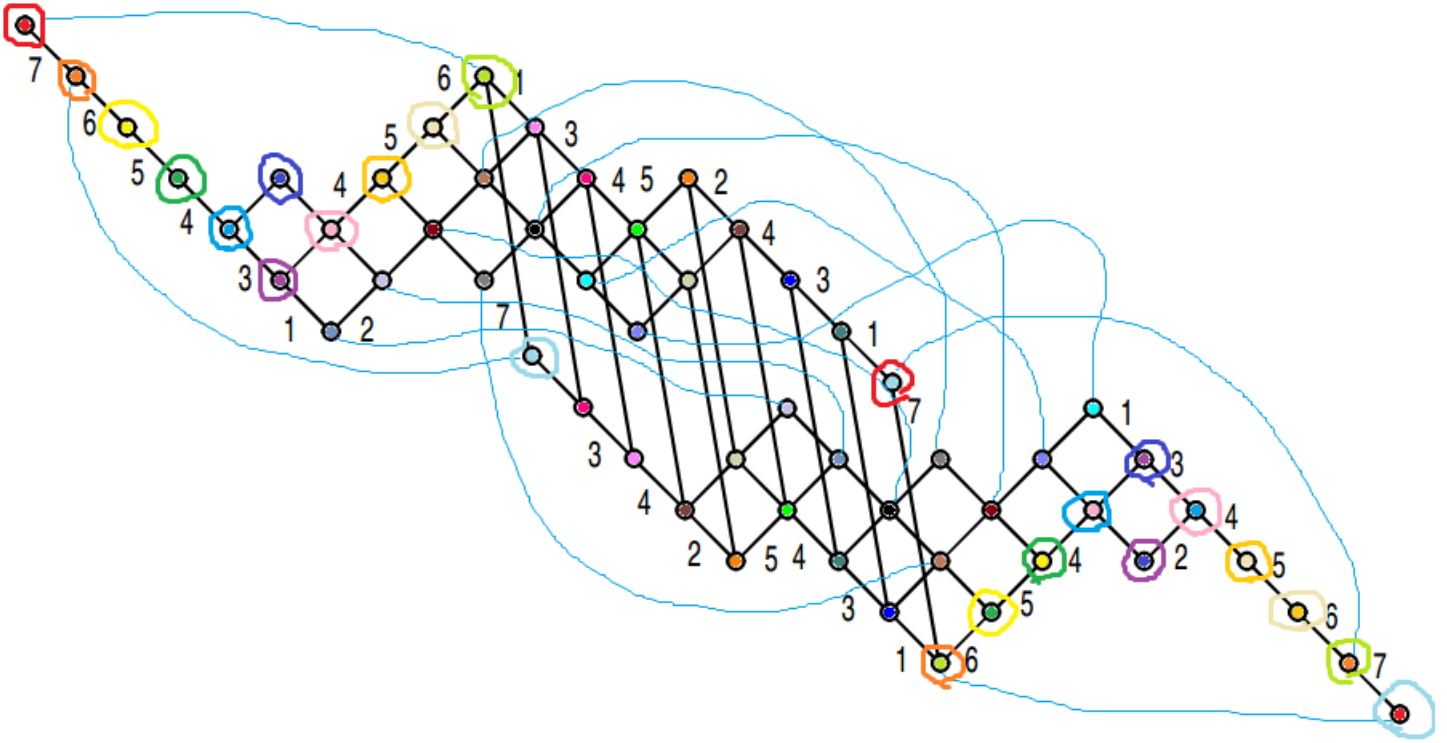


Видно 2 цикла типа 12, 2 цикла типа 6, 4 цикла типа 4 и 4 цикла типа 1, одночлен $-x_1^4 x_4^4 x_6^2 x_{12}^2$, коэффициент $-2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

31) $6A_1$ — соответствует шести попарно перпендикулярным корням, у нас уже есть пять: a_0, a_2, a_3, a_5, a_7 , шестой перпендикулярный им будет $a_2 + a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + a_7 = e_0 + e_1 + e_6 + e_7$. Легко видеть, что он перпендикулярен всем остальным, если помнить, что $e_0^2 = -1$ и $a_0 = 2e_0 + e_2 + \dots + e_7$, отражение относительно этого корня устроено так:

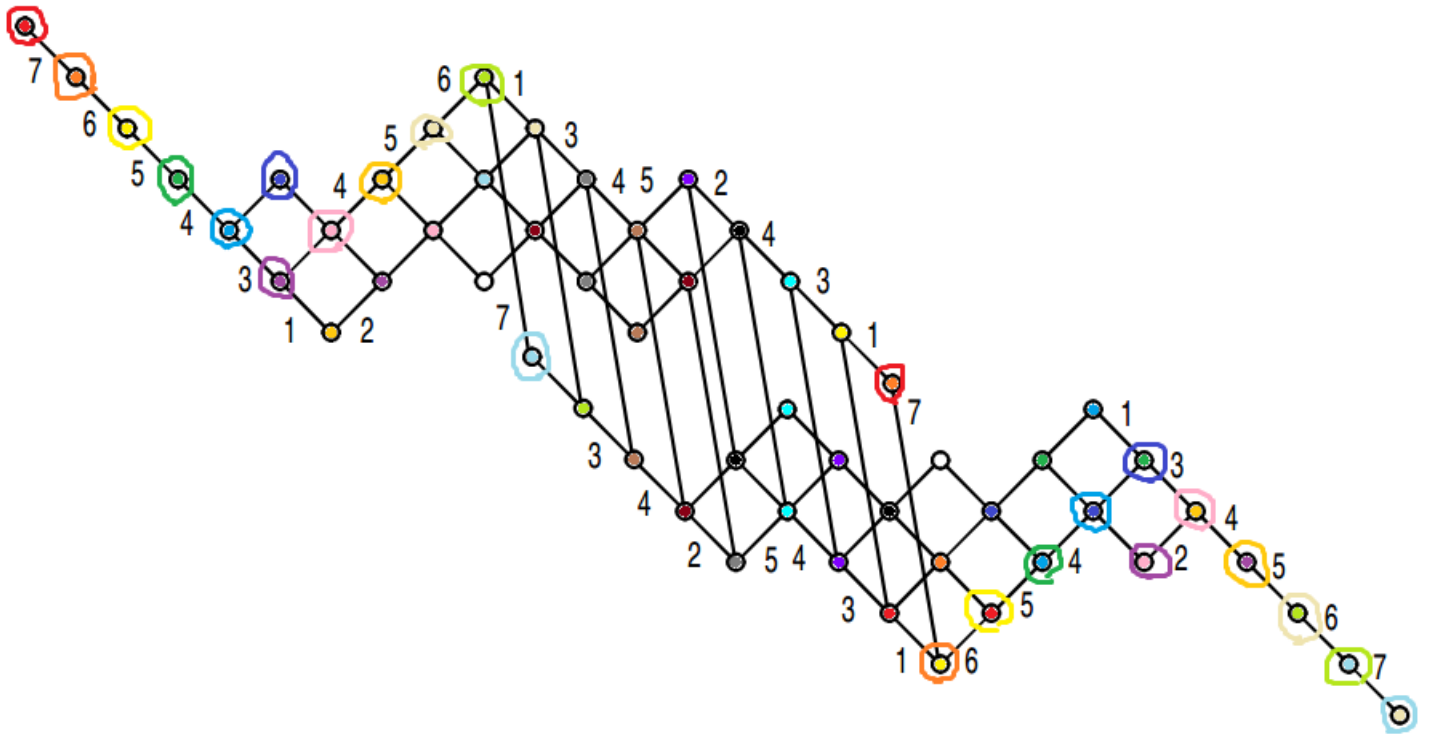


То есть итоговое отражение будет $w_{a_0} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_7} w_{a_2+a_3+2a_4+2a_5+2a_6+a_7}$:



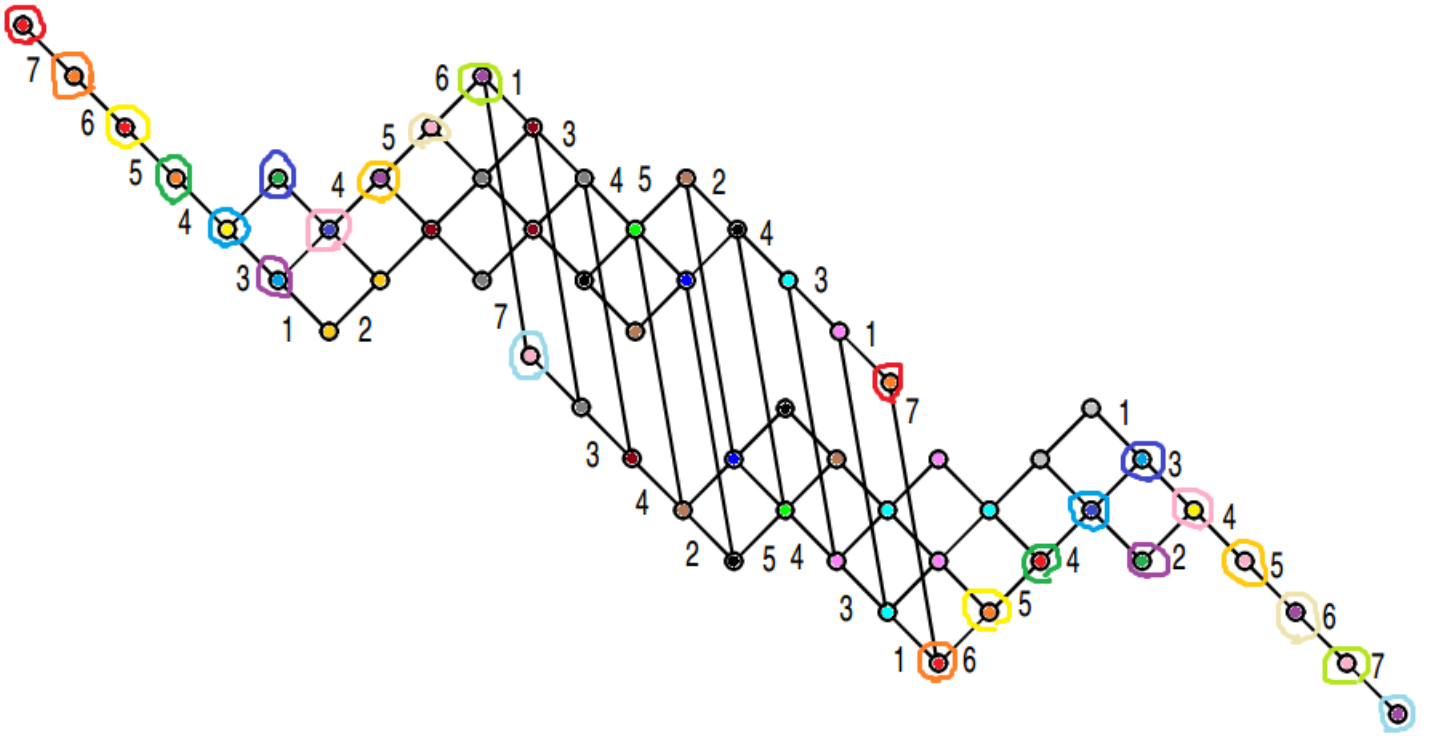
Видно 28 циклов типа 2, одночлен — x_2^{28} , коэффициент — $3^2 \cdot 7$.

32) $3A_2$ — соответствует трём попарно перпендикулярным парам, то есть $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_2}w_{a_4}w_{a_6}w_{a_7}$:



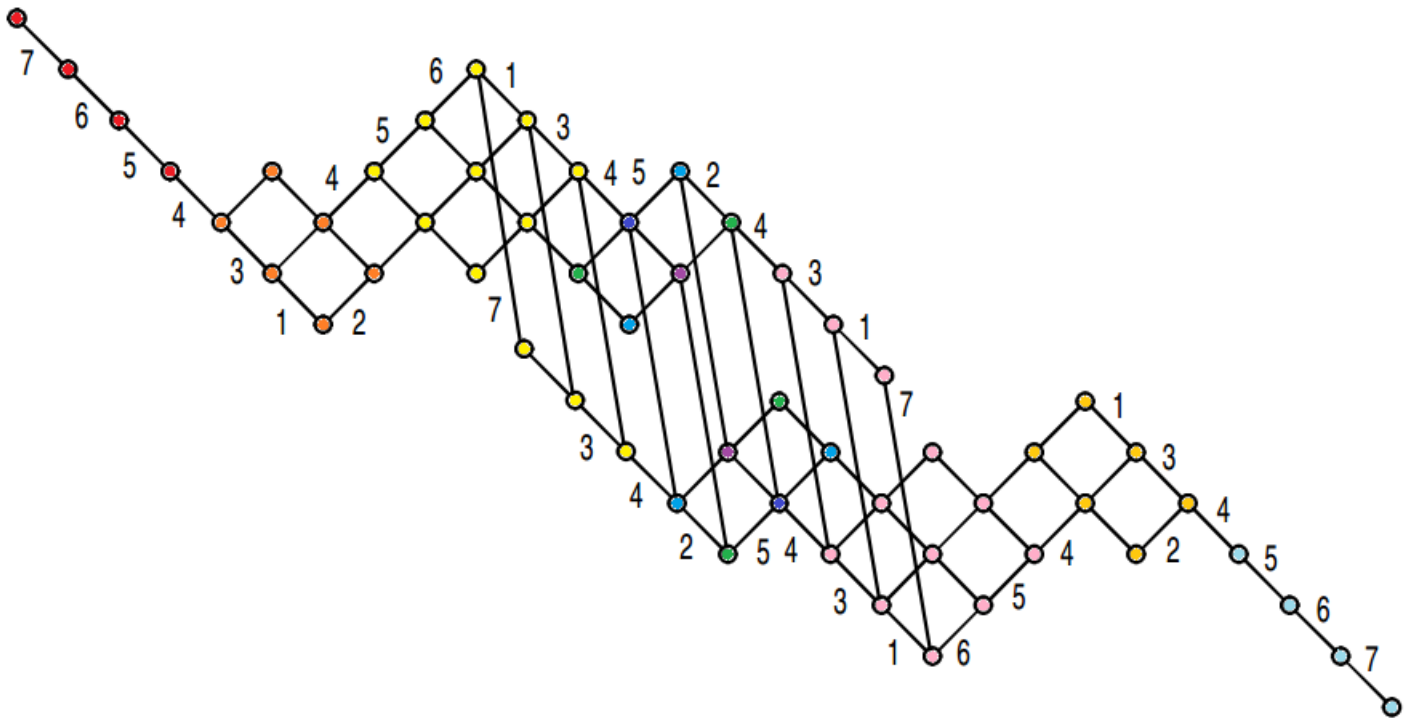
Видно 18 циклов типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2 x_3^{18}$, коэффициент — $2^6 \cdot 5 \cdot 7$.

33) $A_3 + 3A_1$ — соответствует попарно перпендикулярным тройке и трём одиночным корням, для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



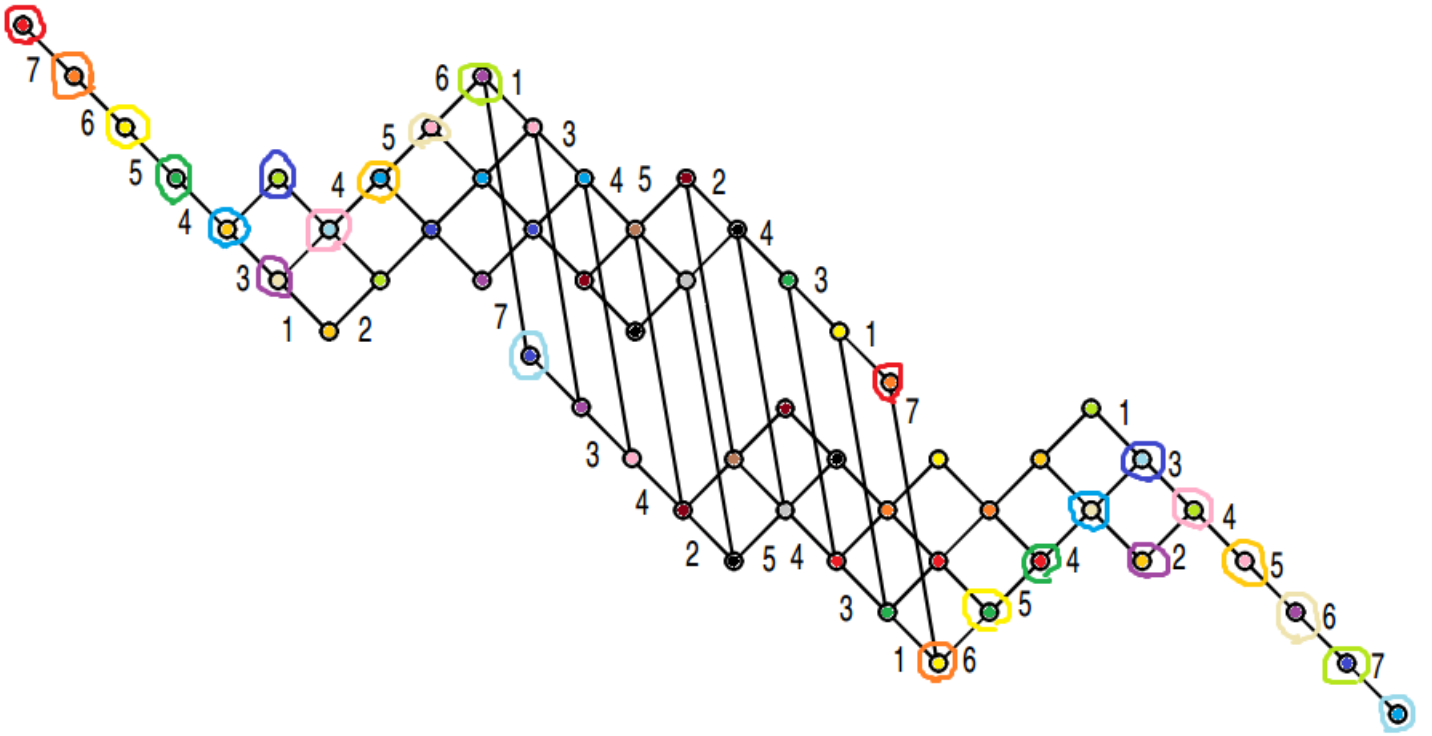
Видно 10 циклов типа 4 и 8 циклов типа 2, одночлен — $x_2^8 x_4^{10}$, коэффициент — $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

34) $\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$ — соответствует попарно перпендикулярным тройке, паре и одиночному корню, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



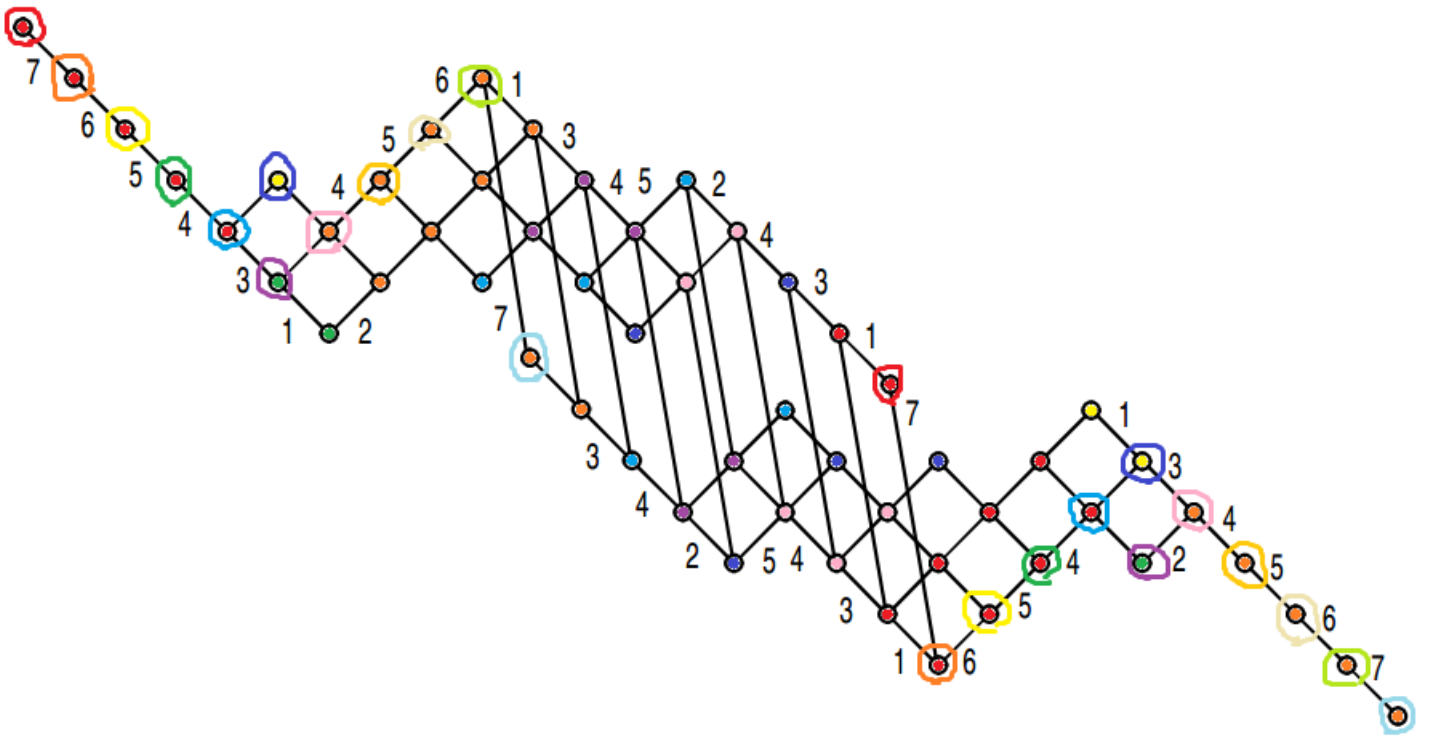
Видно 2 цикла типа 12, 2 цикла типа 6, 4 цикла типа 4 и 2 цикла типа 2, одночлен — $x_2^2 x_4^4 x_6^2 x_{12}^2$, коэффициент — $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

35) $2\mathbf{A}_3$ — соответствует перпендикулярным тройкам, то есть $w_{a_0} w_{a_1} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



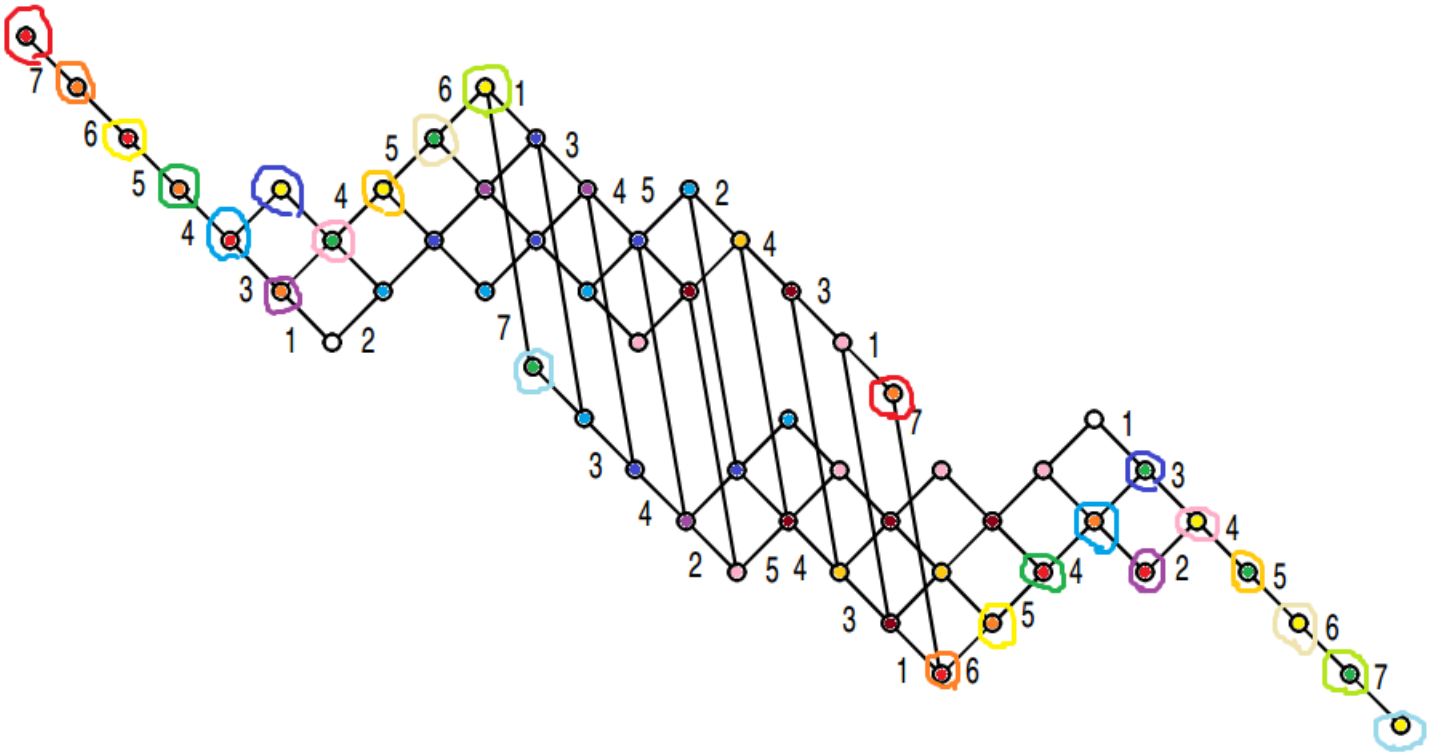
Видно 12 циклов типа 4 и 4 цикла типа 2, одночлен $-x_2^4 x_4^{12}$, коэффициент $-2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

36) $\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_2$ — соответствует перпендикулярным четвёрке и паре, для примера подойдёт $w_{a_0} w_{a_1} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



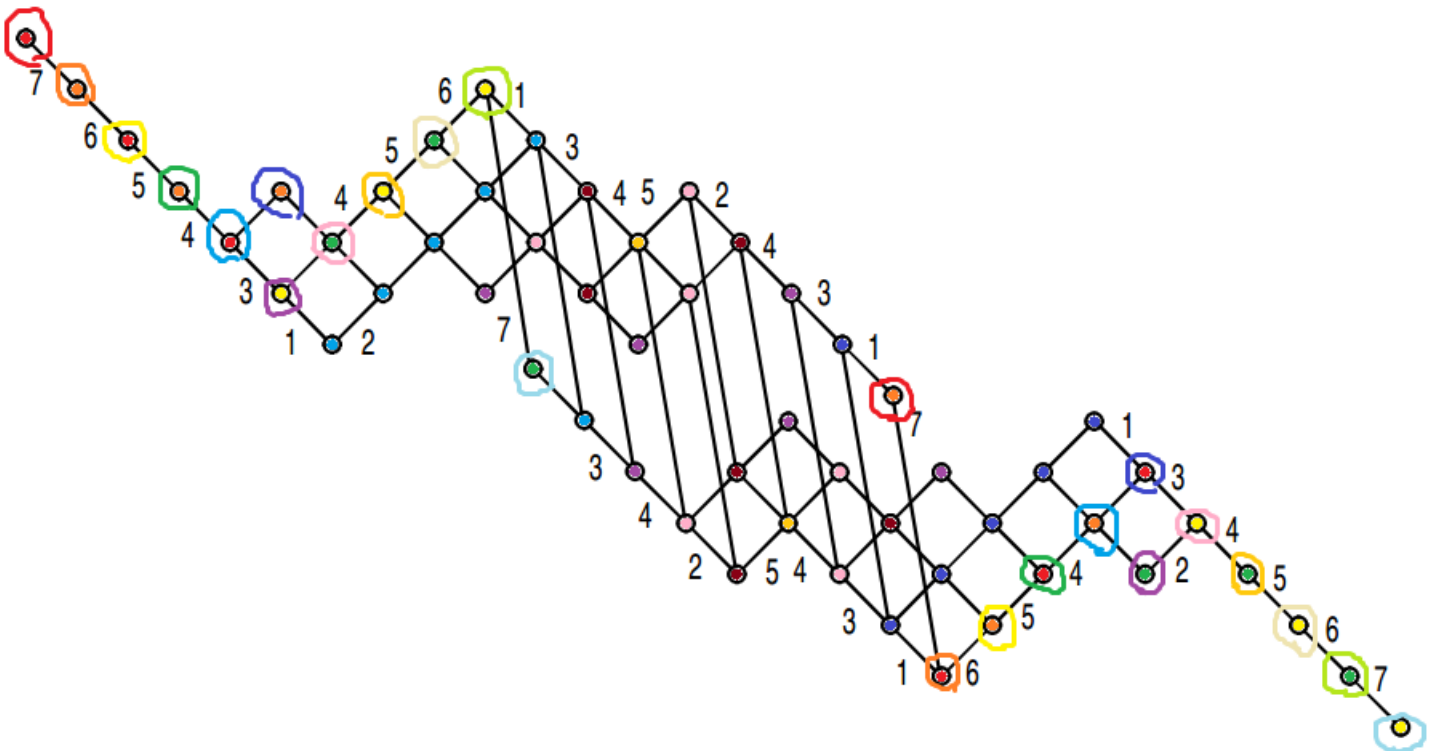
Видно 2 цикла типа 15, 4 цикла типа 5 и 2 цикла типа 3, одночлен $-x_3^2 x_5^4 x_{15}^2$, коэффициент $-2^9 \cdot 3^3 \cdot 7$.

37) $(\mathbf{A}_5 + \mathbf{A}_1)'$ — соответствует перпендикулярной пятёрке и одиночному корню, которые не содержат в себе a_2 , для примера подойдёт $w_{a_0} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



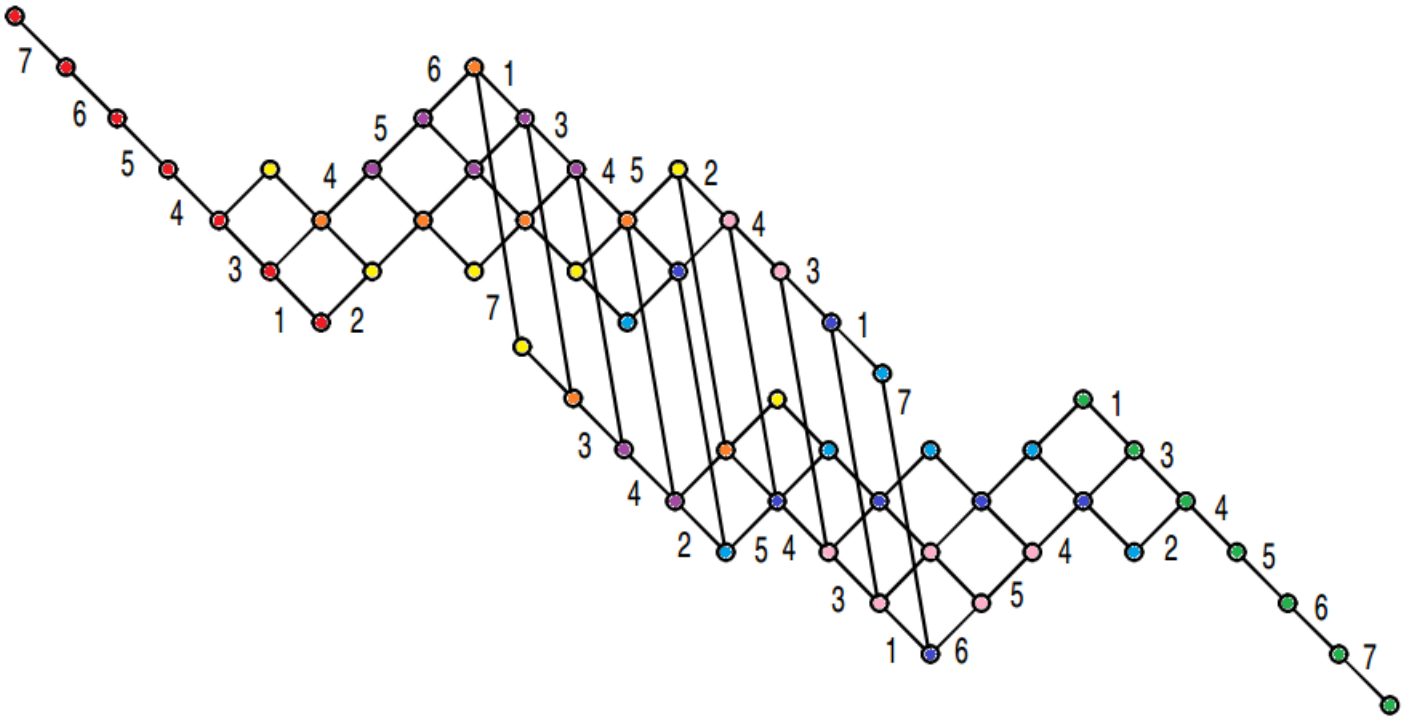
Видно 8 циклов типа 6, 2 цикла типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2 x_3^2 x_6^8$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

38) $(A_5 + A_1)''$ — получается из $(A_5 + A_1)'$ заменой a_3 на a_2 то есть $w_{a_0} w_{a_2} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



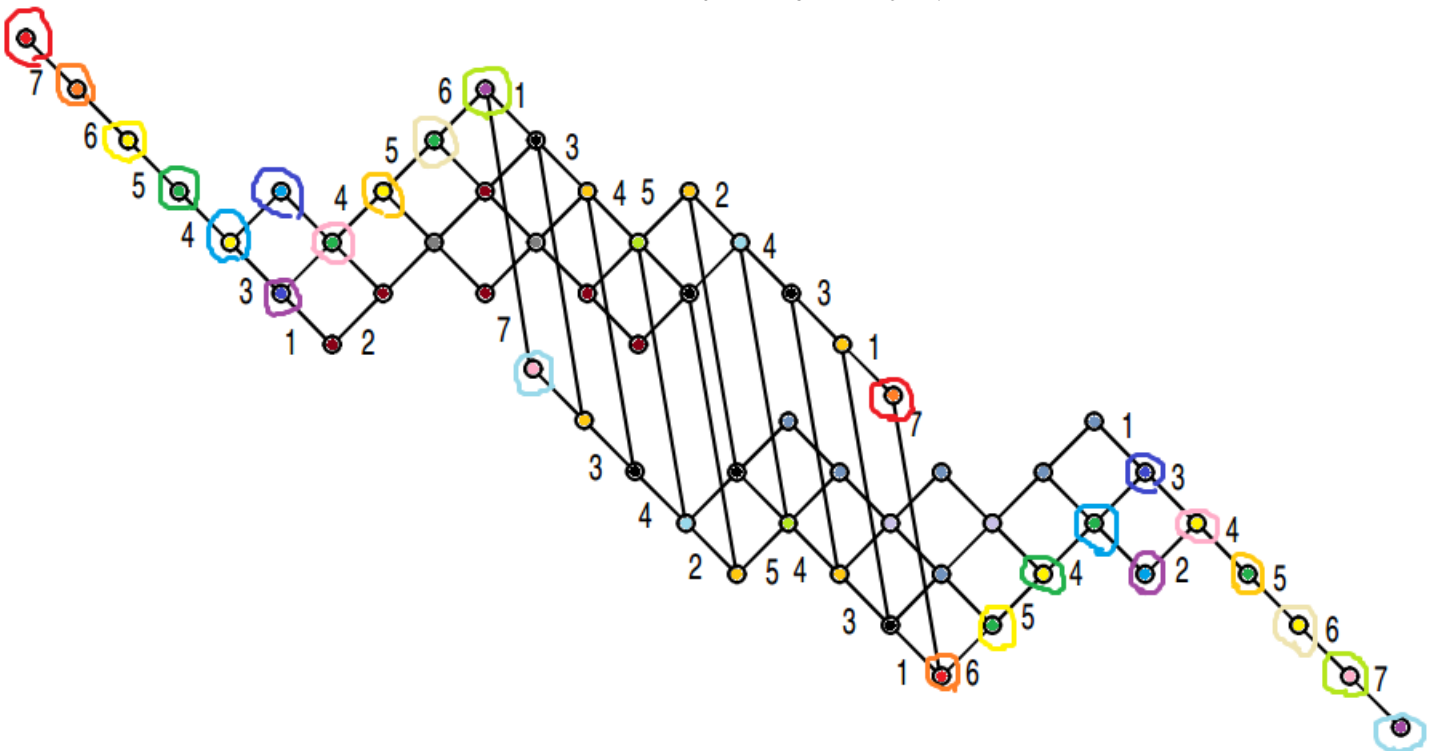
Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2 x_6^9$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

39) A_6 — соответствует шестерке, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



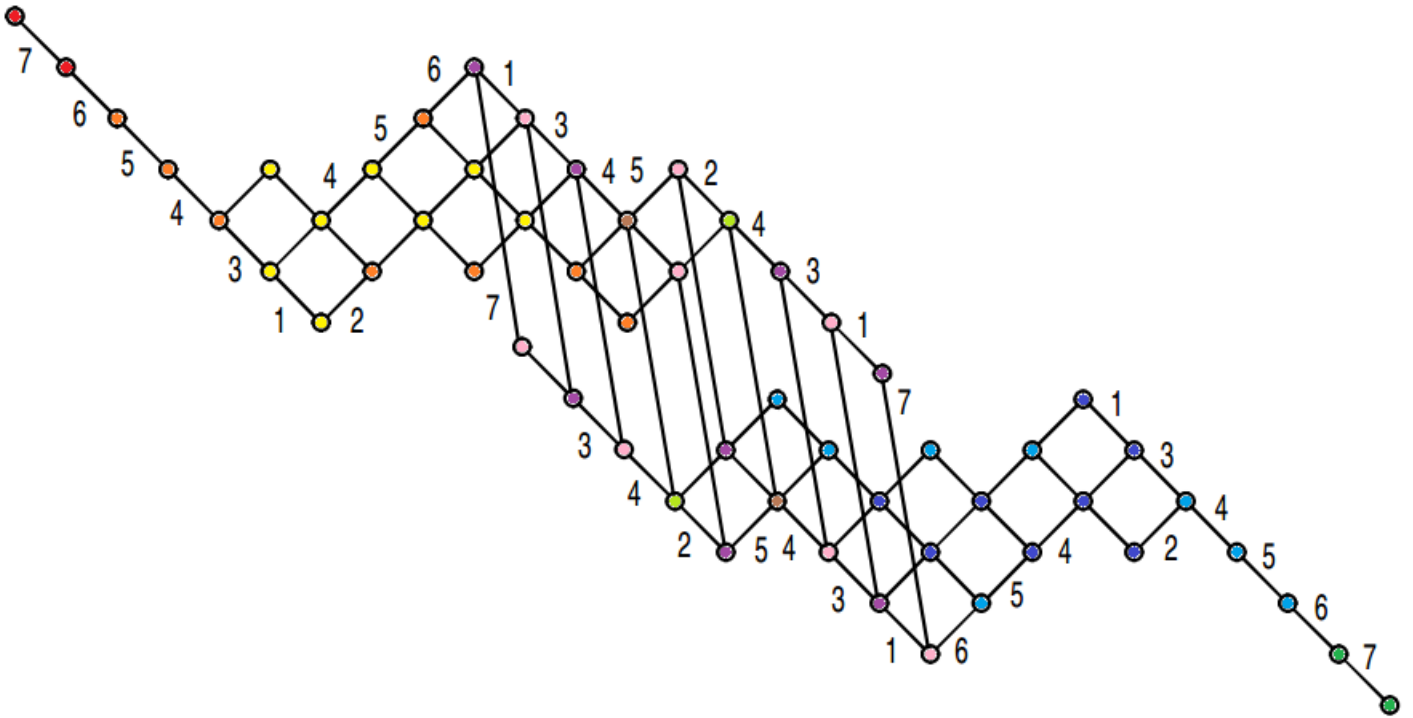
Видно 8 циклов типа 7, одночлен $-x_7^8$, коэффициент $-2^9 \cdot 3^4 \cdot 5$.

40) $D_4 + 2A_1$ — соответствует попарно перпендикулярным четвёрке типа “буква Т” и двум одиночным корням, то есть $w_{a_0} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_7}$:



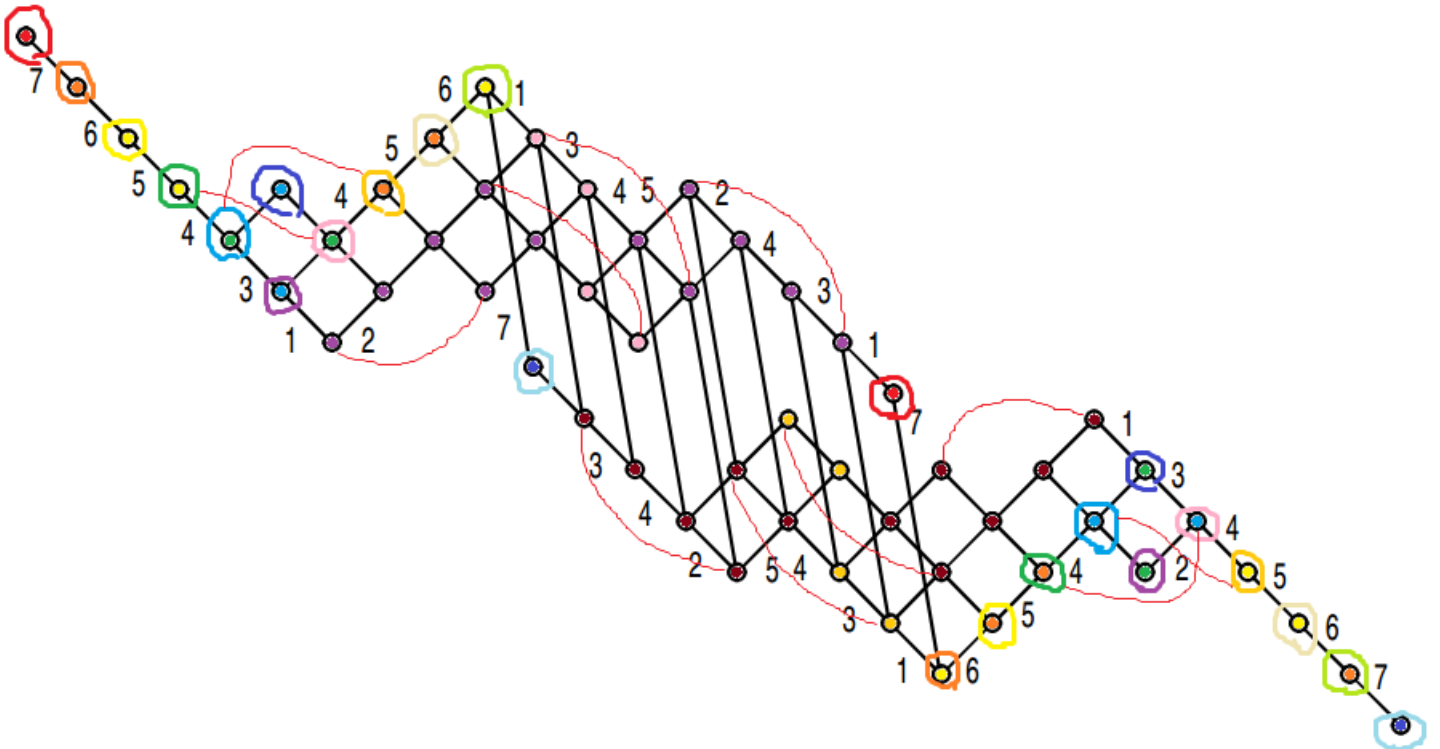
Видно 6 циклов типа 6 и 10 циклов типа 2, одночлен $-x_2^{10} x_6^6$, коэффициент $-2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

41) $D_5 + A_1$ — соответствует попарно перпендикулярным удлинённой “букве Т” и одиночному корню, для примера подойдёт $w_{a_1} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_7}$:



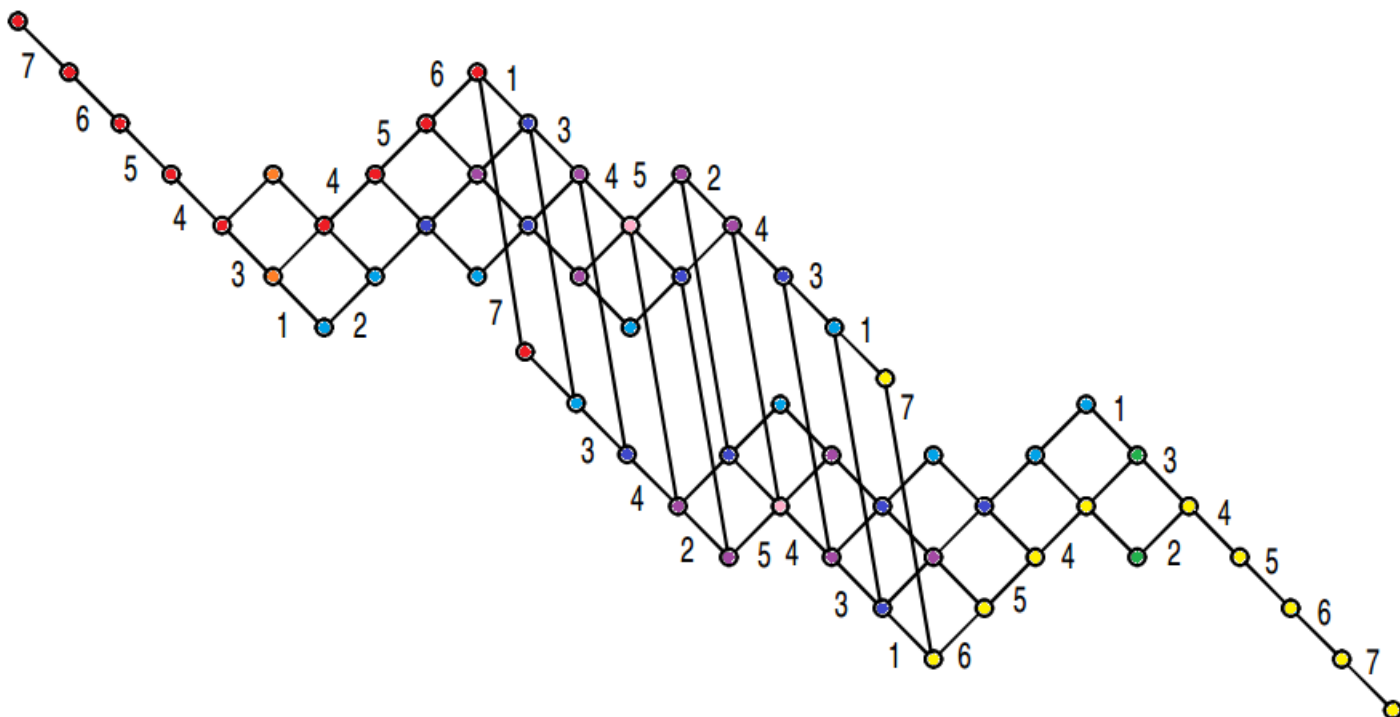
Видно 6 циклов типа 8 и 4 цикла типа 2, одночлен — $x_2^4 x_8^6$, коэффициент — $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

42) $\mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1) + \mathbf{A}_1$ — соответствует особая картинка, а именно замкнутый цикл из четырёх с ребром наружу и перпендикулярный всему этому корень, то есть $\mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$ будет устроен как $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$, а перпендикулярный ему корень будет a_0 — из диаграммы он очевидно перпендикулярен всем, кроме $a_2 + a_3 + a_4$, но $a_0 = 2e_0 + e_2 + \dots + e_7$, а $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$, их произведение действительно 0. Тогда итоговое цикленное разбиение будет:



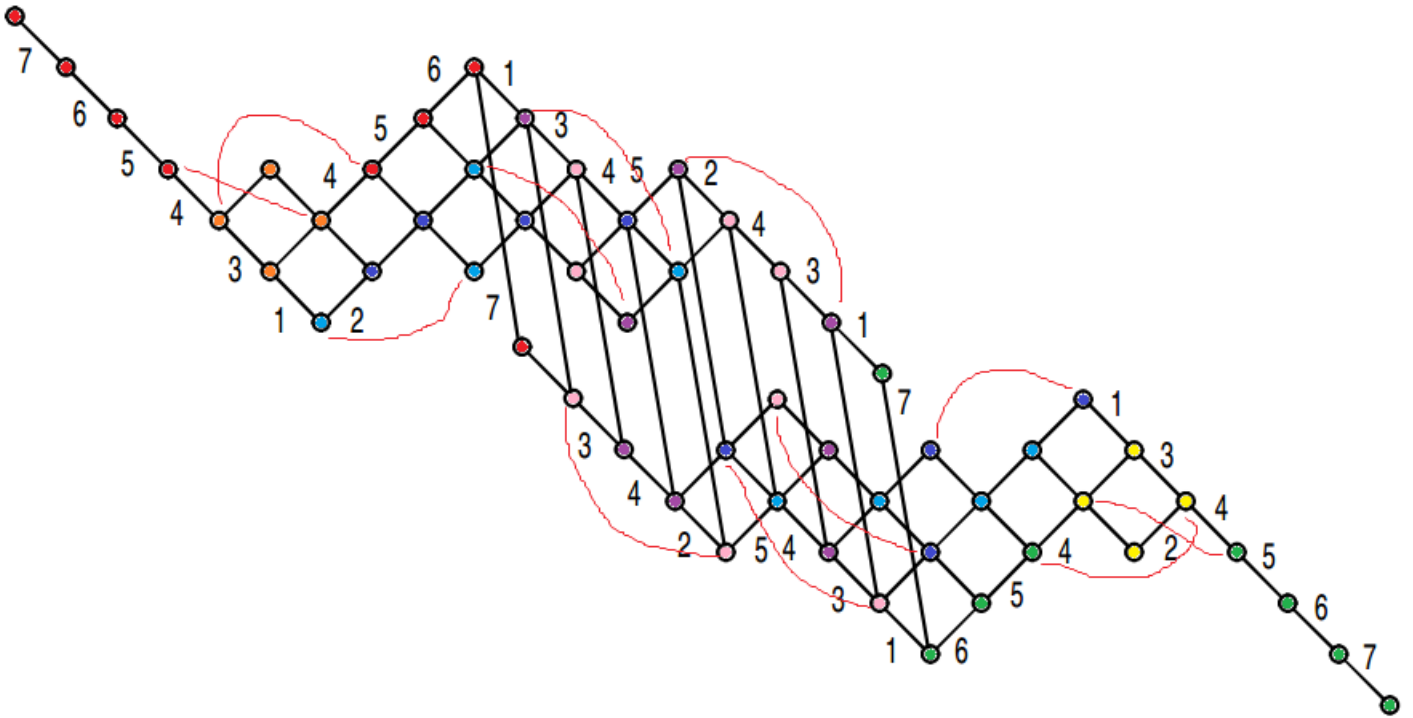
Видно 2 цикла типа 12, 2 цикла типа 6, 4 цикла типа 4 и 2 цикла типа 2, одночлен — $x_2^2 x_4^4 x_6^2 x_{12}^2$, коэффициент — $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

43) \mathbf{D}_6 — соответствует $w_{a_2} w_{a_3} w_{a_4} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_7}$:



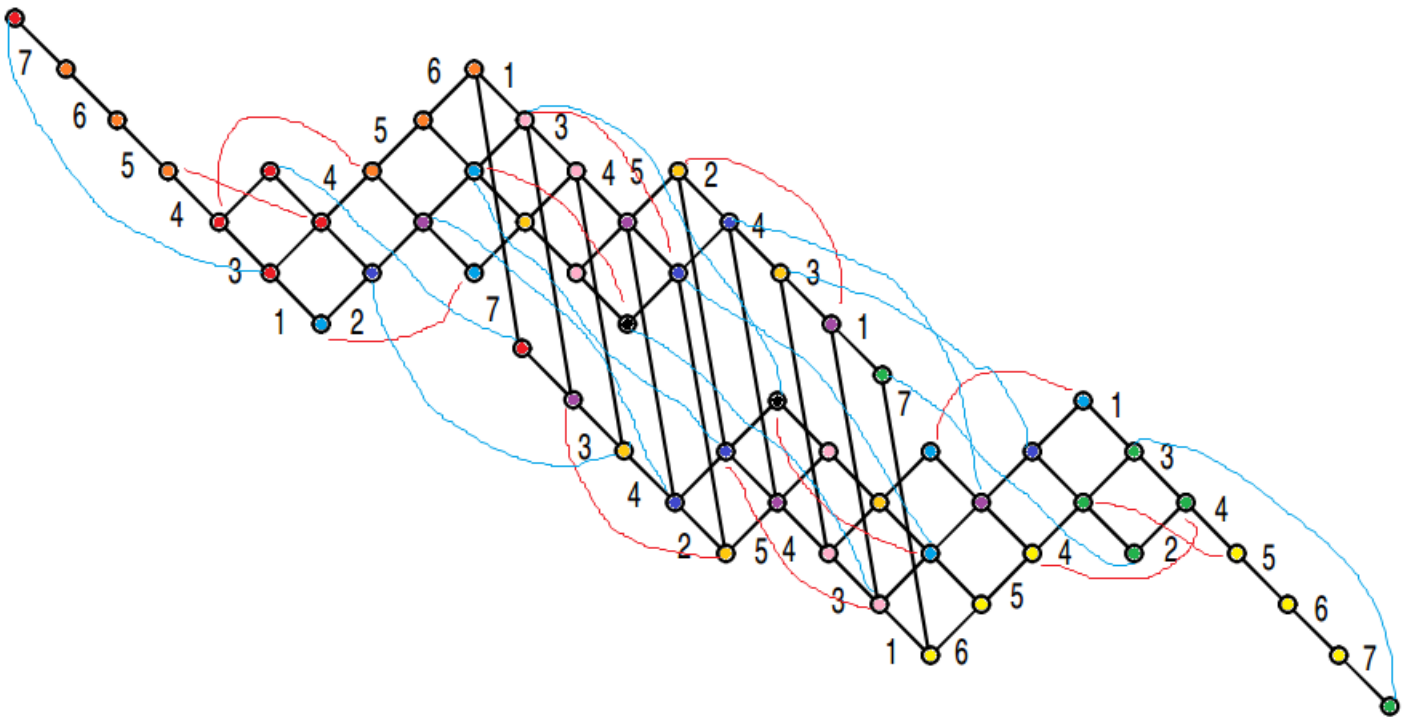
Видно 5 циклов типа 10 и 3 цикла типа 2, одночлен — $x_2^3 x_{10}^5$, коэффициент — $2^8 \cdot 3^4 \cdot 7$.

44) $\mathbf{D}_6(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особая картинка — цикл из четырёх с “двойным хвостом” наружу. Нам подойдут, например, корни $\mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$ и добавленный к ним a_7 — он как раз перпендикулярен всему, кроме a_6 . Как обычно, перпендикулярность $a_2 + a_3 + a_4$ слпедует из того, что $a_7 = e_7 - e_6$, а $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$. Тогда соответственное отражение будет устроено как $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_7} w_{a_4} w_{a_6} w_{a_2+a_3+a_4}$:



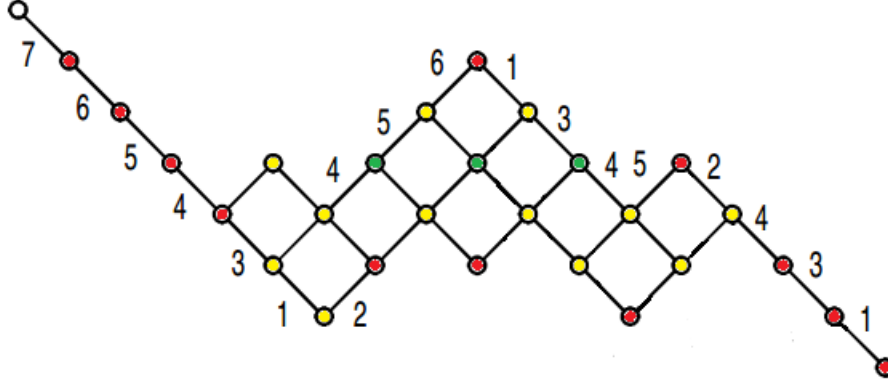
Видно 6 циклов типа 8 и 2 цикла типа 4, одночлен $-x_4^2 x_8^6$, коэффициент $-2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

45) $\mathbf{D}_6(\mathbf{a}_2)$ — соответствует особая картинка — цикл из четырёх с диаметрально противоположными рёбрами наружу. Получим мы его так — снова возьмём $\mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$ за основу и добавим к нему корень $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = e_7 - e_2$. Он как раз будет перпендикулярен всему остальному, кроме $a_3 = e_3 - e_2$, так как в их представлении просто отсутствуют и e_2 , и e_7 . Тогда соответственное отражение будет устроено как $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4} w_{a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}$:



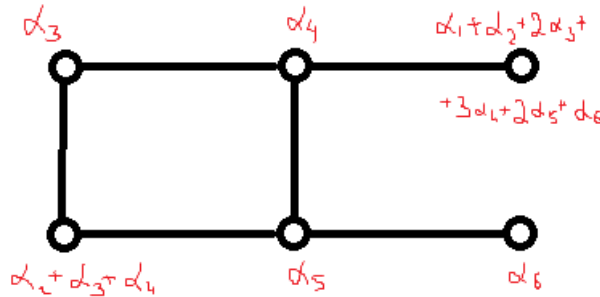
Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен $-x_2x_6^9$, коэффициент $-2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

46) \mathbf{E}_6 — соответствует $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}$:

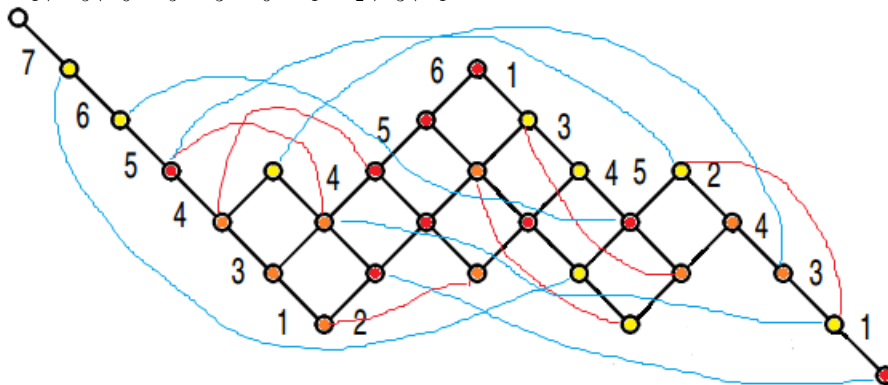


Видно 4 цикла типа 12, 2 цикла типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен $-x_1^2x_3^2x_{12}^4$, коэффициент $-2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

47) $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особая картинка, цикл из четырёх с двумя рёбрами наружу из соседних вершин:

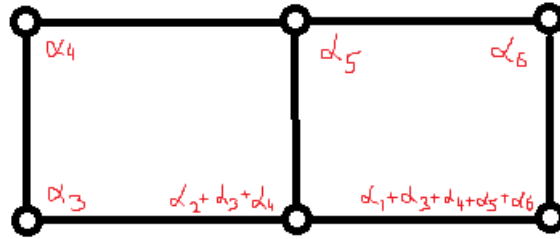


Так как она получается из $\mathbf{D}_5(\mathbf{a}_1)$, нужно проверить, что новый корень $a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = e_0 + e_4 + e_5 + e_6$ не ортогонален $a_4 = e_4 - e_3$ и ортогонален всем остальным. Единственная нетривиальная ортогональность $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$ следует из того, что $e_0^2 = -1$. Соответствующее отражение будет $w_{a_1+a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6}w_{a_5}w_{a_3}w_{a_6}w_{a_4}w_{a_2+a_3+a_4}$:

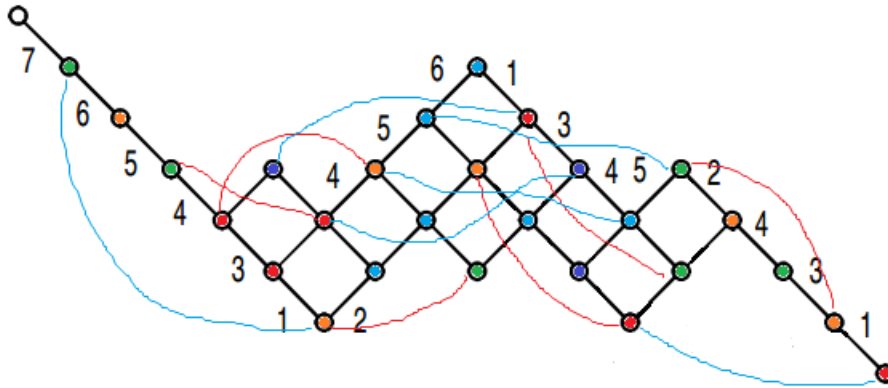


Видно 6 циклов типа 9 и 2 цикла типа 1, одночлен $-x_1^2x_9^6$, коэффициент $-2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

48) $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_2)$ — соответствует особая картинка, цикл из четырёх с двумя рёбрами из соседних вершин цикла в соединённые снаружи вершины:

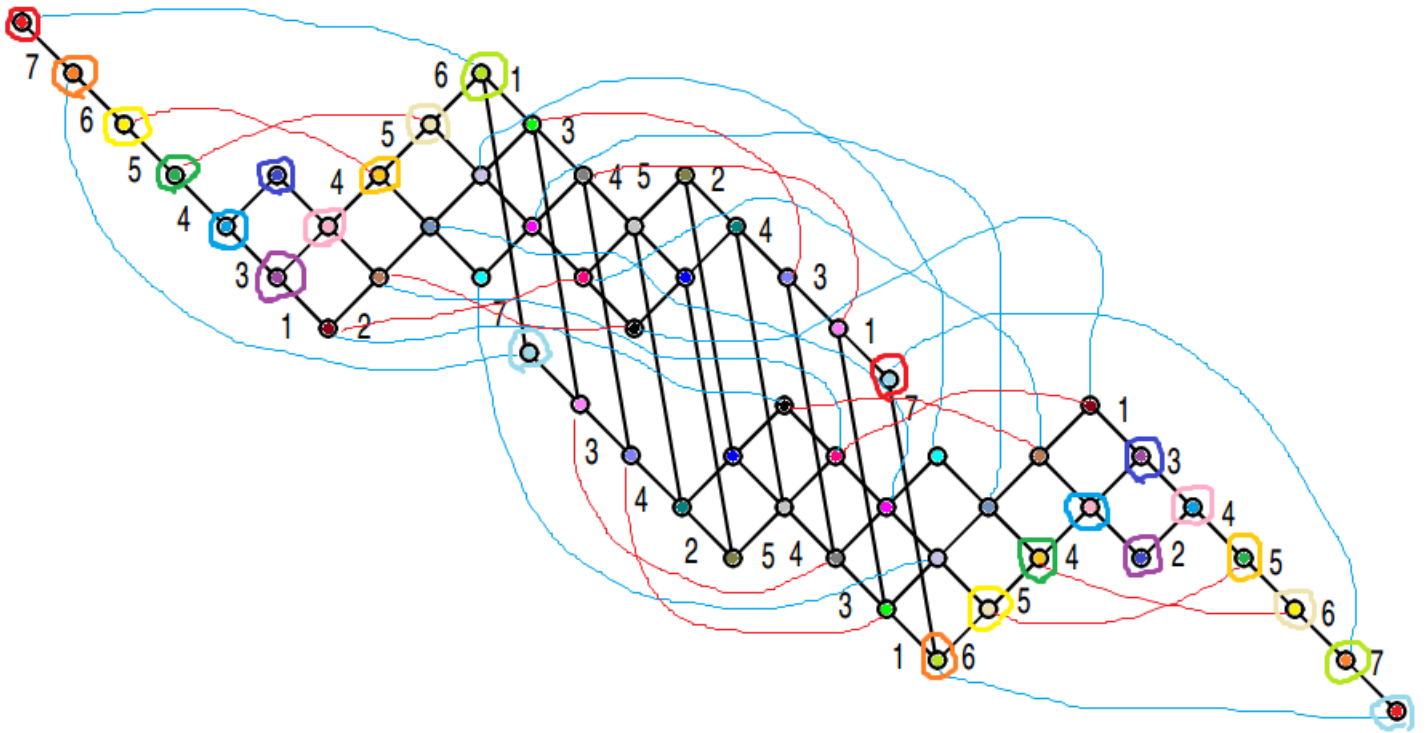


Так как она получается из $D_5(\mathbf{a}_1)$, нужно проверить, что новый $a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = e_6 - e_1$ не ортогонален $a_6 = e_6 - e_5$ и $a_2 + a_3 + a_4 = e_0 + e_1 + e_3 + e_4$ и ортогонален всем остальным. Значит, соответственное отражение будет иметь вид $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4}$, тогда цикленное разбиение устроено так:



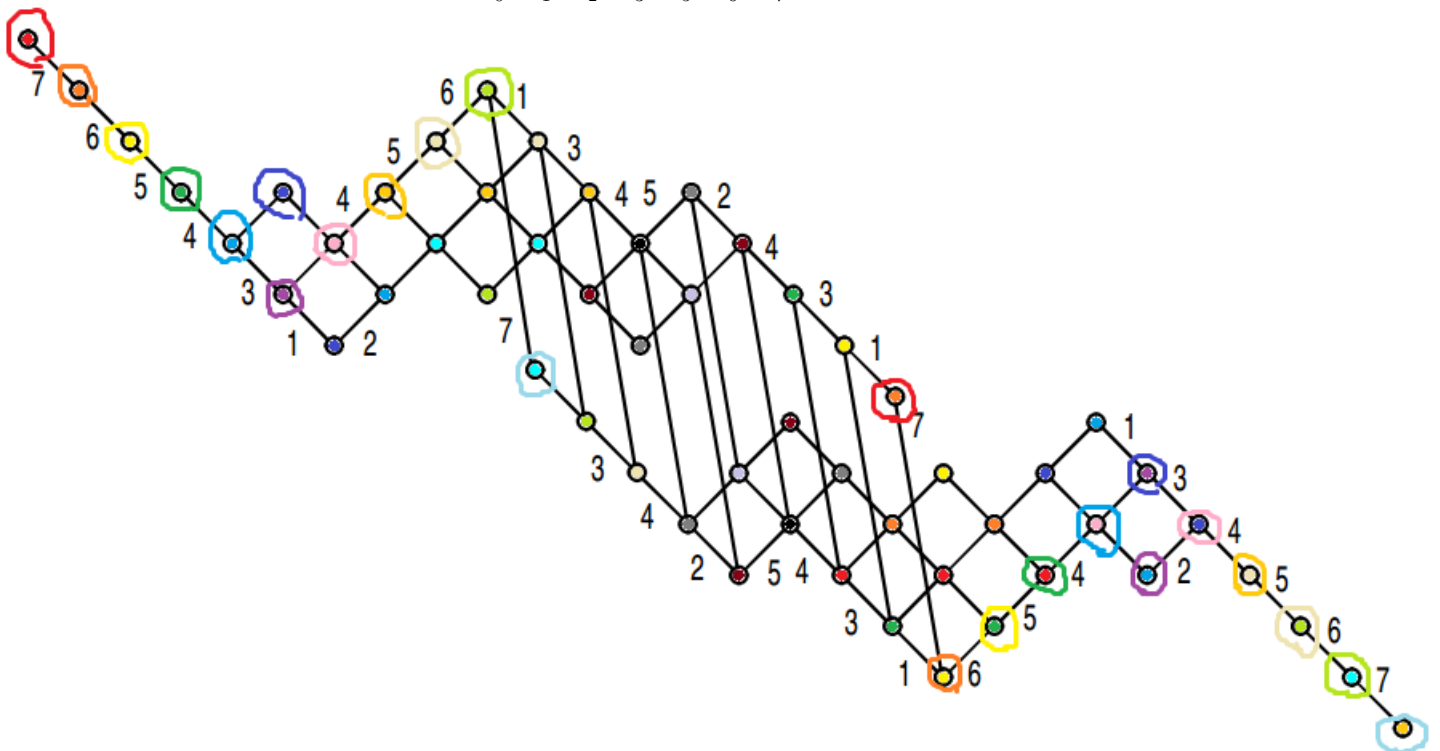
Видно 8 циклов типа 6, 2 цикла типа 3 и 2 цикла типа 1, одночлен — $x_1^2 x_3^2 x_6^8$, коэффициент — $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

49) $7A_1$ — соответствует семи попарно перпендикулярным корням, то есть к $6A_1$ нужно добавить перпендикулярный всему корень, подойдёт $a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 = e_0 + e_1 + e_4 + e_5$. Он очевидно перпендикулярен остальным корням: $2e_0 + e_2 + \dots + e_7$, $e_3 - e_2$, $e_5 - e_4$, $e_7 - e_6$, $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$ и $e_0 + e_1 + e_6 + e_7$. Тогда итоговое отражение будет устроено как $w_{a_0} w_{a_2} w_{a_3} w_{a_5} w_{a_7} w_{a_2+a_3+2a_4+2a_5+2a_6+a_7} w_{a_2+a_3+2a_4+a_5}$:



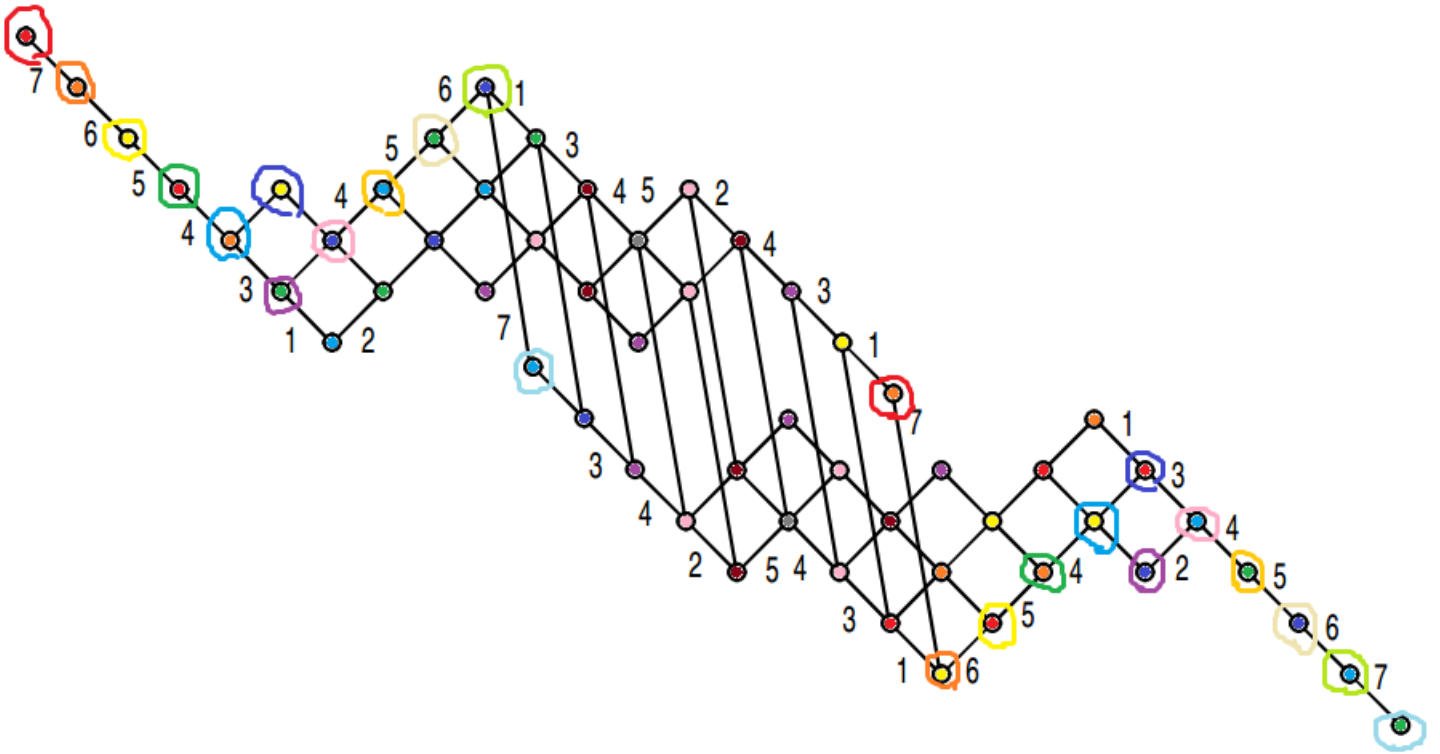
Видно 28 циклов типа 2, одночлен $-x_2^{28}$, коэффициент -1 .

50) $2A_3 + A_1$ — соответствует попарно перпендикулярным двум тройкам и одиночному корню, то есть $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



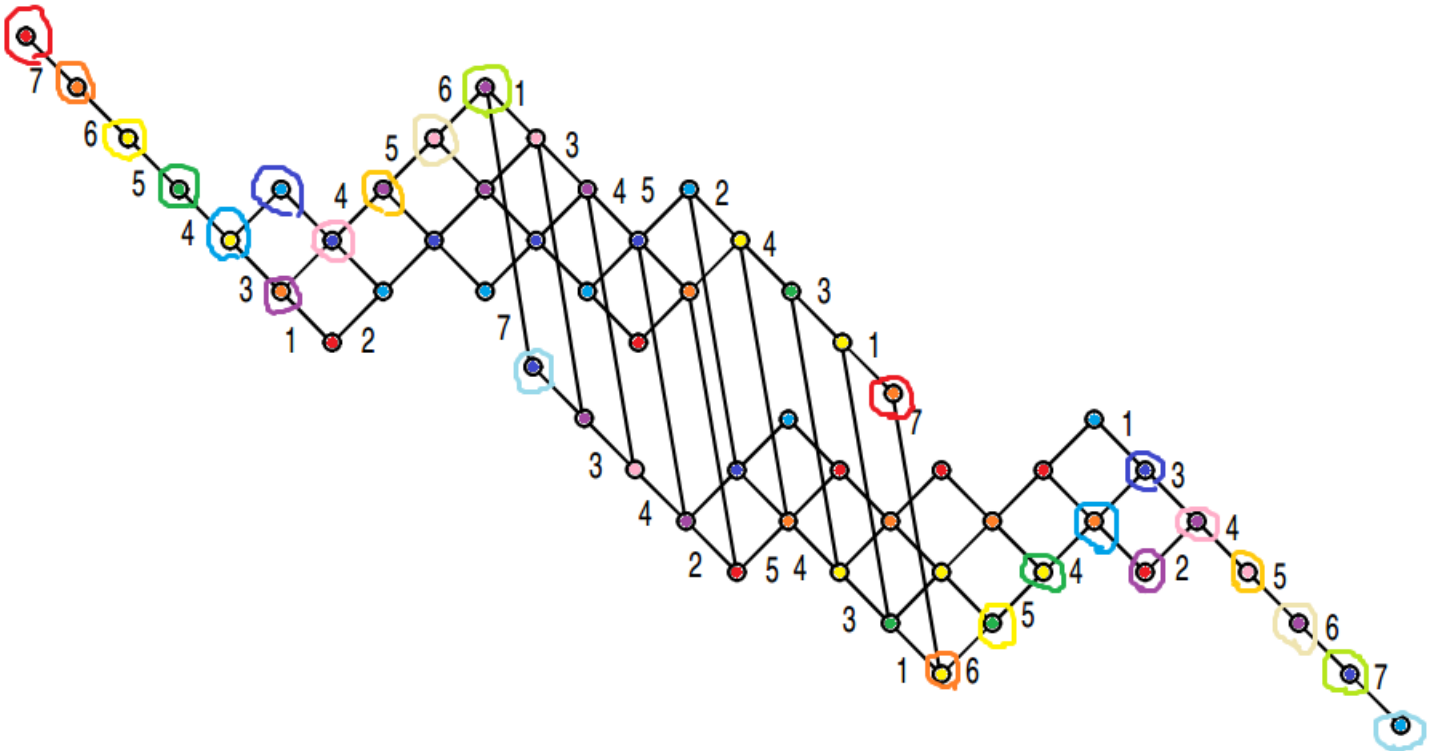
Видно 12 циклов типа 4 и 4 цикла типа 2, одночлен $-x_2^4x_4^{12}$, коэффициент $-2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

51) $A_5 + A_2$ — соответствует перпендикулярным пятёрке и паре, для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_2}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



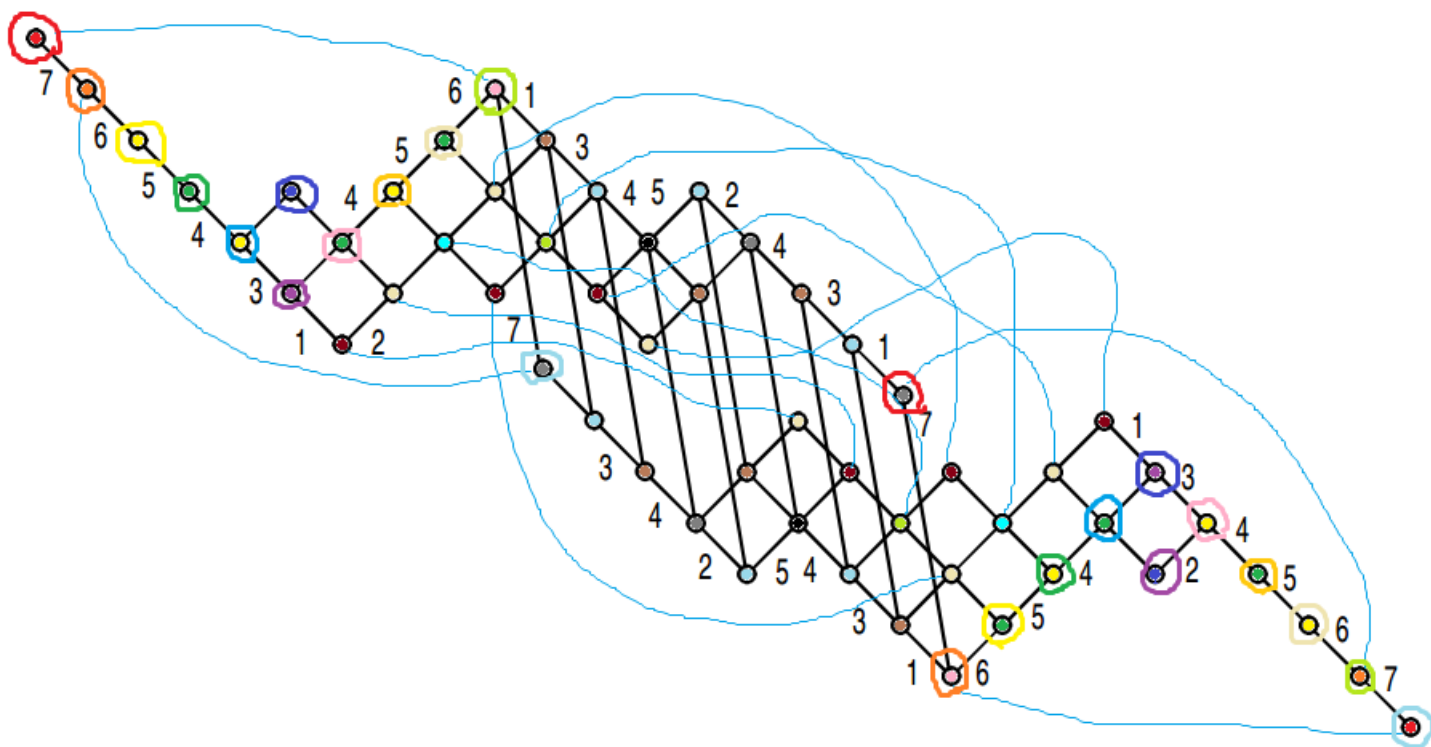
Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2x_6^9$, коэффициент — $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

52) A_7 — соответствует $w_{a_0}w_{a_1}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



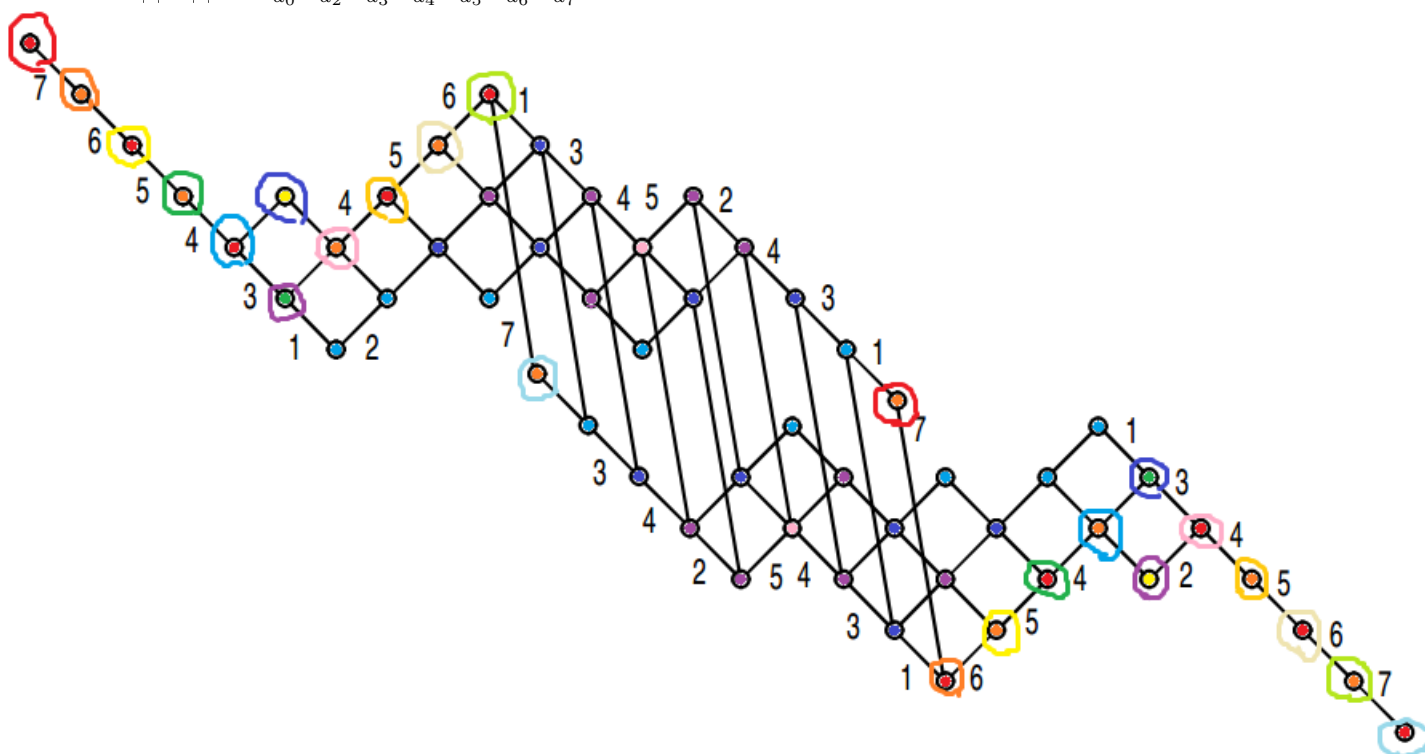
Видно 6 циклов типа 8 и 2 цикла типа 4, одночлен — $x_4^2x_8^6$, коэффициент — $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

53) $D_4 + 3A_1$ — соответствует четвёрке типа “буква Г” и трём одиночным корням, попарно перпендикулярным между собой. Можно взять $D_4 + 2A_1$ и добавить к нему $a_2 + a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + a_7 = e_0 + e_1 + e_6 + e_7$, который будет перпендикулярен всему остальному, то есть отражение будет $w_{a_0}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_7}w_{a_2+a_3+2a_4+2a_5+2a_6+a_7}$:



Видно 6 циклов типа 6 и 10 циклов типа 2, одночлен — $x_2^{10}x_6^6$, коэффициент — $2^5 \cdot 3 \cdot 7$.

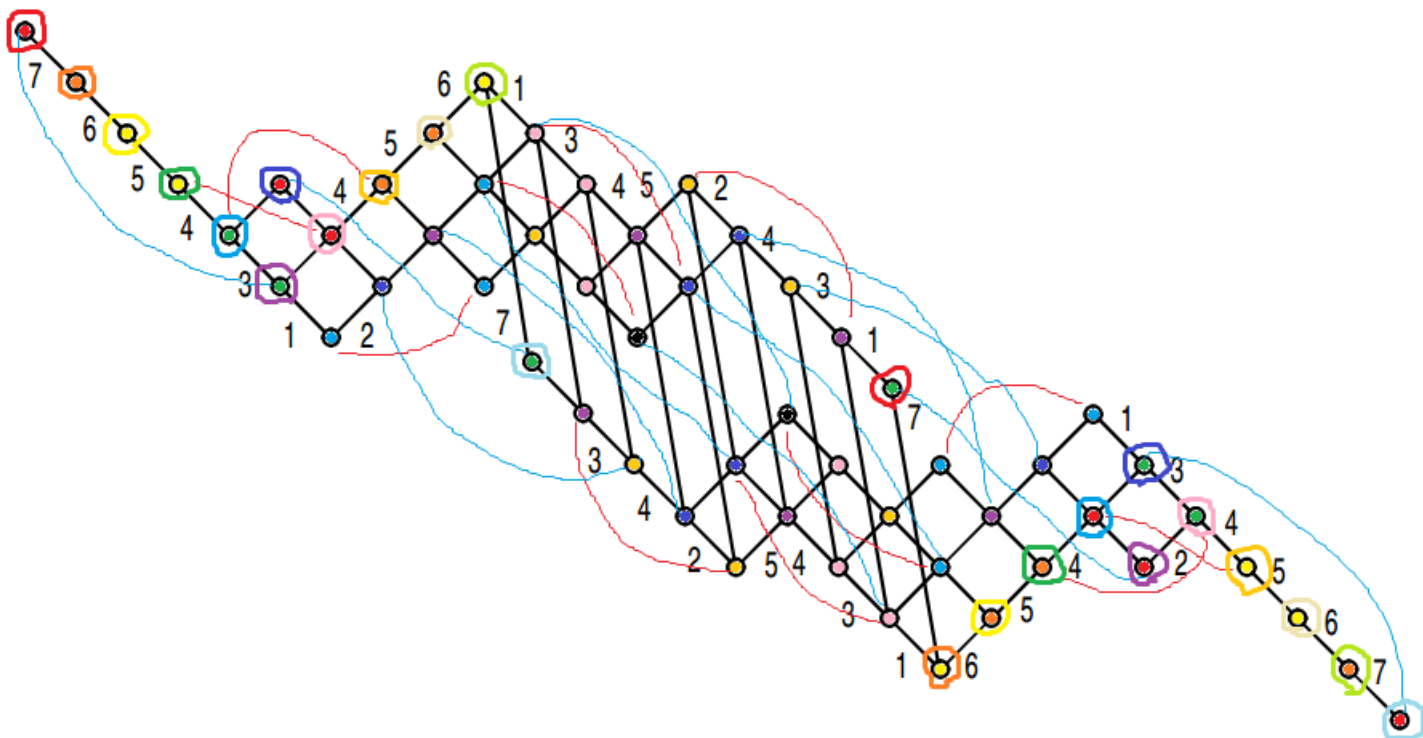
54) $D_6 + A_1$ — соответствует D_6 и перпендикулярному ему корню, для примера подойдёт $w_{a_0}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:



Видно 5 циклов типа 10 и 3 цикла типа 2, одночлен — $x_2^3x_{10}^5$, коэффициент — $2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$.

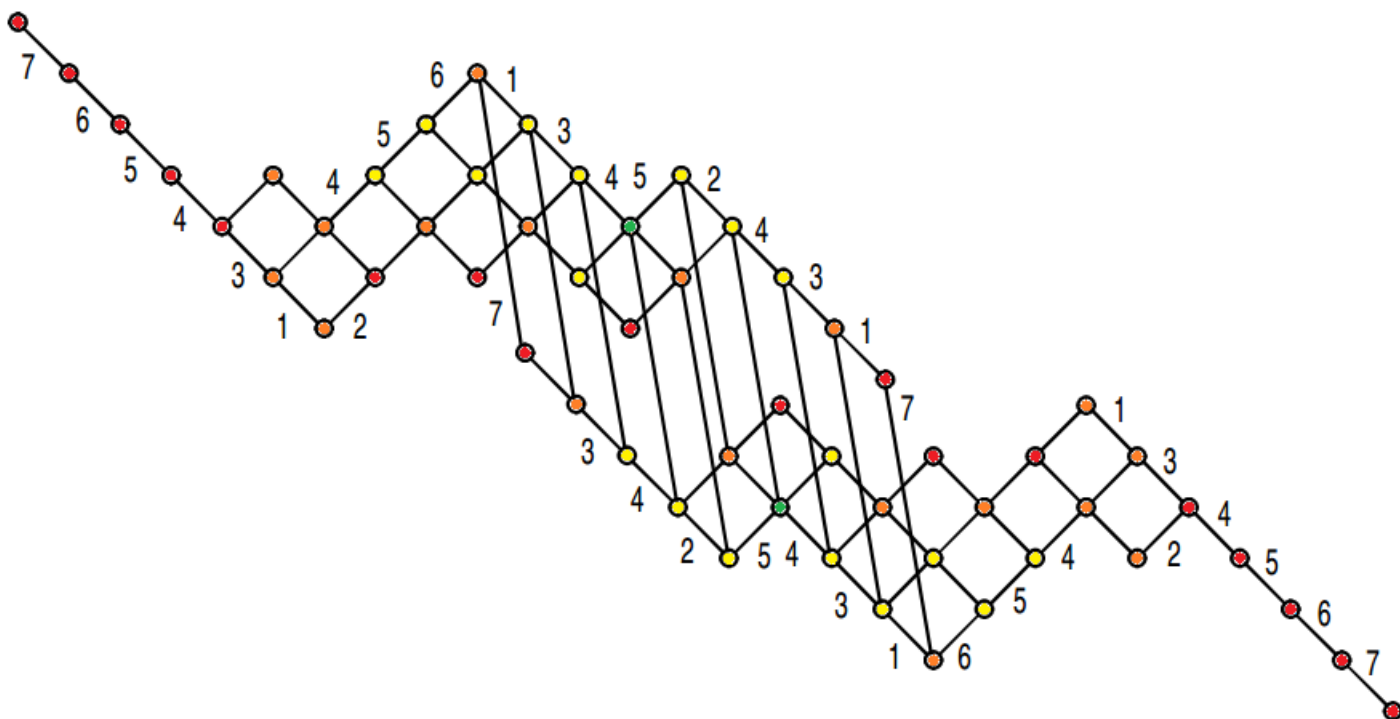
55) $D_6(a_2) + A_1$ — соответствует $D_6(a_2)$ и перпендикулярному ему корню, за который можно взять a_0 . Он действительно будет перпендикулярен и $e_7 - e_2$, и $e_0 + e_1 + e_3 + e_4$, а перпендикулярность простым корням очевидна из расширенной схемы

Дынкина. То есть отражение будет $w_{a_0}w_{a_3}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_4}w_{a_2+a_3+a_4}w_{a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}$:



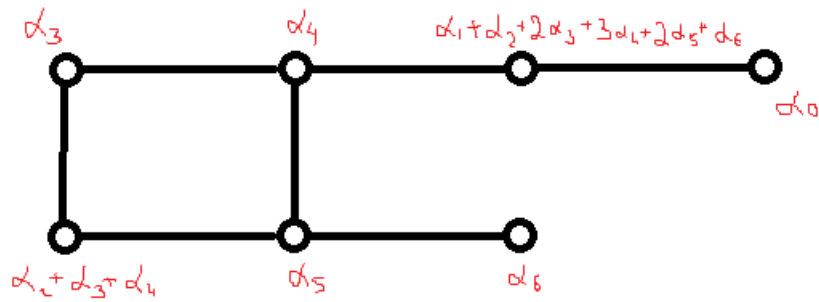
Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2x_6^9$, коэффициент — $2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

56) E_7 — соответствует $w_{a_1}w_{a_2}w_{a_3}w_{a_4}w_{a_5}w_{a_6}w_{a_7}$:

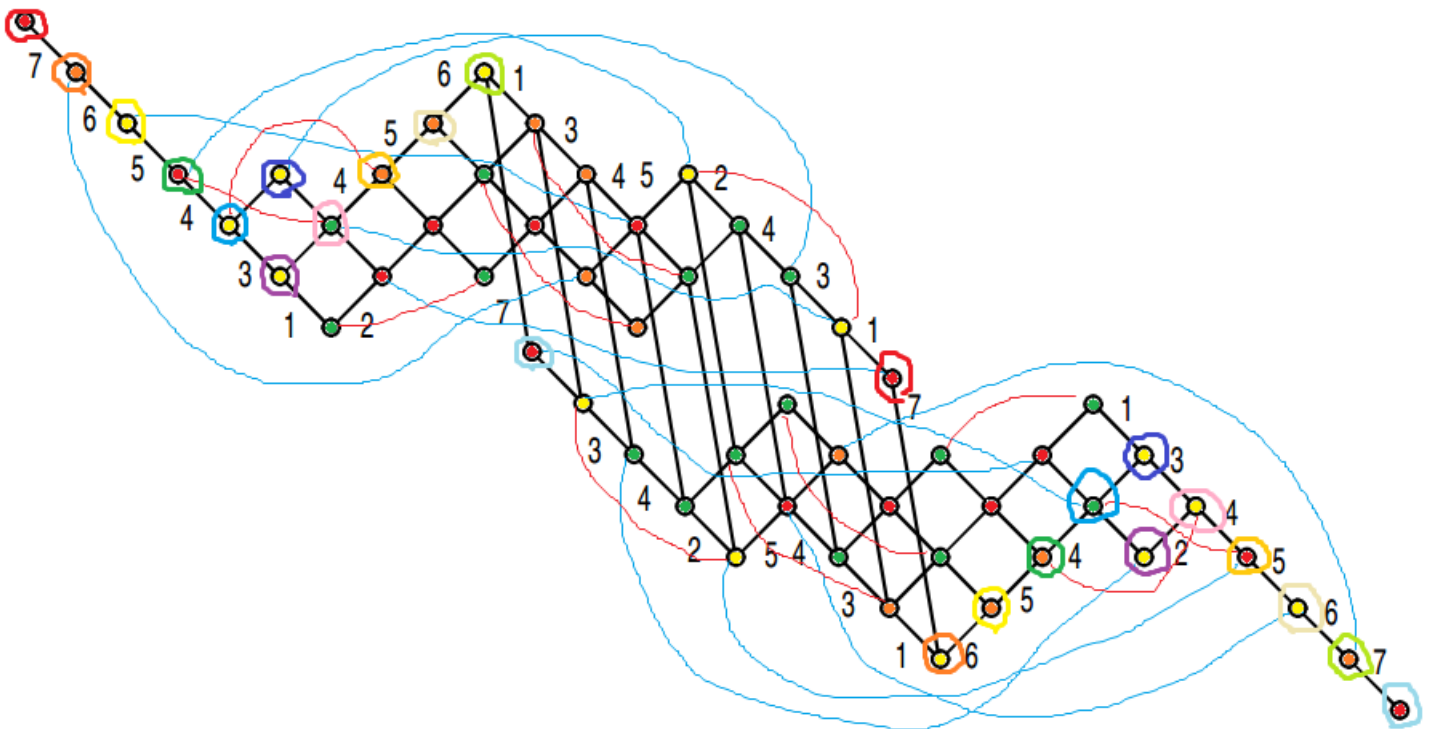


Видно 3 цикла типа 18 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2x_{18}^3$, коэффициент — $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

57) $E_7(\mathbf{a}_1)$ — соответствует особой картинке:

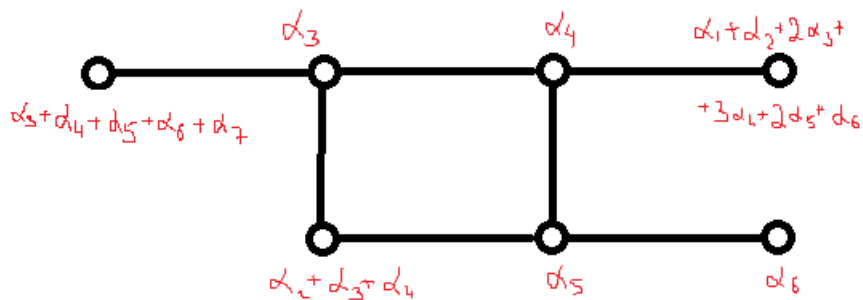


Она получается из $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1)$ добавлением одного ребра — если в его конец поставить $a_0 = 2e_0 + e_2 + \dots + e_7$, то все необходимые перпендикулярности соблюдаются. Действительно, a_0 и $a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = e_0 + e_4 + e_5 + e_6$ в произведении дадут 1, а всем остальным a_0 будет перпендикулярен. Тогда отражение будет $w_{a_1+a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6} w_{a_5} w_{a_3} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4} w_{a_0}$:

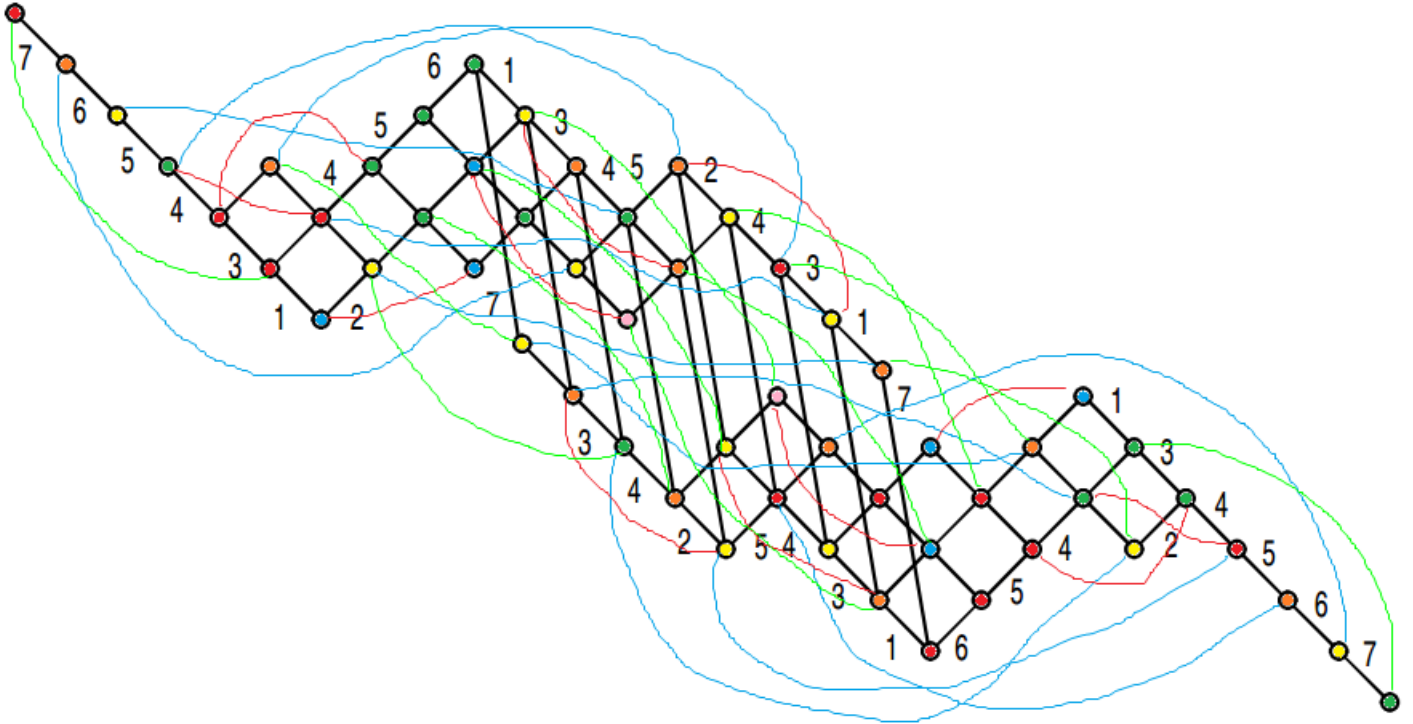


Видно 4 цикла типа 14, одночлен — x_{14}^4 , коэффициент — $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5$.

58) $\mathbf{E}_7(\mathbf{a}_2)$ — соответствует особой картинке:

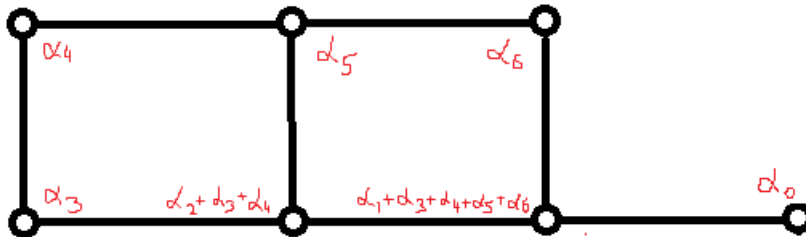


Она получается из $\mathbf{E}_6(\mathbf{a}_1)$ добавлением одного ребра — если в его конец поставить $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = e_7 - e_2$, то он будет перпендикулярен всему, кроме a_3 , так как никакие другие корни не содержат в своём разложении ни e_2 , ни e_7 . Тогда отражение будет $w_{a_1+a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6} w_{a_5} w_{a_3} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4} w_{a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}$:

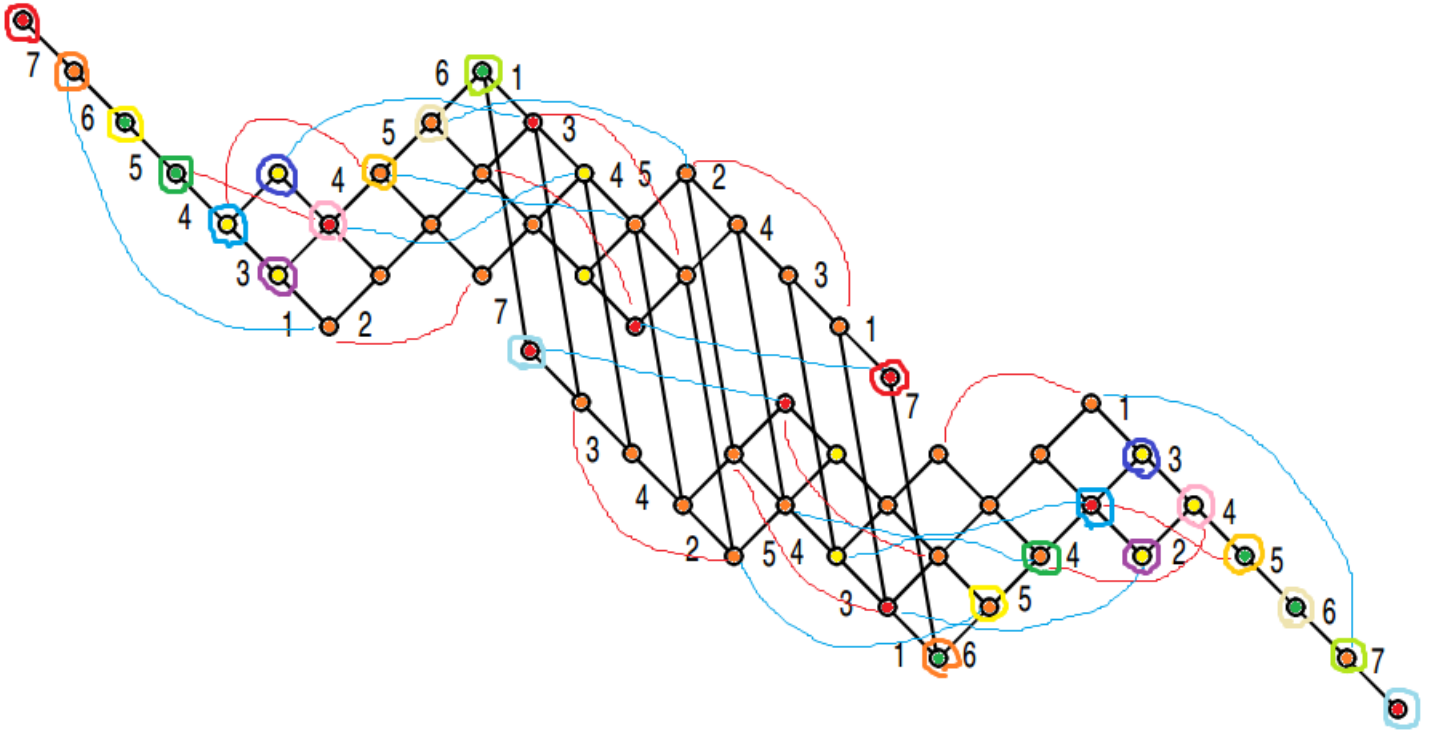


Видно 4 цикла типа 12, 1 цикл типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2 x_6 x_{12}^4$, коэффициент — $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

59) $E_7(\mathbf{a}_3)$ — соответствует особой картинке:

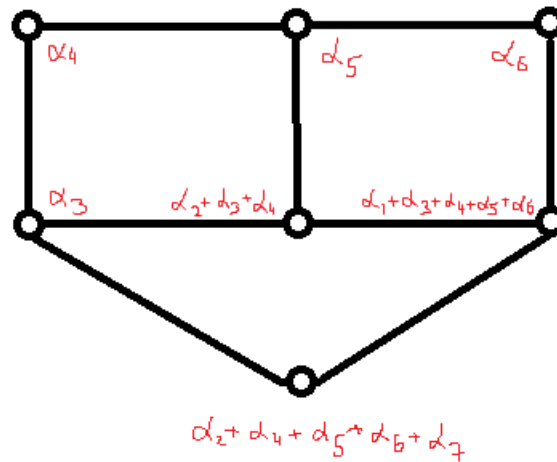


Она получается из $E_6(\mathbf{a}_2)$ добавлением одного ребра — если в его конец поставить $a_0 = 2e_0 + e_2 + \dots + e_7$, то все необходимые перпендикулярности соблюдутся. Действительно, a_0 и $a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = e_6 - e_1$ в произведении дадут 1, а остальные новые произведения будут 0. Тогда отражение будет $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4} w_{a_0}$:

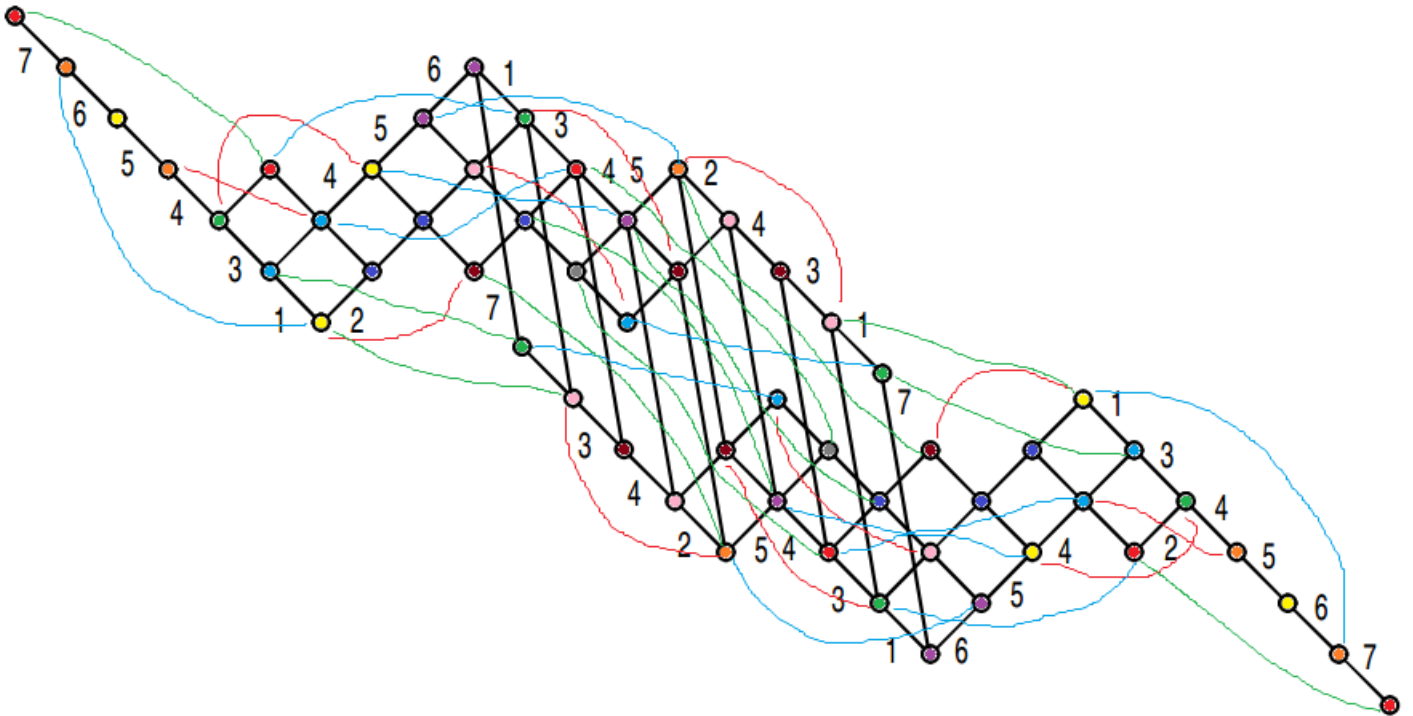


Видно 1 цикл типа 30, 2 цикла типа 10 и 1 цикл типа 6, одночлен — $x_6 x_{10}^2 x_{30}$, коэффициент — $2^9 \cdot 3^3 \cdot 7$.

60) $E_7(\mathbf{a}_4)$ — соответствует особой картинке:



Она получается из $E_6(\mathbf{a}_2)$ добавлением двух рёбер — если в их конец поставить $a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = e_0 + e_1 + e_2 + e_7$, то новый корень будет перпендикулярен всему, кроме $a_3 = e_3 - e_2$ и $a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = e_6 - e_1$. Тогда отражение будет $w_{a_3} w_{a_5} w_{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6} w_{a_6} w_{a_4} w_{a_2+a_3+a_4} w_{a_2+a_4+a_5+a_6+a_7}$:



Видно 9 циклов типа 6 и 1 цикл типа 2, одночлен — $x_2x_6^9$, коэффициент — $2^6 \cdot 5 \cdot 7$.

Список литературы

- [1] G. Blind, R. Blind, *The semiregular polytopes*. Comment. Math. Helv. **66** (1991), no. 1, 150–154.
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris 1968 288 pp.
- [3] N. G. de Bruijn, *Pólya's Theory of Counting*. In E. F. Beckenbach (Ed.), Applied combinatorial mathematics (1964), 144–184.
- [4] R. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*. 1970 Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69), 297–318 Springer, Berlin.
- [5] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compos. Math. **25** (1972), no. 1, 1–59.
- [6] J. Conway, N. Sloane, *Sphere packing, lattices, and groups*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [7] J. Conway, N. Sloane, *The cell structures of certain lattices*, In: Miscelanea Mat., (eds. P. Hilton, F. Hirzebruch, and R. Remmert), Springer-Verlag, New York, 1991, 71–107.

- [8] H. S. M. Coxeter, *Wythoff's construction for uniform polytopes*. Proc. London Math. Soc. (2) **38** (1935), 327–339.
- [9] H. S. M. Coxeter, *The polytope 2_{21} , whose twenty-seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface*. Amer. J. Math. **62** (1940), 457–486.
- [10] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd edition. Dover, New York, 1973.
- [11] H. S. M. Coxeter, *Regular and semi-regular polytopes*, II. Math. Z. **188** (1985), 559–591.
- [12] H. S. M. Coxeter, *Regular and semi-regular polytopes*, III. Math. Z. **200** (1988), 3–45. Reprinted in *Kaleidoscopes: Selected Writings of H. S. M. Coxeter*, eds. F. A. Sherk, P. McMullen, A. C. Thompson and A. I. Weiss, Wiley Interscience (New York, etc., 1995), 313–355.
- [13] H. S. M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes*, 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [14] H. S. M. Coxeter, *The evolution of Coxeter–Dynkin diagrams*. Nieuw Archief voor Wiskunde **9** (1991), 223–248. Reprinted in *Kaleidoscopes* (eds. F. A. Sherk, P. McMullen, A. C. Thompson and A. I. Weiss) Wiley Interscience (New York, etc., 1995), and in substantially revised form in *Polytopes: Abstract, Convex and Computational* eds. T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider and A. I. Weiss, NATO ASI Series C 440, Kluwer (Dordrecht etc., 1994), 21–42.
- [15] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Mat. Sbornik, **32** (1952), 349–462 (Russian), English translation in Amer. Math. Soc. Transl. **6** (1957), 111–244.
- [16] E. B. Dynkin, A. N. Minchenko, *Enhanced Dynkin diagrams and Weyl orbits*. Transform. Groups **15** (2010), no. 4, 813–841.
- [17] A. Harebov, N. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus*. Comm. Algebra **24** (1996), no. 1, 109–133.
- [18] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [19] D. Madore, *The E_8 root system*, <http://www.madore.org/~david/math/e8w.html>.
- [20] P. V. Makarov *Four-dimensional almost regular polyhedra*. Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk 1987, no. 2, 10–14, (Russian)
- [21] P. V. Makarov *On the derivation of four-dimensional semi-regular polytopes*, Mat. Issled. **103**, Voprosy Diskret. Geom. (1988), 139–150, (Russian).
- [22] Yu. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., American Elsevier Publishing Co., Amsterdam-London, New York, 1974.
- [23] P. McMullen, *Modern developments in regular polytopes*, In: T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider and A. I. Weiss (eds.), *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, 97–124, NATO ASI Series C 440, Kluwer, Dordrecht etc., 1994.

- [24] P. McMullen, *New regular compounds of 4-polytopes*. New trends in intuitive geometry, 307–320, Bolyai Soc. Math. Stud., 27, J'anos Bolyai Math. Soc., Budapest, 2018.
- [25] P. McMullen, *Geometric regular polytopes*, Cambridge University Press, 2020.
- [26] P. McMullen, E. Schulte, *Abstract regular polytopes*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [27] V. Migrin, N. Vavilov, *Exceptional Uniform Polytopes of the E_6 , E_7 and E_8 Symmetry Types*, [https://pca-pdmi.ru/2021/files/59/Migrin-Vavilov-PCA2021%20\(1\).pdf](https://pca-pdmi.ru/2021/files/59/Migrin-Vavilov-PCA2021%20(1).pdf).
- [28] V. Migrin, N. Vavilov, *Enhanced Dynkin Diagrams done right*, в печати в "Записках научн. семинаров ПОМИ".
- [29] R. V. Moody, J. Patera, *Voronoi and Delaunay cells of root lattices: Classification of their faces and facets by Coxeter–Dynkin diagrams*, J. Phys. A, Math. Gen. **25** (1992), 5089–5134.
- [30] R. V. Moody, J. Patera, *Voronoi domains and dual cells in the generalized kaleidoscope with applications to root and weight lattices*, Canad. J. Math. **47** (1995), no. 3, 573–605.
- [31] E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas*. Internat. J. Algebra Comput. **8** (1998), no. 1, 61–95.
- [32] R. Stekolshchik, *Equivalence of Carter diagrams*, Algebra Discrete Math. **23** (2017), no. 1, 138–179.
- [33] M. Szajewska, *Faces of Platonic solids in all dimensions*. Acta Crystallogr. Sect. A **70** (2014), no. 4, 358–363.
- [34] M. Szajewska, *Faces of root polytopes in all dimensions*. Acta Crystallogr. Sect. A **72** (2016), 465–471.
- [35] N. A. Vavilov, A. Yu. Luzgarev, I. M. Pevzner, *Chevalley group of type E_6 in the 27-dimensional representation*. J. Math. Sci. (N.Y.) **145** (2007), no. 1, 4697–4736.