Санкт-Петербургский государственный университет

ДОБРОНРАВОВ Егор Петрович

Выпускная квалификационная работа

Точные оценки распределения
векторнозначных* BMO*-функций.

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017*
«Математика»

Научный руководитель:
доцент, Лаборатория
им. П. Л. Чебышева, СПбГУ,
кандидат ф.-м. наук
Столяров Дмитрий Михайлович

Рецензент: associate professor,
University of Cincinnati,
College of Arts and Sciences,
Department of Mathematical Sciences; PhD,
Леонид Юрьевич Славин

Санкт-Петербург
2021 год

Введение

На данный момент большая часть вычисленных функций Беллмана, по сути, зависит от двух переменных. Так, в работах [9], [10], [13], посчитан ряд функций на параболической полосе. В работах [4] и [5] разработана теория, восстанавливающая фунцию Беллмана по граничному значению в полосе, при достаточно гладких граничных значениях

Метод функции Беллмана и метод Буркхолдера возникают в работах [7] и [1] и описаны в книгах [8] и [14].

В данной работе рассмотрен вопрос нахождения функций Беллмана многих переменных при наличии у них некоторых симметрий.

Первый пункт первого раздела посвещён основным понятиям и определениям, связанным с минимальными локально вогнутыми функциями.

Минимальные локально вогнутые функции и их аналоги — максимальные локально выпуклые функции являются важным объектом математического анализа. Они часто являются решениями оптимизационных задач и совпадают с функциями Беллмана. Подобные функции встречаются в работах [2], [3], [6]. А так же в работах [12] и [11] доказывается равенство функций Беллмана и соответствующих минимальных локально вогнутых функций для параболической и параболоидной полос соответственно.

В разделе 1 построена теория, восстанавливающая минимальные локально вогнутые функции по их аналогам, зависящим от меньшего числа переменных.

В теореме 1.1 получена основная формула восстановления, а в утверждении 1.10 эта формула приведена к более явному виду.

В разделе 2 при помощи теории, построенной в первом разделе, вычисляется ряд конкретных функций Беллмана. В пункте 2.3 вычислен многомерный аналог функции Беллмана работы [9], а в пункте 2.4 — аналог функции работы [13]. Более того, как показано в следствиях 1.8, 1.9 и утверждении 1.11, при вычислении многомерной минимальной локально вогнутой функции и соответствующей ей функции Беллмана "плоский" аналог можно заменить на так называемые "промежуточные" функции, среди которых порой можно выбрать уже посчитанные и значительно проще устроенные функции (см. пункт 2.5), после чего, уже имея многомерную и "промежуточную" функцию, вычислить "плоскую"(см. пункт 2.6).

1 Теория "вращений" локально вогнутых функций.

1.1 Введение и основные определения.

Пусть U — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а V — его подмножество (не обязательно линейное). Функцию $B\colon V \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ будем называть локально вогнутой (на V), если её сужение на любой отрезок, лежащий в области определения, вогнуто. То есть, если верна следующая формула:

$$\forall x,\, y \in U\ [x,y]\subseteq V \Rightarrow \forall\alpha\in[0,1]\quad B(\alpha x+(1-\alpha)y) \geqslant \alpha B(x)+(1-\alpha)B(y),$$

где $(-\infty)+(+\infty)=-\infty$, $0(+\infty)=0(-\infty)=0$, а

$$[x,\, y]=\left\{\alpha x+(1-\alpha)y\middle|\, \alpha\in[0,1]\right\}.$$

Если $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ некоторая функция, то мы можем определить класс локально вогнутых функций с нижним ограничением f:

$$\Lambda_{f,V} = \left\{ B\colon V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \middle| \, B \text{ — локально вогнута и } B \geqslant f \right\}.$$

Заметим, что класс $\Lambda_{f,V}$ заведомо не пуст, так как в нём лежит хотя бы функция, равная $+\infty$ на всём множестве V. Определим минимальную функцию класса $\Lambda_{f,V}$:

$$\mathcal{B}_{f,V}\colon V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$
$$\mathcal{B}_{f,V}(x) = \inf \left\{ B(x) \middle| \, B \in \Lambda_{f,V} \right\}.$$

Лемма. *Выполнено включение*: $\mathcal{B}_{f,V} \in \Lambda_{f,V}$.

Доказательство. Заметим, что:

$$\mathcal{B}_{f,V}(x) = \inf \left\{ B(x) \middle| \, B \in \Lambda_{f,V} \right\} \geqslant \inf \left\{ f(x) \middle| \, B \in \Lambda_{f,V} \right\} = f(x).$$

То есть, нужно проверить только локальную вогнутость функции $\mathcal{B}_{f,V}$. Пусть $[x, y] \in V$, $\alpha \in [0, 1]$ и $\mathcal{B}_{f,V}(\alpha x + (1-\alpha)y) < b$, значит есть функция $B \in \Lambda_{f,V}$ такая, что $B(\alpha x + (1-\alpha)y) < b$. Но тогда мы можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\alpha \mathcal{B}_{f,V}(x) + (1-\alpha)\mathcal{B}_{f,V}(y) \leqslant \alpha B(x) + (1-\alpha)B(y) \leqslant B(\alpha x + (1-\alpha)y) < b.$$

То есть,

$$\mathcal{B}_{f,V}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha \mathcal{B}_{f,V}(x) + (1-\alpha)\mathcal{B}_{f,V}(y),$$

и функция $\mathcal{B}_{f,V}$ — локально вогнута. □

В следующем пункте данного раздела будет рассмотрен вопрос восстановления минимальных локально вогнутых функций по минимальным локально вогнутым функциям, зависящим от меньшего числа переменных, при наличии некоторых симметрий у первых функций. Будет рассмотрен случай, когда $U = X \times Y$, а $f(x,\, y) = g(x,\, \|y\|)$.

1.2 Симметрия, по норме банахова пространства.

Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $(Y,\, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $\dim Y > 1$, $Z \subseteq X$ — некоторое подмножество X. Пусть нам также даны две функции $a, b\colon Z \to \mathbb{R}$, такие что $b \geqslant a \geqslant 0$. Тогда мы можем определить три множества, зажатые между "графиками" функций a и b (множества определений наших будущих функций):

$$D = \left\{ (x,\, y) \in Z \times Y \middle| \, \|y\| \in [a(x), b(x)] \right\}, \tag{1.1}$$

$$D^1 = \left\{ (x,\, t) \in Z \times \mathbb{R} \middle| \, |t| \in [a(x), b(x)] \right\},$$

$$D^+ = \left\{ (x,\, t) \in Z \times [0,\, +\infty) \middle| \, t \in [a(x), b(x)] \right\}.$$

Пусть также есть функция $g\colon D^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, тогда мы можем её распространить на множества D^1 и D по формулам:

$$g_{D^1}\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

$$g_{D^1}(x,\, t) = g_{D^+}(x,\, |t|);$$

$$g_D\colon D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

$$g_D(x,\, y) = g_{D^+}(x,\, \|y\|).$$

Для удобства сократим обозначения, а именно

$$\Lambda_{g,D} = \Lambda_{g_D,D},$$

$$\Lambda_{g,D^1} = \Lambda_{g_{D^1},D^1},$$

$$\Lambda_{g,D^+} = \Lambda_{g_{D^+},D^+}.$$

И соответственно, сократим обозначения для функций:

$$\mathcal{B}_{g,D}\colon D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\}$$

$$\mathcal{B}_{g,D} = \mathcal{B}_{g_D,D},$$

$$\mathcal{B}_{g,D^1}\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$\mathcal{B}_{g,D^1} = \mathcal{B}_{g_{D^1},D^1},$$

Целью данного пункта является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть функция b локально вогнута на множестве Z, тогда*

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} = \\ = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\}.$$

Лемма 1.2. *Выполнены следующие неравенства*:

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) \geqslant \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, \|y\|), \qquad (x,\, y) \in D, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t) \geqslant \mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, |t|), \qquad (x,\, t) \in D^1. \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть $(x,\, y) \in D$, что в свою очередь, выполнено тогда и только тогда, когда $(x,\, \|y\|) \in D^+ \subseteq D^1$. Пусть для начала $y \neq 0$. Определим функцию B_y следующим равенством:

$$B_y\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$B_y(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D}\left(x,\, t\frac{y}{\|y\|}\right).$$

Иными словами B_y — сужение функции $\mathcal{B}_{g,D}$ на множество $D \cap (X \times \operatorname{span}\{y\})$. В частности, функция B_y локально вогнута. Кроме того,

$$B_y(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D}\left(x,\, t\frac{y}{\|y\|}\right) \geqslant g\left(x,\, \left\|t\frac{y}{\|y\|}\right\|\right) = g\left(x,\, |t|\right).$$

Значит, $B_y \in \Lambda_{g,D^1}$. Что позволяет написать цепочку равенств и неравенств:

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = B_y(x, \|y\|) \geqslant \inf\left\{B(x,\, \|y\|)\,\middle|\, B \in \Lambda_{g,D^1}\right\} = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, \|y\|).$$

В случае $y \neq 0$ неравенство (1.2) доказано. При $y = 0$ мы возьмём $z \neq 0 \in Y$ и определим функцию B_z аналогично B_y:

$$B_z\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$B_z(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D}\left(x,\, t\frac{z}{\|z\|}\right).$$

Аналогично получаем, что $B_z \in \Lambda_{g,D^1}$. И соответственно,

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, 0) = B_z(x,\, 0) \geqslant \inf\left\{B(x,\, 0) \,\middle|\, B \in \Lambda_{g,D^1}\right\} = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, 0),$$

и неравенство (1.2) полностью доказано.

Теперь докажем неравенство (1.3). Для начала заметим, что функция

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^1}\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^1}(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, -t),$$

локально вогнута и

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^1}(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, -t) \geqslant g(x,\, |t|).$$

То есть, $\widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^1} \in \Lambda_{g,D^1}$, что, в свою очередь, означает, что

$$\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, -t) = \widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^1}(x,\, t) \geqslant \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t).$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, |t|)$. А значит, достаточно доказать, что для $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t) \geqslant \mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, t).$$

Определим функцию B_+ как

$$B_+ = \mathcal{B}_{g,D^1}\big|_{D^+}.$$

Тогда функция B_+ локально вогнута как сужение локально вогнутой функции, и

$$B_+(x,\, t) = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t) \geqslant g(x,\, t), \qquad (x,\, t) \in D^+.$$

Следовательно, $B_+ \in \Lambda_{g,D^+}$, а значит:

$$\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, |t|) = B_+(x,\, |t|) \geqslant \inf\left\{B(x,\, |t|) \,\middle|\, B \in \Lambda_{g,D^+}\right\} = \mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, |t|).$$

□

Следствие 1.3. *Для $(x,\, t) \in D^1$ выполнено следующее неравенство*:

$$\sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s) \,\middle|\, s \in [|t|,\, b(x)]\right\} \geqslant \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s) \,\middle|\, s \in [|t|\, b(x)]\right\}.$$

Лемма 1.4. *Пусть $y \in Y$, тогда существует ненулевой вектор $v \in Y$, такой что для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\|y\| \leqslant \|y + \alpha v\|$.*

Доказательство. Пусть функционал $L \in Y^*$, $\|L\| = 1$, такой, что $Ly = \|y\|$. Тогда подойдёт любой вектор $v \in \ker L \setminus \{0\}$:

$$\|y + \alpha v\| \geqslant |L(y + \alpha v)| = |Ly| = \|y\|.$$

□

Лемма 1.5. *Для* $(x,\, y) \in D$ *выполнено следующее неравенство*:

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) \geqslant \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s)\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $(x,\, y) \in D$, то есть, $\|y\| \in [a(x),\, b(x)]$. Выберем вектор v согласно лемме 1.4 и введём функцию φ:

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(\alpha) = \|y + \alpha v\|.$$

Функция φ непрерывна, достигает минимума в 0 и стремится к бесконечности при $|\alpha| \to \infty$. Пусть $s \in [\|y\|,\, b(x)]$, соответственно, мы можем определить следующие два числа:

$$\alpha_s^+ = \min\{\alpha|\, \alpha \geqslant 0,\, \varphi(\alpha) = s\},$$

$$\alpha_s^- = \min\{-\alpha|\, \alpha \leqslant 0,\, \varphi(\alpha) = s\}.$$

Рассмотрим также следующие две точки пространства Y: $u_s^+ = y + \alpha_s^+ v$ и $u_s^+ = y - \alpha_s^- v$. Тогда

$$y = \frac{\alpha_s^-}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} u_s^+ + \frac{\alpha_s^+}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} u_s^-,$$

а значит, и

$$(x,\, y) = \frac{\alpha_s^-}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-}(x,\, u_s^+) + \frac{\alpha_s^+}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-}(x,\, u_s^-).$$

В силу определения чисел α_s^+ и α_s^-, для $\beta \in [-\alpha_s^-,\, \alpha_s^+]$ выполнено вложение

$$\|y + \beta v\| \in [\|y\|,\, s] \subseteq [a(x),\, b(x)].$$

Что означает, что отрезок $[(x,\, u_s^-),\, (x,\, u_s^+)]$ содержится в области D. Это, в свою очередь, влечёт следующую цепочку неравенств:

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) \geqslant \frac{\alpha_s^- \mathcal{B}_{g,D}(x,\, u_s^+)}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} + \frac{\alpha_s^+ \mathcal{B}_{g,D}(x,\, u_s^-)}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} \overset{\text{лем. } 1.2}{\geqslant}$$
$$\geqslant \frac{\alpha_s^- \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s)}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} + \frac{\alpha_s^+ \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s)}{\alpha_s^+ + \alpha_s^-} = \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s).$$

Переход к супремуму по $s \in [\|y\|, b(x)]$ завершает доказательство. $\square$

Лемма 1.6. *Пусть функция* b *локально вогнута на множестве* Z*, а функция* B *лежит в классе* Λ_{g,D^+} *и не возрастает по* t *в том смысле, что*

$$B(x,\, t) = \sup\left\{B(x,\, s)\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\} \qquad \forall (x,\, t) \in D^+. \tag{1.5}$$

Тогда функция B'*, определённая формулами*

$$B'\colon D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$B'(x,\, y) = B(x,\, \|y\|),$$

принадлежит классу $\Lambda_{g,D}$.

Доказательство. Так как $B \in \Lambda_{g,D^+}$, имеем

$$B'(x,y) = B(x,\|y\|) \geqslant g(x,\|y\|),$$

то есть, для доказательства леммы достаточно проверить, что функция B' локально вогнута.

Пусть отрезок $[(x_1,\, y_1),(x_2,\, y_2)]$ лежит в области D. Это значит, для $\alpha \in\ [0,\, 1]$ верно включение

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \in D,$$

и $[x_1,\, x_2] \subseteq Z$. Что означает $y_j \in [a(x_j),\, b(x_j)]$ для $j \in \{1,\, 2\}$, а значит, мы можем написать следующие цепочки неравенств:

$$b(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \overset{*}{\geqslant} \alpha b(x_1) + (1-\alpha)b(x_2) \geqslant \alpha\|y_1\| + (1-\alpha)\|y_2\|,$$

$$a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \|\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2\| \leqslant \alpha\|y_1\| + (1-\alpha)\|y_2\|.$$

Неравенство $*$ следует из локальной вогнутости функции b. Что означает, что

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\|y_1\| + (1-\alpha)\|y_2\|) \in D^+,$$

то есть, отрезок

$$[(x_1,\|y_1\|),(x_2,\|y_2\|)]$$

лежит в области D^+. Соответственно, верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} B'(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2) = B(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\|) \overset{(1.5)}{\geqslant} \\ \geqslant B(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\|y_1\| + (1-\alpha)\|y_2\|) \geqslant \\ \geqslant \alpha B(x_1,\|y_1\|) + (1-\alpha)B(x_2,\|y_2\|) = \alpha B'(x_1,y_1) + (1-\alpha)B'(x_2,y_2). \end{gathered}$$

То есть, функция B' локально вогнута. □

Лемма 1.7. *Пусть функция b локально вогнута на множестве Z, а функция B принадлежит классу Λ_{g,D^+}. Тогда функция $\widetilde{B}$, определённая формулами*

$$\widetilde{B}\colon D^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$\widetilde{B}(x,\, t) = \sup\left\{B(x,\, s)\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\} \tag{1.6}$$

принадлежит классу Λ_{g,D^+}.

Доказательство. Так как $B \in \Lambda_{g,D^+}$, мы можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\widetilde{B}(x,\, t) = \sup\left\{B(x,\, s)\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\} \geqslant B(x,\, t) \geqslant g(x,\, t).$$

То есть, для доказательства леммы достаточно проверить, что функция $\widetilde{B}$ локально вогнута.

Пусть отрезок $[(x_1,\, t_1),(x_2,\, t_2)]$ лежит в области D^+. Значит, отрезок $[x_1,\, x_2]$ лежит в области Z, и для $\alpha \in [0,\, 1]$ выполняется включение

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \in D^+.$$

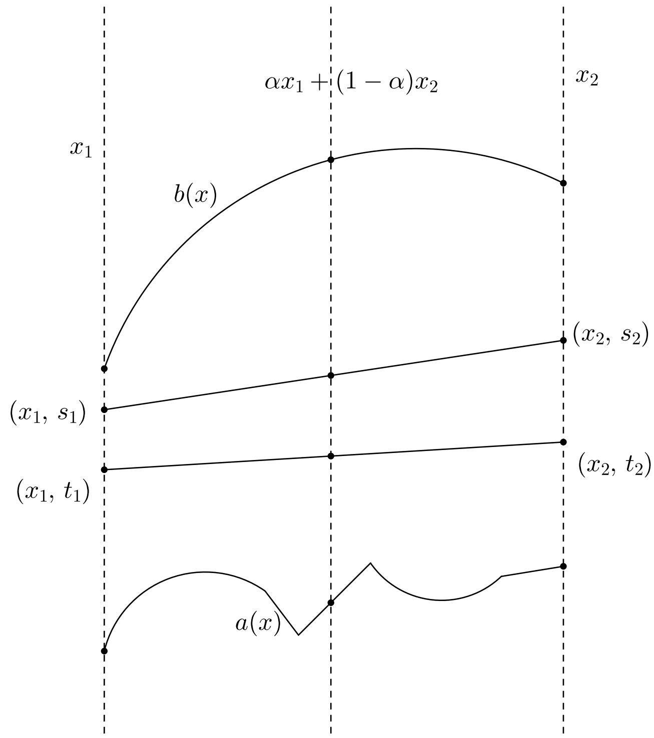

Рис. 1: Иллюстрация к доказательству леммы 1.7.

Что означает

$$a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \leqslant b(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Мы можем выбрать s_1 и s_2, так чтобы в них почти достигался супремум в формуле (1.6), то есть, чтобы были выполнены следующие условия:

$$s_j \in [t_j,\, b(x_j)]$$

и

$$B(x_j,\, s_j) \geqslant \sup\left\{B(x_j,\, s) \,\middle|\, s \in [t_j,\, b(x_j)]\right\} - \varepsilon = \widetilde{B}(x_j,\, t_j) - \varepsilon.$$

Тогда $s_j \in [a(x_j),\, b(x_j)]$ и $s_j \geqslant t_j$, что даёт

$$a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \leqslant \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2,$$

$$b(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha b(x_1) + (1-\alpha)b(x_2) \geqslant \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2.$$

Следовательно

$$\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2 \in \left[a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2),\, b(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\right].$$

То есть,

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\, \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) \in D^+,$$

и

$$[(x_1,\, s_1),\, (x_2,\, s_2)] \subseteq D^+.$$

Осталось написать следующую цепочку неравенств:

$$\widetilde{B}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \geqslant B(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\, \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) \geqslant \\ \geqslant \alpha B(x_1,\, s_1) + (1-\alpha)B(x_2,\, s_2) \geqslant \alpha\widetilde{B}(x_1,\, t_1) + (1-\alpha)\widetilde{B}(x_2,\, t_2) - \varepsilon.$$

Устремив ε к нулю, мы получаем локальную вогнутость функции $\widetilde{B}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 1.5 и следствию 1.3,

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) \geqslant \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} \geqslant \\ \geqslant \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\}.$$

То есть, для доказательства теоремы нам осталось проверить обратное неравенство

$$\sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} \geqslant \mathcal{B}_{g,D}(x, y). \tag{1.7}$$

Пусть

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x,\, t) = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\}.$$

По лемме 1.7 выполнено включение $\widetilde{\mathcal{B}} \in \Lambda_{g,D^+}$. Кроме того

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x, t) = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\} = \\ = \sup\left\{\sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, l)\,\middle|\, l \in [s,\, b(x)]\right\}\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\} = \\ = \sup\left\{\widetilde{\mathcal{B}}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [t,\, b(x)]\right\}.$$

То есть, функция $\widetilde{\mathcal{B}}$ не возрастает по t в смысле леммы 1.6. Что означает, что функция

$$\mathcal{B}'(x,\, y) = \widetilde{\mathcal{B}}(x,\, \|y\|) = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\}$$

лежит в классе $\Lambda_{g,D}$. Но так как функция $\mathcal{B}_{g,D}$ — минимальная функция класса $\Lambda_{g,D}$, мы получаем неравенство (1.7). $\square$

Теорема 1.1 влечёт два следствия.

Следствие 1.8. *Пусть функции b локально вогнута на множестве Z, а функция $B\colon D^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ удовлетворяет условию*

$$\forall (x,\, t) \in D^+ \qquad \mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, t) \leqslant B(x,\, t) \leqslant \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, t),$$

тогда

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = \sup\left\{B(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|, b(x)]\right\}.$$

Доказательство. По теореме 1.1,

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} \leqslant \\ \leqslant \sup\left\{B(x,\, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} \leqslant \\ \leqslant \sup\left\{\mathcal{B}_{g,D^1}(x, s)\,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)]\right\} = \mathcal{B}_{g,D}(x,\, y).$$

$\square$

Следствие 1.9. *Пусть функция b локально вогнута на множестве Z, а функция $\tilde g\colon D^1 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ удовлетворяет условиям:*

$$\forall (x,\, t) \in D^+ \quad \tilde g(x,\, t) = g(x,\, t),$$

$$\forall (x,\, t) \in D^1 \setminus D^+ \quad \tilde g(x,\, t) \leqslant g(x,\, |t|),$$

Тогда

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = \sup\left\{ \mathcal{B}_{\tilde g, D^1}(x,\, s) \,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)] \right\}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s) \geqslant g(x,\, |s|) \geqslant \tilde g(x,\, s).$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{g,D^1} \in \Lambda_{\tilde g, D^1}$, а значит $\mathcal{B}_{g,D^1} \geqslant \mathcal{B}_{\tilde g, D^1}$. В свою очередь,

$$\mathcal{B}_{\tilde g, D^1}(x,\, s) \geqslant \tilde g(x,\, s) = g(x,\, s), \text{ при } s \geqslant 0.$$

То есть, $\mathcal{B}_{\tilde g, D^1}\Big|_{D^+} \in \Lambda_{g, D^+}$, а значит $\mathcal{B}_{\tilde g, D^1}\Big|_{D^+} \geqslant \mathcal{B}_{g, D^+}$. Следовательно,

$$\forall (x,\, s) \in D^+ \quad \mathcal{B}_{g,D^+}(x,\, s) \leqslant \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\, s).$$

Но тогда по следствию 1.8

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\, y) = \sup\left\{ \mathcal{B}_{\tilde g, D^1}(x,\, s) \,\middle|\, s \in [\|y\|,\, b(x)] \right\}.$$

□

1.3 Вычисление $\sup\left\{ B(x,\, s) \,\middle|\, s \in [\|t\|,\, b(x)] \right\}$ по $B(x, t)$.

Пусть функция $B\colon D^+ \to \mathbb{R}$ локально вогнута и непрерывна по второй переменной.

Раз функция B локально вогнута, её сужение на отрезок

$$[(x,\, a(x)),\, (x,\, b(x))]$$

вогнуто. Пусть функция B_x — это сужение, то есть:

$$B_x\colon [a(x),\, b(x)] \to \mathbb{R},$$

$$B_x(t) = B(x,\, t).$$

Функция B_x вогнута, значит, на отрезке $[a(x),\, b(x)]$ есть такая точка $c_B(x)$, что функция B_x возрастает на отрезке $[a(x),\, c_B(x)]$ и не возрастает на отрезке $[c_B(x),\, b(x)]$, соответственно:

$$B_x(c_B(x)) = \max\left\{ B_x(t) \,\middle|\, t \in [a(x),\, b(x)] \right\}.$$

Что влечёт формулу

$$\sup\left\{ B_x(s) \,\middle|\, s \in [t,\, b(x)] \right\} = \begin{cases} B_x(c_B(x)), & \text{при } t < c_B(x), \\ B_x(t), & \text{при } t \geqslant c_B(x). \end{cases}$$

Соответственно, мы получаем

$$\sup\left\{B(x,\,s)\,\middle|\,s\in[t,\,b(x)]\right\}=\begin{cases}B(x,\,c_B(x)), & \text{при } t<c_B(x),\\ B(x,\,t), & \text{при } t\geqslant c_B(x).\end{cases}$$

Пусть для некоторого $\varepsilon>0$ выполнено включение $[x,\,x+\varepsilon v]\in D^+$. Обозначим через $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}$ производную вдоль луча:

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{B(x+\varepsilon v)-B(x)}{\varepsilon}.$$

Так как сужение локально вогнутой функции на отрезок вогнуто, локально вогнутая функция дифференцируема вдоль любого луча, и производная вдоль луча не возрастает при движении в направлении луча. Тогда для точки c_B можно написать формулу:

$$c_B(x)=\begin{cases}a(x), & \text{если } \frac{\partial_+ B_x}{\partial_+ t}<0 \text{ на } [a(x),\,b(x)),\\ b(x), & \text{если } \frac{\partial_+ B_x}{\partial_+ t}>0 \text{ на } [a(x),\,b(x)),\\ t_0, & \text{где } t_0\in[a(x),\,b(x)] \text{ и } \frac{\partial_+ B_x}{\partial_+ t}(t_0)\leqslant 0,\\ & \qquad\text{а для } s\in[a(x),\,t_0)\ \ \frac{\partial_+ B_x}{\partial_+ t}(s)>0.\end{cases}$$

Если же функция $B(x,\,t)$ дифференцируема по t, то мы получаем следующую формулу для $c_B(x)$:

$$c_B(x)=\begin{cases}a(x), & \text{при } \frac{\partial B_x}{\partial t}<0 \text{ на } [a(x),\,b(x)],\\ b(x), & \text{при } \frac{\partial B_x}{\partial t}>0 \text{ на } [a(x),\,b(x)],\\ t_0, & \text{где } t_0\in[a(x),\,b(x)] \text{ и } \frac{\partial B_x}{\partial t}(t_0)=0,\\ & \qquad\text{а для } s\in[a(x),\,t_0)\ \ \frac{\partial B_x}{\partial t}(s)>0.\end{cases}$$

Таким образом, теорема 1.1 принимает следующую форму.

Утверждение 1.10. *Пусть функция* $\mathfrak{b}$ *локально вогнута на множестве* Z *и функция* $\mathcal{B}_{g,D^1}$ *непрерывна по второй переменной, тогда*

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\,y)=\begin{cases}\mathcal{B}_{g,D^1}(x,\,c_x), & \text{при } \|y\|<c_x,\\ \mathcal{B}_{g,D^1}(x,\,\|y\|), & \text{при } \|y\|\geqslant c_x,\end{cases}$$

где

$$c_x=\begin{cases}a(x), & \text{если } \frac{\partial_+\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial_+ t}<0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))),\\ b(x), & \text{если } \frac{\partial_+\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial_+ t}>0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))),\\ t_0, & \text{где } t_0\in[a(x),\,b(x))\ \text{ и } \frac{\partial_+\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial_+ t}(x,\,t_0)\leqslant 0,\\ & \qquad\text{а для } s\in[a(x),\,t_0)\ \ \frac{\partial_+\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial_+ t}(x,\,s)>0.\end{cases}$$

А если более того функция $\mathcal{B}_{g,D^1}$ *дифференцируема по переменной* t*, то верна формула*

$$c_x=\begin{cases}a(x), & \text{при } \frac{\partial\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial t}<0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))),\\ b(x), & \text{при } \frac{\partial\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial t}>0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))),\\ t_0, & \text{где } t_0\in[a(x),\,b(x))\ \text{ и } \frac{\partial\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial t}(x,\,t_0)=0,\\ & \qquad\text{а для } s\in[a(x),\,t_0)\ \ \frac{\partial\mathcal{B}_{g,D^1}}{\partial t}(x,\,s)>0.\end{cases}$$

Следствие 1.9 принимает следующую форму.

Утверждение 1.11. *Пусть функция* $\mathfrak{b}$ *локально вогнута на множестве* Z, *функция* $\tilde{g}$ *удовлетворяет условиям следствия 1.9 и функция* $\mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}$ *непрерывна по второй переменной, тогда*

$$\mathcal{B}_{g,D}(x,\,y) = \begin{cases} \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}(x,\,c_x), & \text{при } \|y\| < c_x, \\ \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}(x,\,\|y\|), & \text{при } \|y\| \geqslant c_x, \end{cases}$$

где

$$c_x = \begin{cases} a(x), & \text{если } \frac{\partial_+ \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial_+ t} < 0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))), \\ b(x), & \text{если } \frac{\partial_+ \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial_+ t} > 0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))), \\ t_0, & \text{где } t_0 \in [a(x),\,b(x)) \text{ и } \frac{\partial_+ \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial_+ t}(x,\,t_0) \leqslant 0, \\ & \qquad \text{а для } s \in [a(x),\,t_0) \ \ \frac{\partial_+ \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial_+ t}(x,\,s) > 0. \end{cases}$$

А если более того функция $\mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}$ *дифференцируема по переменной* t, *то для* c_x *верна формула*

$$c_x = \begin{cases} a(x), & \text{при } \frac{\partial \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial t} < 0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))), \\ b(x), & \text{при } \frac{\partial \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial t} > 0 \text{ на } [(x,\,a(x)),\,(x,\,b(x))), \\ t_0, & \text{где } t_0 \in [a(x),\,b(x)) \text{ и } \frac{\partial \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial t}(x,\,t_0) = 0, \\ & \qquad \text{а для } s \in [a(x),\,t_0) \ \ \frac{\partial \mathcal{B}_{\tilde{g},D^1}}{\partial t}(x,\,s) > 0. \end{cases}$$

Замечание 1.12. В случае, когда B не непрерывна по второй переменной, можно написать подобные формулы, но множество возможных значений $c_B(x)$ изменятся с $[a(x),\,b(x)]$ на

$$[a(x),\,b(x)] \cup \{a(x)_+,\,b(x)_-\}.$$

А если же B не конечна, то множество возможных значения $c_B(x)$ будут уже

$$\left(\bigcup_{t \in [a(x),\,b(x)]} \{t,\,t_+,\,t_-\} \right) \setminus \{a(x)_-,\,b(x)_+\}.$$

Где под $B(x,\,t_-)$, $B(x,\,t_+)$ подразумевается предел справа и слева соответственно.

2 Функции Беллмана на параболоидной полосе в $\mathbb{R}^{d+1}$.

В данном разделе I всегда некоторый интервал на прямой, J — его подынтервал. Пространство $\mathbb{R}^d$ снабжено евклидовой нормой, норма вектора $x \in \mathbb{R}^d$ обозначается $|x|$.

2.1 Пространство BMO

Для функции $\varphi \in L^1(I,\, \mathbb{R}^d)$ обозначим через $\langle\varphi\rangle_J$ её среднее по отрезку J:

$$\langle\varphi\rangle_J = \frac{1}{|J|}\int\limits_J \varphi(x)\,dx.$$

Функции класса $\mathrm{BMO}(I,\, \mathbb{R}^d)$ — это суммируемые функции с ограниченным среднеквадратичным отклонением от среднего:

$$\mathrm{BMO}(I,\, \mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^d) \Big| \, \exists c \;\forall J \;\; \frac{1}{|J|}\int\limits_J \left|\varphi(x) - \langle\varphi\rangle_J\right|^2\, dx \leqslant c \right\}.$$

Норма функции в пространстве BMO — это, соответственно,

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} = \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(I,\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup\left\{ \left(\frac{1}{|J|}\int\limits_J \left|\varphi(x) - \langle\varphi\rangle_J\right|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \Big| \; J \text{ — подынтервал } I \right\}.$$

Замечание 2.1. Для функций $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^d)$ выполнено тождество:

$$\frac{1}{|J|}\int\limits_J \left|\varphi(x) - \langle\varphi\rangle_J\right|^2\, dx = \langle|\varphi|^2\rangle_J - |\langle\varphi\rangle_J|^2.$$

Доказательство. Если функция φ не пренадлежит пространству L^2, то с обеих сторон тождества стоит бесконечность. А значит, мы можем рассмотреть функцию φ как функцию из $L^2(\frac{\chi_J}{|J|}\lambda)$, где λ — мера Лебега, и тогда расписать интеграл следующим образом:

$$\frac{1}{|J|}\int\limits_J \left|\varphi(x) - \langle\varphi\rangle_J\right|^2\, dx = \Big\langle \varphi - \langle\varphi\rangle_J,\, \varphi - \langle\varphi\rangle_J \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \varphi,\, \varphi \Big\rangle - 2\Big\langle \varphi,\, \langle\varphi\rangle_J \Big\rangle + \Big\langle \langle\varphi\rangle_J,\, \langle\varphi\rangle_J \Big\rangle = \langle|\varphi|^2\rangle_J - |\langle\varphi\rangle_J|^2.$$

Здесь $\Big\langle \varphi,\, \psi \Big\rangle$ — скалярное произведение функций φ и ψ в L^2. $\square$

Следствие 2.2. *Для функций класса L^1 эквивалентны следующие два условия*:

$$1) \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon;$$
$$2) \forall J \;\; \langle|\varphi|^2\rangle_J - |\langle\varphi\rangle_J|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Обозначим через BMO_ε множество функций класса BMO с нормой не больше ε:

$$\mathrm{BMO}_\varepsilon(I,\, \mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in \mathrm{BMO}(I,\, \mathbb{R}^d) \big| \, \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Обозначим через F_d стандартный параболоид в $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$F_d = \left\{ x = (x',\, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \big| \, |x'|^2 = x_{d+1} \right\},$$

а через $\Omega_{\varepsilon,d}$ обозначим параболоидную полосу ширины ε^2:

$$\Omega_{\varepsilon,d} = \left\{ x = (x',\, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, x_{d+1} - |x'|^2 \in [0, \varepsilon^2] \right\}.$$

Тогда, в силу следствия 2.2, класс функций BMO_ε можно охарактерезовать следующим образом:

$$\mathrm{BMO}_\varepsilon(I,\, \mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in L^1(I,\, F_d) \,\middle|\, \forall J \ \langle \varphi \rangle_J \in \Omega_{\varepsilon,d} \right\},$$

то есть, как множество функций со значениями на параболоиде, среднее которых по любому отрезку лежит в параболоидной полосе ширины ε^2. Для краткости введём сокращение $\Omega_\varepsilon = \Omega_{\varepsilon,1}$ и $F = F_1$.

2.2 Постановка общей задачи.

Заметим, что

$$\Omega_{\varepsilon,d} = \left\{ (x', x_{d+1}) \in \mathbb{R}^d \times [0,\, +\infty) \,\middle|\, |x'| \in \left[\sqrt{\max\{0, x_{d+1} - \varepsilon^2\}}, \sqrt{x_{d+1}} \right] \right\}.$$

В частности область $\Omega_{\varepsilon,d}$ имеет вид (1.1).

Пусть дана борелевски измеримая функция $f\colon [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$, тогда мы можем определить интегральный функционал

$$\mathcal{I}_{f,d}\colon L^1(I,\, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$\mathcal{I}_{f,d}(\varphi) = \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(|\varphi(x)|)\, dx.$$

А так же мы можем определить соответствующую ему функцию Беллмана:

$$\mathbb{B}_{f,\varepsilon,d}\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$\mathbb{B}_{f,\varepsilon,d}(x) = \sup \left\{ \mathcal{I}_{f,d}(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in \mathrm{BMO}_\varepsilon(I,\, \mathbb{R}^d),\, x = (\langle \varphi \rangle_I,\, \langle |\varphi|^2 \rangle_I) \right\}.$$

В свою очередь, мы можем пересадить функцию f на область $\Omega_{\varepsilon,d}$:

$$\tilde{f}_{\varepsilon,d}\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$\tilde{f}_{\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \begin{cases} f(|x'|), & \text{при } x_{d+1} = |x'|^2, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

А также определить соответствующий класс локально вогнутых функций и минимальную локально вогнутую функцию:

$$\Lambda_{f,\varepsilon,d} = \Lambda_{\tilde{f}_{\varepsilon,d}, \Omega_{\varepsilon,d}},$$

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\},$$

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d} = \mathcal{B}_{\tilde{f}_{\varepsilon,d}, \Omega_{\varepsilon,d}}.$$

В работе [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если функция f полунепрерывна снизу, то верна формула*:

$$\mathbb{B}_{f,\varepsilon,d} = \mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}.$$

А так как функция $b(t) = \sqrt{t}$ вогнута на $[0, +\infty)$, теорема 1.1 влечёт формулу:

$$\mathbb{B}_{f,\varepsilon,d} = \mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1}) = \sup\left\{\mathcal{B}_{f,\varepsilon,1}(t, x_{d+1}) \,\middle|\, t \in [|x'|, \sqrt{x_{d+1}}]\right\}.$$

Задача данного раздела — явное вычисление $\mathbb{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1})$ для ряда функций f.

Лемма 2.4. *При $d > 1$ верно неравенство*

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1}) \geqslant f(\sqrt{x_{d+1}}).$$

Доказательство.

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1}) \overset{\text{T. 1.1}}{=} \sup\left\{\mathcal{B}_{f,\varepsilon,1}(t, x_{d+1}) \,\middle|\, t \in [|x'|, \sqrt{x_{d+1}}]\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{B}_{f,\varepsilon,1}(\sqrt{x_{d+1}}, x_{d+1}) \geqslant f(\sqrt{x_{d+1}}).$$

□

Следствие 2.5. *Если функция $t \mapsto f(\sqrt{t})$ — вогнута, то при $d > 1$ верно равенство*

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1}) = f(\sqrt{x_{d+1}}).$$

Доказательство. Из леммы 2.4 мы знаем, что

$$\mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x', x_{d+1}) \geqslant f(\sqrt{x_{d+1}}).$$

Пусть функция B определена как в формулах ниже

$$B\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to [0, +\infty),$$

$$B(x', x_{d+1}) = f(\sqrt{x_{d+1}}).$$

Тогда, с одной стороны $B(x', |x'|^2) = f(|x'|)$, с другой, для $\alpha \in [0, 1]$ и

$$x = (x', x_{d+1}),\ y = (y', y_{d+1})$$

таких, что $[x, y] \subseteq \Omega_{\varepsilon,d}$ выполнено

$$\alpha B(x) + (1-\alpha)B(y) = \alpha f(\sqrt{x_{d+1}}) + (1-\alpha) f(\sqrt{y_{d+1}}) \leqslant$$
$$\leqslant f(\sqrt{\alpha x_{d+1} + (1-\alpha) y_{d+1}}) = B(\alpha x + (1-\alpha) y).$$

Мы показали, что функция B — локально вогнута. Значит, выполнено включение $B \in \Lambda_{f,\varepsilon,d}$, а следовательно,

$$f(\sqrt{x_{d+1}}) = B(x) \geqslant \mathcal{B}_{f,\varepsilon,d}(x), \qquad \forall x \in \Omega_{\varepsilon,d}.$$

□

2.3 Случай $f(t) = t^p$.

Функция $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}$ вычислена в работе [9]. Соответственно, для подсчёта $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,d}$ нам достаточно посчитать значение параметра c_x для функции $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}$ (см. утв. 1.10).

2.3.1 Случай $p \in (0,\, 2]$.

Заметим, что в данном случае функция $t \mapsto f(\sqrt{t}) = t^{\frac{p}{2}}$ — вогнута.

Следствие 2.6. *При $p \in (0,\, 2]$ верно $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = x_{d+1}^{\frac{p}{2}}$.*

Для сравнения, в [9] вычислена функция $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}$, она задана следующими формулами.

При $p = 2$

$$\mathcal{B}_{t^2,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = x_2.$$

При $p \in [1,\, 2)$

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} x_2^{\frac{p}{2}}, & \text{при } x_2 \leqslant \varepsilon^2, \\ m(u)(|x_1| - u) + u^p, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь

$$u = |x_1| + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2}, \text{ а } m(u) = p\varepsilon^{p-1}e^{-\frac{u}{\varepsilon}} \int\limits_1^{\frac{u}{\varepsilon}} t^{p-1}e^t\, dt.$$

В случае $d = 1$, $p \in (0,\, 1)$ формула для функции $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}$ ещё сложнее, см. [9].

2.3.2 Случай $p > 2$.

В данном случае, согласно [9], у нас есть формула:

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} \frac{p}{2}\varepsilon^{p-2}\Gamma(p)x_2, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ m(u)(|x_1| - u) + u^p, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\Omega^1 = \left\{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \,\middle|\, |x_1| \leqslant \frac{x_2}{2\varepsilon} \leqslant \varepsilon\right\}, \tag{2.1}$$

$$m(u) = pe^{\frac{u}{\varepsilon}}\varepsilon^{p-1} \int\limits_{\frac{u}{\varepsilon}}^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\, dt, \tag{2.2}$$

$$u = |x_1| - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2}. \tag{2.3}$$

То есть, функция $\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}$ линейна и не зависит от x_1 в области, зажатой между двумя касательными, выходящими из точки $(0, 0)$, а вне неё линейна вдоль касательных с постоянной u, то есть, отрезков

$$\left[\left(x,\, x^2\right),\, \left(x + \operatorname{sign}(x)\varepsilon,\, (x + \operatorname{sign}(x)\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\right)\right].$$

По теореме 1.1,

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \sup\left\{\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(s,\, x_{d+1}) \,\middle|\, s \in [|x'|,\, \sqrt{x_{d+1}}]\right\} \geqslant \mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(|x'|,\, x_{d+1}).$$

Мы хотим показать, что в данном случае

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(|x'|,\, x_{d+1}).$$

Данный факт мы докажем в более общем случае.

Лемма 2.7. *Пусть $B\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ — локально вогнута и имеет вид:*

$$B(x_1,\, x_2) = \begin{cases} \alpha x_2 + \beta, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \gamma(u)(|x_1| - u) + \theta(u), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma,\, \theta\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, а и u и Ω^1 определены формулами (2.1) и (2.3) соответственно. Тогда функция $\widetilde{B}$, заданная формулами

$$\widetilde{B}\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to \mathbb{R},$$

$$\widetilde{B}(x',\, x_{d+1}) = B(|x'|,\, x_{d+1}),$$

локально вогнута.

Перед доказательством данной леммы нам понадобится ещё несколько технических утверждений.

Лемма 2.8. *Пусть функция $B\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ локально вогнута, линейна вдоль отрезка $[x,\, y]$, и определена в окрестности $[x,\, y]$. Тогда для любого вектора v значение $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}$ одинаково во всех внутренних точках отрезка $[x,\, y]$.*

Доказательство. Данное утверждение было впоне известно, так в пункте 2 теоремы 2.2.6 из [5] говорится, что у минимальной локально вогнутой функции с дочтаточно гладким граничным значением дифферинциал вдоль отрезков линейности постоянен. Но доказательство в полной общности не было записанно.

Пусть, не умаляя общности, выполнено равенство $|v| = 1$.

Предположим противное, тогда существуют числа $\alpha,\, \beta \in (0,\, 1)$ такие, что

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\alpha x + (1-\alpha)y) < \frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\beta x + (1-\beta)y).$$

Пусть, не умаляя общности, $\beta > \alpha$. Вычитанием линейной функции можно добиться того, что $B\Big|_{[x,\, y]} = 0$ и

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\beta x + (1-\beta)y) > 0.$$

Пусть функция определена в δ_0-окрестности отрезка $[x,\, y]$ ($\delta_0 > 0$). Если

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\beta x + (1-\beta)y) > 0,$$

то существует число $\delta < \delta_0$, такое, что

$$B(\beta x + (1-\beta)y + \delta v) > 0.$$

В таком случае,

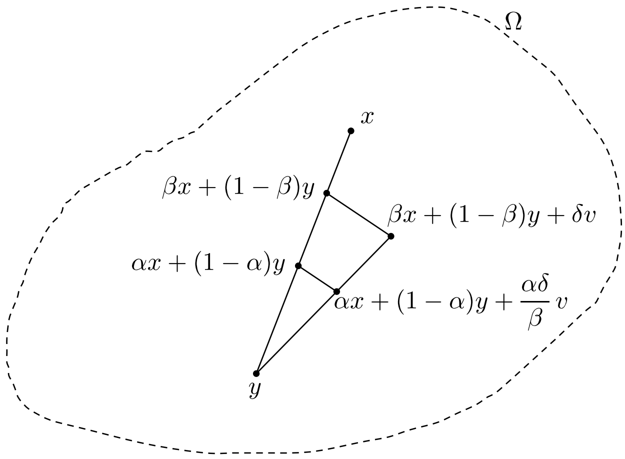

Рис. 2: Иллюстрация к доказательству леммы 2.8.

$$B\left(\alpha x + (1-\alpha)y + \frac{\alpha\delta}{\beta}v\right) = B\left(\frac{\alpha}{\beta}(\beta x + (1-\beta)y + \delta v) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)y\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{\beta}B\left(\beta x + (1-\beta)y + \delta v\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)B(y) =$$
$$= \frac{\alpha}{\beta}B\left(\beta x + (1-\beta)y + \delta v\right) > 0. \quad (2.4)$$

Функция B локально вогнута, следовательно функция

$$B\Big|_{\left[\alpha x + (1-\alpha)y,\, \alpha x + (1-\alpha)y + \frac{\alpha\delta}{\beta}v\right]}$$

вогнута. Но тогда бы из равенства

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ v}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0$$

следовало бы, что функция B неположительна на всём отрезке

$$\left[\alpha x + (1-\alpha)y,\, \alpha x + (1-\alpha)y + \frac{\alpha\delta}{\beta}v\right].$$

Что противоречит неравенству (2.4). $\square$

Лемма 2.9. *Пусть функция $B\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ локально вогнута и имеет вид*

$$B(x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha x_2 + \beta, & \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega^1, \\ \gamma(u)(|x_1| - u) + \theta(u), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon$, при $x_1 \geqslant 0$, верно неравенство

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x) \leqslant 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Так как функция B локально вогнута,

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_1^2+\varepsilon^2) = \lim_{\delta\to 0_+} \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1+\delta,\, x_1^2+\varepsilon^2).$$

А значит, нам достаточно доказать неравенство (2.5) лишь во внутренних точках области Ω_ε. Заметим, что если

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant 0,$$

то и

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(t,\, x_2) \leqslant 0 \text{ при } t \in [x_1,\, \sqrt{x_2}].$$

Сужение функции B на отрезки вида

$$[(t,\, t^2),\, ((t+\varepsilon), (t+\varepsilon)^2+\varepsilon^2)],$$

где $t \geqslant 0$, линейно. Таким образом, если в одной внутренней точке касательной имеет место неравенство $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1} \leqslant 0$, то, по лемме 2.8, в остальных внутренних точках этой касательной также $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1} \leqslant 0$.

Во внутренних точках области Ω^1 имеет место равенство $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1} = 0$, а значит,

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(0,\, x_2) = 0, \qquad \text{при } x_2 < \varepsilon^2.$$

В свою очередь, если $x_2 \in [\varepsilon^2,\, 2\varepsilon^2)$, мы можем выбрать

$$t \in \left(\sqrt{x_2-\varepsilon^2},\, \min\left\{x_1,\, \frac{x_2}{2\varepsilon}\right\}\right),$$

то есть, так, чтобы $(t,\, x_2) \in \Omega^1$, и написать:

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(t,\, x_2) = 0.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2.5) в случае $x_2 < 2\varepsilon^2$. Осталось доказать следующий факт:

$$\forall (x_1,\, x_2) \in \operatorname{Int}\Omega_\varepsilon,\, x_2 < a \qquad \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall (x_1,\, x_2) \in \operatorname{Int}\Omega_\varepsilon,\, x_2 < a + 2\varepsilon\sqrt{a} + 2\varepsilon^2 \qquad \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant 0.$$

Докажем его. Для

$$x_2 < a + 2\varepsilon\sqrt{a} + 2\varepsilon^2$$

можно выбрать

$$t \in \left(\sqrt{x_2-\varepsilon^2},\, \min\left\{x_1,\, \frac{x_2+a+2\varepsilon\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+2\varepsilon}\right\}\right),$$

то есть, такое число t, что $(t,\, x_2) \in \operatorname{Int}\Omega_\varepsilon$, но при этом $(t,\, x_2)$ лежит левее касательной

$$[(\sqrt{a},\, a),\, (\sqrt{a}+\varepsilon, a+2\varepsilon\sqrt{a}+2\varepsilon^2)].$$

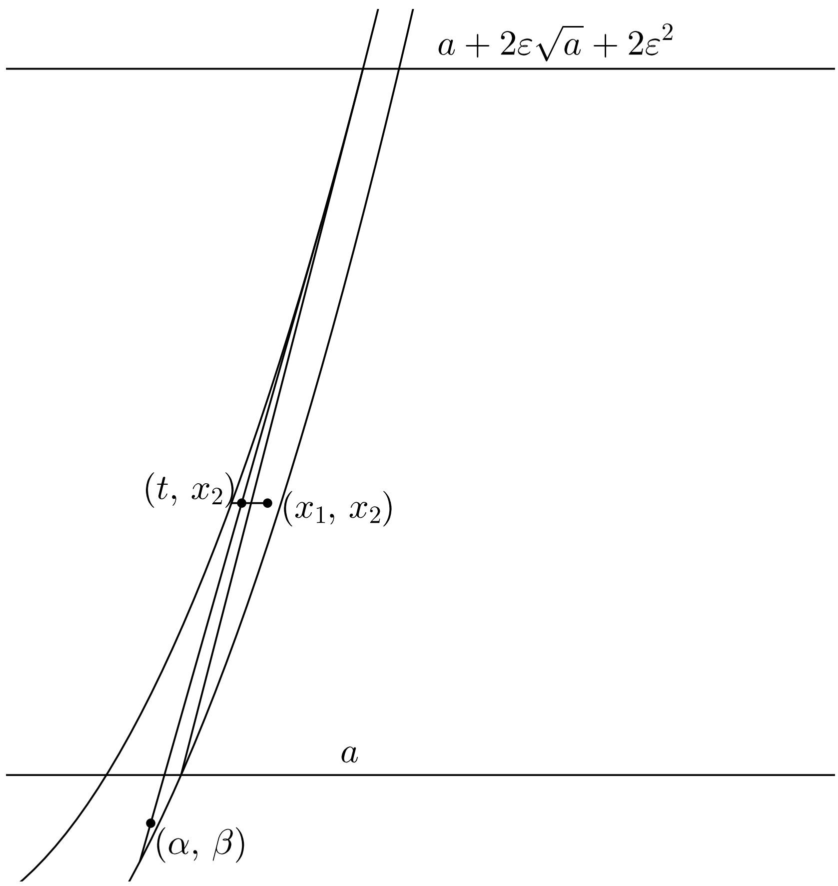

Рис. 3: Иллюстрация к доказательству леммы 2.9.

И соответственно, для точки (t, x_2) мы можем выбрать точку $(\alpha,\, \beta)$, лежащую с ней на одной касательной, так чтобы $\beta < a$. (см. Рис. 3) Тогда мы можем написать цепочку неравенств:

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(x_1,\, x_2) \leqslant \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(t,\, x_2) = \frac{\partial_+ B}{\partial_+ x_1}(\alpha,\, \beta) \leqslant 0.$$

□

Доказательство леммы 2.7. Из леммы 2.9 следует, что функция B не возрастает по x_1 при $x_1 \geqslant 0$, то есть:

$$B(x_1,\, x_2) = \sup\left\{B(s,\, x_2)\big|\, s \in [|x_1|,\, \sqrt{x_2}]\right\}.$$

А значит, мы можем применить лемму 1.6 и получить, что функция

$$\widetilde{B}\colon \Omega_{\varepsilon,d} \to \mathbb{R},$$

$$\widetilde{B}(x',\, x_{d+1}) = B(|x'|,\, x_{d+1})$$

локально вогнута. □

Таким образом, в случае $p > 2$,

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(x',\, x_{d+1}) = \mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,1}(|x'|,\, x_{d+1}).$$

Точнее,

$$\mathcal{B}_{t^p,\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \begin{cases} \frac{p}{2}\varepsilon^{p-2}\Gamma(p)x_{d+1}, & \text{при } |x_1| \leqslant \frac{x_{d+1}}{2\varepsilon} \leqslant \varepsilon, \\ m(u)(|x'| - u) + u^p, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где u и m вычисляются по формулам (2.1) и (2.2) соответственно.

2.4 Случай $f = \chi_{t \geqslant \lambda}$.

В данном случае f полунепрерывна сверху, а не снизу, по этому напрямую теорема 2.3 не пременима. Но так как полученная функция будет непрерывна по параметру λ вне точек внешней границы, а в точках внешней границы функция Беллмана и минимальная локально вогнутая совпадают с граничным условием, то теорема сохранит верность.

Функция $\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}$ вычислена в работе [13]. Соответственно, для подсчёта $\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,d}$, нам достаточно вычислить c_x для функции $\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}$ (см. утв. 1.10).

2.4.1 Случай $\lambda \in [0,\, \varepsilon]$.

В данном случае, согласно [13], функция $\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}$ вычисляется по формуле:

$$\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \frac{x_2}{\lambda^2}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ \frac{x_2 - x_1^2}{x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \end{cases}$$

где

$$\Omega^1 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \geqslant \lambda^2\right\},$$

$$\Omega^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, \lambda|x_1| \leqslant x_2 \leqslant \lambda^2\right\},$$

$$\Omega^3 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \leqslant \lambda|x_1|\right\},$$

(См. Рис. 4). Таким образом,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ \frac{2(x_2 - \lambda|x_1|)(\lambda - |x_1|)}{(x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|)^2}\operatorname{sign} x_1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3. \end{cases}$$

То есть, при $x_1 \geqslant 0$ областях Ω^1 и Ω^2 имеет место равенство

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1} = 0.$$

А в области Ω^3 выполнены неравенства $x_2 \leqslant \lambda|x_1|$ и $|x_1| \leqslant \lambda$. Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1} = \frac{2(x_2 - \lambda|x_1|)(\lambda - |x_1|)}{(x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|)^2} \leqslant 0.$$

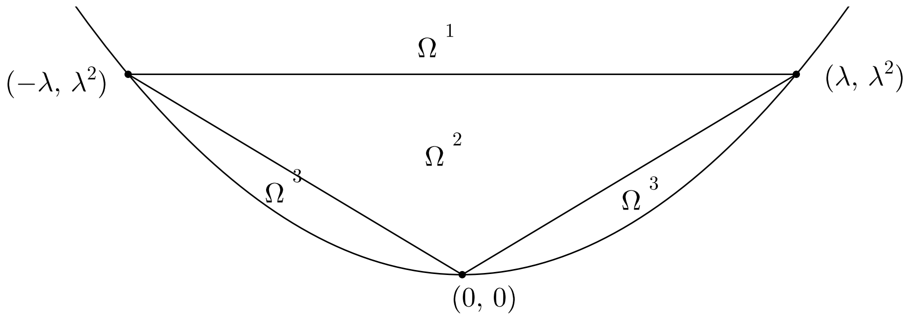

Рис. 4: Фолиация в случае $\lambda \leqslant \varepsilon$.

Что означает, что функция $\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}$ не возрастает при увеличении $|x_1|$:

$$\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) = \sup\left\{\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}(s,\,x_2)\,\middle|\, s\in[|x_1|,\,\sqrt{x_2}]\right\} \overset{\text{т.1.1}}{=} \\ = \mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,d}(x',\,x_2),$$

при $x'\in\mathbb{R}^d$, $|x'| = |x_1|$. Что означает, что

$$\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,d}(x',\,x_{d+1}) = \begin{cases} 1, & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1})\in\Omega^1,\\ \frac{x_{d+1}}{\lambda^2}, & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1})\in\Omega^2,\\ \frac{x_{d+1}-|x'|^2}{x_{d+1}+\lambda^2-2\lambda|x'|}, & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1})\in\Omega^3.\end{cases}$$

2.4.2 Случай $\lambda\in(\varepsilon,\,2\varepsilon]$.

В данном случае, согласно [13], функция $\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^1,\\ \frac{2(\lambda^2-\varepsilon^2)|x_1|-(\lambda-\varepsilon)x_2+\lambda(2\varepsilon^2+\varepsilon\lambda-\lambda^2)}{2\varepsilon\lambda^2}, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^2,\\ \frac{x_2-x_1^2}{x_2+\lambda^2-2\lambda|x_1|}, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^3,\\ \frac{x_2}{\lambda^2}, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^4,\end{cases}$$

где

$$\Omega^1 = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\, |x_1|\geqslant\lambda \text{ и } x_2\leqslant 2(\lambda+\varepsilon)|x_1|-\lambda^2-2\varepsilon\lambda \text{ при } |x_1|<\lambda+\varepsilon\right\},$$

$$\Omega^2 = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\, \lambda-\varepsilon\leqslant|x_1|\leqslant\lambda+\varepsilon,\; x_2\geqslant 2\lambda|x_1|-\lambda^2+|2\varepsilon(|x_1|-\lambda)|\right\},$$

$$\Omega^3 = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\, x_2\leqslant\lambda|x_1|\right\},$$

$$\Omega^4 = \\ = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon\,\middle|\, x_2\geqslant\lambda|x_1| \text{ и } x_2\leqslant 2(\lambda-\varepsilon)|x_1|-\lambda^2+2\varepsilon\lambda \text{ при } |x_1|>\lambda-\varepsilon\right\}.$$

(См. рис. 5). Следовательно,

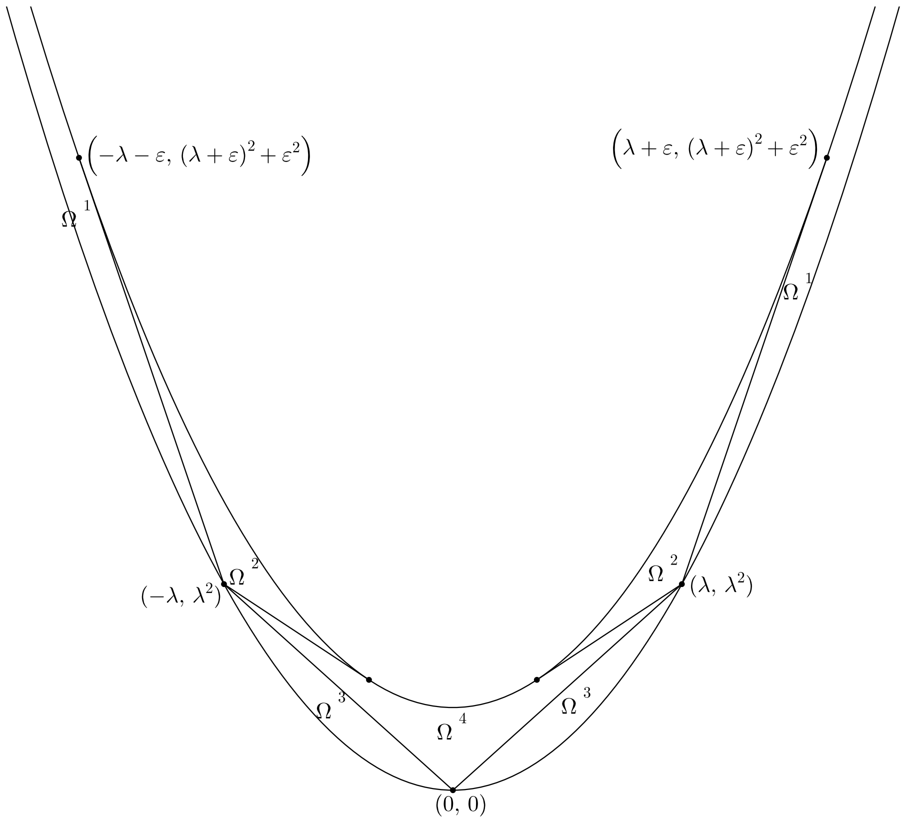

Рис. 5: Фолиация в случае $\lambda \in [\varepsilon,\, 2\varepsilon]$, $d = 1$.

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \frac{(\lambda^2-\varepsilon^2)}{\varepsilon\lambda^2}\operatorname{sign} x_1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ \frac{2(x_2-\lambda|x_1|)(\lambda-|x_1|)}{(x_2+\lambda^2-2\lambda|x_1|)^2}\operatorname{sign} x_1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \\ 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^4. \end{cases}$$

То есть, при $x_1 \geqslant 0$ в областях Ω^1 и Ω^4

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{|t|\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(\text{ч}) = 0, \qquad \text{при } x \in \Omega^1 \cup \Omega^4,$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{|t|\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x) = \frac{\lambda^2-\varepsilon^2}{\varepsilon\lambda^2} > 0, \qquad \text{при } x \in \Omega^2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{|t|\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x) = \frac{2(x_2-\lambda|x_1|)(\lambda-|x_1|)}{(x_2+\lambda^2-2\lambda|x_1|)^2} \leqslant 0, \qquad \text{при } x \in \Omega^3.$$

Мы видим, что при увеличении $|x_1|$ функция $\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}$ возрастает только в области Ω^2. Согласно теореме 1.1, функция при переходе к старшим размерностям поменяется только в области Ω^2, и при этом поменяется на значение на границе данной области на данной высоте. Следовательно, при

$(x_1,\, x_2) \in \Omega^2$ и $x_2 \geqslant \lambda^2$ значение изменится н 1. А при $(x_1,\, x_2) \in \Omega^2$ и $x_2 \leqslant \lambda^2$ значение изменится на $\frac{x_2}{\lambda^2}$. Заметим, что

$$\Omega^1 \cup \left(\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2)\big|\, x_2 \geqslant \lambda^2\}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 \geqslant \lambda^2\right\},$$

$$\Omega^4 \cup \left(\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2)\big|\, x_2 < \lambda^2\}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, \lambda|x_1| \leqslant x_2 \leqslant \lambda^2\right\}.$$

Таким образом мы получили формулу

$$\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \begin{cases} 1, & \text{при } (|x'|,\, x_{d+1}) \in \widetilde{\Omega}^1, \\ \frac{x_{d+1}}{\lambda^2}, & \text{при } (|x'|,\, x_{d+1}) \in \widetilde{\Omega}^2, \\ \frac{x_{d+1} - |x'|^2}{x_{d+1} + \lambda^2 - 2\lambda|x'|}, & \text{при } (|x'|,\, x_{d+1}) \in \widetilde{\Omega}^3, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{\Omega}^1 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 \geqslant \lambda^2\right\},$$

$$\widetilde{\Omega}^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, \lambda|x_1| \leqslant x_2 \leqslant \lambda^2\right\},$$

$$\widetilde{\Omega}^3 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 \leqslant \lambda|x_1|\right\}.$$

(См. рис. 6) Мы видим, что два различных случая задания функции в $\mathbb{R}$

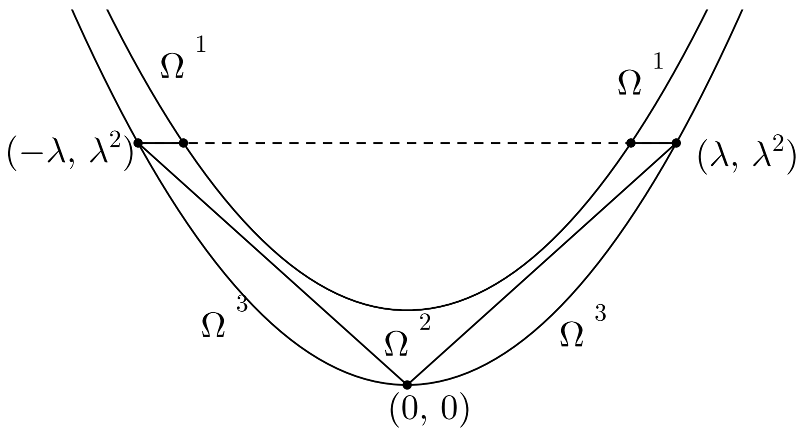

Рис. 6: Фолиация в случае $\lambda \in [\varepsilon,\, 2\varepsilon]$, $d \geqslant 2$.

объединились в один в старших размерностях $d \geqslant 2$.

2.4.3 Случай $\lambda > 2\varepsilon$.

В данном случае, согласно [13], функция $\mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda},\varepsilon,1}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{B}_{\chi_{|t| \geqslant \lambda},\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ 1 - \frac{x_2 - 2(\lambda+\varepsilon)|x_1| + \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda}{8\varepsilon^2}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_2 - x_1^2}{\varepsilon^2}}\right) \exp\left\{\frac{|x_1| - \lambda}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \frac{x_2 - x_1^2}{\varepsilon^2}}\right\}, & \\ & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \\ \frac{x_2 - x_1^2}{x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^4, \\ \frac{x_2}{4\varepsilon^2} \exp\left\{2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right\}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^5, \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$\Omega^1 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, |x_1| \geqslant \lambda \text{ и } x_2 \leqslant 2(\lambda+\varepsilon)|x_1| - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda \text{ при } |x_1| < \lambda+\varepsilon \right\},$$

$$\Omega^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, \lambda - \varepsilon \leqslant |x_1| \leqslant \lambda+\varepsilon,\, x_2 \geqslant 2\lambda|x_1| - \lambda^2 + |2\varepsilon(|x_1|-\lambda)| \right\},$$

$$\Omega^3 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \geqslant 2(\lambda-\varepsilon)|x_1| - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda \text{ и } x_2 \leqslant 2(\varepsilon)|x_1| \text{ при } |x_1| < \varepsilon \right\},$$

$$\Omega^4 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 < 2(\lambda-\varepsilon)|x_1| - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda \right\},$$

$$\Omega^5 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, x_2 \geqslant 2\varepsilon|x_1| \right\}.$$

(См. рис. 7). Следовательно,

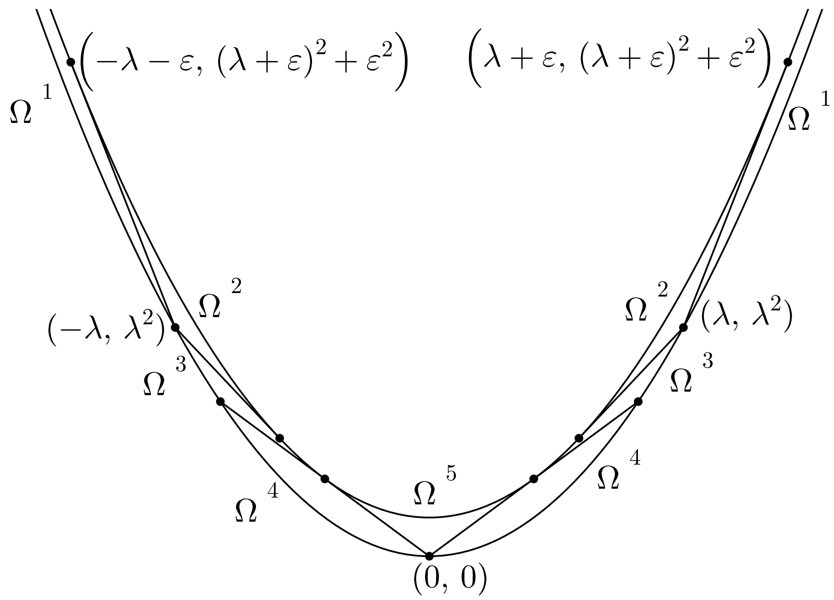

Рис. 7: Фолиация в случае $\lambda > 2\varepsilon$, $d = 1$.

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{|t|\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \frac{\lambda+\varepsilon}{4\varepsilon^2}\operatorname{sign} x_1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ \frac{2(x_2-\lambda|x_1|)(\lambda-|x_1|)}{(x_2+\lambda^2-2\lambda|x_1|)^2}\operatorname{sign} x_1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \\ \frac{e}{2}\frac{\varepsilon-|x_1|-\sqrt{\varepsilon^2-x_2+x_1^2}}{\varepsilon^2}\exp\left\{\frac{|x_1|-\lambda}{\varepsilon} + \sqrt{1-\frac{x_2-x_1^2}{\varepsilon^2}}\right\}\operatorname{sign} x_1, & \\ & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^4, \\ 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^5. \end{cases}$$

То есть, при $x_1 \geqslant 0$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1}(x) = 0, \qquad \text{при } x \in \Omega^1 \cup \Omega^5,$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}}{\partial x_1} = \frac{\lambda+\varepsilon}{4\varepsilon^2} > 0, \qquad \text{при } x \in \Omega^2,$$

при $x \in \Omega^4$ верно $|x_1| \leqslant \lambda$ и, соответственно

$$x_2 < 2(\lambda - \varepsilon)|x_1| - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda \leqslant 2\lambda|x_1| - \lambda^2 \leqslant \lambda|x_1|.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda}, \varepsilon, 1}}{\partial x_1} = \frac{2(x_2 - \lambda|x_1|)(\lambda - |x_1|)}{(x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|)^2} \leqslant 0.$$

При $x \in \Omega^3$ знак у числа

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{|t| \geqslant \lambda}, \varepsilon, 1}}{\partial x_1}(x)$$

такой же как, и у выражения

$$\varepsilon - x_1 - \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2}.$$

То есть, либо $\varepsilon \leqslant x_1$ и тогда заведомо

$$\varepsilon - x_1 - \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2} \leqslant 0,$$

либо $\varepsilon > x_1$, но тогда $x_2 \leqslant 2\varepsilon x_1$, а значит

$$\varepsilon^2 - 2\varepsilon x_1 + x_1^2 \leqslant \varepsilon^2 - x_2 + x_1^2,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon - x_1 \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2},$$

что, в свою очередь, означает

$$\varepsilon - x_1 - \sqrt{\varepsilon^2 - x_2 + x_1^2} \leqslant 0.$$

То есть, на всей области Ω^4 выполнено неравенство

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{\chi_{t \geqslant \lambda}, \varepsilon, 1}}{\partial x_1} \leqslant 0.$$

Подведём итог: при увеличении $|x_1|$ функция $\mathcal{B}_{\chi_{|t| \geqslant \lambda}, \varepsilon, 1}$ возрастает только на области Ω^2. То есть, функция при переходе к старшим размерностям поменяется только в области Ω^2, и при этом поменяется на значение на границе данной области на данной высоте. При $(x_1, x_2) \in \Omega^2$ и $x_2 \geqslant \lambda^2$ значение изменится на 1. А при $(x_1, x_2) \in \Omega^2$ и $x_2 \leqslant \lambda^2$ значение изменится на значение на общей границе Ω^2 и Ω^3. Общая граница Ω^2 и Ω^3 при $x_1 \geqslant 0$ — это отрезок

$$[(\lambda, \lambda^2), (\lambda - \varepsilon, \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon^2)].$$

Так как в Ω^2 функция $\mathcal{B}_{\chi_{|t| \geqslant \lambda}, \varepsilon, 1}$ линейна, при $(x_1, x_2) \in \Omega^2$ и $x_2 \leqslant \lambda^2$ функция заменится на линейную, зависящую только от x_2 такую что в точке (λ, λ^2) она принимает значение 1, а в точке $(\lambda - \varepsilon, (\lambda - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2)$ значение

$$\frac{(\lambda - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 - (\lambda - \varepsilon)^2}{(\lambda - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 + \lambda^2 - 2\lambda(\lambda - \varepsilon)} = \frac{1}{2}.$$

Значение заменится на функцию

$$\frac{x_2 - \lambda^2 + 4\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2}{4\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2}.$$

Заметим, что

$$\Omega^1 \cup \left(\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2) \big|\, x_2 \geqslant \lambda^2\}\right) = \left\{(x_1,\, x_2) \big|\, x_2 \geqslant \lambda\right\},$$

и

$$\begin{aligned} &\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2) \big|\, x_2 < \lambda^2\} = \\ &\qquad = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, \lambda - \varepsilon \leqslant |x_1| \leqslant \lambda,\, x_2 \geqslant 2\lambda|x_1| - \lambda^2 - 2\varepsilon(|x_1| - \lambda)\right\}, \end{aligned}$$

Подведём итог:

$$\mathcal{B}_{\chi_{t\geqslant\lambda},\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \widetilde{\Omega}^1, \\ \frac{x_{d+1} - \lambda^2 + 4\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2}{4\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \widetilde{\Omega}^2, \\ \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_2 - x_1^2}{\varepsilon^2}}\right) \exp\left\{\frac{|x_1| - \lambda}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \frac{x_2 - x_1^2}{\varepsilon^2}}\right\}, & \\ & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \widetilde{\Omega}^3, \\ \frac{x_2 - x_1^2}{x_2 + \lambda^2 - 2\lambda|x_1|}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \widetilde{\Omega}^4, \\ \frac{x_2}{4\varepsilon^2} \exp\left\{2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right\}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \widetilde{\Omega}^5, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{\Omega}^1 = \left\{(x_1,\, x_2) \big|\, x_2 \geqslant \lambda\right\},$$

$$\widetilde{\Omega}^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, \lambda - \varepsilon \leqslant |x_1| \leqslant \lambda,\, x_2 \geqslant 2\lambda|x_1| - \lambda^2 - 2\varepsilon(|x_1| - \lambda)\right\},$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Omega}^3 = \\ &= \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 \geqslant 2(\lambda - \varepsilon)|x_1| - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda \text{ и } x_2 \leqslant 2(\varepsilon)|x_1| \text{ при } |x_1| < \varepsilon\right\}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{\Omega}^4 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 < 2(\lambda - \varepsilon)|x_1| - \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\right\},$$

$$\widetilde{\Omega}^5 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_2 \geqslant 2\varepsilon|x_1|\right\},$$

(См рис. 8).

2.5 Случай $f(t) = e^t$.

Для вычисления функции $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}$ мы воспользуемся функцией, посчитанной в работе [10], то есть, минимальной локально вогнутой функцией на области Ω_ε с граничным значением e^{x_1}. Иными словами, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_{g,\Omega_\varepsilon}$ для

$$g(x_1,\, x_2) = \begin{cases} e^{x_1}, & \text{при } x_2 = x_1^2, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $g(x_1,\, x_1^2) = e^{|x_1|}$ при $x_1 \geqslant 0$ и $g(x_1,\, x_1^2) \leqslant e^{|x_1|}$ при $x_1 < 0$, то мы находимся в условиях следствия 1.9 и утверждения 1.11, то есть

$$\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x',\, x_{d+1}) = \sup\left\{\mathcal{B}_\varepsilon(s,\, x_{d+1}) \big|\, s \in [|x'|, \sqrt{x_{d+1}}]\right\}, \qquad d \geqslant 2.$$

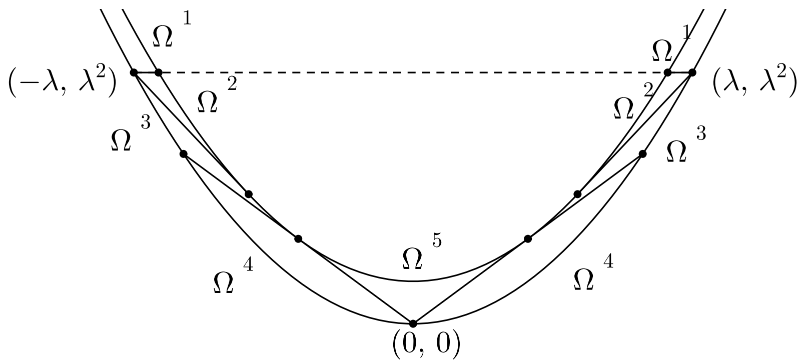

Рис. 8: Фолиация в случае $\lambda > 2\varepsilon$, $d \geqslant 2$.

В свою очередь, функция $\mathcal{B}_\varepsilon$ вычисляется при $\varepsilon \in [0,\,1)$ по следующей формуле:

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x_1,\,x_2) = \frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}}{1-\varepsilon}\exp\left(x_1+\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}-\varepsilon\right).$$

В этом случае,

$$\frac{\partial\mathcal{B}_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1,\,x_2) = \frac{1-x_1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}}{1-\varepsilon}\exp\left(x_1+\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}-\varepsilon\right). \quad (2.7)$$

При $\varepsilon \geqslant 1$ все указанные функции бесконечны, поэтому мы в дальнейшем ограничимся случаем $\varepsilon \in (0,\,1)$. В случае $\varepsilon \in (0,\,1)$ нам надо изучить, когда $\frac{\partial\mathcal{B}_\varepsilon}{\partial x_1} \leqslant 0$. Из формулы (2.7) видно, что

$$\operatorname{sign}\left\{\frac{\partial\mathcal{B}_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1,\,x_2)\right\} = \operatorname{sign}\left\{1-x_1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}\right\}.$$

Если $x_1 > 1$, то заведомо

$$1-x_1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2} < 0.$$

Если $x_1 \leqslant 1$, то

$$1-x_1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \geqslant \frac{1+x_2-\varepsilon^2}{2}.$$

Неравенства (при $x_1 \geqslant 0$) выполнены тогда и только тогда, когда точка $(x_1,\,x_2)$ лежит правее отрезка (правая часть Ω^3 на рисунке 9)

$$[(1-\varepsilon,\,(1-\varepsilon)^2),\,(1,\,1+\varepsilon^2)]. \quad (2.8)$$

То есть, когда точка лежит правее заданной уравнением (2.8) касательной из точки $(1-\,\varepsilon,\,(1-\,\varepsilon)^2)$. Таким образом при $d \geqslant 2$ мы получаем формулу:

$$
\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x',\,x_{d+1}) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_{d+1}}}, & \text{при } x_{d+1} \leqslant (1-\varepsilon)^2, \\ \mathcal{B}_\varepsilon\left(\frac{1+x_{d+1}-\varepsilon^2}{2},\,x_{d+1}\right), & \\ \qquad \text{при } x_{d+1} \in [(1-\varepsilon)^2,\,1+\varepsilon^2] \text{ и } |x'| < \frac{1+x_{d+1}-\varepsilon^2}{2}, & \\ \mathcal{B}_\varepsilon(|x'|,\,x_{d+1}), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.9}
$$

Заметим, что

$$
\varepsilon^2 + \left(\frac{1+x_{d+1}-\varepsilon^2}{2}\right)^2 - x_{d+1} =
$$
$$
= \varepsilon^2 + \frac{1+x_{d+1}^2+\varepsilon^4+2x_{d+1}-2\varepsilon^2-2\varepsilon^2 x_{d+1}}{4} - x_2 =
$$
$$
= \frac{1+x_{d+1}^2+\varepsilon^4-2x_{d+1}+2\varepsilon^2-2\varepsilon^2 x_{d+1}}{4} = \left(\frac{1-x_{d+1}+\varepsilon^2}{2}\right)^2.
$$

Поэтому,

$$
\mathcal{B}_\varepsilon\left(\frac{1+x_{d+1}-\varepsilon^2}{2},\,x_{d+1}\right) =
$$
$$
= \frac{1-\frac{1+\varepsilon^2-x_{d+1}}{2}}{1-\varepsilon}\exp\left(\frac{1-\varepsilon^2+x_{d+1}}{2} + \frac{1+\varepsilon^2-x_{d+1}}{2} - \varepsilon\right) =
$$
$$
= \frac{1-\varepsilon^2+x_{d+1}}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon}.
$$

Введём в рассмотрение области

$$
\Omega^1 = \left\{(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\middle|\, x_2 \leqslant (1-\varepsilon)^2\right\},
$$
$$
\Omega^2 = \left\{(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\middle|\, x_2 \in [(1-\varepsilon)^2,\,1+\varepsilon^2] \text{ и } |x_1| < \frac{1+x_2-\varepsilon^2}{2}\right\},
$$
$$
\Omega^3 = \left\{(x_1,\,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\middle|\, x_2 \geqslant (1-\varepsilon)^2 \text{ и } |x_1| \geqslant \frac{1+x_2-\varepsilon^2}{2} \text{ при } x_2 < 1+\varepsilon^2\right\},
$$

(См. рис. 9). Тогда формула (2.9) переписывается в следующем виде:

$$
\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x',\,x_{d+1}) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_{d+1}}}, & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1}) \in \Omega^1, \\ \frac{1-\varepsilon^2+x_{d+1}}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon}, & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1}) \in \Omega^2, \\ \frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+|x'|^2-x_{d+1}}}{1-\varepsilon}\exp\left(|x'| + \sqrt{\varepsilon^2+|x'|^2-x_{d+1}} - \varepsilon\right), & \\ & \text{при } (|x'|,\,x_{d+1}) \in \Omega^3. \end{cases}
$$

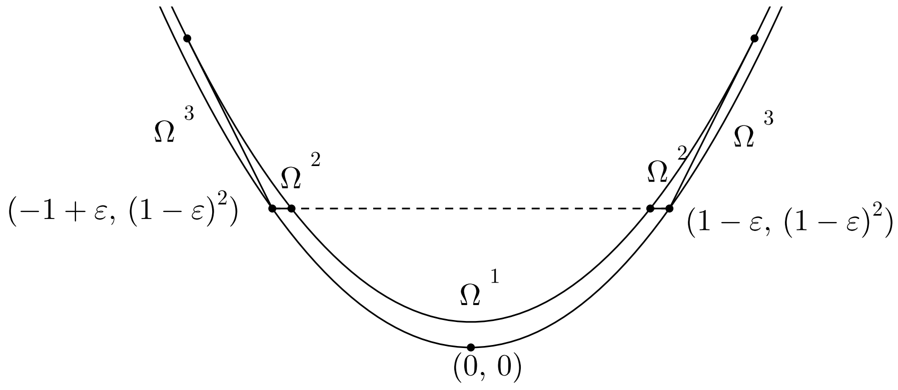

Рис. 9: Фолиация в случае $\varepsilon \in (0,\,1)$, $d \geqslant 2$.

2.6 Вычисление $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}$.

2.6.1 Случай $\varepsilon \in [\frac{1}{2},\,1)$.

В данном случае $(1-\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon^2$, то есть, для $(x_1,\,x_2) \in \Omega^1$ мы можем написать:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0\ldots x_2) \geqslant \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(\sqrt{x_2},\,x_2) + \frac{-x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(-\sqrt{x_2},\,x_2) \geqslant \\
&\geqslant \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} + \frac{-x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} = e^{\sqrt{x_2}} = \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,x_2).
\end{aligned}$$

Для $(x_1,\,x_2) \in \Omega^3$ мы можем написать:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0\ldots x_2) \geqslant \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) \geqslant \mathcal{B}_{\varepsilon}(|x_1|,\,x_2) = \\
= \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,x_2).
\end{aligned}$$

Для $(x_1,\,x_2) \in \Omega^2$ мы можем провести прямую l, проходящую через точку $(x_1,\,x_2)$ и отделяющую её от внутренней параболы. Тогда

$$l \cap \Omega^2 = [(s_1,\,s_2),\,(t_1,\,t_2)],$$

где

$$(s_1,\,s_2) \in \Omega^1 \cap \Omega^2, \qquad (t_1,\,t_2) \in \Omega^3 \cap \Omega^2.$$

Тогда

$$(x_1,\,x_2) = \alpha(s_1,\,s_2) + (1-\alpha)(t_1,\,t_2),$$

а значит:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,x_2) \geqslant \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \alpha\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(s_1,\,s_2) + (1-\alpha)\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(t_1,\,t_2) = \\
&= \alpha\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(s_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,s_2) + (1-\alpha)\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(t_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,t_2).
\end{aligned}$$

Но так как функция $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}$ линейна на Ω^2, мы получаем

$$\alpha\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(s_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,s_2) + (1-\alpha)\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(t_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,t_2) = \\ = \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}(x_1,\,0,\,0,\,0,\ldots,\,x_2).$$

Таким образом, в случае $\varepsilon \in [\frac{1}{2},\,1)$, мы получили формулу:

$$\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_2}}, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^1, \\ \frac{1-\varepsilon^2+x_2}{2-2\varepsilon}e^{1-\varepsilon}, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^2, \\ \frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}}{1-\varepsilon}\exp\left(x_1+\sqrt{\varepsilon^2+x_1^2-x_2}-\varepsilon\right), & \\ & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\Omega^3, \end{cases}$$

(См. рис. 10)

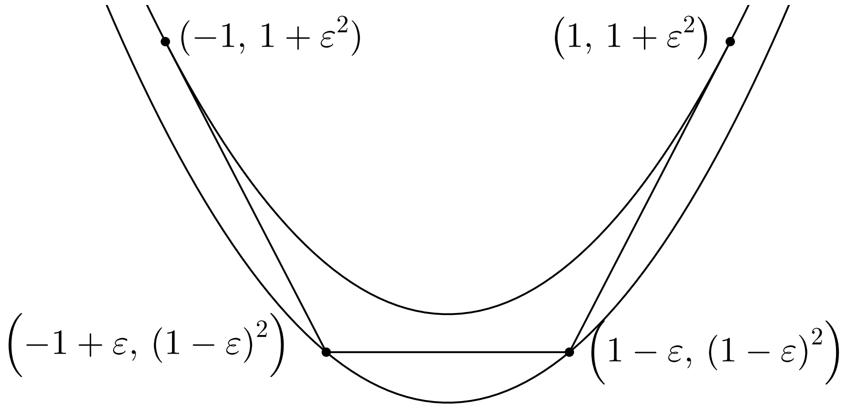

Рис. 10: Фолиация в случае $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2},\,1\right)$, $d=1$.

2.6.2 Случай $\varepsilon \in (0,\,\frac{1}{2})$.

Введём параметр α — решение следующего уравнения:

$$\exp\left\{(\alpha-\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2}. \qquad (2.10)$$

То есть,

$$\alpha = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\log(1-\varepsilon)-\log(2\varepsilon^2)\right) \geqslant \varepsilon.$$

И переразобьём область Ω_ε следующим образом:

$$\Omega^1 = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\middle|\, x_2 \leqslant \varepsilon^2\right\},$$

$$\Omega^2 = \big\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\big| \\ x_2\in[\varepsilon^2,\,\alpha^2] \text{ и } x_2 \leqslant 2\alpha|x_1|-\alpha^2-2\varepsilon(|x_1|-\alpha) \text{ при } |x_1|>\alpha-\varepsilon\big\},$$

$$\Omega^3 = \left\{(x_1,x_2)\in\Omega_\varepsilon \,\middle|\, |x_1|\in[\alpha-\varepsilon,\,\alpha+\varepsilon],\, x_2 \geqslant 2\alpha|x_1|-\alpha^2+|2\varepsilon(|x_1|-\alpha)|\right\},$$

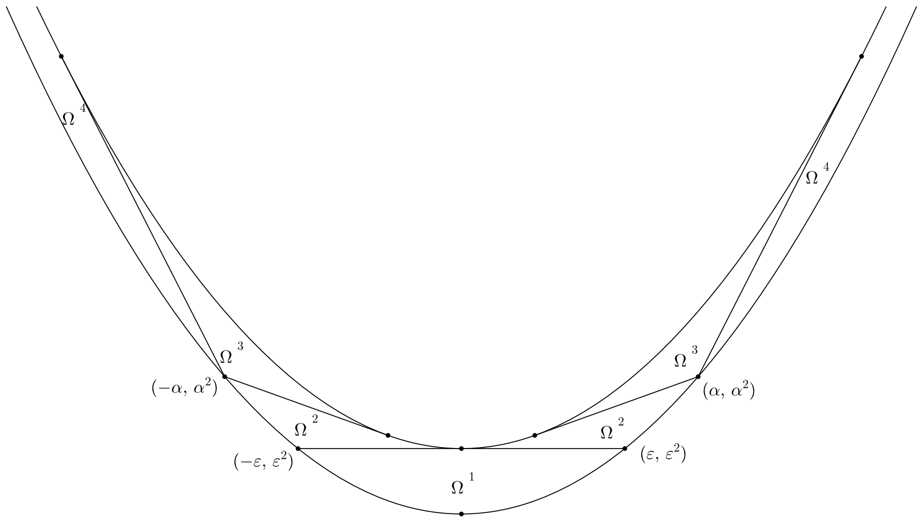

Рис. 11: Фолиация в случае $\varepsilon \in (0,\, \frac{1}{2})$, $d = 1$.

$\Omega^4 = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon \middle|\, |x_1| \geqslant \alpha \text{ и } x_2 \leqslant 2(\alpha+\varepsilon)|x_1| - \alpha^2 - 2\varepsilon\alpha \text{ при } |x_1| < \alpha + \varepsilon\right\}.$
Как показано на рис. 11. Введём сокращение:

$$\beta = \sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}.$$

Будем доказывать, что функция $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_2}}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}, & \\ & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ c(|x_1| - \alpha) + b\left(x_2 - \alpha^2\right) + e^\alpha, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \\ \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^4. \end{cases} \tag{2.11}$$

Где

$$c = \frac{1-\alpha}{1-\varepsilon^2}e^\alpha - \frac{\varepsilon+\alpha}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon) + \varepsilon\right\},$$
$$b = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}e^\alpha + \frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon) + \varepsilon\right\}.$$

Нам нужно проверить, что написанная функция локально вогнута, и что минимальная локально вогнутая не меньше её. Обозначим временно её за B, $B\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ и

$$B(x_1,\, x_2) = \begin{cases} e^{\sqrt{x_2}}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^1, \\ \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}, & \\ & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^2, \\ c(|x_1| - \alpha) + b(x_2 - \alpha^2) + e^\alpha, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^3, \\ \frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in \Omega^4. \end{cases}$$

А также пусть

$$g_j = B\Big|_{\Omega^j}.$$

Лемма 2.10. *Выполнено $B \in C(\Omega_\varepsilon)$.*

Доказательство. У нас 4 области, на каждой из которых функция гладкая (вне нуля). То есть нужно лишь проверить непрерывность склеек между областями Ω^j и Ω^{j+1}, $j \in \{1, 2, 3\}$. В силу симметрии достаточно проверять её при $x_1 \geqslant 0$.

При $j = 1$ общая граница — это отрезок

$$[(0, \varepsilon^2), (\varepsilon, \varepsilon^2)] = \{x_2 = \varepsilon^2\} = \{|x_1| - \beta = 0\}.$$

Имеем:

$$g_1(x_1, x_2) = e^\varepsilon = \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}e^\varepsilon + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}e^\varepsilon = g_2(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Далее заметим, что

$$g_3(\alpha, \alpha^2) = e^\alpha,$$

$$\begin{aligned} g_3\left(\alpha+\varepsilon, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2\right) &= \varepsilon c + \left(2\varepsilon\alpha + 2\varepsilon^2\right) b + e^\alpha = \\ &= \left(\varepsilon\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon^2} + \frac{2\varepsilon\alpha+2\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)} + 1\right) e^\alpha + \\ &+ \left(-\varepsilon\frac{\varepsilon+\alpha}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} + \frac{2\varepsilon\alpha+2\varepsilon^2}{4\varepsilon(1+\varepsilon)} + 1\right)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \frac{1}{1-\varepsilon}e^\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(\alpha-\varepsilon, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2) &= -\varepsilon c + (-2\varepsilon\alpha+2\varepsilon^2)d + e^\alpha = \\ &= \left(-\varepsilon\frac{1-\alpha}{1-\varepsilon^2} + \frac{-2\varepsilon\alpha+2\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)} + 1\right)e^\alpha + \\ &+ \left(\varepsilon\frac{\varepsilon+\alpha}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} + \frac{-2\varepsilon\alpha+2\varepsilon^2}{4\varepsilon(1+\varepsilon)} + 1\right)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon}e^\alpha + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Также, заметим, что точки внешней параболы — это точки для которых $\beta = \varepsilon$, а точки внутренней параболы — точки для которых $\beta = 0$. То есть,

$$g_2(x_1, x_1^2) = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1|-\varepsilon+\varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\varepsilon}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1|-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = e^{|x_1|},$$

$$g_2(x_1, x_1^2+\varepsilon^2) = \frac{1}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1|+\varepsilon\} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}|x_1|+\varepsilon\right\}.$$

При этом для точек на правых касательных, то есть, для точек вида

$$(x_1', x_2') \in [(x_1, x_1^2), (x_1-\varepsilon, (x_1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2)]$$

верно равенство $x_1' - \beta = x_1 - \varepsilon$, то есть на таких отрезках функция g_2 — линейна. Общая граница Ω^2 и Ω^3 — это отрезок

$$[(\alpha, \alpha^2), (\alpha-\varepsilon, (\alpha-\varepsilon)^2+\varepsilon^2)] = \{|x_1| - \beta = \alpha - \varepsilon\}.$$

На крайних точках отрезка функции g_2 и g_3 равны и линейны вдоль него. То есть склейка, между участками Ω^2 и Ω^3 непрерывна.

Теперь заметим, что

$$g_4(x_1,\, x_1^2) = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \varepsilon - \varepsilon\} = e^{|x_1|}.$$

$$g_4(x_1,\, x_1^2+\varepsilon^2) = \frac{1}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| - \varepsilon\}.$$

При этом для точек на левых касательных, то есть, для точек вида

$$(x_1',\, x_2') \in [(x_1,\, x_1^2),\, (x_1+\varepsilon,\, (x_1+\varepsilon)^2+\varepsilon^2)]$$

верно равенство $x_1' + \beta = x_1 + \varepsilon$, то есть, на таких отрезках функция g_4 линейна. Общая граница областей Ω^3 и Ω^4 — это отрезок

$$[(\alpha,\, \alpha^2),\, (\alpha+\varepsilon,\, (\alpha+\varepsilon)^2+\varepsilon^2)] = \{|x_1| + \beta = \alpha + \varepsilon\}.$$

На крайних точках отрезка функции g_3 и g_4 равны и линейны вдоль него. То есть склейка, между областями Ω^3 и Ω^4 непрерывна. $\square$

Лемма 2.11. *Выполнено* $B \in C^1(\Omega_\varepsilon \setminus \{(0,\,0)\})$.

Доказательство. Функция B задана кусочно, при этом на каждой из областей Ω^j она гладкая. Склейка непрерывна, при этом участки склейки — это не вертикальные отрезки, на которых функция линейна. То есть, для доказательства леммы нам осталось проверить, что у g_j и g_{j+1} $j = 1,\,2,\,3$ на отрезках склейки равны производные повторой координате.

Для начала вычислим $\frac{\partial\beta}{\partial x_2}$:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x_2} = \frac{\partial\sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 + x_1^2 - x_2}} = -\frac{1}{2\beta}.$$

Теперь вычислим $\frac{\partial g_j}{\partial x_2}$:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} e^{\sqrt{x_2}},$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}\right) = \\
&\qquad = -\frac{1}{2\beta}\frac{1}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{1}{2\beta}\frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \\
&+ \frac{1}{2\beta}\frac{1}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\} - \frac{1}{2\varepsilon\beta}\frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\} = \\
&\quad = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\exp\{|x_1| - \beta + \varepsilon\} + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - \beta) + \varepsilon\right\}, \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(c(|x_1| - \alpha) + b(x_2 - \alpha^2) + e^\alpha) = b =$$
$$= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}e^\alpha + \frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\},$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1| + \beta - \varepsilon\}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\beta}\frac{1}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1|+\beta-\varepsilon\} - \frac{1}{2\beta}\frac{1-\beta}{1-\varepsilon}\exp\{|x_1|+\beta-\varepsilon\} =$$
$$= \frac{1}{2(1-\varepsilon)}\exp\{|x_1|+\beta-\varepsilon\}.$$

То есть при $|x_1| - \beta = 0$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}e^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}e^\varepsilon = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,\, x_2).$$

При $|x_1| - \beta = \alpha - \varepsilon$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^\alpha + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\}.$$

А при $|x_1| + \beta = \alpha + \varepsilon$

$$\frac{\partial g_4}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2(1-\varepsilon)}e^\alpha.$$

Заметим, что среднее арифметическое последних двух величин как раз равно $\frac{\partial g_3}{\partial x_2}$. То есть для доказательства C^1 гладкости нам осталось проверить, что эти две величины равны.

$$\frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^\alpha + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \frac{1}{2(1-\varepsilon)}e^\alpha$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\right\} = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}e^\alpha$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2} = \exp\left\{(\alpha-\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Последняя строчка — это уравнение (2.10), задающее параметр α. □

Лемма 2.12. *Функция B — локально вогнута.*

Доказательство. Так как склейки оказались C^1 гладкими, то локальную вогнутость достаточно проверять для каждой функци g_j отдельно. При этом локальную вогнутость функций g_j при $j \geqslant 2$ достаточно проверять при $x_1 \geqslant 0$.

Функция g_1 локально вогнута, так как она сужение локально вогнутой функции $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,d}$ на область

$$\left\{(x_1,\, 0,\, 0,\, 0, \ldots,\, x_2) \,\middle|\, x_2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Функция g_3 локально вогнута при $x_1 \geqslant 0$, так как она на этой части линейна.

Функция g_4 локально вогнута при $x_1 \geqslant 0$ как сужение локально вогнутой функции $\mathcal{B}_\varepsilon$ на область

$$\Omega^4 \cap \{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_1 \geqslant 0\}.$$

Осталось разобраться с локальной вогнутостью функции g_2 на области $\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_1 \geqslant 0\}$. Мы знаем, что функция g_2 линейна вдоль правых касательных, и что на нашей области $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}$ вычисляется по формуле (2.12). Из неё видно, что $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}$ зависит только от $x_1 - \beta$. Что означает, что $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}$ постоянна вдоль правых касательных. А в силу не вертикальности правых касательных мы получаем постоянство дифференциала g_2 вдоль отрезков линейности. То есть, для локальной вогнутости достаточно проверить, что выполняется неравенство $\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \leqslant 0$. Вычислим эту величину:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2}(x_1,\, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)(x_1,\, x_2) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\exp\{x_1 - \beta + \varepsilon\} + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\}\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{4\beta(1+\varepsilon)}\exp\{x_1 - \beta + \varepsilon\} - \frac{1}{4\varepsilon^2\beta(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

Выпишем цепочку равносильных преобразований

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \leqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{4\beta(1+\varepsilon)}\exp\{x_1 - \beta + \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2\beta(1+\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exp\{x_1-\beta\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exp\left\{(x_1-\beta)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Но на области $\Omega^2 \cap \{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \big|\, x_1 \geqslant 0\}$ верно

$$\exp\left\{(x_1-\beta)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{(\alpha-\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

□

Осталось проверить, неравенство

$$\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}\Big|_{\Omega^j} \geqslant g_j, \qquad j = 1,\, 2,\, 3,\, 4. \tag{2.13}$$

В силу симметрии достаточно это сделать при $x_1 \geqslant 0$.

Пусть $(x_1,\, x_2) \in \Omega^1$. Тогда мы можем написать:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(\sqrt{x_2},\, x_2) + \frac{-x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(-\sqrt{x_2},\, x_2) \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} + \frac{-x_1+\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} = e^{\sqrt{x_2}} = g_1(x_1,\, x_2).
\end{aligned}$$

Пусть $(x_1,\, x_2) \in \Omega^4$. Тогда мы можем написать:

$$\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\, x_2) \geqslant \mathcal{B}_\varepsilon(|x_1|,\, x_2) = g_4(x_1,\, x_2).$$

Если мы докажем неравенство (2.13) для $j = 2$, то для $j = 3$ неравенство (2.13) получится автоматически, так как неравенство будет выполнено на граничных отрезках, а через любую точку области Ω^3 можно провести отрезок, не покидающий её, с концами на граничных отрезках, и функция g_3 — линейна.

Нам осталось доказать неравенство (2.13) при $j = 2$ и $x_1 \geqslant 0$. Пусть

$$\Omega^{2,+} = \Omega^2 \cap \left\{(x_1,\, x_2) \in \Omega_\varepsilon \,\middle|\, x_1 \geqslant 0\right\}.$$

Введём функцию $h\colon [0,\, +\infty) \to \mathbb{R}$, равную значению функции $\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}$ на внутренней параболе, то есть

$$h(t) = \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(t,\, t^2+\varepsilon^2), \qquad t \in [0,\, +\infty).$$

Тогда

$$h(0) = \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(0,\, \varepsilon^2) \geqslant g_1(0,\, \varepsilon^2) = e^\varepsilon.$$

Если мы проведём касательную к внутренней параболе в точке $(t,\, t^2+\varepsilon^2)$, то её общий отрезок с областью Ω_ε — это отрезок

$$[(t-\varepsilon,\, (t-\varepsilon)^2),\, (t+\varepsilon,\, (t+\varepsilon)^2)].$$

А если мы проведём две такие касательные: из точки $(t,\, t^2+\varepsilon^2)$ и точки $(s,\, s^2+\varepsilon^2)$, то они пересекутся в точке $\left(\frac{t+s}{2},\, ts+\varepsilon^2\right)$. И если $s \in [t,\, t+2\varepsilon]$, то данная точка лежит на отрезке

$$[(t,\, t^2+\varepsilon^2),\, (t+\varepsilon,\, (t+\varepsilon)^2)]$$

и делит его в отношении $\left(\frac{s-t}{2}\right) : \left(\varepsilon - \frac{s-t}{2}\right)$, а точка $(s,\, s^2+\varepsilon^2)$ лежит на отрезке

$$\left[\left(\frac{t+s}{2},\, ts+\varepsilon^2\right),\, (s+\varepsilon,\, (s+\varepsilon)^2)\right]$$

и делит его в отношении $\left(\frac{s-t}{2}\right) : \varepsilon$. Следовательно, если мы подставим $s = t+\delta$ для малого δ, то сможем написать:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}\left(t+\frac{\delta}{2},\, t^2+\frac{\delta t}{2}+\varepsilon^2\right) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{\left(\varepsilon-\frac{\delta}{2}\right)\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(t,\, t^2+\varepsilon^2) + \frac{\delta}{2}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}((t+\varepsilon),\, (t+\varepsilon)^2)}{\varepsilon} \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant \frac{\left(\varepsilon-\frac{\delta}{2}\right)h(t) + \frac{\delta}{2}e^{t+\varepsilon}}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(t+\delta) &= \mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(t+\delta,\,(t+\delta)^2+\varepsilon^2) \geqslant \\
&\geqslant \frac{\varepsilon\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}\left(t+\frac{\delta}{2},\,t^2+\frac{\delta t}{2}+\varepsilon^2\right)+\frac{\delta}{2}\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}((t+\delta+\varepsilon),\,(t+\delta+\varepsilon)^2)}{\varepsilon+\frac{\delta}{2}} \geqslant \\
&\geqslant \frac{\left(\varepsilon-\frac{\delta}{2}\right)h(t)+\frac{\delta}{2}e^{t+\varepsilon}\frac{\delta}{2}e^{t+\varepsilon+\delta}}{\varepsilon+\frac{\delta}{2}} = h(t)-\frac{\delta}{\varepsilon}h(t)+\frac{\delta}{\varepsilon}e^{t+\varepsilon}+o(\delta).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получили, что нижняя правая производная функции h в точке t не меньше, чем $-\frac{1}{\varepsilon}h(t)+\frac{1}{\varepsilon}e^{t+\varepsilon}$. Введём функцию $\tilde{h}$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\tilde{h}\colon [0,\,+\infty)\to\mathbb{R}, \\
\tilde{h}(0)=e^{\varepsilon}, \\
\tilde{h}'(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\tilde{h}(t)+\frac{1}{\varepsilon}e^{t+\varepsilon}.
\end{gathered}
$$

Мы получим неравенство $h(t)\geqslant\tilde{h}(t)$ для $t\in[0,\,+\infty)$. В свою очередь

$$
\tilde{h}(t) = \frac{1}{1+\varepsilon}e^{t+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t+\varepsilon}.
$$

Таким образом, для точки $(x_1,\,x_2)\in\Omega^{2,+}$ мы можем провести через неё правую касательную — отрезок

$$
[(x_1-\beta,\,(x_1-\beta)^2+\varepsilon^2),\,(x_1-\beta+\varepsilon,\,(x_1-\beta+\varepsilon)^2)],
$$

который она разделит в отношении $\beta\colon(\varepsilon-\beta)$, что означает, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1,\,x_2) \geqslant \\
&\geqslant \frac{(\varepsilon-\beta)\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1-\beta,\,(x_1-\beta)^2+\varepsilon^2)+\beta\mathcal{B}_{e^t,\varepsilon,1}(x_1-\beta+\varepsilon,\,(x_1-\beta+\varepsilon)^2)}{\varepsilon} \geqslant \\
&\geqslant \frac{(\varepsilon-\beta)\tilde{h}(x_1-\beta)+\beta\exp\{x_1-\beta+\varepsilon\}}{\varepsilon} = \\
&= \frac{1+\beta}{1+\varepsilon}\exp\{x_1-\beta+\varepsilon\}+\frac{\varepsilon-\beta}{1+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(x_1-\beta)+\varepsilon\right\} = g_2(x_1,\,x_2).
\end{aligned}
$$

Таким образом, формула (2.11) полностью доказана.

Список литературы

[1] D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Prob. **12** (1984), no. 3, 647–702.

[2] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck *The Dirichlet Problem for the Degenerate Monge-Ampère Equation*, RMI Volume 2, Issue 1, 1986, pp. 19–27.

[3] Guan, Bo *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 12, 4955–4971.

[4] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, and P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 3415–3468.

[5] P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, and P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on* BMO *II: evolution*, Mem. Amer. Math. Soc. **255** (2018), no. 1220.

[6] Krylov, N. V. (1990). *Smoothness of the payoff function for a controllable processin a domain*, Math. USSR-Izv. **34**:65–95.

[7] F. L. Nazarov and S. R. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162, translation in St. Petersburg Math. J. 8 (1997), no. 5, 721–824.

[8] A. Os¸ekowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Monografie Matematyczne IMPAN **72**, Springer Basel, 2012.

[9] L. Slavin and V. Vasyunin, *Sharp L^p estimates on* BMO, Ind. Univ. Math. J. **61** (2012), 1051–1110, http://arxiv.org/abs/1110.1771.

[10] L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John-Nirenberg inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **363**:8 (2011), 4135–4169, http://arxiv.org/abs/0709.4332.

[11] D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *On locally concave functions on simplest non-convex domains*, in preparation.

[12] D. M. Stolyarov and P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*, Adv. Math. **291** (2016), 228–273. http://arxiv.org/abs/1412.5350.

[13] V. Vasyunin, A. Volberg, *Sharp constants in the classical weak form of the John–Nirenberg inequality*, Proc. Lond. Math. Soc. **108**:6 (2014), 1417–1434.

[14] V. Vasyunin and A. Volberg, *The Bellman function technique in Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2020.