

Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
Захарова Александра Андреевича
“Интегральная геометрия и инварианты узлов”

Тема дипломной работы Александра Захарова связана со знаменитым неравенством Фари-Милнора: у любого нетривиального узла, реализованного гладкой кривой в \mathbb{R}^3 , интеграл кривизны не меньше 4π . В соответствующей работе Милнора не только доказано это неравенство, но и исследован инвариант узла — инфимум интегральной кривизны по всем его реализациям. Позднее выяснилось, что этот инвариант после нормировки на 2π равен другому инварианту, называемому числом мостов.

Узлы естественно помещать в трёхмерную сферу \mathbb{S}^3 вместо \mathbb{R}^3 , и так же можно ожидать, что топологический тип узла должен ограничивать снизу какие-либо геометрические характеристики его реализаций в \mathbb{S}^3 . Но прямое обобщение неравенства Фари-Милнора на узлы в \mathbb{S}^3 невозможно, так как любой узел можно реализовать кривой, расположенной вдоль экватора сферы и имеющей сколь угодно малую геодезическую кривизну. От этой трудности можно избавиться, если рассматривать интегральную кривизну вместе с длиной. Вопросы о таких оценках изучались, и известен вариант неравенства Фари-Милнора в \mathbb{S}^3 для суммы интегральной кривизны и длины.

В работе Александра Захарова строятся и изучаются более общие инварианты узлов в \mathbb{S}^3 . А именно, для узла K и чисел $a, b > 0$ определяется инвариант $Z_{a,b}(K)$ — инфимум по всем гладким реализациям K в \mathbb{S}^3 линейных комбинаций длины и интегральной геодезической кривизны с коэффициентами a и b , разделенный для нормировки на 2π . Среди полученных результатов самым изящным является теорема о целочисленности величины $Z_{a,b}(K)$ при целых a и b . Фактически она является следствием из описания инварианта $Z_{a,b}$ как минимума некоторой комбинаторной характеристики по всем реализациям некоторого специального вида. Это комбинаторное описание, хотя и не сформулированное явно, является центральным техническим результатом работы и обобщает описание числа мостов по Милнору. Из него же легко видеть, что инвариант $Z_{a,b}$ связан некоторыми неравенствами с другими инвариантами: числом мостов и числом нитей. В частности, при достаточно больших N величины $Z_{1,N}$ и $Z_{N,1}$ равны числу мостов и числу нитей.

Полученные результаты новы и интересны, после доработки изложения могут быть опубликованы в виде статьи. Для их получения потребовалось освоить и применить разнообразные методы из интегральной геометрии, дифференциальной геометрии и теории узлов. Результаты получены Александром полностью самостоятельно, также хочу отметить его самостоятельность в постановке некоторых вопросов. К недостаткам работы относится трудночитаемость, вызванная недостаточно ясным структурированием текста.

Считаю, что работа заслуживает оценки «отлично».

08.06.2021

Научный руководитель
д.ф.-м.н. член-корр. РАН,
профессор СПбГУ



С.В. Иванов