

Санкт-Петербургский государственный университет

ЗАХАРОВ Александр Андреевич
Выпускная квалификационная работа
Интегральная геометрия и инварианты
узлов

Образовательная программа бакалавриат «Математика»

Направление и код: 01.03.01 «Математика»

Шифр ОП: СВ.5000.2017

Научный руководитель:

доктор

физико-математических наук,

профессор СПбГУ

Иванов Сергей Владимирович

Рецензент:

доктор

физико-математических наук,

профессор,

ведущий научный сотрудник

ПОМИ РАН,

Малютин Андрей Валерьевич

Санкт-Петербург

2021 год

1 Введение

В этой работе будет построен инвариант, обобщающий классические инварианты узлов braid index (число нитей) и bridge index (число мостов). Кроме того, этот инвариант окажется целочисленным, несмотря на интегральное определение. Также мы построим альтернативный вид этого инварианта в виде диаграмм Юнга.

Вариация поворота естественно параметризованной регулярной кривой γ это $K(\gamma) = \int |\gamma''(t)| dt$ или интеграл кривизны по длине. В 1949 году Джон Милнор показал [Mil50], что если взять инфимум $K(\gamma)$ по гладким естественно параметризованным кривым γ реализующим ручной узел \mathcal{K} , то получится инвариант, отличающийся от числа мостов умножением на 2π :

$$\text{bridge index } \mathcal{K} = \frac{1}{2\pi} \inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \int |\gamma''(t)| dt$$

Поскольку узлы так же естественно живут в стандартной трехмерной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, возникает желание изучать инфимум вариации геодезической кривизны $k_g(t)$ кривой $\gamma(t)$, по всем естественно параметризованным кривым, реализующим узел \mathcal{K} на сфере S^3 :

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \int k_g(t) dt$$

Но этот инфимум оказывается всегда равен нулю. Действительно, любой узел \mathcal{K} может быть реализован косой [И23]. Если вложить такую косу в нормальную ε -окрестность большой окружности $a \subset S^3$, мы получим кривую, реализующую узел \mathcal{K} , у которой сколь угодно малая геодезическая кривизна в каждой точке, а длина при этом не сильно отличается от числа нитей в косе, умноженного на 2π .

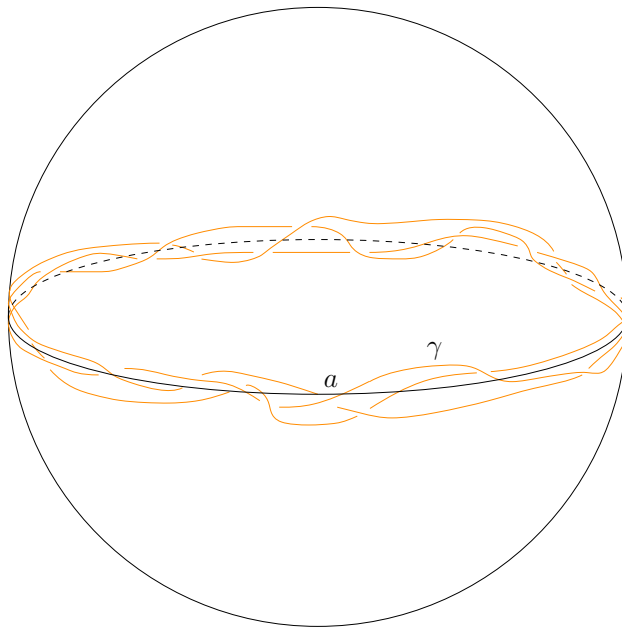


Рис. 1: Вложение косы в окрестность большой окружности a .

Инфимум длины кривой, по всем γ , реализующим узел \mathcal{K} также равен нулю, как в \mathbb{R}^3 так и в S^3 . Однако, можно получить нетривиальный инвариант, рас-

смотрим инфимум линейной комбинации интегралов длины и кривизны с положительными коэффициентами κ, λ :

$$Z_{\kappa, \lambda}(\mathcal{K}) \stackrel{\text{онп.}}{=} \inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \int \left[\kappa \cdot k_g(t) + \lambda \cdot 1 \right] dt = \inf_{\gamma \in \mathcal{K}} \kappa K_g(\gamma) + \lambda L(\gamma)$$

Назовем такой инвариант *инвариантом мостов-нитей*. Мы покажем, что он удовлетворяет следующим свойствам:

1. Для любого узла \mathcal{K} найдется такое число n , что для всех $N \geq n$ верно следующее:

$$Z_{1, N}(\mathcal{K}) = \text{bridge index } \mathcal{K} \quad (1)$$

$$Z_{N, 1}(\mathcal{K}) = \text{braid index } \mathcal{K} \quad (2)$$

2. Если коэффициенты κ, λ натуральные числа, то значения $Z_{\kappa, \lambda}$ тоже.

2 Предварительные сведения

Определение 1. Единичную окружность на S^3 будем называть *большой окружностью*, а единичную 2-сферу — *большой сферой*.

Множество больших окружностей обозначим $\text{Gr} = \text{Gr}(2, 4)$. На Gr определена стандартная мера грассманиана μ .

Определение 2. Пусть $a \subset S^3$ — окружность, тогда $a^\perp = S^3 \cap \text{span}(a)^\perp$, если $a \in \text{Gr}$, то $a^\perp \in \text{Gr}$.

Определение 3. Заведем следующие обозначения:

1. Длину кривой γ обозначим $L(\gamma)$.
2. Интеграл геодезической кривизны кривой γ по натуральному параметру обозначим $K_g(\gamma)$.

Если кривая γ живет в \mathbb{R}^n , то интеграл ее кривизны все равно будет обозначаться $K_g(\gamma)$.

Определение 4. Обозначим за N_a нормальное расслоение большой окружности $a \in \text{Gr}$ в сфере S^3 , кроме того, пускай a_r это трубчатая r -окрестность для a . Пусть отображение $T : N_a \rightarrow S^3$ это такое отображение, которое на каждом нормальном слое действует экспонентой. Обозначим r -окрестность большой окружности a в нормальном расслоении за a_r^N . Сужение отображения $T_r = T|_{a_r^N}$ это естественный диффеоморфизм

$$T_r : a_r^N \rightarrow a_r$$

Утверждение 1. Пусть $a \in \text{Gr}$ и r_n достаточно мало, тогда справедливо следующее:

$$\forall \gamma \subset a_r: \quad |L(T_{r_n}^{-1}\gamma) - L(\gamma)| \leq \frac{1}{2^n} L(\gamma)$$

$$|K_g(T_{r_n}^{-1}\gamma) - K_g(\gamma)| \leq \frac{1}{2^n} L(\gamma)$$

Замечание 1. Здесь $K_g(T_r^{-1}(\gamma))$ это геодезическая кривизна посчитанная в N_a .

Доказательство. Нормальное расслоение N_a изометрично произведению $\mathbb{R}^2 \times a$. Значит N_a локально изометрично \mathbb{R}^3 . Тогда сужение T_r на достаточно малые окрестности можно воспринимать как карту для a_r . На $N_a = \mathbb{R}^2 \times a$ можно ввести координаты (x^1, x^2, x^3) соответствующие разбиению на множители следующим образом:

1. Координатой базы будет координата x^1 , как-нибудь параметризующая окружность a .
2. Выберем большую сферу $S^2 \subset S^3$ содержащую a . В $T_a S^2$ возьмем единичное ортогональное поле x^2 к касательному полю к a . Это будет первое базисное поле для нормальных слоёв.
3. Вторым базисным полем возьмем x^3 – единичное поле, ортогональное к x^2 в каждом слое.

В таких координатах метрика на N_a будет стандартной евклидовой. Наша цель понять, что в точке $(x^1, 0, 0)$ символы Кристоффеля карты T_r обнуляются. Действительно, пусть ∇ это связность Леви-Чивита в S^3 , а X это распространение касательных векторов γ' до поля, причем такое, что $|X| \leq 1$. Тогда геодезическую кривизну можно расписать так:

$$k_g(\gamma) = |\nabla_X X| = \left| X^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma_{i,m}^k X^m \right) \partial_k \right|$$

Из того, что на a символы Кристоффеля обнуляются следует, что можно выбрать достаточно маленькую трубчатую окрестность a_r , в которой они сколь угодно малы. Тогда

$$|k_g(\gamma) - k_g(T_r^{-1}(\gamma))| = \left| X^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma_{i,m}^k X^m \right) \partial_k - X^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \partial_k \right| = |X^i \Gamma_{i,m}^k X^m \partial_k| = o(1)$$

$$|K_g(\gamma) - K_g(T_r^{-1} \circ \gamma)| \leq L(\gamma) o(1)$$

Осталось понять, что символы Кристоффеля действительно обнуляются. Посчитаем их:

1. Параллельный перенос вдоль a в S^3 и в нормальном расслоении N_a это одно и то же. Кроме того, параллельный перенос определяет связность Леви-Чивита, поэтому $\Gamma_{1,i} = \nabla_{x^1} x^i = 0$. Из симметричности $\Gamma_{i,1} = 0$.
2. Связность Леви-Чивита ∇^N подмногообразия N это проекция связности ∇ многообразия $M = S^3$ на касательное пространство TN . Возьмем в качестве подмногообразия N образ нормального слоя в точке $(p, 0, 0) \in a$ под отображением T . Отображение $T|_N$ это экспоненциальное отображение на сферу $T(N)$. Символы Кристоффеля экспоненты обнуляются в точке из которой определена экспонента поэтому $\nabla_{x^i}^N x^j = 0$ для $i, j \in \{2, 3\}$. Можно оторазить S^3 относительно пространства натянутого на сферу $T(N)$, такое отражение переведет S^3 в себя и сохранит $T(N)$ на месте. Тогда на месте останутся векторные поля x^2 и x^3 , а поле x^1 перейдет в $-x^1$. Это значит, что компонента $\nabla_{x^i} x^j$ при x^1 нулевая, то есть $\nabla_{x^i} x^j = Pr_{TN} \nabla_{x^i} x^j = \nabla_{x^i}^N x^j = 0$.

□

Определение 5. Пусть $A, B \subset S^3$. Тогда обозначим через $[A, B] = [A, B](t)$ — кратчайшую естественно параметризованную геодезическую с началом в $\text{Cl}(A)$ и концом в $\text{Cl}(B)$, если такая единственна.

Определение 6. Заведем в \mathbb{R}^3 стандартные координаты (x, y, z) . Тогда гомотетией к Oz с коэффициентом s будем называть следующее отображение:

$$H^s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (sx, sy, z)$$

Главное выбрать ось z , если про x и y ничего не написано, значит нужно достроить $\{z\}$ до ортонормированного базиса каким-нибудь способом. Отображение H^s не будет зависеть от этого способа.

Пусть мы находимся в \mathbb{R}^3 со стандартными координатами и $\tau : S^2 \subset \mathbb{R}^3$ гладкая кривая, не обязательно регулярная. Пусть $C : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$ это центральная проекция. Заведем отображение $F_\delta = C \circ H^\delta$.

Лемма 1. Пусть τ трансверсально пересекает плоскость xOy по конечному числу точек. Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} L(F_\delta(\tau)) = \pi \#(\tau \cap xOy) \stackrel{\text{опр.}}{=} \pi k$$

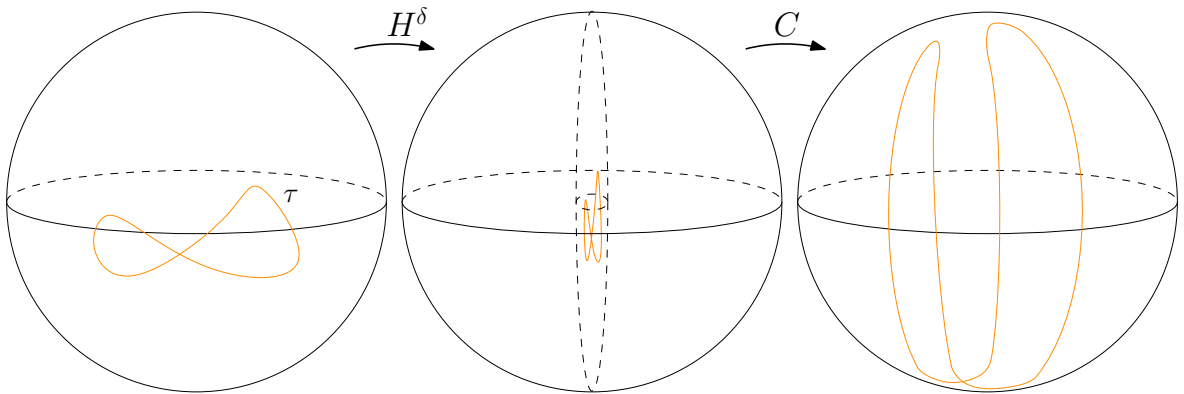


Рис. 2: Отображение F_δ .

Доказательство. Выберем ε . Заведем на S^2 сферические координаты $r(\varphi, \theta) : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow S^2$, полюсам будут соответствовать точки $(0, 0, \pm 1)$. Ограничим кривую $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = r(\tau_\varphi, \tau_\theta)$ на интервалы I_1, \dots, I_k на которых $|\tau_z| \leq h$, для некоторого числа h . Кривая τ пересекает xOy трансверсально, поэтому можно выбрать h так, что:

1. Полярная координата $\tau_\theta|_{I_j}$ монотонна.
2. Ограничения τ на I_j почти не меняют азимутальную координату: $L(\tau_\varphi|_{I_j}) \leq \frac{\varepsilon}{k}$

Пусть I это область определения τ . Будем искать δ такое, что:

$$L(F_\delta \circ \tau|_{I \setminus \cup I_j}) \leq \varepsilon \quad (3)$$

$$|L(F_\delta \circ \tau|_{I_j}) - \pi| \leq \varepsilon \quad (4)$$

Хотим получить (3). Обратим внимание на то, что любая точка (x, y, z) из образа множества $S^2 \cap \{|z| \geq h\}$ под действием H^δ обладает следующими свойствами:

1. $x, y \leq \delta$
2. $|z| \geq h$

Кроме того, дифференциал dH^δ действует на векторе $v \in TS^2$, $|v| \leq 1$ так, что компоненты $(dH^\delta v)_x$, $(dH^\delta v)_y$ по модулю меньше δ . Этим свойств хватает для того, чтобы длина образа векторов $dH^\delta(\tau'|_{I \setminus \cup I_j})$ под дифференциалом dC была мала:

$$dC_{(x,y,z)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \quad (5)$$

Мы подставляем $dH^\delta(\tau'|_{I \setminus \cup I_j})$ в качестве (a, b, c) , поэтому можно считать, что $|a|, |b| \leq \delta$ и $|c| \leq 1$. Знаменатель дроби в выражении (5) ограничен сверху, поскольку $|z| \geq h$.

$$= O(1) \begin{pmatrix} O(1) & O(\delta) & O(\delta) \\ O(\delta) & O(1) & O(\delta) \\ O(\delta) & O(\delta) & O(\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O(\delta) \\ O(\delta) \\ O(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (6)$$

Таким образом вектор $dF_\delta(\tau'|_{I \setminus \cup I_j})$ сколь угодно мал, тогда и длина $F_\delta(\tau|_{I \setminus \cup I_j})$ сколь угодно мала.

Теперь хотим добиться (4). Раскроем модуль и докажем два неравенства:

1. Под действием F_δ все точки с координатой $\theta < \frac{\pi}{2}$ при $\delta \rightarrow 0$ сходятся к полюсу $(0, 0, 1)$, а точки с координатой $\theta > \frac{\pi}{2}$ сходятся к полюсу $(0, 0, -1)$. Поэтому для достаточно малого δ кривая $F_\delta(\tau|_{I_j})$ проходит на расстоянии хотя бы $\frac{\varepsilon}{2k}$ от каждого из полюсов, тогда

$$L(F_\delta(\tau|_{I_j})) \geq \pi - \frac{\varepsilon}{k}.$$

2. В сферических координатах $r^{-1} \circ F_\delta = (\varphi, f(\theta))$, где $f(\theta)$ некоторая монотонная функция. Сферические координаты $r : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow S^2$ не увеличивают длины кривых, поэтому достаточно доказать, что

$$L\left((\tau_\varphi, f(\tau_\theta)) |_{I_j} \right) \leq \pi + \frac{\varepsilon}{k}.$$

Кривая $f(\tau_\theta|_{I_j})$ монотонна как композиция монотонных функций, поэтому $L(f(\tau_\theta)|_{I_j}) \leq \pi$. Длина кривой на плоскости меньше суммы длин ее проекций на координатные оси:

$$L\left((\tau_\varphi, f(\tau_\theta)) |_{I_j} \right) \leq L(\tau_\varphi|_{I_j}) + L(f(\tau_\theta)|_{I_j}) \leq \pi + \frac{\varepsilon}{k}$$

□

Утверждение 2. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ регулярная кривая, пусть координатная ось Oz такова, что γ_z функция Морса. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} K_g(H^s \gamma) = \pi \# \text{ критических точек } \gamma_z$$

Доказательство. Если γ натурально параметризована, то $K_g(\gamma)$ это длина сферического образа τ :

$$K_g(\gamma) = \int |\gamma''| = L(\gamma')$$

Если отождествить касательные пространства во всех точках параллельным переносом, то дифференциал H^s это само H^s . Чтобы получить сферический образ кривой $H^s \circ \gamma$ с точностью до параметризации нужно применить дифференциал $-H^s$ и отнормировать с помощью центральной проекции C . Длина не зависит от параметризации, поэтому $K_g(H^s \circ \gamma) = L(C \circ H^s \circ \gamma') = L(F_s \circ \gamma')$ и мы попадаем в условия леммы 1. Трансверсальность γ' гарантирует тот факт, что γ_z функция морса. □

2.1 Проекция на экватор

Определение 7. Пусть $b \in Gr$, тогда определим проекцию на b следующим образом:

$$P_{b,\cdot}: (S^3 \setminus b^\perp) \times [0, 1] \longrightarrow S^3$$

$$P_{b,t}(x) = T_{\frac{\pi}{4}} \circ H^{1-t} \circ T_{\frac{\pi}{4}}^{-1}(x)$$

Замечание 2. Если точка x не лежит на b^\perp , то существует кратчайшая геодезическая $[x, b]$. Отображение $P_{b,t}$ переносит точку x вдоль по геодезической $[x, b]$ так, чтобы расстояние до b сократилось в t раз.

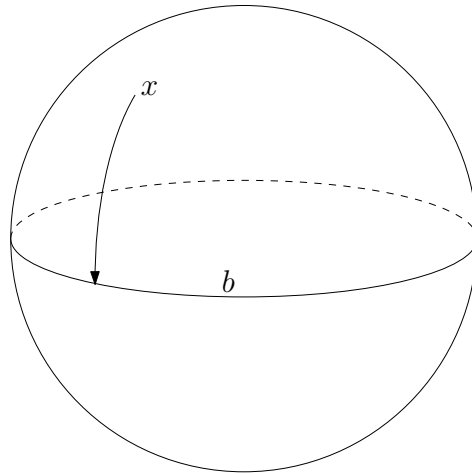


Рис. 3: Действие отображения $P_{b,\cdot}$.

Замечание 3. Можно смотреть на $P_{b,1}$ как на функцию высоты со значениями в b .

Утверждение 3. Пусть γ — гладкая кривая, тогда

$$\mu\{a \mid P_{a,t}(\cdot) \text{ определена на } \gamma\} = \mu\{a \mid a^\perp \cap \gamma = \emptyset\} = 0.$$

Напоминание. Буквой μ мы обозначили меру на грассманиане.

Доказательство. Для каждой $s \in S^3$ можно запараметризовать

$$\{a \in \text{Gr} \mid s \in a\}$$

двумя параметрами. Действительно, любая большая окружность, проходящая через точку s определяется единичным касательным вектором. Тогда $\{a \in \text{Gr} \mid a \cap \gamma \neq \emptyset\}$ тремя, а $\text{Gr}(2, 4)$ это 4-мерное многообразие. □

2.2 Длина и геодезическая кривизна проекции

Определение 8. Пусть γ — это некоторая гладкая кривая, $b \in \text{Gr}$ и $\gamma \cap b^\perp = \emptyset$. Тогда нет проблемы определить длину проекции $L(P_{b,t}(\gamma))$ для $t = 1$ как супремум длин вписанных ломанных.

Замечание 4. Это определение написано на всякий случай и для однообразия.

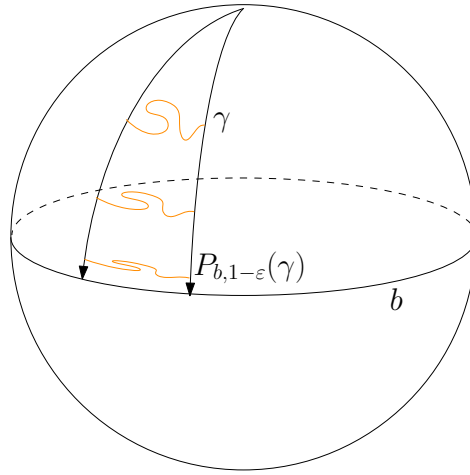


Рис. 4: Прижимание γ к большой окружности b с помощью проекции.

Определение 9. Пусть γ — это некоторая простая гладкая кривая, $b \in \text{Gr}$ и $\gamma \cap b^\perp = \emptyset$. Тогда доопределим $K_g(P_{b,t}(\gamma))$ для $t = 1$ следующим образом:

$$K_g(P_{b,1}(\gamma)) = \pi \# \text{ критических точек } P_{b,1}|_\gamma$$

Проверка корректности. Для дальнейших целей достаточно проверить, что геодезическая кривизна проекции $K_g(P_{b,1}(\gamma))$ корректно определена для почти всех $b \in \text{Gr}$. Могут случиться проблемы двух типов:

1. Кривая γ пересекает ортогональную окружность $b^\perp \in \text{Gr}$ и в этом случае проекция $P_{b,1}(\gamma)$ не определена. Согласно утверждению 3 мера таких b нулевая.
2. Критических точек для b бесконечно много. Наша проекция это функция высоты относительно b , а функция высоты почти в любом направлении это функция морса.

Утверждение 4. Пусть γ — гладкая кривая, тогда для почти всех $a \in \text{Gr}$

$$\lim_{t \rightarrow +0} L(P_{a,1-t}(\gamma)) = L(P_{a,1}(\gamma)) \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} K_g(P_{a,1-t}(\gamma)) = K_g(P_{a,1}(\gamma)) \quad (2)$$

Доказательство. (1) Для достаточно малого r отображение T_r билипшецево с константами $1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon$. Проекция $P_{a,1-t}$ это гомотетия H^t в координатах T , для которой равенство (1) выполнено. Тогда достаточно подобрать такое значение t , что $P_{a,1-t}(\gamma) \subset a_r$.
(2)

Лемма 2. Если предел существует, то его можно посчитать в нормальном расщеплении N_a :

$$\lim_{t \rightarrow +0} K_g(P_{a,1-t}(\gamma)) = \lim_{t \rightarrow +0} K_g(H^t(T_{\pi/2}^{-1}(\gamma)))$$

Замечание 5. Число $\pi/2$ это максимальное r такое что T_r обратимо.

Доказательство. Обратим внимание на то, что для любого t образ проекции $P_{a,t}(\gamma)$ лежит в t -окрестности a_t . Тогда

$$T_1(P_{a,1-t}(\gamma)) = T_t(P_{a,1-t}(\gamma))$$

Замечание 6. Это равенство говорит просто об области определения T_r^{-1} . В этом случае a_r это сфера S^3 без окружности a^\perp

Пусть $\{r_n\} \rightarrow 0$ это такая последовательность чисел, что для любой кривой $\tau \subset a_{r_n}$

$$|K_g(T_{r_n}^{-1}(\tau)) - K_g(\tau)| \leq \frac{1}{2^n} L(\tau)$$

Теперь воспользуемся тем, что $H^t T_{\pi/2}^{-1} = T_{\pi/2}^{-1} P_{a,1-t}$ и посчитаем предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \left| K_g(P_{a,1-t}(\gamma)) - K_g(H^t(T_{\pi/2}^{-1}(\gamma))) \right| &= \lim_{t \rightarrow +0} \left| K_g(P_{a,1-t}(\gamma)) - K_g(T_{\pi/2}^{-1}(P_{a,1-t}(\gamma))) \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| K_g(P_{a,r_n}(\gamma)) - K_g(T_{r_n}^{-1}(P_{a,r_n}(\gamma))) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} L(P_{a,r_n}(\gamma)) = 0 \end{aligned}$$

□

Согласно этой лемме достаточно отправить γ в N_a с помощью $T_{\pi/2}^{-1}$ и доказать там, что:

$$\lim_{t \rightarrow +0} K_g(H^t(T_{\pi/2}^{-1}(\gamma))) = \pi \# \text{ критических точек } H^0 T_{\pi/2}^{-1}|_\gamma$$

Действительно, несложно видеть, что отображения $P_{1,a}|_\gamma$ и $H^0 T_{\pi/2}^{-1}|_\gamma$ просто равны, если отождествлять $a \subset N_a$ и $a \subset S^3$. Почти для всех $a \in \text{Gr}$ функция $P_{1,a}|_\gamma$ это функция морса, поэтому мы попали в условия утверждения 2.

□

3 Усреднение проекций

Определение 10. Пусть γ — простая гладкая кривая, тогда определим $EK_g(\gamma)$ и $EL(\gamma)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} EK_g(\gamma) &= \int_{b \in \text{Gr}} K_g(P_{b,1}(\gamma)) d\mu \\ EL(\gamma) &= \int_{b \in \text{Gr}} L(P_{b,1}(\gamma)) d\mu \end{aligned}$$

То есть, $EL(\gamma)$ это средняя по мере на грассманиане Gr длина проекции кривой γ , а $EK_g(\gamma)$, соответственно, среднее значение кривизны.

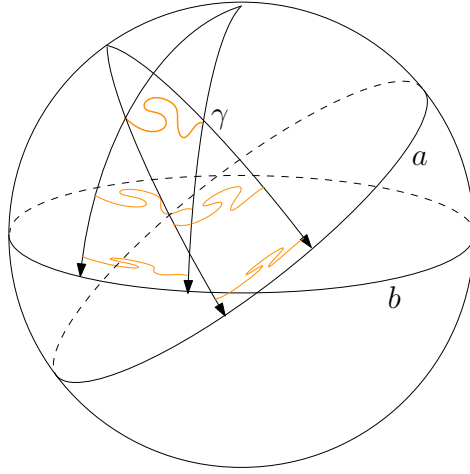


Рис. 5: Усреднение длины и кривизны γ по окружностям из Gr.

Для любой регулярной кривой $\gamma \subset S^3$ справедливы следующие формулы:

$$L(\gamma) = EL(\gamma) \quad (7)$$

$$K_g(\gamma) = EK_g(\gamma) \quad (8)$$

Выражение (7) называется формулой Крофтона [San53], а выражение (8) это ее аналог для геодезической кривизны [Teu86].

4 Целочисленность инварианта

Напомним, что

$$Z(\kappa, \lambda, [\gamma]) = Z_{\kappa, \lambda}([\gamma]) = \frac{1}{2\pi} \inf_{\gamma \in [\gamma]} (\kappa K_g(\gamma) + \lambda L(\gamma)),$$

где K_g — интеграл геодезической кривизны, L — длина. Если γ — это кривая, то

$$Z_{\kappa, \lambda}(\gamma) \stackrel{\text{опр}}{=} \frac{1}{2\pi} (\kappa K_g(\gamma) + \lambda L(\gamma)).$$

Утверждение 5. Зафиксируем $\kappa, \lambda, [\gamma]$, тогда $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \exists \gamma \in [\gamma]$ такая кривая, что:

1. $\gamma \subset a_{\varepsilon_2}$
2. $Z_{\kappa, \lambda}(\gamma) \leq Z_{\kappa, \lambda}([\gamma]) + \varepsilon_1$

где a_{ε_2} — это ε_2 -окрестность $a \in \text{Gr}$.

Доказательство. Воспользуемся полученными формулами Крофтона и напишем следующее равенство:

$$Z_{\kappa, \lambda}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{a \in \text{Gr}} (\kappa K_g(Pr_a(\gamma)) + \lambda L(Pr_a(\gamma))) d\mu.$$

Мы взяли такую меру, что $\mu(\text{Gr}) = 1$, поэтому $\forall \tau \in [\gamma] \exists a \in \text{Gr}$ такая, что справедливо следующее неравенство:

$$\kappa K_g(Pr_a(\tau)) + \lambda L(Pr_a(\tau)) \leq Z_{\kappa, \lambda}(\tau).$$

Кроме того, из утверждения 4 вытекает такая сходимость:

$$Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\tau)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \kappa K_g(Pr_a(\tau)) + \lambda L(Pr_a(\tau))$$

Следовательно, можно выбрать $\delta \leq \varepsilon_2$, такое, что выполняется следующее неравенство:

$$Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\tau)) \leq Z_{\kappa,\lambda}(\tau) + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Перейдя к инфимуму по $\tau \in [\gamma]$, получаем новое неравенство:

$$\inf_{\tau \in [\gamma]} Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\tau)) \leq \inf_{\tau \in [\gamma]} Z_{\kappa,\lambda}(\tau) + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Тогда в качестве γ можно взять $Pr_{a,1-\delta}(\varphi)$, для такого φ , что значение $Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\varphi))$ отличается от $\inf_{\tau \in [\gamma]} Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\tau))$ меньше чем на $\frac{\varepsilon_1}{2}$. Теперь соберем вместе получившиеся неравенства:

$$Z_{\kappa,\lambda}(\gamma) = Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\varphi)) \leq \inf_{\tau \in [\gamma]} Z_{\kappa,\lambda}(Pr_{a,1-\delta}(\tau)) + \frac{\varepsilon_1}{2} \leq \inf_{\tau \in [\gamma]} Z_{\kappa,\lambda}(\tau) + \varepsilon_1 = Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) + \varepsilon_1$$

Проекция $Pr_{a,1-\delta}(\varphi)$ содержится в полнотории a_δ . Мы заранее выбрали $\delta \leq \varepsilon_2$, поэтому $\gamma = Pr_{a,1-\delta}(\varphi) \subseteq a_{\varepsilon_2}$. \square

Замечание 7. Мы взяли в качестве γ проекцию $P_{a,1-\delta}(\varphi)$ для достаточно маленького δ . Для $\delta' < \delta$ все также работает, поэтому для $0 < t \leq 1$

$$Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\gamma)) \leq Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) + \varepsilon$$

Следствие 1. Пусть $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, тогда $\forall [\gamma] Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) \in \mathbb{N}$

Доказательство. Выберем t так, что

1. $Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\gamma)) \leq Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) + \varepsilon$
2. $|K_g(P_{a,t}(\gamma)) - \pi \# \text{критических точек } P_{a,1}|\gamma| \leq \varepsilon$

Число критических точек четно, потому что все критические точки существенны и кривая γ замкнута. Это значит, что кривизна $K_g(P_{a,t}(\gamma))$ сходится к целому числу. Будем преобразовывать $\gamma \subset a_{\varepsilon_2}$ в кривую $\alpha \subset a_{\varepsilon_2}$, у которой такое же число критических точек и почти целая длина:

1. Разобьем окружность a на равные дуги a^1, \dots, a^n , а трубчатую окрестность a_{ε_2} на соответствующие сегменты $a_{\varepsilon_2}^1, \dots, a_{\varepsilon_2}^n$. Кроме того, потребуем, чтобы все критические значения Морсовской функции $P_{a,1}|\gamma$ лежали только во внутренности a^1, \dots, a^n , и каждое критическое значение в отдельном сегменте. Объединение сегментов, содержащих критические точки назовем a^{crit} .
2. Измельчим это разбиение так, чтобы суммарная длина пересечения $\gamma \cap a^{crit}$ оказалась меньше ε^2 . Будем считать, что это измельченное разбиение мы и взяли изначально.
3. Из сегментов, не содержащих критических точек выберем сегмент $a_{\varepsilon_2}^i$, для которого длина $\gamma \cap a_{\varepsilon_2}^i$ минимальна. Для удобства положим $i = 1$.

4. Параметризуем a_{ε_2} С помощью карты T_{ε_2} :

$$T_{\varepsilon_2} : [0, 2\pi) \times D_{\varepsilon_2} \rightarrow a_{\varepsilon_2}$$

Координаты (x^1, x^2, x^3) построены как в утверждении 1. Это не совсем карта, потому что область определения не открыта, но это ничего не портит.

5. Сегмент $a_{\varepsilon_2}^i$ параметризуется множеством $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \times D_{\varepsilon_2}$. Растянем сегмент $a_{\varepsilon_2}^1 = [0, \frac{1}{n}) \times D_{\varepsilon_2}$ вдоль координаты x^1 умножением на число $m - \delta$, где m это число сегментов без критических точек. Остальные сегменты без критических точек стянем вдоль координаты x^1 домножением на одинаковое число $\frac{\delta}{m-1}$. Сегменты из a^{crit} не будем растягивать. С помощью параллельного переноса полученных сегментов вдоль a соберем кусочно гладкий автогомеоморфизм $f : a_{\varepsilon_2} \rightarrow a_{\varepsilon_2}$. Под действием f кривая γ переходит в кусочно-гладкую кривую $\alpha = f(\gamma)$. Возьмем ее прообраз $\tilde{\alpha} = T_{\varepsilon_2}^{-1}(\alpha)$
6. Точки $\tilde{\alpha}$, в которых нарушается гладкость можно сгладить, не добавив новых критических точек и почти не изменив длины. Продолжим обозначать сглаженную кривую как $\tilde{\alpha}$.
7. Сравним длину $\tilde{\alpha}$ и $T_{\varepsilon_2}^{-1}(\gamma)$. Длина той части $T_{\varepsilon_2}^{-1}(\gamma)$, которая попала в критические сегменты не изменилась, а длина той части $T_{\varepsilon_2}^{-1}(\gamma)$, которая попала в сегменты без критических точек уменьшилась, мы специально так растягивали. Можно выбрать Достаточно маленькое число δ так, чтобы длина $\tilde{\alpha}$ отличалась от длины пересечения $\tilde{\alpha}$ и растянутого $a_{\varepsilon_2}^1$ отличалась меньше, чем на ε^2 .
8. Теперь будем применять H^t , $t < 1$ к кривой $\tilde{\alpha}$, это будет соответствовать применению $P_{a,t}$ к α . Под действием H^t длина пересечения $\tilde{\alpha}$ с любым растянутм сегментом может только уменьшится. Поэтому длина пересечения $H^t(\tilde{\alpha})$ со всеми растянутыми сегментами, кроме первого меньше ε^2 . Длина пересечения $H^t(\tilde{\alpha})$ с первым растянутым сегментом стремится к числу компонент связности $\gamma \cap a_{\varepsilon_2}^1$ умноженному на 2π , поскольку внутри a^1 нет критических точек, а значит все компоненты связности $\gamma \cap a_{\varepsilon_2}^1$ строго монотонны по x^1 .

Получилось, что длина $H^t(\tilde{\alpha})$ сходится к числу, отличающемуся от 2π -кратного менее чем на $O(\varepsilon)$. При этом длина $H^t(\tilde{\alpha})$ меньше длины $H^t(T^{-1}(\gamma))$ для всех $t \leq 1$. Кривизна как $H^t(T^{-1}(\gamma))$, так и $H^t(\tilde{\gamma})$ сходится к числу критических точек. Согласно утверждению 4 длины и кривизны кривых $P_{a,t}(\gamma)$ и $P_{a,t}(\alpha)$ будут сходится к тем же числам. Значит

$$Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\gamma)) - Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\alpha)) = O(\varepsilon)$$

Кроме того, для любого $t \leq 1$

$$Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\gamma)) - Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) = O(\varepsilon)$$

Вычтем последние два равенства:

$$Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\alpha)) - Z_{\kappa,\lambda}([\gamma]) = O(\varepsilon)$$

Если κ, λ целые, то $Z_{\kappa,\lambda}(P_{a,t}(\alpha))$ сходится к числу, отличающемуся от целого на $O(\varepsilon)$. Тогда $Z_{\kappa,\lambda}([\gamma])$ отличается от целого числа на $O(\varepsilon)$.

□

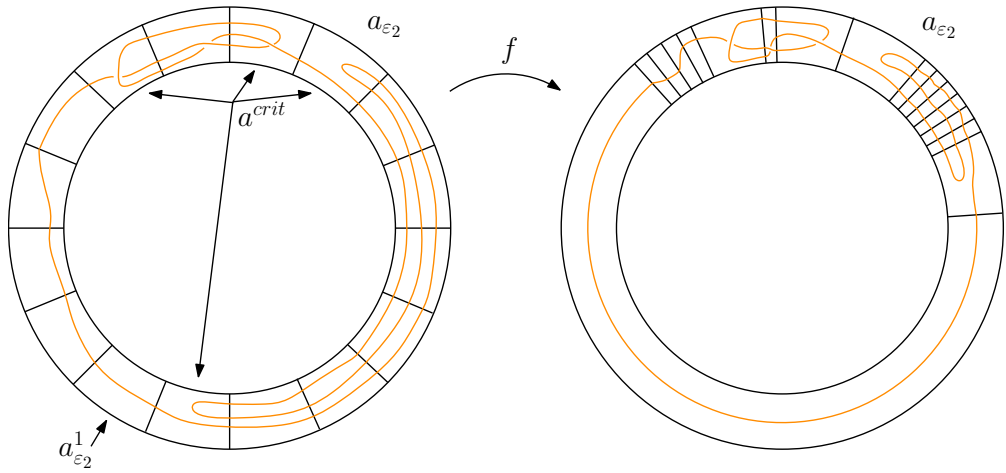


Рис. 6: Действие отображения f .

Замечание 8. На самом деле мы доказали, что $\frac{L(\gamma)}{2\pi}$ и $\frac{K_g(\gamma)}{2\pi}$ почти целые.

Замечание 9. Для узла \mathcal{K} мы научились получать такую его реализацию γ , что

$$Z_{\kappa,\lambda}(\gamma) - Z_{\kappa,\lambda}(\mathcal{K}) = O(\varepsilon)$$

Кроме того, все критические точки γ расположены близко друг к другу. С помощью изотопии как на рисунке можно привести кривую γ к виду (p, a) – замыкания некоторой косы. Такое (p, a) замыкание будет определено в следующей главе. Такая изотопия практически не меняет длины и кривизны. Черная коробочка с косой внутри на самом деле очень маленькая, но на рисунке достаточно крупная, чтобы было лучше видно, что происходит.

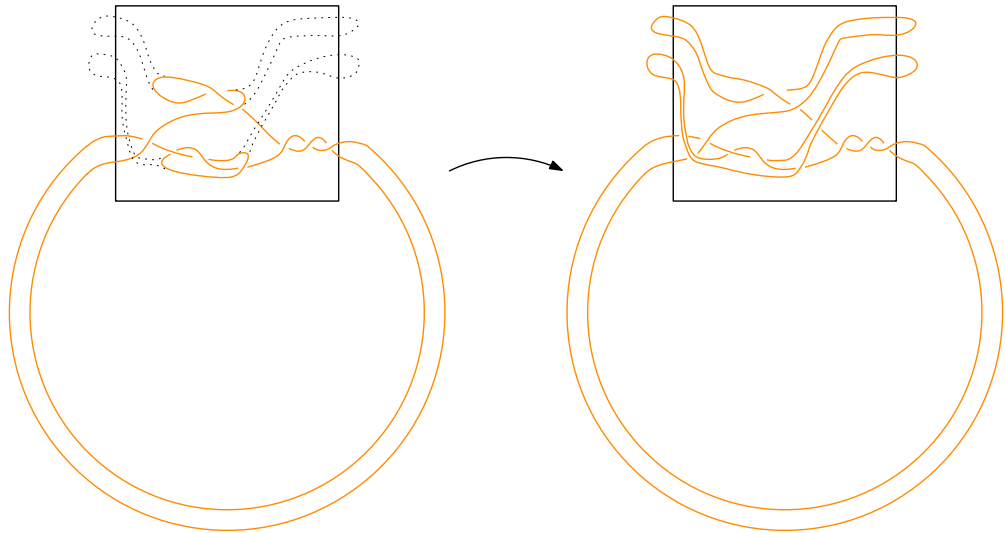


Рис. 7: Изотопия, приводящая к виду (p, a) – замыкания некоторой косы.

5 Диаграммный вид

Определение 11. Сопоставим узлу $[\gamma]$ множество $A_{[\gamma]} \subset \mathbb{R}_+^2$ следующим образом:

$$A_{[\gamma]} = \left\{ \left(\frac{L(\gamma)}{2\pi}, \frac{K_g(\gamma)}{2\pi} \right) : \gamma \in [\gamma] \right\}$$

Кроме того, заведем функцию:

$$A_\gamma = A(\gamma) = \left(\frac{L(\gamma)}{2\pi}, \frac{K_g(\gamma)}{2\pi} \right)$$

Здесь γ может быть как реализацией узла $[\gamma]$, так и просто гладкой кривой.

Определение 12. Сопоставим узлу $[\gamma]$ множество $Z_{[\gamma]} \subset \mathbb{N}_0^2$ следующим образом:

$$Z_{[\gamma]} = \text{Cl}A_{[\gamma]} \cap \mathbb{N}_0^2$$

Определение 13. Для косы назовем отрезки, на которых лежат концы нитей верхним и нижним основанием косы. Из косы можно получить узел соединив концы нитей верхнего и нижнего основания. Такой способ получения узла из косы называется Alexander closure, а дуги соединяющие верхнюю грань с нижней будем называть дугами Александра.

Определение 14. Если у косы четное число нитей, то из нее можно получить узел, соединив соседние пары концов нитей на каждом из оснований. Такой способ получения узла из косы называется plat closure, а пары дуг, симметричных относительно средней линии косы будем называть парами дуг plat closure.

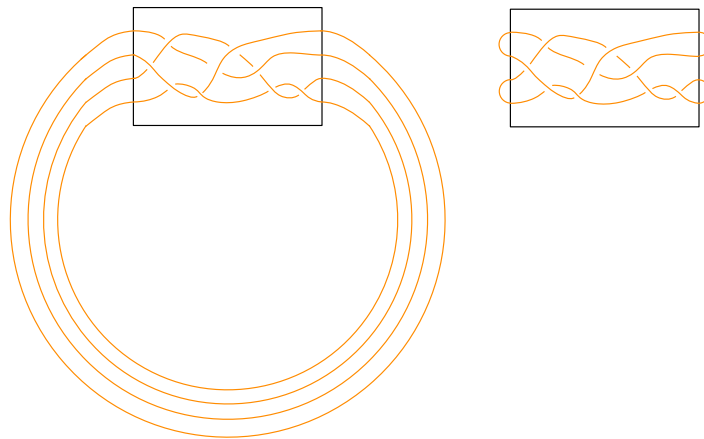


Рис. 8: Замыкания Александра и plat closure.

Определение 15. Первые несколько концов нитей с оснований косы можно замкнуть парами дуг plat closure, а остальные дугами Александра. Такой способ получения узла из косы будем называть смешанным замыканием. У одной косы может быть несколько смешанных замыканий, они параметризуются парами $(p, a) \in \mathbb{N}^2$, такими, что $2p + a$ это число нитей в этой косе.

Определение 16. Сопоставим узлу $[\gamma]$ множество $Z_{[\gamma]} \subset \mathbb{N}^2$ следующим образом:

$$Z_{[\gamma]} = \{(p, a): \exists \text{ коса, } (p, a)\text{-замыкание которой это } [\gamma]\}$$

Утверждение 6. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$

$$(p, a) \in Z_{[\gamma]} \Rightarrow (p + m, a + n) \in Z_{[\gamma]}$$

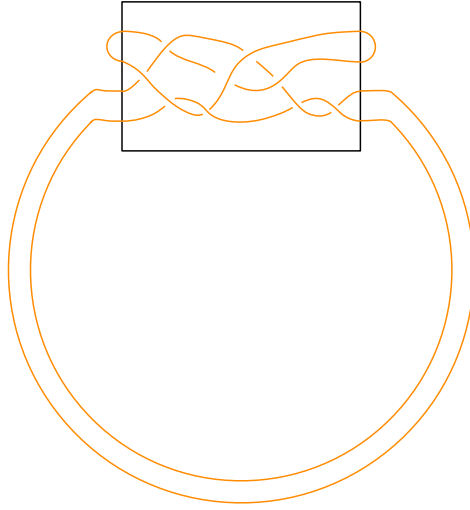


Рис. 9: Замыкание (p, a) . Здесь $p = 1$ и $a = 2$.

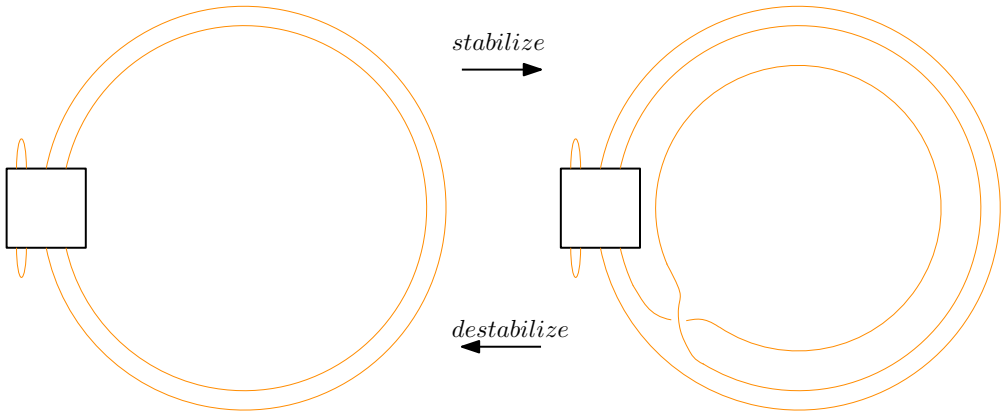


Рис. 10: Стабилизация и дестабилизация.

Доказательство. Из (p, a) -реализации узла $[\gamma]$ после применения стабилизации как на рисунке 10 получается $(p, a+1)$ -реализация того же узла. Из $(p, a+1)$ -реализации можно получить $(p+1, a)$ -реализацию превращением дуги Александера в пару дуг plat closure как на рисунке 12. \square

Утверждение 7. Дополнение $\mathcal{Z}_{[\gamma]}$ до \mathbb{N}^2 конечно.

Доказательство. Любой узел может быть реализован косой замкнутой по Александеру и plat closure косой, тогда $(0, \text{braid index}[\gamma]), (\text{bridge index}[\gamma], 0) \in \mathcal{Z}_{[\gamma]}$, значит, согласно утверждению 6 первые квадранты с вершинами в этих точках содержатся в $\mathcal{Z}_{[\gamma]}$, тогда $\mathcal{Z}_{[\gamma]}$ коконечно, а дополнение $\mathcal{Z}_{[\gamma]}$ представляет собой диаграмму Юнга на узлах целочисленной решетки, поскольку вместе с каждой точкой в $\mathcal{Z}_{[\gamma]}$ лежит и соответствующий первый квадрант. \square

Утверждение 8. Для любого узла $[\gamma]$: $\mathcal{Z}_{[\gamma]} \subseteq Z_{[\gamma]}$

Доказательство. Достаточно, доказать, что $\mathcal{Z}_{[\gamma]} \subset \text{Cl}A_{[\gamma]}$. Напомним, что T_r это естественный диффеоморфизм r -окрестности a в нормальном расслоении и трубчатой r -окрестности некоторой большой окружности a_r , где $a \in \text{Gr}$. С каждым (p, a) -замыканием реализующим $[\gamma]$ можно связать реализацию $[\gamma]$ в a_r , такую что ее прообраз в $D_r^2 \times S_1^1$ это коса реализованная в цилиндре $D_r^2 \times [0, \epsilon]$, пары дуг Plat closure будут реализованы половинками окружностей

слоях $D_r^2 \times [-\epsilon, 0]$ и $D_r^2 \times [\epsilon, 2\epsilon]$, а дуги Александера будут реализованы почти целыми окружностями вида $\{d\} \times [\epsilon, 2\pi]$, для некоторой точки $d \in D_r^2$. Геодезическая кривизна таких реализаций будет стремиться к $2\pi r$, а длина к $2\pi a$ при $r, \epsilon \rightarrow 0$, тогда значения A на таких реализациях $[\gamma]$ будет стремиться к (p, a) , чего и хотелось. \square

Определение 17. Заведем функцию $r(l, x): \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которая будет считать расстояние от нуля до прямой, параллельной l и содержащей x . Если вместо x стоит множество, то это функция выдаст расстояние до множества.

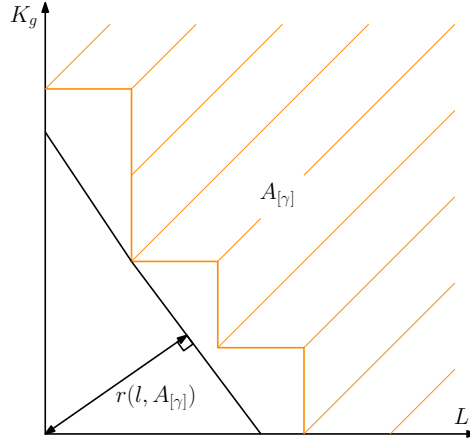


Рис. 11: Функция r , измеряющая расстояние до опорной прямой.

Утверждение 9. Пусть $\kappa, \lambda > 0$, а $l_{\kappa, \lambda} \in \mathbb{R}P^1$ это прямая с тангенсом угла наклона $\frac{-\kappa}{\lambda}$, тогда

$$\frac{Z_{\kappa, \lambda}(\gamma)}{r(l_{\kappa, \lambda}, A_\gamma)} = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}$$

Доказательство. Заметим, что $r(l_{\kappa, \lambda}, (x, y)) = r(l_{\kappa, \lambda}, (x, 0)) + r(l_{\kappa, \lambda}, (0, y))$, поскольку координатные вектора смотрят по одну сторону, от убывающей прямой. Для улучшения восприятия заведем обозначения:

$$r = r(l_{\kappa, \lambda}, A_\gamma) = r\left(l_{\kappa, \lambda}, \left(\frac{K_g(\gamma)}{2\pi}, \frac{L(\gamma)}{2\pi}\right)\right)$$

$$r_1 = r\left(l_{\kappa, \lambda}, \left(\frac{K_g(\gamma)}{2\pi}, 0\right)\right)$$

$$r_2 = r\left(l_{\kappa, \lambda}, \left(0, \frac{L(\gamma)}{2\pi}\right)\right)$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$Z_{\kappa, \lambda}(\gamma) = \kappa \frac{L(\gamma)}{2\pi} + \lambda \frac{K_g(\gamma)}{2\pi} = \kappa \sqrt{r_2^2 + \left(r_2 \frac{\lambda}{\kappa}\right)^2} + \lambda \sqrt{r_1^2 + \left(r_1 \frac{\kappa}{\lambda}\right)^2} = (r_2 + r_1) \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} = r \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}$$

\square

Следствие 2. Зная $A_{[\gamma]}$ можно прямо вычислить $Z_{\kappa, \lambda}([\gamma])$:

$$Z_{\kappa, \lambda}([\gamma]) = \inf_{x \in A_{[\gamma]}} \frac{r(l_{\kappa, \lambda}, x)}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}$$

Лемма 3. Пусть $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ непустые замкнутые выпуклые множества, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. X_i содержит первый квадрант с вершиной в некоторой точке.
2. $\forall \kappa, \lambda > 0 \quad r(l_{\kappa, \lambda}, X_1) = r(l_{\kappa, \lambda}, X_2)$

Тогда $X_1 = X_2$

Доказательство. Выпуклое множество X_i задается набором касательных полуплоскостей \mathcal{P}_i . Полуплоскости разбиваются на четыре типа:

1. Те, что лежат над убывающей прямой.
2. Те, что лежат под убывающей прямой.
3. Те, граница которых возрастающая прямая.
4. Те, граница которых параллельна координатной оси.

Обозначим их как H_1, H_2, H_3, H_4 . Пересечение $H_1 \cap \mathcal{P}_i$ содержит ровно по одной полуплоскости для каждого угла наклона граничной прямой, поскольку $X_i \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Пересечения $H_2 \cap \mathcal{P}_i$ и $H_3 \cap \mathcal{P}_i$ пусты, так как X_i содержит квадрант с вершиной в некоторой точке. На расстоянии $r > 0$ от нуля могут проходить две прямые с тангенсом угла наклона $\frac{-\kappa}{\lambda}$, с ними ассоциированы две полуплоскости первого типа, одна из которых отделена от $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$, а значит не может лежать в \mathcal{P}_i . Тогда $r(l_{\kappa, \lambda}, X_i)$ однозначно определяет касательную полуплоскость первого типа. Значит $H_1 \cap \mathcal{P}_1 = H_1 \cap \mathcal{P}_2$. Заметим, что $r(Ox, X_i) = r(Oy, X_i)$ по следующей причине:

$$r(Ox, X_i) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} r(l_{\kappa, \lambda}, X_i)$$

$$r(Oy, X_i) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} r(l_{\kappa, \lambda}, X_i)$$

Тогда, аналогичным образом, $H_4 \cap \mathcal{P}_1 = H_4 \cap \mathcal{P}_2$, тогда справедливы такие равенства:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1 \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = \mathcal{P}_2 \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = \mathcal{P}_2$$

□

Утверждение 10. Пусть $\text{Conv } X$ это выпуклая оболочка множества X , тогда

$$\text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]} = \text{Conv } Z_{[\gamma]} = \text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]}$$

Доказательство. Включения $\text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]} \subseteq \text{Conv } Z_{[\gamma]} \subseteq \text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]}$ прямо следуют из включений $\mathcal{Z}_{[\gamma]} \subseteq Z_{[\gamma]} \subseteq \text{Cl } A_{[\gamma]}$, которые появлялись в утверждении 8 и определении 12. Хотим доказать включение $\text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]} \subseteq \text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]}$ с помощью леммы 3. Множества $\text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]}$ и $\text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]}$ удовлетворяют первому условию леммы, согласно утверждению 6 и включению $\text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]} \subseteq \text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]}$. Осталось проверить второе условие:

$$r(l_{\kappa, \lambda}, \text{Conv } \text{Cl } A_{[\gamma]}) = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \mathcal{Z}_{\kappa, \lambda}([\gamma]) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}{2\pi} \inf_{\gamma \in [\gamma]} \kappa L(\gamma) + \lambda K_g(\gamma) =$$

Из замечания 9 следует, что такой инфимум достигается на кривых, реализованных как (p, a) -замыкание некоторой косы. Кривизна (p, a) -замыкания сколь угодно близка к $2\pi p$, а длина к $2\pi a$, поэтому

$$= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}{2\pi} \inf_{(p,a) \in \mathcal{Z}_{[\gamma]}} 2\pi\kappa p + 2\pi\lambda a = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \inf_{(p,a) \in \mathcal{Z}_{[\gamma]}} \kappa p + \lambda a = r(l_{\kappa,\lambda}, \mathcal{Z}_{[\gamma]}) = r(l_{\kappa,\lambda}, \text{Conv } \mathcal{Z}_{[\gamma]})$$

,

□

6 Дополнения.

6.1 Строгая монотонность диаграмм.

Утверждение 11. Для диаграммы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ узла \mathcal{K} выполняется следующее свойство:

$$(p, a) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \implies (p + 1, a - 1) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$$

Доказательство. Пусть B это коса, (p, a) -замыкание которой это это \mathcal{K} . Добавим к B тривиальную нить на последнее место и замкнем полученную косу как рисунке 12. □

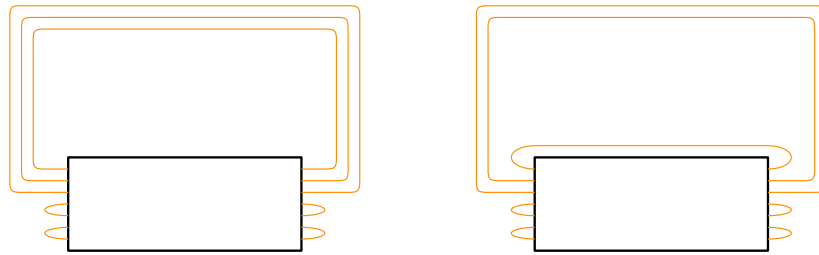


Рис. 12: Строгая монотонность диаграмм.

6.2 Аддитивность.

На число нитей и на число мостов можно смотреть как на способ градуировать узлы по связному суммированию. То есть, для любых узлов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ выполняется аддитивность:

$$\text{bridge index } (\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2) = \text{bridge index } (\mathcal{K}_1) + \text{bridge index } (\mathcal{K}_2) - 1$$

$$\text{braid index } (\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2) = \text{braid index } (\mathcal{K}_1) + \text{braid index } (\mathcal{K}_2) - 1$$

Я не знаю, верна ли аддитивность в каком-нибудь виде для какого-нибудь из инвариантов Z, \mathcal{Z}, A . Было бы интересно узнать ответ на этот вопрос.

7 Примеры

7.1 Узлы, у которых число нитей и число мостов совпадают.

Утверждение 12. Пусть у узла \mathcal{K} совпадают число мостов и число нитей

$$\text{bridge index } \mathcal{K} = \text{braid index } \mathcal{K} = n$$

тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \{(a, b) : a + b \geq n\}$.

Доказательство. Применим утверждение 11 к точке $(0, n) \in \mathcal{Z}_x$ несколько раз и получим, что диагональ $\{(a, n - a) \mid a \leq n\}$ лежит в $(0, n) \in \mathcal{Z}_x$. Тогда, из утверждения 6 следует, что все что над диагональю, то есть $\{(a, b) : a + b \geq n\}$ лежит в \mathcal{Z}_x . Осталось понять, что ничего лишнего там не лежит. Пусть для $n - x \geq k \geq 0$ точка $(x, n - x - k)$, которая находится под диагональю, попала в множество \mathcal{Z}_x . Тогда, применив к этой точке утверждение 11 несколько раз, получаем, что $(n - k, 0) \in \mathcal{Z}_x$. Это означает, что число мостов узла K не превосходит $n - k$, а значит $k = 0$ и точка $(x, n - x - k)$ лежит на диагонали. \square

Класс узлов \mathcal{L} , у которых совпадают число мостов и число нитей обладает следующими свойствами:

1. В \mathcal{L} лежат все торические узлы. Это следует из того, что для торического узла (p, q)

$$\text{braid index}(p, q) = \min\{p, q\} = \text{braid index}(p, q)$$

Эти два равенства написаны в работе [Sch05] и в книге [Cro64] – Предложение 10.5.2 на странице 255.

2. Класс \mathcal{L} замкнут относительно связного суммирования, потому что число нитей [BM90] и число мостов [Sch91] аддитивны. Кроме того, он замкнут относительно каблирования [WIL92], потому что при каблировании торическим узлом \mathcal{K}' число мостов умножается на число мостов узла \mathcal{K} , а число нитей на число нитей [WIL92]. Таким образом операции связного суммирования и каблирования подчиняются градуировке числом нитей или числом мостов, которые совпадают.
3. Если взять два простых узла из класса \mathcal{L} , то их связная сумма перестанет быть простой, при этом после каблирования нетривиальным торическим узлом любой узел снова превратится в простой.

Замечание 10. На самом деле всеми этими свойствами обладает и просто класс всех узлов градуированный числом мостов или числом нитей, которые в данном случае не совпадают.

7.2 Двухмостовые узлы.

Любой двухмостовой узел можно представить [Kaw90] в виде как на рисунке 13.

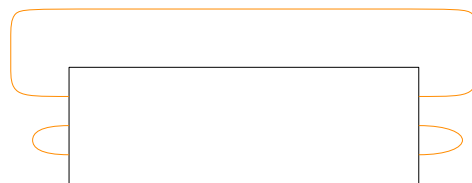


Рис. 13: Вид, к которому можно привести двухмостовой узел.

Утверждение 13. Пусть $Q(m, n) = \{(m + k, n + l) \mid k, l \in \mathbb{N}_0\}$ для $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда диаграмма двухмостового узла \mathcal{Z}_x с числом нитей a выглядит следующим образом:

$$\mathcal{Z}_x = Q(0, a) \cup Q(1, 1) \cup Q(2, 0)$$

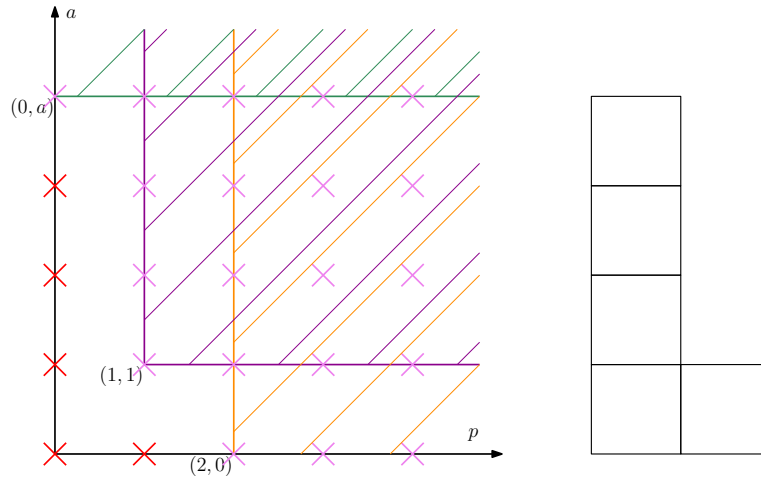


Рис. 14: Диаграмма $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ обозначена на левой картинке фиолетовыми крестиками. Вместо $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ можно рассматривать дополнение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, обозначенное красными крестиками. На правой картинке нарисованы все клетки, у которых в левом нижнем углу стоит красный крестик. Для удобства можно рисовать $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в виде как на правой картинке.

Доказательство. Точки $(1, 1)$ лежит в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, что прямо следует из представления на рисунке 13. Точки $(0, a)$ и $(2, 0)$ лежат в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ потому что 2 это число мостов, и a это число нитей. Тогда из утверждения 6 следует, что все фиолетовые точки на картинке лежат в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Осталось понять, что все красные не лежат. Действительно, все красные точки лежат на осях p и a . Если бы точка на оси a оказалась фиолетовой и при этом ниже точки $(0, a)$ это бы означало, что a не число нитей. Аналогично с красными точками на оси p . \square

Кроме того, для любого $n > 1$ существует двухмостовой узел с числом нитей n [MUR91].

Следствие 3. Для любой пары натуральных чисел $2 \leq p \leq a$ найдется узел \mathcal{K} , такой что

$$\begin{aligned} \text{bridge index } \mathcal{K} &= p \\ \text{braid index } \mathcal{K} &= a \end{aligned}$$

Доказательство. У торического узла число мостов равно числу нитей. Возьмем торический узел \mathcal{T} с числом нитей $p - 1$ и возьмем его связную сумму с двухмостовым узлом \mathcal{K} с числом нитей $a - p + 2$. Проверим что их сумма равна тому, чему надо:

$$\begin{aligned} \text{bridge index } (\mathcal{T} \# \mathcal{K}) &= \text{bridge index } \mathcal{T} + \text{bridge index } \mathcal{K} - 1 = (p - 1) + 2 - 1 = p \\ \text{braid index } (\mathcal{T} \# \mathcal{K}) &= \text{braid index } \mathcal{T} + \text{braid index } \mathcal{K} - 1 = (p - 1) + (a - p + 2) - 1 = a \end{aligned} \quad \square$$

Замечание 11. Из построенных инвариантов можно восстанавливать число нитей и число мостов. Я не знаю, различают ли эти инварианты больше, чем пара (число мостов, число нитей). Если различают больше, то здорово – получился сильный инвариант. Если нет, то это тоже может быть хорошо, потому что чтобы узнать диаграмму \mathcal{Z}_K узла K достаточно найти торический узел \mathcal{T} и двухмостовой узел \mathcal{K} , такие что число нитей и число мостов у узлов K и $\mathcal{K} \# \mathcal{T}$ совпадали, как в следствии 3, и посчитать диаграмму $\mathcal{Z}_{\mathcal{K} \# \mathcal{T}}$, что, возможно, проще, потому что торические и двухмостовые узлы достаточно просто описываются.

Список литературы

- [Mil50] John Willard Milnor. “On the Total Curvature of Knots”. В: *Annals of Mathematics* (1950).
- [II23] James Waddell Alexander II. “A Lemma on Systems of Knotted Curves”. В: *Proc Natl Acad Sci U S A.* (1923).
- [San53] Santalo. *Introduction to Integral Geometry.* 1953.
- [Teu86] Eberhard Teufel. *ON THE TOTAL ABSOLUTE CURVATURE OF CLOSED CURVES IN SPHERES.* 1986.
- [Sch05] Jennifer Schultens. *Bridge Numbers of Torus Knots.* 2005.
- [Cro64] Peter R. Cromwell. *Knots and Links.* 1964.
- [BM90] J. S. Birman и W. Menasco. *Studying links via closed braids IV: Composite links and split links, Invent. Math.* 102 (1990), 115–139. MR1069243 (92g:57010a). 1990.
- [Sch91] Jennifer Schultens. *ADDITIVITY OF BRIDGE NUMBERS OF KNOTS.* 1991.
- [WIL92] R. F. WILLIAMS. *THE BRAID INDEX OF GENERALIZED CABLES, PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS Vol. 155, No. 2.* 1992.
- [Kaw90] Akio Kawauchi. *A Survey of Knot Theory.* 1990.
- [MUR91] KUNIO MURASUGI. *ON THE BRAID INDEX OF ALTERNATING LINKS.* 1991.