

Санкт-Петербургский государственный университет

УЛАНОВА Арина Андреевна

Выпускная квалификационная работа

Центральные меры в графах, связанных с графом Юнга

Уровень образования: магистратура

Направление и код: 01.04.01 «Математика»

Основная образовательная программа: ВМ.5832.2019

Профиль (при наличии): нет

Научный руководитель:

Профессор

МКН СПбГУ

доктор физико-математических наук

Ф. В. Петров

Рецензент:

Младший научный сотрудник

ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН

кандидат физико-математических наук

О. В. Постнова

Санкт-Петербург

2021

Аннотация

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный граф. Рассмотрим градуированный натуральными числами граф, каждый уровень которого — копия множества V , а ребро с i -го уровня на $(i + 1)$ -й проводится в случае, если между соответствующими вершинами есть путь в G . Применяя эту конструкцию к графу диаграмм Юнга получаем градуированный граф, пути в котором соответствуют цепочкам вложенных диаграмм Юнга. С помощью леммы Линдстрема – Гесселя – Вьенно перечисление путей в таком графе сводится к вычислению определителей, причём это можно делать разными способами. В ряде случаев эти определители вычисляются явно. В частности, с помощью этого вычисления удаётся описать центральные меры, соответствующие двустрочечным диаграммам.

Ключевые слова: диаграмма Юнга, граф Юнга, перечисление путей, центральные меры

Содержание

1	Введение. Основные понятия	2
2	Пути в графе Юнга с прыжками из пустой диаграммы в прямоугольную	4
3	Пути в графе Юнга с прыжками из маленьких диаграмм в прямоугольную	9
3.1	Вычисление числа путей, стартующих из двуклеточных диаграмм	10
3.2	Вычисление числа путей, стартующих из трехклеточных диаграмм и некоторых четырехклеточных	12
4	Другой взгляд на перечисление путей с помощью определителя	15
4.1	Примеры использования строчечного определителя	17
5	Центральные меры на графе Юнга с прыжками	20
5.1	Основные понятия	20
5.2	Критерий вырожденности мер, порождаемых прямоугольниками	21
5.3	Центральные меры на графе прыжков двустрочечных диаграмм	23

1 Введение. Основные понятия

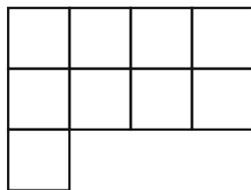
В начале мы напомним про градуированные графы и граф Юнга, а затем определим граф Юнга с прыжками.

Определение. Пусть V — некоторое (обычно счётное) множество вершин, E — множество рёбер, каждому из которых сопоставлена упорядоченная пара $(u, v) \in V^2$ вершин (разным рёбрам может соответствовать одна и та же пара вершин, то есть допускаются кратные рёбра). Вершина u называется началом такого ребра uv , v — концом, также говорим, что u — непосредственный предок v , а v — непосредственный потомок u . Потомками u будем называть все вершины, в которые можно добраться от u , а предками все вершины, из которых можно прийти к u . Ориентированный граф $G = (V, E)$ будем называть градуированным, если существует отображение

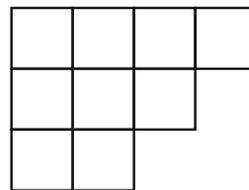
$$\begin{aligned} \text{rank} : V &\rightarrow \mathbb{Z} \\ v &\mapsto |v| \end{aligned}$$

такое, что $|v| = |u| + 1$ для любого ребра $uv \in E(G)$. Величина $|v|$ называется рангом вершины v .

Разбиением числа n называется последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ целых неотрицательных чисел такая, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ и $|\lambda| := \sum_i \lambda_i = n$. Разбиения вида $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ отождествляются. Каждому разбиению λ соответствует диаграмма Юнга — набор клеток (единичных квадратиков), составленных в строки длины $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и выравненных по левому краю. В качестве примера рассмотрим соответствие диаграммам двух разбиений числа 9 в сумму $4+4+1$ (рис. 1а) и в сумму $4+3+2$ (рис. 1б).



а)



б)

Рис. 1: Диаграммы, соответствующие разбиению числа 9

Определим граф Юнга (рис. 2) следующим образом: вершинами являются всевозможные диаграммы Юнга (в том числе пустая, которая

соответствует разбиению числа 0). Рангом диаграммы является количество клеток в ней. Между диаграммами λ и μ проведено ребро, если $|\lambda| = |\mu| - 1$ и $\mu_i \geq \lambda_i$ для всех i .

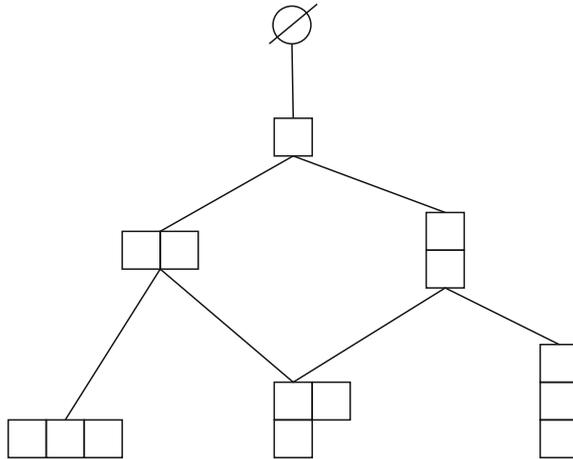


Рис. 2: Начало графа Юнга

Теперь определим *граф с прыжками* для градуированного графа G . Множеством вершин теперь будет являться $V(G) \times \{1, 2, \dots\}$. Назовем вершины множества $V_i = V(G) \times \{i\}$ — i -м уровнем графа с прыжками. Между вершинами $\lambda \in V_i$ и $\mu \in V_{i+1}$ в соседних уровнях проведено ребро, если в исходном графе G существовал путь из λ в μ (одна вершина без рёбер — это тоже путь). Полученный граф также является градуированным, ранг вершин множества V_i равен i .

Для графа Юнга мы также можем определить граф Юнга с прыжками. Будем говорить, что диаграмма λ вложена в диаграмму μ и обозначать $\lambda \subset \mu$, если $\mu_i \geq \lambda_i$ для всех i . Иными словами, если из λ в μ есть путь в графе Юнга.

Замечание. У графа Юнга с прыжками степень каждой вершины бесконечна, но если рассмотреть индуцированный подграф на множестве диаграмм с не более чем t клетками, то степень у каждой из вершин будет конечной.

Из многих изученных градуированных графов (см. напр. [8, 12]) граф Юнга с прыжками больше всего напоминает граф Гельфанда – Цетлина, соответствующий ветвлению унитарных групп: вершины k -го уровня соответствуют неубывающим целочисленным последовательностям длины k , а ребро соответствует тому, что соответствующие последовательности

перемежаются. Но при изучении графа Юнга с прыжками возникают существенные специфические сложности, что видно из дальнейшего.

2 Пути в графе Юнга с прыжками из пустой диаграммы в прямоугольную

Предположим, что мы хотим посчитать количество путей длины $s + 1$ из диаграммы λ в μ в графе Юнга с прыжками. Заметим, что каждому пути длины $s + 1$ соответствует последовательность вложенных диаграмм $\lambda = \nu_0 \subset \nu_1 \subset \dots \subset \nu_{s+1} = \mu$.

Рассмотрим следующий частный случай: λ является пустой диаграммой, а μ — прямоугольной диаграммой ширины n и высоты k . Сопоставим каждому пути длины $s + 1$ цепочку вложенных поддиаграмм длины s в прямоугольнике (здесь мы не учитываем стартовую и конечную вершины). Давайте считать, что для прямоугольника введена система координат, и его левый нижний угол соответствует координатам $(0, 0)$, а правый верхний — (n, k) . Поскольку каждой вложенной в прямоугольник диаграмме можно сопоставить путь по клеткам прямоугольника из $(0, 0)$ в (n, k) (рис. 3) и двум вложенным диаграммам соответствуют непересекающиеся, но, возможно, касающиеся пути, то нашу задачу можно свести к подсчету s непересекающихся или касающихся путей в клетчатом прямоугольнике с фиксированными точками старта и финиша.

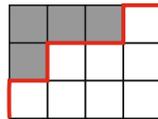


Рис. 3: Сопоставления вложенной диаграммы и пути в прямоугольнике

Теперь избавимся от того, что наши пути могут касаться. Сделаем s копий R_i нашего прямоугольника, у i -й копии вершинами будут точки с координатами $a_i := (i, -i)$ и $b_i := (n + i, k - i)$ соответственно для $i \in \{0, \dots, s - 1\}$. Путь, соответствующий диаграмме ν_j , теперь проведем в прямоугольнике R_{j-1} для $j \in \{1, \dots, s\}$. Заметим, что эти сдвиги сделали наши пути строго непересекающимися. Пример преобразования для трех путей на рис. 4.

Для последующих рассуждений нам понадобится лемма [4, 7]

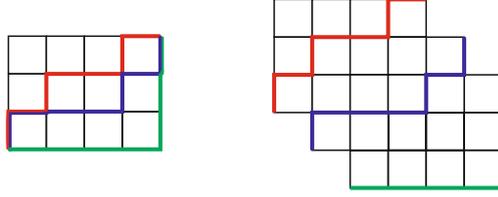


Рис. 4: Переход к непересекающимся путям

Лемма 1 (Линдстрема – Гесселя – Вьенно). Пусть G – локально конечный ориентированный ациклический граф. То есть каждая вершина имеет конечную степень и G не содержит ориентированных циклов. Рассмотрим начальные вершины $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и конечные вершины $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, а также присвоим вес ω_e каждому ориентированному ребру e . Предполагается, что веса ребер принадлежат некоторому коммутативному кольцу. Для каждого ориентированного пути P между двумя вершинами пусть $\omega(P)$ будет произведением весов ребер этого пути. Для любых двух вершин a и b обозначим $e(a, b) = \sum_{P:a \rightarrow b} \omega(P)$ по всем путям от a до b .

$$M = \begin{pmatrix} e(a_1, b_1) & e(a_1, b_2) & \cdots & e(a_1, b_n) \\ e(a_2, b_1) & e(a_2, b_2) & \cdots & e(a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(a_n, b_1) & e(a_n, b_2) & \cdots & e(a_n, b_n) \end{pmatrix}$$

n -кратные непересекающиеся пути от A до B – это набор путей (P_1, \dots, P_n) в G со следующими свойствами:

- существует перестановка σ на n элементах такая, что для каждого i путь P_i является путем из a_i к $b_{\sigma(i)}$.
- при $i \neq j$ пути P_i и P_j не имеют общих вершин, даже конечных.

Для такого n -набора (P_1, \dots, P_n) обозначим через $\sigma(P)$ перестановку σ из первого условия.

Тогда определитель M является суммой со знаком по всем n -наборам $P = (P_1, \dots, P_n)$ непересекающихся путей из A в B :

$$\det(M) = \sum_{(P_1, \dots, P_n): A \rightarrow B} \text{sign}(\sigma(P)) \prod_{i=1}^n \omega(P_i).$$

Лемма 2. Число непересекающихся сдвинутых путей на копиях прямоугольника вычисляется с помощью определителя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Доказательство. Сведем эту задачу к лемме Линдстрема – Гесселя – Вьенно. В качестве графа возьмем объединение всех прямоугольников R_i , вершинами будут являться узлы прямоугольников (включая граничные), а ребрами — все проведенные между ними отрезки сетки. Все узлы и ребра, которые совпали при наложении копий, мы отождествляем. Горизонтальные ребра ориентируем вправо, а вертикальные — вверх. Полученный нами граф будет ациклическим и локально конечным. Начальные и конечные вершины будут $a_i := (i, -i)$ и $b_i := (n+i, k-i)$, соответственно, для $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Веса всех ребер будут равны единице. Таким образом, $e(a_i, b_j)$ будет равняться числу путей между вершинами a_i и b_j , а $\omega(P_i) = 1$ для любого пути.

В нашем случае непересекающиеся пути возможны только при тождественной перестановке, иначе если для некоторой a_j проведен путь в b_s , а из a_i в b_t , где $j > i$ и $s < t$, то топологически эти пути будут соответствовать диагоналям выпуклого четырехугольника, а они пересекаются. Знак которой равен единице, поэтому формула для определителя превращается в количество наборов непересекающихся путей из a_i в b_i .

Для завершения доказательства остается понять, что определитель S имеет именно такой вид, то есть что $e(a_i, b_j) = \binom{n+k}{k+i-j}$. Для этого явно посчитаем значения $e(a_i, b_j)$. Это количество ориентированных путей в прямоугольнике с координатами $(i, -i)$ и $(n+j, k-j)$. Его ширина $n+j-i$, а высота $k+i-j$, поэтому $e(a_i, b_j) = \binom{(n+j-i)+(k+i-j)}{k+i-j} = \binom{n+k}{k+i-j}$. \square

Лемма 3. Для определителя, полученного в лемме 2, есть явная формула

$$\det(S) = \prod_{i=0}^{s-1} \frac{(n+k+i)! \cdot i!}{(n+i)! \cdot (k+i)!}.$$

Доказательство. Выполним следующую операцию $s-1$ раз: на i -й итерации мы будем добавлять $j+1$ -ю строку к j -й для всех $j \in \{1, \dots, s-i\}$ в порядке возрастания (сначала прибавляем вторую строку к первой, затем третью ко второй и так далее).

Тогда после первой итерации, используя свойство Паскаля для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, получим следующую матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} \binom{n+k+1}{k+1} & \binom{n+k+1}{k} & \cdots & \binom{n+k+1}{k-s+2} \\ \binom{n+k+1}{k+2} & \binom{n+k+1}{k+1} & \cdots & \binom{n+k+1}{k-s+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k+1}{k+s-1} & \binom{n+k+1}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k+1}{k} \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Поскольку после каждой итерации у строк, к которым прибавлялась предыдущая строка, будут увеличиваться оба индекса биномиального коэффициента, то несложно заметить, что в итоге мы придем к следующей матрице:

$$S = \begin{pmatrix} \binom{n+k+s-1}{k+s-1} & \binom{n+k+s-1}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k+s-1}{k} \\ \binom{n+k+s-2}{k+s-1} & \binom{n+k+s-2}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k+s-2}{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Значит, требуется доказать следующее:

$$\prod_{i=0}^{s-1} \frac{(n+k+i)! \cdot i!}{(n+i)! \cdot (k+i)!} = \begin{pmatrix} \frac{(n+k+s-1)!}{(k+s-1)!n!} & \frac{(n+k+s-1)!}{(k+s-2)!(n+1)!} & \cdots & \frac{(n+k+s-1)!}{k!(n+s-1)!} \\ \frac{(n+k+s-2)!}{(k+s-1)!(n-1)!} & \frac{(n+k+s-2)!}{(k+s-2)!n!} & \cdots & \frac{(n+k+s-2)!}{k!(n+s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(n+k)!}{(k+s-1)!(n-s+1)!} & \frac{(n+k)!}{(k+s-2)!(n-s+2)!} & \cdots & \frac{(n+k)!}{k!n!} \end{pmatrix}$$

В полученной матрице верхний индекс биномиального коэффициента совпадает для элементов одной строки (причем там присутствуют все значения от $n+k$ до $n+k+s-1$), а нижний — для элементов одного столбца (присутствуют все значения от k до $k+s-1$). Пользуясь полилинейностью определителя, нам осталось доказать, что

$$\prod_{i=0}^{s-1} \frac{i!}{(n+i)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n+s-1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n+s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-s+1)!} & \frac{1}{(n-s+2)!} & \cdots & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}$$

Далее будем считать, что столбцы и строки матрицы нумеруются с нуля. Для всех j вынесем из j -го столбца множитель $\frac{1}{(n+j)!}$. Тогда нам остается доказать:

$$\prod_{i=0}^{s-1} i! = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & n+1 & \dots & n+s-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n \cdot \dots \cdot (n-s+2) & (n+1) \cdot \dots \cdot (n-s+3) & \dots & (n+s-1) \cdot \dots \cdot (n+1) \end{vmatrix}$$

Докажем индукцией по номерам строк, что можно преобразовать матрицу с сохранением определителя так, что в ячейке (i, j) будет стоять $(n+j)^i$. Пусть до строки номер i мы уже все доказали, тогда рассмотрим j -й элемент $(i+1)$ -й строки как многочлен от $n_j = n+j$. Тогда, поскольку j -й элемент является нисходящей степенью n_j порядка $i+1$, то у всех многочленов этой строки будут одинаковые коэффициенты перед одними и теми же степенями n_j . Тогда, поскольку предыдущие строки уже содержат все степени n_j до i -й включительно, то элементы $(i+1)$ -й строки, не считая старших членов, представимы в виде линейной комбинации предыдущих строк. Вычтя её из $(i+1)$ -й строки, получим n_j^i , так как старший коэффициент равен единице.

$$\prod_{i=0}^{s-1} i! = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & n+1 & \dots & n+s-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{s-1} & (n+1)^{s-1} & \dots & (n+s-1)^{s-1} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Полученный определитель является определителем Вандермонда, поэтому он равен произведению попарных расстояний чисел из множества $\{n, n+1, \dots, n+s-1\}$, несложно убедиться, что он равен левой части (1). \square

Объединив результаты леммы 2 и леммы 3, получим следующую теорему.

Теорема 1. *В графе Юнга с прыжками число путей длины $s+1$ из пустой диаграммы в прямоугольную со сторонами n и k вычисляется по формуле*

$$P_{n,k,s}(\emptyset) = \prod_{i=0}^{s-1} \frac{(n+k+i)! \cdot i!}{(n+i)! \cdot (k+i)!}.$$

Здесь и далее запись $P_{n,k,s}$ означает количество путей длины $s+1$ в прямоугольнике со сторонами n, k , в скобочках указана стартовая диаграмма.

3 Пути в графе Юнга с прыжками из маленьких диаграмм в прямоугольную

В течение этого раздела мы будем доказывать следующую теорему.

Теорема 2. 1. $P_{n,k,s}(\square) = P_{n,k,s}(\emptyset) - P_{n,k,s-1}(\emptyset)$;

$$2. P_{n,k,s}(\square\square) = P_{n,k,s}(\emptyset) + \left(\frac{n \cdot (s-1)}{k+s-1} - (k+1) \right) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset);$$

$$3. P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{k,n,s}(\square\square);$$

$$4. P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{n,k,s}(\square\square) + P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) - P_{n,k,s}(\square) + P_{n,k,s-1}(\square);$$

$$5. P_{n,k,s}(\square\square\square) = P_{n,k,s}(\emptyset) + \left(\frac{n \cdot (s-1) \cdot (k+2)}{k+s-1} - \frac{(s-1)(s-2) \cdot n(n+1)}{2(k+s-1)(k+s-2)} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset);$$

$$6. P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{k,n,s}(\square\square\square);$$

$$7. P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{n,k,s}(\square\square\square) + P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) - P_{n,k,s}(\square\square) + P_{n,k,s-1}(\square\square);$$

$$8. P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{k,n,s} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right).$$

Зная значение $P_{n,k,s}(\emptyset)$, можно вычислить число путей для одноклеточной диаграммы:

$$P_{n,k,s}(\square) = P_{n,k,s}(\emptyset) - P_{n,k,s-1}(\emptyset).$$

Эту формулу можно понять из следующего соображения. Из всех путей, начинающихся в пустой диаграмме, обозначим за X те, которые после первого шага все еще остаются в пустой диаграмме, а оставшиеся обозначим за Y . Тогда если в начале пути поставить \square вместо \emptyset , то нам подойдут ровно все пути Y . Тогда из общего числа путей надо вычесть пути из X , которых как раз $P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Доказали пункт 1 Теоремы 2.

Для нахождения $P_{n,k,s}(\square\square)$ и $P_{n,k,s}(\square\square\square)$ повторим вычисления, которые выполнялись для пустой диаграммы. Если раньше в качестве графа мы брали объединение прямоугольников R_i , то теперь вместо копии R_0 мы возьмем теоретико-множественную разницу R_0 и стартовой диаграммы λ (в нашем случае λ — это $\square\square$ или $\square\square\square$, но рассуждение верно для любой начальной диаграммы), остальные R_i оставим прежними. Заметим, что вырезать стартовую диаграмму только в R_0 достаточно, поскольку ограничение, что пути в прямоугольнике не могут пересекать её, нужно только пути ν_1 . Для оставшихся ν_i это верно из того, что они не могут пересекать ν_1 . Граф для $n = 4, k = 3, s = 3$ и стартовой диаграммы $\square\square$ изображен на рис. 5.

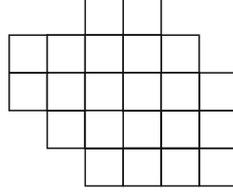


Рис. 5: Пример графа со стартовой вершиной из двух клеток

3.1 Вычисление числа путей, стартующих из двуклеточных диаграмм

Первым делом посчитаем $P_{n,k,s}(\square\square)$.

Поймем, как изменится матрица S для n -наборов непересекающихся путей. Удаление \square влияет только на пути $a_1 \rightarrow b_1$ и $a_2 \rightarrow b_1$. Из них пропадут те пути, которые проходили через точку с координатами $(1, k)$. Для путей вида $a_1 \rightarrow b_1$ их $\binom{k+1}{1} = k+1$, а для $a_2 \rightarrow b_1$ такой путь только один. Поэтому матрица примет следующий вид:

$$S' = \begin{pmatrix} \binom{n+k}{k} - (k+1) & \binom{n+k}{k-1} - 1 & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся линейностью определителя по первому столбцу и представим определитель S' в виде суммы двух других определителей, где у одного из новых определителей единственный ненулевой элемент в первом столбце будет $-(k+1)$, тогда

$$\det(S') = \begin{vmatrix} \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} - 1 & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix} - (k+1) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset)$$

Оставшийся определитель можно разложить по второму столбцу в сумму двух определителей, где у одного из определителей единственный

ненулевой элемент будет 1 на первой позиции, а оставшийся будет уже известным определителем S . Тогда $\det(S') = \det(S) + \det(T) - (k+1) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset) = P_{n,k,s}(\emptyset) + \det(T) - (k+1) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset)$, где T — это матрица, получаемая из S' вычеркиванием первой строки и второго столбца (поскольку у нас будет столбец состоящий только из 1).

$$T = \begin{pmatrix} \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \binom{n+k}{k+2} & \binom{n+k}{k} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Посчитаем T уже известным способом. Будем прибавлять строки друг к другу, как в начале леммы 3. Придем к следующему виду:

$$T = \begin{pmatrix} \binom{n+k+s-2}{k+s-1} & \binom{n+k+s-2}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k+s-2}{k} \\ \binom{n+k+s-3}{k+s-1} & \binom{n+k+s-3}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k+s-3}{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Посмотрим, что изменилось по сравнению с вычислением $P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Множители вида $(n+k+i)!$ присутствуют все, среди $\frac{1}{(k+i)!}$ пропал $\frac{1}{(k+s-2)!}$, но появился $\frac{1}{(k+s-1)!}$, а среди $\frac{1}{(n+i)!}$ не будет $\frac{1}{n!}$, но появится $\frac{1}{(n-1)!}$.

Теперь изучим, как изменился оставшийся определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n+1 & \cdots & n+s-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)^{s-1} & (n+1)^{s-1} & \cdots & (n+s-2)^{s-1} \end{vmatrix}$$

Поскольку он равен произведению попарных расстояний чисел из множества $\{n-1, n+1, \dots, n+s-2\}$, несложно убедиться, что он равен $\prod_{i=0}^{s-3} i! \cdot (s-1)!$.

Теперь мы можем выразить определитель T через $P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Надо будет домножить на $k+s-1$, чтобы превратить лишний множитель $\frac{1}{(k+s-1)!}$ в нужный $\frac{1}{(k+s-2)!}$, поделить на n , чтобы превратить лишний множитель $\frac{1}{(n-1)!}$ в нужный $\frac{1}{n!}$, и, наконец, поделить на $s-1$ для множителя

из определителя Вандермонда. Итого:

$$\det(T) \frac{k+s-1}{n \cdot (s-1)} = P_{n,k,s-1}(\emptyset).$$

И наконец, подставив значение $\det(T)$, выразим $P_{n,k,s}(\square)$:

$$P_{n,k,s}(\square) = P_{n,k,s}(\emptyset) + \left(\frac{n \cdot (s-1)}{k+s-1} - (k+1) \right) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset).$$

Сразу же отметим, что из симметрии $P_{n,k,s}(\square) = P_{k,n,s}(\square)$. Таким образом, мы доказали пункты 2 и 3 Теоремы 2.

3.2 Вычисление числа путей, стартовых из трехклеточных диаграмм и некоторых четырехклеточных

Посчитаем $P_{n,k,s}(\square\square)$.

Для начала поймем, как изменится матрица S для n -наборов непересекающихся путей. Удаление $\square\square$ влияет только на пути $a_1 \rightarrow b_1$, $a_2 \rightarrow b_1$ и $a_3 \rightarrow b_1$. Из них пропадут те пути, которые проходили через точку с координатами $(2, k)$. Для путей вида $a_1 \rightarrow b_1$ их $\binom{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, для $a_2 \rightarrow b_1$ их $\binom{k+2}{1} = k+2$, а для $a_3 \rightarrow b_1$ такой путь только один. Поэтому матрица примет следующий вид:

$$S'' = \begin{pmatrix} \binom{n+k}{k} - \binom{k+2}{2} & \binom{n+k}{k-1} - (k+2) & \binom{n+k}{k-2} - 1 & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \binom{n+k}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся линейностью определителя по первому столбцу и представим определитель S'' в виде суммы двух других определителей, где у одного из новых определителей единственный ненулевой элемент в первом столбце будет $-\binom{k+2}{2}$, тогда

$$\det(S'') = \begin{vmatrix} \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} - (k+2) & \binom{n+k}{k-2} - 1 & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \binom{n+k}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix} - \binom{k+2}{2} \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset)$$

Оставшийся определитель можно разложить по второму столбцу в сумму двух определителей, где у одного из определителей единственный ненулевой элемент будет $k + 2$ на первой позиции, и, вынеся его, можно прийти к уже известному определителю T , а оставшийся определитель обозначим через $\det(Q)$. Тогда $\det(S'') = (k + 2) \det(T) + \det(Q) - \binom{k+2}{2} \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Теперь перейдем к подсчету определителя Q .

$$Q = \begin{pmatrix} \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} & \binom{n+k}{k-2} - 1 & \cdots & \binom{n+k}{k-s+1} \\ \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \binom{n+k}{k+s-3} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$

Опять же разобьем Q в разность двух матриц S и Q' , где Q' матрица получена из Q заменой третьего столбца на столбец с единственной единицей на первой позиции (а на остальных позициях нули). Тогда $\det(S'') = (k + 2) \det(T) + \det(S) - \det(Q') - \binom{k+2}{2} \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset)$, где $\det(Q')$ можно записать в следующем виде, вычеркнув первую строку и третий столбец, содержащий единственную единицу:

$$\det(Q') = \begin{vmatrix} \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k} & \binom{n+k}{k-2} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+2} \\ \binom{n+k}{k+2} & \binom{n+k}{k+1} & \binom{n+k}{k-1} & \cdots & \binom{n+k}{k-s+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \binom{n+k}{k+s-4} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix}$$

Найдем этот определитель уже известным нам способом. Будем прибавлять строки друг к другу, как в начале леммы 3. Придем к следующему виду:

$$\det(Q') = \begin{vmatrix} \binom{n+k+s-2}{k+s-1} & \binom{n+k+s-2}{k+s-2} & \binom{n+k+s-2}{k+s-4} & \cdots & \binom{n+k+s-2}{k} \\ \binom{n+k+s-3}{k+s-1} & \binom{n+k+s-3}{k+s-2} & \binom{n+k+s-3}{k+s-4} & \cdots & \binom{n+k+s-3}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{k+s-1} & \binom{n+k}{k+s-2} & \binom{n+k}{k+s-4} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix}$$

Посмотрим, что изменилось по сравнению с вычислением $P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Множители вида $(n+k+i)!$ присутствуют все, среди $\frac{1}{(k+i)!}$ пропал $\frac{1}{(k+s-3)!}$, но появился $\frac{1}{(k+s-1)!}$, а среди $\frac{1}{(n+i)!}$ не будет $\frac{1}{(n+1)!}$, но появится $\frac{1}{(n-1)!}$.

Теперь изучим, как изменился оставшийся определитель Вандермонда:

$$\det(Q') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n & n+2 & \cdots & n+s-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)^{s-1} & n^{s-1} & (n+2)^{s-1} & \cdots & (n+s-2)^{s-1} \end{vmatrix}$$

Поскольку он равен произведению попарных расстояний чисел из множества $\{n-1, n, n+2, \dots, n+s-2\}$, несложно убедиться, что он равен $\prod_{i=0}^{s-4} i! \cdot (s-2)! \cdot \frac{(s-1)!}{2}$.

Теперь мы можем выразить определитель Q' через $P_{n,k,s-1}(\emptyset)$. Надо будет домножить на $(k+s-1)(k+s-2)$, чтобы превратить лишний множитель $\frac{1}{(k+s-1)!}$ в нужный $\frac{1}{(k+s-3)!}$, поделить на $n(n+1)$, чтобы превратить лишний множитель $\frac{1}{(n-1)!}$ в нужный $\frac{1}{(n+1)!}$, и, наконец, поделить на $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ для получения множителя $(s-3)!$, которого не хватает в определителе Вандермонда. Итого:

$$\det(Q') \frac{2(k+s-1)(k+s-2)}{(s-1)(s-2) \cdot n(n+1)} = P_{n,k,s-1}(\emptyset).$$

И наконец, подставив значение $\det(Q')$, выразим $P_{n,k,s}(\square\square)$:

$$\begin{aligned} P_{n,k,s}(\square\square) &= \det(S) + (k+2) \det(T) - \det(Q') - \binom{k+2}{2} \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset) = \\ &= P_{n,k,s}(\emptyset) + \left(\frac{n(s-1)(k+2)}{k+s-1} - \frac{(s-1)(s-2)n(n+1)}{2(k+s-1)(k+s-2)} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right) \cdot P_{n,k,s-1}(\emptyset). \end{aligned}$$

Сразу отметим, что из симметрии $P_{n,k,s}(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}) = P_{k,n,s}(\square\square)$. Это доказывает пункты 5 и 6 Теоремы 2. А мы переходим к рассмотрению последней трехклеточной диаграммы $\begin{smallmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{smallmatrix}$.

Покажем, что $P_{n,k,s}(\begin{smallmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{smallmatrix}) = P_{n,k,s}(\square\square) + P_{n,k,s}(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}) - P_{n,k,s}(\square) + P_{n,k,s-1}(\square)$. По аналогии с выражением $P_{n,k,s}(\square)$ через пути начинающиеся с пустой диаграммы, $P_{n,k,s}(\square) - P_{n,k,s-1}(\square)$ перечисляют все пути длины $s+1$, которые после первого шага идут в диаграмму, состоящую строго больше, чем из одной клетки. Заметим, что и $P_{n,k,s}(\square\square)$, и $P_{n,k,s}(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix})$ содержат пути, которые после первого шага попадают в диаграмму, содержащую $\begin{smallmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{smallmatrix}$, поэтому в сумме $P_{n,k,s}(\square\square) + P_{n,k,s}(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix})$ такие пути будут учитываться дважды, а все остальные (то есть те пути, которые после первого шага попадают в диаграмму, не содержащую $\begin{smallmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{smallmatrix}$, но состоящую из хотя бы двух клеток) будут учитываться по разу. Поэтому вычтя $P_{n,k,s}(\square) - P_{n,k,s-1}(\square)$ получим то что требовалось.

Таким же методом можно получить число путей для диаграмм $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. Для них мы приведем формулы, а их доказательство будет аналогично рассмотренному выше случаю для $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$.

$$P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{n,k,s}(\square\square) + P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) - P_{n,k,s}(\square) + P_{n,k,s-1}(\square),$$

$$P_{n,k,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = P_{k,n,s} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right).$$

Мы доказали последние случаи 4, 7 и 8 Теоремы 2.

Замечание. Эту технику можно обобщить для путей длины $s + 1$, начинающихся из диаграммы λ и заканчивающихся в μ , для λ и μ произвольной формы следующим образом: в качестве прямоугольников R_i мы теперь будем рассматривать копии минимального по включению прямоугольника, содержащего μ , но вместо прямоугольника R_0 надо рассмотреть его теоретико-множественную разницу с λ , а вместо прямоугольника R_{s-1} взять диаграмму μ (в остальных прямоугольниках после этой операции тоже могут выпасть точки). Тогда за счет пути ν_1 , который проведен в R_0 , будет поддерживаться условие, что все ν_i не пересекают λ , а за счет пути ν_s , проведенного в R_{s-1} , остальные ν_i не будут выходить за пределы μ .

Но с усложнением форм диаграмм λ и μ элементы матрицы из леммы Линдстрема-Гесселя-Виенно становятся трудно обозримыми.

4 Другой взгляд на перечисление путей с помощью определителя

Мы опять же будем считать количество путей длины $s + 1$ из диаграммы λ в диаграмму μ в графе Юнга с прыжками, но теперь будем считать, что у диаграммы μ фиксированное число строк, равное k .

Пусть длины строк λ — это $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, некоторые из λ_i могут быть нулями, а у μ — $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k$. Немного изменим длины строк, чтобы перейти к строгим неравенствам. А именно, пусть $\lambda'_i := \lambda_i + k - i$, а $\mu'_i := \mu_i + k - i$. Для всех промежуточных вершин ν_i фиксированного пути из λ в μ сделаем ту же операцию со строками. Здесь мы снова хотим воспользоваться леммой Линдстрема-Гесселя-Виенно, но теперь будем получать матрицу размера k . Полученный определитель мы будем называть *строчечным*.

Сейчас мы будем работать в первом квадранте координатной плоскости, вершинами будут все узлы решетки, а ребрами — все проведенные между ними ребра. Горизонтальные ребра ориентируем вправо, а вертикальные — вверх. Веса всех ребер сделаем равными единице. Определим множество стартовых вершин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и конечных вершин $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ следующим образом: $a_i = (i - 1, \lambda'_i)$, а $b_i = (i - 1 + s, \mu'_i)$. В таком определителе возможны n -кратные непересекающиеся пути только для тождественной перестановки (по примерно тем же топологическим соображениям, что в прошлом разделе). Построим биекцию между путями $a_i \rightarrow b_i$ и строками на i -м уровне диаграмм нашего пути ν_l . Скажем, что i -м строкам последовательности диаграмм $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_l$ соответствует путь, начинающийся в a_i и приходящий в точку с координатами $(i - 1 + l, \nu'_i)$ для всех $l \neq s + 1$, причем до нужных координат мы приходим следующим образом: сначала поднимаемся вверх, увеличивая y -координату до нужной, а затем делаем один шаг вправо. Для оставшейся вершины $\nu_{s+1} = \mu$ мы завершим путь, поднявшись к нужной y -координате, уже не делая шаг вправо. Заметим, что в последовательности вложенных диаграмм длина i -й строки не могла убывать, поэтому и y -координата не могла уменьшиться и мы можем построить корректный путь на нашем ориентированном графе. Таким образом, по длинам строк мы смогли восстановить пути $a_i \rightarrow b_i$. Из нашего алгоритма также легко можно восстановить последовательность длин i -х строк по имеющемуся пути. Полученные пути $a_i \rightarrow b_i$ будут непересекающимися, поскольку мы перешли к строго возрастающим длинам строк.

В качестве примера рассмотрим путь длины три $\emptyset \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \square$. После преобразования с длинами строк получим следующие последовательности для первых строк диаграмм $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ и вторых $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$. На рис. 6 изображены пути, которым они соответствуют.

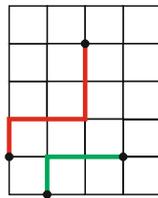


Рис. 6: Сопоставления вложенной диаграммы и пути в прямоугольнике

Замечание. Аналогичным образом можно ввести столбцовый опреде-

литель для диаграмм, в которых не более k столбцов.

Заметим, что элементы строчечной матрицы уже легко вычислить: каждый будет являться некоторым биномиальным коэффициентом. Но подсчет самого определителя в общем случае все еще остается трудной задачей, а сам по себе он не даёт прямого пути к вычислению асимптотики количества путей, поскольку содержит слагаемые разных знаков.

В общей ситуации рассчитывать на формулу в виде определителя порядка s с обозримыми коэффициентами (такую формулу мы ранее получили для прямоугольной диаграммы) не приходится, поскольку даже при $s = 1$ простой общей формулы для количества поддиаграмм данной диаграммы Юнга, по всей видимости, не существует.

4.1 Примеры использования строчечного определителя

Рассмотрим два примера. В первом мы посчитаем число путей длины $s + 1$ из λ в μ , где число строк в μ не более двух, а во втором посчитаем некоторый определитель с помощью комбинаторной интерпретации.

Лемма 4. Число путей длины $s + 1$ из λ в μ , где число строк в μ не более двух, вычисляется по формуле:

- $\binom{s+\mu_1-\lambda_1}{s} \binom{s+\mu_2-\lambda_2}{s}$ при $\mu_2 \leq \lambda_1$,
- $\frac{(s+\mu_1-\lambda_1)!(s+\mu_2-\lambda_2)!}{s!(s+1)! \cdot (\mu_2-\lambda_1-1)!(\mu_1-\lambda_2+1)!} \cdot \left((s+1) \left(1 + \frac{\Delta\mu+1}{\mu_2-\lambda_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu+1}{\mu_2-\lambda_2}\right) - s \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s+\mu_2-\lambda_1+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s+\mu_2-\lambda_2}\right) \right)$, где $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ при $\mu_2 > \lambda_1$.

Доказательство. Посчитаем, какие элементы $e(a_i, b_j)$ будут в строчечной матрице размера два. Пути вида $a_1 \rightarrow b_1$ будут начинаться в точке с координатами $(0, \lambda_1 + 1)$ и заканчиваться в $(s, \mu_1 + 1)$, тогда их количество равно $\binom{s+\mu_1+1-(\lambda_1+1)}{s} = \binom{s+\mu_1-\lambda_1}{s}$, пути вида $a_2 \rightarrow b_2$ будут начинаться в точке с координатами $(1, \lambda_2)$ и заканчиваться в $(s+1, \mu_2)$, тогда их количество $\binom{s+\mu_2-\lambda_2}{s}$, для $a_1 \rightarrow b_2$ и $a_2 \rightarrow b_1$ их будет $\binom{s+\mu_2-\lambda_1}{s+1}$ и $\binom{s+\mu_1-\lambda_2}{s-1}$, соответственно. При $\mu_2 \leq \lambda_1$ определитель превращается в произведение двух биномиальных коэффициентов $\binom{s+\mu_1-\lambda_1}{s} \binom{s+\mu_2-\lambda_2}{s}$, поэтому далее считаем, что $\mu_2 > \lambda_1$.

Обозначим за $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ и выразим определитель:

$$\begin{aligned}
& \binom{s + \mu_1 - \lambda_1}{s} \binom{s + \mu_2 - \lambda_2}{s} - \binom{s + \mu_2 - \lambda_1}{s + 1} \binom{s + \mu_1 - \lambda_2}{s - 1} = \\
& = \frac{(s + \mu_1 - \lambda_1)!(s + \mu_2 - \lambda_1)!}{s!(s + 1)! \cdot (\mu_2 - \lambda_2)!(\mu_1 - \lambda_2 + 1)!} \cdot \\
& \cdot \left((s + 1)(\mu_1 - \lambda_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\mu_1 - \lambda_2 + 1) \cdot (s + \mu_2 - \lambda_1 + 1) \cdot \dots \cdot (s + \mu_2 - \lambda_2) - \right. \\
& \quad \left. - s(\mu_2 - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\mu_2 - \lambda_2) \cdot (s + \mu_1 - \lambda_1 + 1) \cdot \dots \cdot (s + \mu_1 - \lambda_2) \right) = \\
& = \frac{(s + \mu_1 - \lambda_1)!(s + \mu_2 - \lambda_1)!}{s!(s + 1)! \cdot (\mu_2 - \lambda_2)!(\mu_1 - \lambda_2 + 1)!} \cdot \\
& \cdot \left((s + 1)(\mu_2 - \lambda_1 + \Delta\mu + 1) \cdot \dots \cdot (\mu_2 - \lambda_2 + \Delta\mu + 1) \cdot (s + \mu_2 - \lambda_1 + 1) \cdot \dots \cdot (s + \mu_2 - \lambda_2) - \right. \\
& \quad \left. - s(\mu_2 - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\mu_2 - \lambda_2) \cdot (s + \mu_2 - \lambda_1 + 1 + \Delta\mu) \cdot \dots \cdot (s + \mu_2 - \lambda_2 + \Delta\mu) \right) = \\
& = \frac{(s + \mu_1 - \lambda_1)!(s + \mu_2 - \lambda_2)!}{s!(s + 1)! \cdot (\mu_2 - \lambda_1 - 1)!(\mu_1 - \lambda_2 + 1)!} \cdot \left((s + 1) \left(1 + \frac{\Delta\mu + 1}{\mu_2 - \lambda_1} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu + 1}{\mu_2 - \lambda_2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - s \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s + \mu_2 - \lambda_1 + 1} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s + \mu_2 - \lambda_2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Из этой записи видно, что у вычитаемого меньше множителей, чем у уменьшаемого, и у каждого из них имеется ещё дополнительное слагаемое s в знаменателе, то есть они меньше.

Теперь подставим $\lambda = \emptyset$, тогда определитель примет вид

$$\frac{(s + \mu_1)!(s + \mu_2)!}{s!(s + 1)!(\mu_1 + 1)!\mu_2!} (s(\mu_1 - \mu_2 + 1) + \mu_1 + 1). \quad (2)$$

□

Предложение. Пусть p, q — взаимно простые натуральные числа.

Определитель матрицы A порядка $q - 1$ с элементами $a_{i,j} = \binom{\lfloor \frac{p}{q}(q-i) \rfloor + 1}{1+j-i}$ равен

$$\det(A) = \frac{1}{p + q} \binom{p + q}{p}.$$

Доказательство. На координатной плоскости рассмотрим прямоугольник с координатами $(0, 0)$ и (p, q) , где p, q — взаимно простые числа. В этом прямоугольнике рассмотрим диаграмму, которая соответствует клеткам, лежащим строго над диагональю, соединяющей $(0, 0)$ и (p, q) . Если мы сопоставим движению вверх по прямоугольнику значение $+p$, а движению вправо $-q$, то путь будет проходить над диагональю тогда и

только тогда, когда все частичные суммы пути будут положительными. Также эти пути соответствуют поддиаграммам, не задевающим диагональ. Докажем, что количество таких путей будет $\frac{1}{p+q} \binom{p+q}{p}$. Это рассуждение в духе леммы Рэни [2]. Оно не является новым: например, оно использовалось в решении задачи, предложенной в 2000 г. на Международную олимпиаду. Для полноты изложения приведём его.

Рассмотрим окружность, на которой отмечены p точек со значениями $-q$ и q точек со значениями $-p$, тогда сумма чисел на всей окружности равна нулю. Выберем какую-то точку отсчета и пронумеруем вершины a_1, a_2, \dots, a_{p+q} . Покажем, что на этой окружности существует не более одной стартовой точки такой, что, начиная с неё и обходя остальные вершины окружности по часовой стрелке, мы будем получать только положительные частичные суммы. Будем называть *отрезком* набор подряд идущих точек на окружности. Пусть нашлось две таких точки a_i и a_j , тогда каждая из сумм отрезков a_i, \dots, a_{j-1} и a_j, \dots, a_{i-1} должна быть строго положительной, а тогда и сумма чисел на всей окружности тоже, противоречие.

Теперь покажем, что такая стартовая точка на окружности найдется. Рассмотрим на окружности “самый отрицательный” в смысле суммы чисел отрезок, пусть он начинается в точке a_s и заканчивается в a_{t-1} , а сумма чисел на нем равна $-S$. Покажем, что в качестве стартовой точки подойдет вершина a_t . Пусть нашелся какой-то отрезок a_t, \dots, a_r , сумма которого отрицательна. Если бы этот отрезок не дошел до вершины a_s , то можно было бы продлить отрезок до $a_s, \dots, a_{t-1}, a_t, \dots, a_r$ и он стал бы более отрицательным. Значит, $r \in \{s, \dots, t-1\}$. Но поскольку сумма отрезка a_t, \dots, a_{s-1} равна S , то если бы отрезок a_t, \dots, a_r был бы отрицательный, это означало бы, что сумма на отрезке a_s, \dots, a_r строго меньше $-S$, противоречие с выбором самого отрицательного отрезка.

Значит, каждой такой расстановке чисел $-q$ и $+p$ на окружности соответствует единственный путь в прямоугольнике, проходящий над диагональю. Всего существует $\frac{1}{p+q} \binom{p+q}{p}$ способов расставить точки на окружности, деление на $p+q$ нужно для того, чтобы отождествить перестановки, отличающихся циклическим сдвигом.

Теперь посчитаем число путей с помощью определителя. Назовем диаграмму, которую отделяет диагональ, λ . Длины её строк будут следующие: $\mu_i = \left\lfloor \frac{p}{q}(q-i) \right\rfloor$ для $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. Тогда стартовые вершины $a_i = (i-1, q-1-i)$, а конечные $b_i = (i, \left\lfloor \frac{p}{q}(q-i) \right\rfloor + q-1-i)$. Тогда получится матрица A с элементами $e(a_i, b_j) = \binom{\left\lfloor \frac{p}{q}(q-i) \right\rfloor + 1}{1+j-i}$. Таким образом, мы доказали, что $\det(A) = \frac{1}{p+q} \binom{p+q}{p}$. \square

5 Центральные меры на графе Юнга с прыжками

5.1 Основные понятия

Пусть $G = (V_1, V_2, \dots; E)$ — градуированный граф: множество вершин разбито на непересекающиеся уровни V_1, V_2, \dots ; $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — множество рёбер, ведущих с уровня V_k на следующий уровень V_{k+1} .

Обозначим через $\mathcal{P}(G)$ пространство бесконечных путей этого графа, то есть таких последовательностей рёбер (e_1, e_2, \dots) , что $e_k \in E_k$ и конец ребра e_k — начало ребра e_{k+1} при всех k . В случае, когда граф G не имеет кратных рёбер (а это так в интересующем нас случае графа Юнга с прыжками), пути можно понимать, как соответствующие последовательности вершин.

Предположим, что каждое из множеств V_i не более чем счётно, а множество путей с первого уровня в любую фиксированную вершину v — не более чем конечно. Обозначим это количество $\dim v$. Пусть μ — конечная регулярная мера, заданная на борелевской в тихоновской топологии сигма-алгебре пространства $\mathcal{P}(G)$ (то есть базовым измеримым множеством сигма-алгебры является множество путей, содержащих данный конечный набор рёбер). Мера μ называется *центральной*, если для каждой вершины v и для каждого пути p из первого уровня в v мера множества путей, включающих путь p , равна $\mu(\mathcal{P}(G))/\dim(v)$ — то есть не зависит от пути p .

Заметим, что центральная мера однозначно задана, если для каждой вершины v известна мера $f(v)$ множества путей, проходящих через v . Действительно, из свойства центральности получаем, что эта информация определяет меру цилиндрического множества путей с любым фиксированным началом, а любое цилиндрическое множество есть конечное объединение таких. Функция $f(v)$ является *гармонической*:

$$f(v) = \sum_{e \in E: e=vu} f(u), \quad (3)$$

где суммирование производится по всем рёбрам vu , идущим из вершины v .

Изучение центральных мер пространства путей — ключевая общая задача теории градуированных графов, поставленная в общем виде Анатолием Моисеевичем Вершиком. Подробнее о примерах, задачах и успехах этой теории можно прочитать в [12] и цитированной там литературе. Упомянем лишь, что для графа Юнга ответ даёт знаменитой теоре-

мой Тома [3], другие доказательства см. в [6, 9]; а для графа Гельфанда–Цетлина — в [1, 5], доказательство, духу которого больше соответствует настоящая работа, см. в [11].

Границей Мартина называем набор центральных мер, получаемых следующим образом. Пусть $v_k \in V_{n_k}$ — последовательность вершин графа G и $n_k \rightarrow \infty$. Рассмотрим равномерную меру μ_k на множестве путей, ведущих из первого уровня в вершину v_k . Её можно понимать, как вероятностную меру на множестве путей с первого уровня на n_k -ый. Соответственно, при каждом $s \leq n_k$ имеется индуцированная центральная мера на путях с первого уровня на s -ый. Предположим, что для каждого фиксированного $s = 1, 2, \dots$ соответствующие меры имеют слабый (поточечный) предел, когда k стремится к бесконечности (поскольку $n_k \rightarrow \infty$, для каждого s об этом пределе можно говорить, что меры определены при всех достаточно больших k). Получаем конечно-аддитивную меру, порождённую последовательностью вершин (v_k) . В случае, когда уровни V_k могут быть бесконечными (как в основном для нас случае графа Юнга с прыжками), счётная аддитивность (например, равенство (3)) может нарушаться, поскольку предел счётной суммы, вообще говоря, не равен сумме пределов. Конкретный пример, когда это происходит, приведён далее. Но если получается вероятностная мера, называем её элементом границы Мартина графа G .

5.2 Критерий вырожденности мер, порождаемых прямоугольниками

Сосредоточимся на графе Юнга с прыжками и последовательности прямоугольных диаграмм $\lambda_i = n_i \times k_i$, выбираемых на $(s_i + 1)$ -м уровне (число s_i стремится к бесконечности с ростом i). Не умаляя общности, можно считать, что $s_i/(n_i k_i) \rightarrow \kappa \in [0, \infty]$ — иначе перейдём к подпоследовательности. Кроме того, можно считать, что каждая из последовательностей (n_i) и (k_i) стабилизируется либо стремится к бесконечности.

Пути в них с первого уровня (количество таких путей равно $P_{n_i, k_i, s_i}(\emptyset)$) индуцируют меры на уровнях с номерами $1, 2, \dots, s_i + 1$. Рассмотрим меру, индуцированную на первом уровне (то есть диаграмму ν_1 в последовательности вложенных диаграмм $\nu_0 \subset \nu_1 \subset \dots \subset \nu_{s_i+1} = \lambda_i$, которой соответствует путь в нашу вершину $\lambda_i \times \{s_i + 1\}$ графа Юнга с прыжками). Мера диаграммы λ равна

$$f_i(\lambda) := P(n_i, k_i, s_i - 1)(\lambda) / P_{n_i, k_i, s_i}(\emptyset).$$

Очевидно, $f_i(\lambda) \leq f_i(\emptyset)$, поэтому если $f_i(\emptyset) \rightarrow 0$, то предельная мера на первом уровне нулевая — это именно то явление вырождения предельной

меры, о котором шла речь выше. Поэтому, чтобы понять, тривиальна ли предельная мера, вычислим предел величины $f_i(\emptyset)$.

Теорема 3. • Если $\kappa = \infty$, то $\lim f_i(\emptyset) = 1$;

- если $\kappa = 0$, то $\lim f_i(\emptyset) = 0$;
- если $0 < \kappa < \infty$ и $\lim k_i = \lim n_i = \infty$, то $\lim f_i(\emptyset) = e^{-1/\kappa}$;
- если $0 < \kappa < \infty$, $\lim k_i = \infty$, $n_i \equiv n$ фиксировано, то $\lim f_i(\emptyset) = (1 + 1/(\kappa n))^{-n}$;
- если $0 < \kappa < \infty$, $\lim n_i = \infty$, $k_i \equiv k$ фиксировано, то $\lim f_i(\emptyset) = (1 + 1/(\kappa k))^{-k}$.

Доказательство. Обозначим $n_i = n$, $k_i = k$, $s_i = s$. По теореме 1

$$\begin{aligned} (f_i(\emptyset))^{-1} &= \frac{(n+k+s-1)!(s-1)!}{(n+s-1)!(k+s-1)!} = \frac{(n+s) \dots (n+k+s-1)}{s(s+1) \dots (s+k-1)} \\ &= \left(1 + \frac{n}{s}\right) \left(1 + \frac{n}{s+1}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{s+k-1}\right). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $1+x < e^x$ при положительном x и неравенством $(1+x_1) \dots (1+x_m) \geq 1+x_1 + \dots + x_m$ при положительных x_1, \dots, x_m получаем $1+A \leq (f_i(\emptyset))^{-1} \leq e^A$, где

$$A = n \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \dots + \frac{1}{s+k-1} \right).$$

Поскольку s велико, имеем $1/r \sim \log(1+1/r) = \log(r+1) - \log r$ равномерно по $r \in \{s, \dots, s+k-1\}$, откуда

$$A \sim n \sum_{r=s}^{s+k-1} (\log(r+1) - \log r) = n \log(1+k/s).$$

Если $\kappa = \infty$, то $n \log(1+k/s) \leq nk/s \rightarrow 0$, откуда $A = 0$ и по теореме о двух милиционерах $(f_i(\emptyset))^{-1} \rightarrow 1$.

Если A ограничено сверху (хотя бы вдоль некоторой подпоследовательности), то получаем (вдоль этой подпоследовательности) $\log(1+k/s) = O(1/n)$, откуда $k/s = O(1/n)$, $kn/s = O(1)$, то есть $\kappa \neq 0$. Иными словами, если $\kappa = 0$, то $A \rightarrow \infty$ и $f_i(\emptyset) \rightarrow 0$.

Осталось рассмотреть случай $0 < \kappa < \infty$. Не умаляя общности, $k \rightarrow \infty$ (случай $n \rightarrow \infty$ аналогичен, а обе величины k, n не могут быть фиксированы, поскольку $s \rightarrow \infty$). Имеем при $r \geq s$ соотношение:

$$\log\left(1 + \frac{n}{r}\right) = \frac{n}{r} + O\left(\frac{n^2}{r^2}\right) = n \log\left(1 + \frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{n^2}{r^2}\right) = n \log\left(1 + \frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} \log(f_i(\emptyset))^{-1} &= \sum_{r=s}^{s+k-1} \log(1 + n/r) = \sum_{r=s}^{s+k-1} n \log(1 + 1/r) + O(1/k) \\ &= n \log(1 + k/s) + O(1/k). \end{aligned}$$

Если n фиксировано, то $\log(1 + k/s) \rightarrow \log(1 + 1/(\kappa n))$, если же $n \rightarrow \infty$, то $n \log(1 + k/s) \sim nk/s \rightarrow 1/\kappa$. Это и доказывает оставшиеся пункты теоремы. \square

Отметим, что теорема 3 на качественном уровне соответствует здравым ожиданиям: если число прыжков гораздо больше числа добавляемых клеток ($\kappa = \infty$), то большинство прыжков — это стояние на месте, в том числе и от первого прыжка этого следует ожидать; а если гораздо меньше ($\kappa = 0$) — то средняя длина прыжка велика и стояние на месте маловероятно.

5.3 Центральные меры на графе прыжков двустрочечных диаграмм

Рассмотрим случай, когда все вершины последовательности диаграмм Юнга, определяющей центральную меру — двустрочечные диаграммы. Пусть длины строк такой диаграммы μ равны $\mu_1 \geq \mu_2$, а номер её уровня равен $s+1$ (индекс, нумерующий последовательность, опускается). Наша цель — изучить предельную вероятность того, что для последовательности прыжков $(\emptyset, \lambda(1), \dots, \lambda(s+1) = \mu)$ длины $s+1$ в такую диаграмму $\lambda(T) = \lambda$ — фиксированная диаграмма ($T \geq 1$ — также фиксированное число).

Обозначим длины строк диаграммы λ за $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Будем считать (это не умаляет общности, так как можно перейти к подпоследовательности), что $s/\mu_1 \rightarrow \kappa \in [0, \infty]$, $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \alpha \in [0, 1]$.

Мы используем формулу из леммы 4. Будем пока считать, что $\lim \mu_2 = \infty$.

Если $\kappa = \infty$, то из формулы (2) следует, что при замене s на $s - T$ число путей из пустой диаграммы умножается на $1 + o(1)$. Из этого следует что предельная мера сосредоточена на пути по пустым диаграммам (опять же, это вполне согласуется со здравым смыслом, см. замечание в конце предыдущего подпараграфа).

Если $\kappa = 0$, то, наоборот, из формулы (2) следует, что при замене s на $s - T$ число путей из пустой диаграммы умножается на $o(1)$. Это значит, что для пустой диаграммы (тем более — для всякой другой) вероятность пройти через неё на данном уровне стремится к 0, и предельная мера вырождается в нулевую.

Поэтому пусть $0 < \kappa < \infty$. Заметим, что при замене s на $s - T$ множитель

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2) := \frac{(s + \mu_1 - \lambda_1)!(s + \mu_2 - \lambda_2)!}{s!(s + 1)! \cdot (\mu_2 - \lambda_1 - 1)!(\mu_1 - \lambda_2 + 1)!}$$

умножается на $(1 + \kappa^{-1})^{-T}(1 + \alpha\kappa^{-1})^{-T}$. Множитель

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \lambda_2) := & (s + 1) \left(1 + \frac{\Delta\mu + 1}{\mu_2 - \lambda_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu + 1}{\mu_2 - \lambda_2}\right) - \\ & - s \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s + \mu_2 - \lambda_1 + 1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\Delta\mu}{s + \mu_2 - \lambda_2}\right) \end{aligned}$$

умножается на $1 + o(1)$ (что не совсем очевидно, но ясно из дальнейшего анализа этой разности).

Таким образом, зависимость от T понятна, и мы можем сосредоточиться на изучении зависимости Ψ и Φ от λ_1, λ_2 .

Рассмотрим несколько случаев.

1) $\alpha = 0$. Тогда $\Delta \sim \mu_1$ и в формуле для Φ вычитаемое ограничено, а уменьшаемое стремится к бесконечности и эквивалентно

$$(s + 1) \frac{(\mu_1 - \lambda_2 + 1)!(\mu_2 - \lambda_1 - 1)!}{(\mu_1 - \lambda_1)!(\mu_2 - \lambda_2)!}$$

Таким образом,

$$\Phi \cdot \Psi \sim \frac{(s + \mu_1 - \lambda_1)!(s + \mu_2 - \lambda_2)!}{s!s! \cdot (\mu_1 - \lambda_1)!(\mu_2 - \lambda_2)!}.$$

Поскольку $s/\mu_2 \rightarrow \infty$, при $\lambda_2 > 0$ получаем

$$\frac{\Phi(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\Phi(0, 0) \cdot \Psi(0, 0)} \rightarrow 0.$$

Если же $\lambda_2 = 0$, получаем

$$\frac{\Phi(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\Phi(0, 0) \cdot \Psi(0, 0)} \sim (1 + \kappa)^{-\lambda_1}.$$

Итак, мера оказывается сосредоточена на однострочечных диаграммах. То же и по тем же причинам имеет место в случае, когда μ_2 ограничено.

2) $0 < \alpha < 1$. В этом случае, обозначая $k = \lambda_1 - \lambda_2$, получаем

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) \sim s \cdot \left(\alpha^{-k-1} - \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa + \alpha} \right)^k \right) \sim \Phi(0, 0) \cdot \frac{\alpha^{-k-1} - \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+\alpha} \right)^k}{\alpha^{-1} - 1}.$$

и

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2) \sim \Psi(0, 0) \cdot \left(\frac{1 + \kappa}{\alpha} \right)^{-\lambda_1} (\kappa + \alpha)^{-\lambda_2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Phi(\lambda_1, \lambda_2) \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\Phi(0, 0) \Psi(0, 0)} \sim \frac{(1 + \kappa)^{-\lambda_1} \alpha^{\lambda_2-1} (\kappa + \alpha)^{-\lambda_2} - (\kappa + 1)^{-\lambda_2} (\kappa + \alpha)^{-\lambda_1} \alpha^{\lambda_1}}{\alpha^{-1} - 1}.$$

3) $\alpha = 1$. Иначе говоря, $\mu_1 \sim \mu_2$ и $\Delta\mu = o(\mu_2)$. Обозначим $k = \lambda_1 - \lambda_2$, и чтобы не запутаться $\Delta\mu = \Delta$. В этом случае анализ величины Φ более деликатное дело, поскольку уменьшаемое и вычитаемое могут быть близки.

Заметим, что если x велико, а C ограничено, то $\frac{1}{x+C} = \frac{1}{x} + O(x^{-2})$. Это позволяет записать

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \lambda_2) &= (s+1)(1 + \Delta/\mu_2 + O(\Delta\mu_2^{-2}))^{k+1} - s(1 + \Delta/(\mu_2 + s) + O(\Delta\mu_2^{-2}))^k = \\ &= (s+1)(1 + (k+1)\Delta/\mu_2) - s(1 + k\Delta/(\mu_2 + s)) + O(s\Delta^2\mu_2^{-2}) = \\ &= 1 + s\Delta \left(\frac{1}{\mu_2} + k \frac{s}{\mu_2(\mu_2 + s)} \right) + o(1) + O(s\Delta^2\mu_2^{-2}). \end{aligned}$$

Заметим, что $s\Delta^2\mu_2^{-2} = o(s\Delta/\mu_2)$, поэтому остаточный член мал по сравнению с основным асимптотическим членом

$$1 + s\Delta \left(\frac{1}{\mu_2} + k \frac{s}{\mu_2(\mu_2 + s)} \right) \sim 1 + \kappa\Delta \frac{1 + \kappa(k+1)}{\kappa+1}.$$

Мы видим, что если Δ стремится к бесконечности, то главным является второе слагаемое, если $\Delta > 0$ фиксировано, то они равноправны, а если $\Delta = 0$, то главное слагаемое 1.

Таким образом, оказывается, что получаемая мера зависит не только от размеров строк μ_1, μ_2 , но и от того, стабилизируется ли их разность — и если стабилизируется, то к какой величине.

Подытожим эти рассуждения.

Теорема 4. *Граница Мартина графа прыжков по двустрочечным диаграммам Юнга состоит из тривиальной меры прыжков по пустой диаграмме и набором мер, которые параметризуются числами $\alpha \in [0, 1]$, $\kappa \in (1, \infty)$, и в случае $\alpha = 1$ дополнительным параметром $\Delta \in \{0, 1, \dots, \infty\}$.*

Мера множества путей, которые на уровне T проходят через диаграмму λ с длинами строк $\lambda_1 \geq \lambda_2$, равна

$$(1 + \kappa^{-1})^{-T}(1 + \alpha\kappa^{-1})^{-T} \cdot \dim(\lambda, T) \cdot \theta(\lambda),$$

где

- если $\alpha = 0$, то $\theta(\lambda) = 0$ при $\lambda_2 > 0$, иначе $\theta(\lambda) = (1 + \kappa)^{-\lambda_1}$

- если $0 < \alpha < 1$, то

$$\theta(\lambda) = \frac{(1 + \kappa)^{-\lambda_1} \alpha^{\lambda_2 - 1} (\kappa + \alpha)^{-\lambda_2} - (\kappa + 1)^{-\lambda_2} (\kappa + \alpha)^{-\lambda_1} \alpha^{\lambda_1}}{\alpha^{-1} - 1}$$

- если $\alpha = 1$ и $\Delta = \infty$, то

$$\theta(\lambda) = (1 + \kappa(\lambda_1 - \lambda_2 + 1))(1 + \kappa)^{-\lambda_1 - \lambda_2}$$

- если $\alpha = 1$ и $0 < \Delta < \infty$, то

$$\theta(\lambda) = \frac{1 + \kappa\Delta \frac{1 + \kappa(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)}{\kappa + 1}}{1 + \kappa\Delta} (1 + \kappa)^{-\lambda_1 - \lambda_2}$$

Список литературы

- [1] A. Edrei. *On the generating function of a doubly infinite, totally positive sequence.* Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 367-383.
- [2] G. Raney. *Functional Composition Patterns and Power Series Reversion.* Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 441-451.
- [3] E. Thoma. *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe,* Math. Z., 85:1 (1964), 40-61.

- [4] B. Lindström. *On the vector representations of induced matroids*. Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 85-90.
- [5] D. Voiculescu. *Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$* . J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 1-20.
- [6] А. М. Вершик, С. В. Керов. *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*. Функц. анализ и его прил., 15:4 (1981), 15-27
- [7] I. Gessel and G. Viennot. *Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae*. Adv. in Math. 58:3 (1985), 300-321.
- [8] S. Fomin. *Duality of Graded Graphs*. Journal of Alg. Comb. 3 (1994), 357-404.
- [9] А. Ю. Окуньков. *Теорема Тома и представления бесконечной би-симметрической группы* Функц. анализ и его прил. 28:2 (1994), 31-40.
- [10] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *The IMO compendium : a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009*. Springer, New York (2011).
- [11] A. Borodin, G. Olshanski. *The boundary of the Gelfand–Tsetlin graph: A new approach*. Adv. Math. 230:4-6 (2012), 1738-1779.
- [12] A. M. Vershik. *Asymptotic theory of path spaces of graded graphs and its applications*. Japanese J. Math. 11:2 (2016), 151-218.