Санкт-Петербургский государственный университет

ЕВТУШЕВСКИЙ Всеволод Юрьевич

Выпускная квалификационная работа

Эргодичность центральных мер на пространстве путей в графе Юнга – Фибоначчи

Образовательная программа
магистратура «Современная математика»
Направление и код: 01.04.01 «Математика»
Шифр ОП: ВМ.5832.2019

Научный руководитель:
Профессор,
фМКН СПбГУ,
Доктор физико-
математических наук,
Ф. В. Петров

Рецензент:
Младший научный сотрудник,
ПОМИ
им. В. А. Стеклова РАН,
Кандидат физико-
математических наук,
О. В. Постнова

Санкт-Петербург
2021

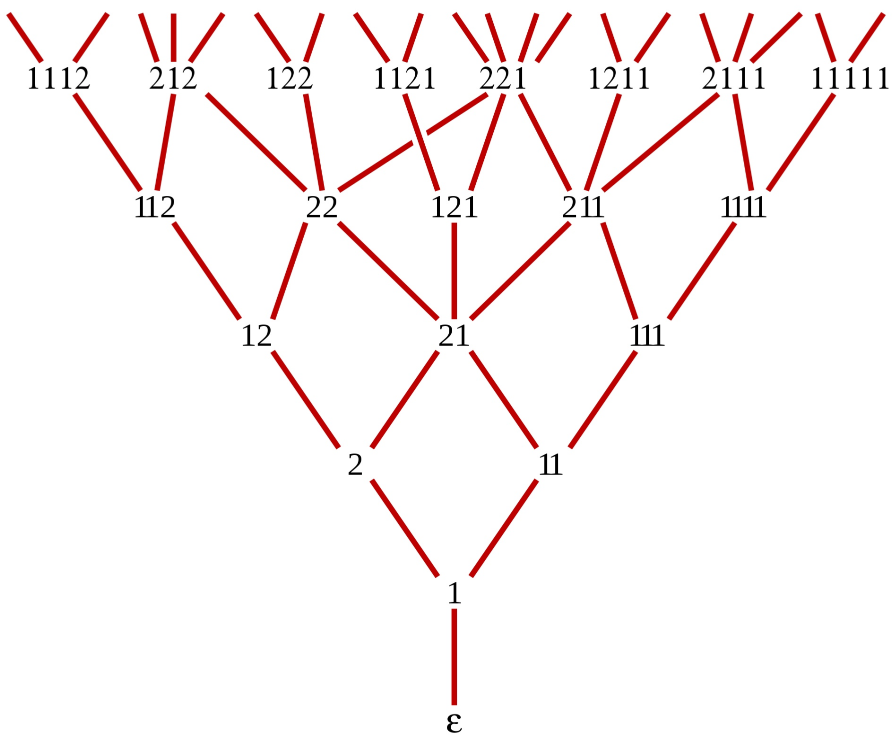
Содержание

1 Введение

Рассмотрим слова над алфавитом $\{1, 2\}$ с данной суммой цифр n. Как известно, их количество есть число Фибоначчи F_{n+1} ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$), и это самая распространённая комбинаторная интерпретация чисел Фибоначчи. Также можно думать о разбиениях полосы $2 \times n$ на домино 1×2 и 2×1, сопоставляя двойки парам горизонтальных домино, а единицы вертикальным домино.

Введём на этом множестве слов частичный порядок: будем говорить, что слово x предшествует слову y, если после удаления общего суффикса в слове y остаётся не меньше двоек, чем в слове x остаётся цифр.

Это действительно частичный порядок, более того, соответствующее частично упорядоченное множество является модулярной решёткой, известной как решётка Юнга – Фибоначчи.



Графом Юнга – Фибоначчи (он изображён на рисунке выше) называют диаграмму Хассе этой решётки. Это градуированный граф, который мы представляем растущим снизу вверх начиная с пустого слова. Градуировкой служит функция суммы цифр. Опишем явно, как устроены ориентированные рёбра. Рёбра “вверх” из данного слова x ведут в слова, получаемые из x одной из двух операций:

1. заменить самую левую единицу на двойку;

2. вставить единицу левее чем самая левая единица.

Этот граф помимо модулярности является 1-дифференциальным, то есть для каждой вершины исходящая степень на 1 превосходит входящую степень.

Изучение градуированного графа Юнга – Фибоначчи было инициировано в 1988 году одновременно и независимо такими математиками, как Ричард Стенли [9] и Сергей Владимирович Фомин [7].

Причина интереса к нему в том, что существует всего две 1-дифференциальных модулярных решётки, вторая — это решётка диаграмм Юнга, имеющая ключевое значение в теории представлений симметрической группы.

Центральные вопросы о градуированных графах касаются центральных мер на пространстве (бесконечных) путей в графе. Эта точка зрения последовательно развивалась в работах Анатолия Моисеевича Вершика, к недавнему обзору которого [4] и приводимой там литературе мы отсылаем читателя.

Среди центральных мер выделяют те, которые являются пределами мер, индуцированных путями в далёкие вершины — так называемую границу Мартина графа.

Граница пространства путей графа Юнга – Фибоначчи изучалась в работе Фредерика Гудмана и Сергея Васильевича Керова (2000) [5].

Они использовали алгебраический формализм Окады [6].

Как следует из самого определения, асимптотический вопрос о границе напрямую связан с перечислительным вопросом о числе путей между двумя вершинами графа. Отметим важную общую работу С. В. Фомина [8] о перечислении путей в градуированных графах, в которой приводится ряд общих тождеств и указывается связь помимо прочего с обобщением алгоритма Робинсона – Шенстеда – Кнута .

Гудман и Керов обходятся без явных формул для числа путей, хотя, как указал автору Павел Павлович Никитин, из их рассуждений и можно их извлечь — но количество слагаемых оказывается экспоненциальным по длине меньшего из слов. Формула с полиномиальным числом слагаемых была получена в работе [1], (сокращённая версия которой опубликована как [2]). Ниже используются ссылки на оба текста.

Керов и Гудман доказали, что список интересующих нас центральных мер исчерпывается следующими мерами:

1) Мера Планшереля: мера множества путей, проходящих через данную вершину v, равна $\frac{d(\varepsilon,v)^2}{n!}$, где $d(u,v)$ – количество путей “вниз” из v в u.

2) Меры $\mu_{\{w'_i\}}$, параметризующиеся некоторой бесконечной последовательностью вершин графа Юнга–Фибоначчи. Нам удобнее другое эквивалентное определение в терминах некоторого бесконечного слова w (содержащего “достаточно мало” двоек) и числа $\beta \in (0, 1]$. См. подробнее Лемму 1.

Доказательство эргодичности меры Планшереля было получено Керовым и Гнединым [3]. Оно основано на следующей Лемме: мера Планшереля сосредоточена на путях, вершины которых содержат “достаточно много” двоек. Мы доказываем аналогичное утверждение для остальных мер $\mu_{w,\beta}$, откуда стандартным рассуждением получается эргодичность.

Основной результат первой части этой работы — Теорема 2 и ей Следствия 5 и 6. Во второй части статьи Следствия 5 и 6 используются “как чёрный ящик” для доказательства Теорем 3 и 4. Из Теорем 3 и 4 стандартным рассуждением получается главный результат данной работы – Следствие 14.

2 Подготовка к доказательству гипотезы

Обозначение 1. *Пусть* $\mathbb{YF}$ *– это граф Юнга – Фибоначчи.*

Определение 1. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$*. Тогда номером* x *будем называть слово из единиц и двоек, соответствующее вершине* x*.*

Определение 2. *Пусть* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \{1,2\}^{\infty}$ *– бесконечная последовательность из единиц и двоек. Этой последовательности сопоставим "бесконечно удалённую вершину" графа Юнга – Фибоначчи с номером* $x = \ldots \alpha_2\alpha_1$*.*

Обозначение 2. *Пусть* $\mathbb{YF}_{\infty}$ *– это множество "бесконечно удалённых вершин" графа Юнга–Фибоначчи.*

Обозначение 3.

- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \in \{1,2\}^{n}$: *номер* x *– это* $\alpha_n \ldots \alpha_2\alpha_1$*. Тогда будем писать, что* $x = \alpha_n \ldots \alpha_2\alpha_1$*.*
- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}_{\infty}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \{1,2\}^{\infty}$: *номер* x *– это* $\ldots \alpha_2\alpha_1$*. Тогда будем писать, что* $x = \ldots \alpha_2\alpha_1$*.*

Обозначение 4.

- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$*. Тогда сумму цифр в номере* x *обозначим за* $|x|$*.*
- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}_{\infty}$*. Тогда скажем, что* $|x| = \infty$*.*

Обозначение 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}_0$*. Тогда*

$$\mathbb{YF}_n := \{v \in \mathbb{YF} : \ |v| = n\}.$$

Замечание 1.

- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$*. Тогда* $|x|$ *– это ранг вершины* x *в графе Юнга – Фибоначчи.*
- *Пусть* $n \in \mathbb{N}_0$*. Тогда* $\mathbb{YF}_n$ *– это множество вершин графа Юнга – Фибоначчи ранга* n*.*

Обозначение 6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}_0 : m \leq n$*. Тогда*

- $$\overline{n} := \{0, 1, \ldots, n\};$$
- $$\overline{m, n} := \{m, m+1 \ldots, n\}.$$

Определение 3. *Пусть* $x, y, \{y_i\}_{i=0}^{n} \in \mathbb{YF} : n \in \mathbb{N}_0$,

$$y = y_0 y_1 y_2 ... y_n = x$$

– это такой путь в графе Юнга–Фибоначчи, что $\forall i \in \overline{n}$

$$|y_i| = |y| - i.$$

Тогда путь

$$y = y_0 y_1 y_2 ... y_n = x$$

назовём yx-путём "вниз" в $\mathbb{YF}$.

Замечание 2. *В Определении 3* $n = |y| - |x|$.

Обозначение 7. *Пусть* $x, y \in \mathbb{YF}$. *Тогда количество yx-путей "вниз" в* $\mathbb{YF}$ *будем обозначать как* $d(x, y)$.

Замечание 3. *Пусть* $x, y \in \mathbb{YF} : |y| < |x|$. *Тогда*

$$d(x, y) = 0.$$

Обозначение 8. *Пусть* $x, y \in \mathbb{YF}$. *Тогда множество всех yx-путей "вниз" обозначим за* $T(x, y)$.

Обозначение 9.

$$T(\mathbb{YF}) := \bigcup_{\{(x,y) \in \mathbb{YF}^2\}} T(x, y).$$

Обозначение 10. *Пусть* $x, y \in \mathbb{YF}$, $t \in T(\mathbb{YF}) : t \in T(x, y)$. *Тогда будем обозначать вершины этого пути как*

$$y = t(|y|),\ t(|y| - 1), \ldots,\ t(|x| + 1),\ t(|x|) = x,$$

а также считать, что если $z \in \left(\mathbb{N}_0 \backslash \overline{|x|, |y|}\right)$, *то* $t(z)$ *не определено.*

Замечание 4. *Ясно, что* $t(z)$ *– это вершина, через которую путь* t *проходит на уровне* $z \in \left(\mathbb{N}_0 \backslash \overline{|x|, |y|}\right)$.

Обозначение 11.

- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$. *Тогда количество цифр в номере* x *обозначим за* $\#x$.
- *Пусть* $x \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда скажем, что* $\#x = \infty$.

Обозначение 12. *Пусть* $x \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$. *Тогда:*

- *Количество единиц в номере* x *обозначим за* $e(x)$;
- *Количество двоек в номере* x *обозначим за* $d(x)$.

Замечание 5. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда:*

- *$d(x)$ может быть равно бесконечности;*
- *$e(x)$ может быть равно бесконечности.*

Замечание 6. *Пусть $x \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$. Тогда:*

- $e(x) + d(x) = \#x$;
- $e(x) + 2d(x) = |x|$;
- $\#x + d(x) = |x|$.

Обозначение 13.

$$f(x,y,z) : \left\{(x,y,z) \subseteq \mathbb{YF} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \ y \in \overline{|x|}, \ z \in \overline{\#x}\right\} \to \mathbb{R}$$

– это функция, определённая следующим образом:

При $z = 0$:

- *Если $x \in \mathbb{YF}$ представляется в виде $x = \alpha_1 ... \alpha_m \alpha_{m+1} ... \alpha_n$, где $|\alpha_{m+1}...\alpha_n| = y$, $\alpha_i \in \{1,2\}$, то*

$$f(x,y,0) := \frac{1}{(\alpha_{m+1})(\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2})...(\alpha_{m+1}+...+\alpha_n)} \cdot (-1)^{n-m} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(\alpha_m)(\alpha_m+\alpha_{m-1})(\alpha_m+\alpha_{m-1}+\alpha_{m-2})...(\alpha_m+...+\alpha_1)} =$$

$$= \frac{1}{(-\alpha_{m+1})(-\alpha_{m+1}-\alpha_{m+2})...(-\alpha_{m+1}-...-\alpha_n)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(\alpha_m)(\alpha_m+\alpha_{m-1})(\alpha_m+\alpha_{m-1}+\alpha_{m-2})...(\alpha_m+...+\alpha_1)};$$

- *Если $x \in \mathbb{YF}$ не представляется в виде $x = \alpha_1 ... \alpha_m \alpha_{m+1} ... \alpha_n$, где $|\alpha_{m+1}...\alpha_n| = y$, $\alpha_i \in \{1,2\}$, то*

$$f(x,y,0) = 0.$$

При $z > 0$ (рекурсивное определение):

- *Если $y = 0$, то*
$$f(x1,0,z) = f(x1,0,0);$$
- *Если $y > 0$, то*
$$f(x1,y,z) = f(x1,y,0) + f(x,y-1,z-1);$$
- $$f(x2,y,z) = \begin{cases} \frac{f(x11,y,z+1)}{1-y} & \text{если } y \neq 1 \\ 0 & \text{если } y = 1. \end{cases}$$

Пример 1. *Значения $f(x,y,z)$ при всех возможных тройках $(x,y,z) \subseteq \mathbb{YF} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : x = 21221,\ y \in \overline{|x|},\ z = 0 :$*

- $$f(21221,0,0) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{720};$$
- $$f(21221,1,0) = \frac{1}{(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{280};$$
- $$f(21221,2,0) = 0;$$
- $$f(21221,3,0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{180};$$
- $$f(21221,4,0) = 0;$$
- $$f(21221,5,0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot 1 \cdot 3} = -\frac{1}{120};$$
- $$f(21221,6,0) = \frac{1}{(-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot 2} = \frac{1}{180};$$
- $$f(21221,7,0) = 0;$$
- $$f(21221,8,0) = \frac{1}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-8)} = -\frac{1}{1680}.$$

Пример 2. *Значения $f(x,y,z)$ при всех возможных тройках $(x,y,z) \subseteq \mathbb{YF} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : |x| \in \overline{4},\ y \in \overline{|x|},\ z \in \overline{\#x} :$*

- $x = \varepsilon$

	$y = 0$
$z = 0$	1

- $x = 1$

	$y = 0$	$y = 1$
$z = 0$	1	-1
$z = 1$	1	0

- $x = 2$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$z = 0$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$z = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

- $x = 11$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$z = 0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$z = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$z = 2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

- $x = 12$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$z = 0$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z = 1$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z = 2$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$

- $x = 21$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$z = 0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
$z = 1$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$z = 2$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

- $x = 111$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$z=0$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
$z=1$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$z=2$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$z=3$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

- $x = 112$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$z=0$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z=1$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z=2$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$
$z=3$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$

- $x = 22$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$z=0$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z=1$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z=2$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$

- $x = 121$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$z=0$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$
$z=1$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$z=2$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$z=3$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

- $x = 211$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{24}$
$z = 1$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$
$z = 3$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$

- $x = 1111$

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$z = 0$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
$z = 1$	$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$
$z = 2$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$
$z = 3$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{8}$
$z = 4$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Обозначение 14.

$$g(x, y) : \{(x, y) \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty) \times \mathbb{N} : \ y \le d(x)\} \to \mathbb{N}$$

– это функция, определённая следующим образом:

Рассмотрим представление $x \in \mathbb{YF}$ в виде

$$x = \ldots 2 \underbrace{1 \ldots 1}_{\beta_m} 2 \ldots 2 \underbrace{1 \ldots 1}_{\beta_1} 2 \underbrace{1 \ldots 1}_{\beta_0}$$

и определим:

- $g(x, 1) = \beta_0 + 1$;
- $g(x, 2) = \beta_0 + \beta_1 + 3$;
- $\ldots$
- $g(x, m) = \beta_0 + \ldots + \beta_{m-1} + 2m - 1$;
- $\ldots$.

Обозначение 15. *Пусть* $x \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, $y \in \mathbb{YF}$. *Тогда вершину графа Юнга – Фибоначчи, номер которой – это конкатенация номеров* x *и* y, *обозначим за* xy.

Обозначение 16.

- *Пусть* $x, y \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, *и при этом не выполняется то, что* $x = y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда максимальное* $z \in \mathbb{N}_0 : \exists x', y' \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, $z' \in \mathbb{YF}$: $x = x'z'$, $y = y'z'$, $|z'| = z$, *обозначим за* $h'(x, y)$.
- *Пусть* $x = y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда будем считать, что* $h'(x, y) = \infty$.

Обозначение 17.

- *Пусть* $x, y \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, *и при этом не выполняется то, что* $x = y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда максимальное* $z \in \mathbb{N}_0 : \exists x', y' \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, $z' \in \mathbb{YF}$: $x = x'z'$, $y = y'z'$, $\#z' = z$, *обозначим за* $h(x, y)$.
- *Пусть* $x = y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда будем считать, что* $h(x, y) = \infty$.

Замечание 7. *Пусть* $x, y \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$. *Тогда*

- $h'(x, y)$ *– это сумма цифр в самом длинном общем суффиксе номеров* x *и* y;
- $h(x, y)$ *– это количество цифр в самом длинном общем суффиксе номеров* x *и* y;
- $h'(x, y) = h'(y, x)$;
- $h(x, y) = h(y, x)$.

Теорема 1 (Теорема 1[1], Теорема 1[2])**.** *Пусть* $x, y \in \mathbb{YF} : |y| \geq |x|$. *Тогда*

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x, i, h(x, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \left(g\left(y, j\right) - i\right) \right).$$

Следствие 1. *Пусть* $y \in \mathbb{YF}$. *Тогда*

$$d(\varepsilon, y) = \prod_{j=1}^{d(y)} g\left(y, j\right).$$

Доказательство.

$$d(\varepsilon, y) = (\text{По Теореме 1}) = \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(f\left(\varepsilon, i, h(\varepsilon, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \left(g\left(y, j\right) - i\right) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{0} \left(f\left(\varepsilon, i, 0\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \left(g\left(y, j\right) - i\right) \right) = f\left(\varepsilon, 0, 0\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \left(g\left(y, j\right) - 0\right) = \prod_{j=1}^{d(y)} g\left(y, j\right).$$

□

Утверждение 1. *Пусть* $x, x', x'' \in \mathbb{YF} : x = x'x''$. *Тогда*

$$d(\varepsilon, x) = d(\varepsilon, x'')d\left(\varepsilon, x'1^{|x''|}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся Следствием 1 и определением функции g:

$$d(\varepsilon, x) = \prod_{i=1}^{d(x)} g(x, i) = \left(\prod_{i=1}^{d(x'')} g(x, i)\right)\left(\prod_{i=d(x'')+1}^{d(x)} g(x, i)\right) = d\left(\varepsilon, x''\right) d\left(\varepsilon, x'1^{|x''|}\right).$$

□

Обозначение 18. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. *Тогда за* $w_m \in \mathbb{YF}$ *обозначим такую вершину графа Юнга–Фибоначчи, что* $\#w_m = m$ *и* $\exists w' \in \mathbb{YF}_\infty : w = w'w_m$.

Замечание 8.

- *Очевидно, что для любых* $w \in \mathbb{YF}_\infty$ *и* $m \in \mathbb{N}_0$ *такая вершина существует и однозначно определена.*
- *Ясно, что это просто вершина, номер которой – это последние (то есть самые правые)* m *символов номера* w.

Обозначение 19. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$, $m \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\mu_w(v, m) := \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)}.$$

Утверждение 2. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \mu_w(v, m) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)}.$$

Доказательство. Ясно, что если $m \geq |v|$, то $|w_m| \geq m \geq |v|$, а значит, по Теореме 1 при $v, w_m \in \mathbb{YF}$

$$\lim_{m\to\infty} \mu_w(v, m) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w_m)\right) \prod_{j=1}^{d(w_m)} \left(g\left(w_m, j\right) - i\right)\right)}{\prod_{j=1}^{d(w_m)} g\left(w_m, j\right)} =$$

$$= d(\varepsilon, v) \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w_m)\right) \prod_{j=1}^{d(w_m)} \frac{\left(g\left(w_m, j\right) - i\right)}{g\left(w_m, j\right)}\right)\right).$$

Ясно, что если $m \geq |v|$, то $|w_m| \geq m \geq |v|$, а значит $h(v, w_m) = h(v, w)$, из чего следует, что наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w_m)} \frac{\left(g\left(w_m, j\right) - i\right)}{g\left(w_m, j\right)} \right) \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d(w_m)} \frac{\left(g\left(w_m, j\right) - i\right)}{g\left(w_m, j\right)} \right) =$$

$$= (\text{По определению функции } g) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w)} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right).$$

Из определения функции g очевидно, что данное выражение определено.

□

Обозначение 20. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$. Тогда*

$$\mu_w(v) := \lim_{m \to \infty} \mu_w(v, m) = \lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)}.$$

Замечание 9. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$, $m, n \in \mathbb{N}_0 : |w_m| \geq |v| = n$. Тогда*

- $$d(\varepsilon, v) d(v, w_m) = |\left\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\right\}|;$$

- $$\mu_w(v, m) = \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} = \frac{|\left\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\right\}|}{|\left\{T(\varepsilon, w_m)\right\}|}.$$

Утверждение 3. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $m, n \in \mathbb{N}_0 : |w_m| \geq n$. Тогда*

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v, m) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} = 1.$$

Доказательство.

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v, m) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} = (\text{так как } |w_m| \geq n) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{|\left\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\right\}|}{|\left\{T(\varepsilon, w_m)\right\}|} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{v \in \mathbb{YF}_n} |\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\}|}{|\left\{T(\varepsilon, w_m)\right\}|} = \frac{|\left\{T(\varepsilon, w_m)\right\}|}{|\left\{T(\varepsilon, w_m)\right\}|} = 1.$$

□

Следствие 2. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

Доказательство.

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \left(\lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \left(\frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) =$$

$$= (\text{Так как если } m \geq n, \text{ то } |w_m| \geq m \geq n\ ) = 1.$$

□

Обозначение 21. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, $\beta \in (0,1] : |y| \geq |x|$. *Тогда*

$$d'_\beta(x,y) := \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right).$$

Замечание 10. *Из определения функции* g *ясно, что данное выражение определено.*

Обозначение 22. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $v \in \mathbb{YF}$. *Тогда*

$$\mu_{w,\beta}(v) := d(\varepsilon, v) \cdot d'_\beta(v, w).$$

Обозначение 23. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$, $v \in \mathbb{YF}$, $m \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\mu_{\{w'_i\}}(v, m) := \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)}.$$

Замечание 11. *В данном обозначении* $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$ *– это произвольная бесконечная последовательность вершин графа Юнга – Фибоначчи.*

Определение 4. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$, $w \in \mathbb{YF}_\infty : \forall h \in \mathbb{N}_0\ \exists M \in \mathbb{N}_0 :$ $\forall m \geq M$

$$h(w'_m, w) > h.$$

Тогда скажем, что бесконечная последовательность $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$ *вершин графа Юнга – Фибоначчи сходится к “бесконечно удалённой вершине”* w *графа Юнга – Фибоначчи.*

Обозначение 24. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$, $w \in \mathbb{YF}_\infty$ *такие, что бесконечная последовательность* $\{w'_i\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$ *вершин графа Юнга – Фибоначчи сходится к “бесконечно удалённой вершине”* w *графа Юнга – Фибоначчи. Тогда будем писать, что*

$$\{w'_i\} \xrightarrow{i \to \infty} w.$$

Обозначение 25. *Пусть* $w \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$. *Тогда*

$$\pi(w) := \prod_{i: g(w,i)>1} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)}.$$

Обозначение 26. *Пусть* $w \in (\mathbb{YF} \cup \mathbb{YF}_\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0 : k \geq 2$. *Тогда*

$$\pi_k(w) := \prod_{i: g(w,i)>k} \frac{g(w,i)-k}{g(w,i)}.$$

Замечание 12. *Ясно, что*

- *Если* $w \in \mathbb{YF}$, *то*
$$\pi(w) \in (0,1];$$
- *Если* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, *то*
$$\pi(w) \in [0,1];$$
- *Если* $w \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}_0 : k \geq 2$, *то*
$$\pi_k(w) \in (0,1];$$
- *Если* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $k \in \mathbb{N}_0 : k \geq 2$, *то*
$$\pi_k(w) \in [0,1].$$

Утверждение 4. *Пусть* $v, v', v'' \in \mathbb{YF}$: $v = v'v''$. *Тогда*

$$\pi(v) = \pi(v'')\pi\left(v'1^{|v''|}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим три случая:

1° $v'' = \varepsilon$.

Ясно, что в данном случае $v = v'$. Посчитаем, воспользовавшись определением функций π и g:

$$\pi(v) = \pi(v') = \left(\prod_{i:\ g(\varepsilon,i)>1} \frac{g(\varepsilon,i)-1}{g(\varepsilon,i)}\right)\pi(v') = \pi(\varepsilon)\pi(v') =$$

$$= \pi(\varepsilon)\pi\left(v'1^0\right) = \pi(\varepsilon)\pi\left(v'1^{|\varepsilon|}\right) = \pi(v'')\pi\left(v'1^{|v''|}\right).$$

В данном случае Утверждение доказано.

2° номер v'' заканчивается на 1.

Ясно, что в данном случае номер v тоже заканчивается на 1, а также то, что $|v''| \geq 1$. Посчитаем, воспользовавшись определением функций π и g:

$$\pi(v) = \prod_{i\colon g(v,i)>1} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} = \prod_{i=1}^{d(v)} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{d(v'')} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} \right) \left(\prod_{i=d(v'')+1}^{d(v)} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} \right) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{d(v'')} \frac{g(v'',i)-1}{g(v'',i)} \right) \left(\prod_{i=1}^{d\left(v'1^{|v''|}\right)} \frac{g(v'1^{|v''|},i)-1}{g\left(v'1^{|v''|},i\right)} \right) =$$

$$= \left(\prod_{i\colon g(v'',i)>1} \frac{g(v'',i)-1}{g(v'',i)} \right) \left(\prod_{i\colon g\left(v'1^{|v''|},i\right)>1} \frac{g(v'1^{|v''|},i)-1}{g\left(v'1^{|v''|},i\right)} \right) =$$

$$= \pi(v'')\pi\left(v'1^{|v''|}\right).$$

В данном случае Утверждение доказано.

3° номер v'' заканчивается на 2.

Ясно, что в данном случае номер v тоже заканчивается на 2, а также то, что $|v''| \geq 2$. Посчитаем, воспользовавшись определением функций π и g:

$$\pi(v) = \prod_{i\colon g(v,i)>1} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} = \prod_{i=2}^{d(v)} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} =$$

$$= \left(\prod_{i=2}^{d(v'')} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} \right) \left(\prod_{i=d(v'')+1}^{d(v)} \frac{g(v,i)-1}{g(v,i)} \right) =$$

$$= \left(\prod_{i=2}^{d(v'')} \frac{g(v'',i)-1}{g(v'',i)} \right) \left(\prod_{i=1}^{d\left(v'1^{|v''|}\right)} \frac{g(v'1^{|v''|},i)-1}{g\left(v'1^{|v''|},i\right)} \right) =$$

$$= \left(\prod_{i\colon g(v'',i)>1} \frac{g(v'',i)-1}{g(v'',i)} \right) \left(\prod_{i\colon g\left(v'1^{|v''|},i\right)>1} \frac{g(v'1^{|v''|},i)-1}{g\left(v'1^{|v''|},i\right)} \right) =$$

$$= \pi(v'')\pi\left(v'1^{|v''|}\right).$$

В данном случае Утверждение доказано.

Все случаи разобраны.

Утверждение доказано.

$\square$

Обозначение 27.

$$\mathbb{YF}_\infty^+ := \{w \in \mathbb{YF}_\infty :\ \pi(w) > 0\}.$$

Замечание 13. *Ясно, что*

$$\mathbb{YF}_\infty^+ = \{w \in \mathbb{YF}_\infty :\ \pi(w) \in (0,1)\}.$$

Утверждение 5 (Proposition 8.6[5])**.** *Пусть* $\{w_i'\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$*,* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$*,* $\beta \in (0,1]$*,* $v \in \mathbb{YF}$*,* $k \in \mathbb{N}_0 : k \geq 2$*,* $\{w_i'\} \xrightarrow{i\to\infty} w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(w_m')}{\pi(w)} = \beta.$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi_k(w_m')}{\pi_k(w)} = \beta^k.$$

Лемма 1. *Пусть* $\{w_i'\}_{i=1}^\infty \in (\mathbb{YF})^\infty$*,* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$*,* $\beta \in (0,1]$*,* $v \in \mathbb{YF} : \{w_i'\} \xrightarrow{i\to\infty} w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(w_m')}{\pi(w)} = \beta.$$

Тогда предел

$$\lim_{m\to\infty} \mu_{\{w_i'\}}(v,m) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m')}{d(\varepsilon,w_m')}$$

существует и равен

$$\mu_{w,\beta}(v).$$

Доказательство. По определению если $\{w_i'\} \xrightarrow{i\to\infty} w$, то $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq M$

$$h(w_m', w) \geq |v| \Longrightarrow |w_m'| \geq \# w_m' \geq h(w_m', w) \geq |v|,$$

а значит, по Теореме 1 при $v, w_m' \in \mathbb{YF}$

$$\lim_{m\to\infty} \mu_{\{w_i'\}}(v) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m')}{d(\varepsilon,w_m')} = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon,v)\displaystyle\sum_{i=0}^{|v|}\left(f\left(v,i,h(v,w_m')\right)\prod_{j=1}^{d\left(w_m'\right)}\left(g\left(w_m',j\right)-i\right)\right)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{d\left(w_m'\right)} g\left(w_m',j\right)} =$$

$$= d(\varepsilon, v) \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w'_m)\right) \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right).$$

По определению если $\{w'_i\} \xrightarrow{i\to\infty} w$, то $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq M$

$$h(w'_m, w) \geq |v| \Longrightarrow h(v, w'_m) = h(v, w),$$

а это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right).$$

Далее рассмотрим три случая:

1° $v \in \mathbb{YF} : |v| = 0$.

Ясно, что в данном случае $v = \varepsilon$. А значит наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{0} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 0\right)}{g\left(w'_m, j\right)} =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} 1 =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot \beta^0 f\left(v, 0, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w)} \frac{\left(g\left(w, j\right) - 0\right)}{g\left(w, j\right)} =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{0} \left(\beta^i f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w)} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(\beta^i f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w)} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|v|} \left(\beta^i f\left(v, i, h(v, w)\right) \prod_{j=1}^{d(w)} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right) = d(\varepsilon, v) \cdot d'_\beta(v, w) = \mu_{w,\beta}(v),$$

что и требовалось.

В данном случае Лемма доказана.

2° $v \in \mathbb{YF} : |v| = 1$.

Ясно, что в данном случае $v = 1$. А значит наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{|1|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{0} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) +$$

$$+ d(\varepsilon, v) \sum_{i=1}^{1} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 0\right)}{g\left(w'_m, j\right)} +$$

$$+ d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 1, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} 1 +$$

$$+ d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 1, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(\prod_{j:\ g\left(w'_m, j\right) = 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \left(\prod_{j:\ g\left(w'_m, j\right) > 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right).$$

По определению если $\{w'_i\} \xrightarrow{i \to \infty} w$, то $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq M$

$$h(w'_m, w) \geq 1.$$

А значит, из определения функции g ясно, что $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m, j \in \mathbb{N}_0 :$ $m \geq M$,

$$g(w, j) = 1 \Longleftrightarrow g(w'_m, j) = 1.$$

Применим это наблюдение к нашему выражению и поймём, что оно равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \lim_{m \to \infty} 1 +$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\lim_{m\to\infty}\left(\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w'_m,j)>1}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-1\right)}{g\left(w'_m,j\right)}\right)\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,0,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}1+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\left(\lim_{m\to\infty}\prod_{j\colon\, g(w'_m,j)>1}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-1\right)}{g\left(w'_m,j\right)}\right)=$$

$$=(\text{По определению функции } \pi)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,0,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}1+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\lim_{m\to\infty}\pi(w'_m).$$

В нашем случае

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi(w'_m)}{\pi(w)}=\beta\iff\lim_{m\to\infty}\pi(w'_m)=\beta\pi(w).$$

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,0,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}1+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\beta\pi(w)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\pi(w)=$$

$$=(\text{По определению функции } \pi)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)>1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{0}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=1}^{1}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{1}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{|1|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=d(\varepsilon,v)\cdot d'_\beta(v,w)=\mu_{w,\beta}(v),$$

что и требовалось.

В данном случае Лемма доказана.

3° $v\in\mathbb{YF}:|v|\geq 2$.

Ясно, что в данном случае наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{0}\left(f\left(v,i,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-i\right)}{g\left(w'_m,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=1}^{1}\left(f\left(v,i,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-i\right)}{g\left(w'_m,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(f\left(v,i,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-i\right)}{g\left(w'_m,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,0,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-0\right)}{g\left(w'_m,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)}\frac{\left(g\left(w'_m,j\right)-1\right)}{g\left(w'_m,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon, v) \sum_{i=2}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{d\left(w'_m\right)} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} 1+$$

$$+d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 1, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) = 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) > 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) +$$

$$+d(\varepsilon, v) \sum_{i=2}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) \le i} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) > i} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) \right).$$

По определению если $\{w'_i\} \xrightarrow{i \to \infty} w$, то $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \ge M$

$$h(w'_m, w) \ge |v|.$$

А значит, из определению функции g ясно, что $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m, i, j \in \mathbb{N}_0 : i \in \overline{|v|},\ m \ge M$

$$g(w'_m, j) \le i \Longleftrightarrow g(w, j) \le i \Longrightarrow g(w, j) = g(w'_m, j).$$

Применим это наблюдение к нашему выражению и поймём, что оно равняется следующему:

$$d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} 1+$$

$$+d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 1, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(\prod_{j:\ g(w, j) = 1} \frac{\left(g\left(w, j\right) - 1\right)}{g\left(w, j\right)} \right) \left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) > 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) +$$

$$+d(\varepsilon, v) \sum_{i=2}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} \left(\left(\prod_{j:\ g(w, j) \le i} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right) \left(\prod_{j:\ g(w'_m, j) > i} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) \right) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} 1+$$

$$+d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 1, h(v, w)\right) \left(\prod_{j:\ g(w, j) = 1} \frac{\left(g\left(w, j\right) - 1\right)}{g\left(w, j\right)} \right) \left(\lim_{m \to \infty} \prod_{j:\ g(w'_m, j) > 1} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - 1\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) +$$

$$+d(\varepsilon, v) \sum_{i=2}^{|v|} \left(f\left(v, i, h(v, w)\right) \left(\prod_{j:\ g(w, j) \le i} \frac{\left(g\left(w, j\right) - i\right)}{g\left(w, j\right)} \right) \left(\lim_{m \to \infty} \prod_{j:\ g(w'_m, j) > i} \frac{\left(g\left(w'_m, j\right) - i\right)}{g\left(w'_m, j\right)} \right) \right) =$$

$$= (\text{По определению функций } \pi \text{ и } \pi_i) =$$

$$= d(\varepsilon, v) \cdot f\left(v, 0, h(v, w)\right) \cdot \lim_{m \to \infty} 1+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\lim_{m\to\infty}\pi(w'_m)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(f\left(v,i,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)\le i}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\lim_{m\to\infty}\pi_i(w'_m)\right).$$

По Утверждению 5 при наших $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty}\in(\mathbb{YF})^{\infty}$, $w\in\mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta\in(0,1]$, $v\in\mathbb{YF}$ и произвольном $k\in\overline{2,|v|}$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi_k(w'_m)}{\pi_k(w)}=\beta^k\Longleftrightarrow\lim_{m\to\infty}\pi_k(w'_m)=\beta^k\pi_k(w).$$

Кроме того, в нашем случае

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi(w'_m)}{\pi(w)}=\beta\Longleftrightarrow\lim_{m\to\infty}\pi(w'_m)=\beta\pi(w).$$

Таким образом, можно понять, что наше выражение равняется следующему:

$$d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,0,h(v,w)\right)\cdot\lim_{m\to\infty}1+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\beta\pi(w)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(f\left(v,i,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)\le i}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\beta^i\pi_i(w)\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\pi(w)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)\le i}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\pi_i(w)\right)=$$

$$=(\text{По определению функций }\pi\text{ и }\pi_i)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)=1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\left(\prod_{j\colon\, g(w,j)>1}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\left(\prod_{j:\ g(w,j)\le i}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\left(\prod_{j:\ g(w,j)>i}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\cdot\beta^0 f\left(v,0,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-0\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\beta^1 f\left(v,1,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-1\right)}{g\left(w,j\right)}+$$

$$+d(\varepsilon,v)\cdot\sum_{i=2}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{0}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=1}^{1}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)+$$

$$+d(\varepsilon,v)\sum_{i=2}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{|v|}\left(\beta^i f\left(v,i,h(v,w)\right)\prod_{j=1}^{d(w)}\frac{\left(g\left(w,j\right)-i\right)}{g\left(w,j\right)}\right)=d(\varepsilon,v)\cdot d'_\beta(v,w)=\mu_{w,\beta}(v),$$

что и требовалось.

В данном случае Лемма доказана.

Ясно, что все случаи разобраны, и в каждом из них Лемма доказана.
Таким образом, Лемма доказана. □

Обозначение 28. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty}\in(\mathbb{YF})^{\infty}$, $w\in\mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta\in(0,1]$, $v\in\mathbb{YF}$: $\{w'_i\}\xrightarrow{i\to\infty}w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi(w'_m)}{\pi(w)}=\beta.$$

Тогда

$$\mu_{\{w'_i\}}(v):=\lim_{m\to\infty}\mu_{\{w'_i\}}(v,m)=\lim_{m\to\infty}\frac{d(\varepsilon,v)d(v,w'_m)}{d(\varepsilon,w'_m)}=\mu_{w,\beta}(v).$$

Следствие 3. *Пусть* $w\in\mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta\in(0,1]$, $v\in\mathbb{YF}$. *Тогда*

$$\mu_{w,\beta}(v)\ge 0.$$

Замечание 14. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty}$, $v \in \mathbb{YF}$, $m, n \in \mathbb{N}_0 : |w'_m| \geq |v| = n$. *Тогда*

- $$d(\varepsilon, v)d(v, w'_m) = |\,\{t \in T(\varepsilon, w'_m) : \; t(n) = v\}\,|;$$

- $$\mu_{\{w'_i\}}(v, m) = \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)} = \frac{|\,\{t \in T(\varepsilon, w'_m) : \; t(n) = v\}\,|}{|\,\{T(\varepsilon, w'_m)\}\,|}.$$

Утверждение 6. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty}$, $m, n \in \mathbb{N}_0 : |w'_m| \geq |v| = n$. *Тогда*

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{\{w'_i\}}(v, m) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)} = 1.$$

Доказательство.

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{\{w'_i\}}(v, m) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)} = (\text{так как } |w'_m| \geq n) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \frac{|\,\{t \in T(\varepsilon, w'_m) : \; t(n) = v\}\,|}{|\,\{T(\varepsilon, w'_m)\}\,|} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{v \in \mathbb{YF}_n} |\{t \in T(\varepsilon, w'_m) : \; t(n) = v\}|}{|\,\{T(\varepsilon, w'_m)\}\,|} = \frac{|\,\{T(\varepsilon, w'_m)\}\,|}{|\,\{T(\varepsilon, w'_m)\}\,|} = 1.$$

□

Следствие 4. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty}$, $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0, 1]$, $n \in \mathbb{N}_0$: $\{w'_i\} \xrightarrow{i \to \infty} w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\pi(w'_m)}{\pi(w)} = \beta.$$

Тогда

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{\{w'_i\}}(v) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

Доказательство.

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{w,\beta}(v) = (\text{По Лемме 1, просуммированной по } v \in \mathbb{YF}_n) =$$

$$= \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{\{w'_i\}}(v) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \left(\lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v)d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \left(\frac{d(\varepsilon, v)d(v, w'_m)}{d(\varepsilon, w'_m)} \right) \right).$$

По определению если $\{w'_i\} \xrightarrow{i \to \infty} w$, то $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq M$

$$h(w'_m, w) \geq |v| \Longrightarrow |w'_m| \geq \#w'_m \geq h(w'_m, w) \geq |v|,$$

а значит наше выражение равняется

$$\lim_{m \to \infty} 1 = 1.$$

□

3 Доказательство Теоремы 2

Обозначение 29. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда*

- $$P(w,n,\delta) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq (1-\delta)n\};$$

- $$\overline{P}(w,n,\delta) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < (1-\delta)n\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда*

1)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in P(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 1.$$

Доказательство.

Обозначение 30. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\delta \in (0,1)$, $n, m \in \mathbb{N}_0 : m \geq n$. *Тогда*

$$\overline{P}(w,n,\delta,m) := \left\{(a,b,k) \in \mathbb{YF} \times \mathbb{YF} \times \mathbb{N} :\ ab = w_m,\ |b| < (1-\delta)n,\ k > \frac{\delta n}{2}\right\}.$$

Обозначение 31. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$v^n := \underbrace{v \dots v}_{n}.$$

Лемма 2. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\delta \in (0,1)$, $n, m \in \mathbb{N}_0$*:* $m \geq n$. *Тогда*

$$\sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} \leq \sum_{(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d(\varepsilon,2^k b)d(2^k,a)}{d(\varepsilon,w_m)}.$$

Доказательство.

$$\sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} \leq \sum_{(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d(\varepsilon,2^k b)d(2^k,a)}{d(\varepsilon,w_m)} \iff$$

$$\iff \sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} \left(d(\varepsilon,v)d(v,w_m)\right) \leq \sum_{(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)} \big(d(\varepsilon,2^k b)d(2^k,a)\big) \iff$$

$$\iff (\text{Так как если } m \geq n, \text{ то } |w_m| \geq m \geq n\ ) \iff$$

$$\iff \sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} |\{t \in T(\varepsilon,w_m) :\ t(n) = v\}| \leq \sum_{(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)} \big(d(\varepsilon,2^k b)d(2^k,a)\big).$$

Обозначение 32.

Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $t \in T(\mathbb{YF}) : t \in T(x, y)$. *Тогда обозначим за* $c(t)$ *самую верхнюю вершину пути* t *из тех вершин пути* t, *у которых самый короткий общий суффикс с* y.

Формально:

Пусть $x, y \in \mathbb{YF}$, $t \in T(\mathbb{YF}) : t \in T(x, y)$. *Тогда обозначим за* $c(t)$ *такую вершину* $t(z)$ *пути* t $(z \in \overline{|x|, |y|})$, *что* $\nexists z' \in \overline{|x|, |y|} : h'(t(z'), y) < h'(t(z), y)$ *и* $\nexists z' \in \overline{z+1, |y|} : h'(t(z'), y) = h'(t(z), y)$.

Замечание 15. *Очевидно, что если* $x, y \in \mathbb{YF}$, $t \in T(\mathbb{YF}) : t \in T(x, y)$, *то вершина* $c(t)$ *существует и однозначно определена.*

Давайте рассмотрим теперь путь $t \in T(\varepsilon, w_m)$ такой, что $t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)$.

Пусть t' – это часть данного пути, которая проходит от вершины w_m до вершины $t(n)$.

Формально:

$t' \in T(t(n), w_m)$, $t'(|w_m|) = t(|w_m|) = w_m$, $t'(|w_m| - 1) = t(|w_m| - 1)$, $\ldots$, $t'(n+1) = t(n+1)$, $t'(n) = t(n)$.

Рассмотрим вершину $c(t')$. Рассмотрим три случая:

1° $\exists x, y, z \in \mathbb{YF} : w_m = x2y$, $c(t') = z1y$.

Как в данном случае проходит путь t'?

- По Обозначению 32 $h'(t'(|c(t')| + 1), w_m) > h'\left(t'(|c(t')|), w_m\right) = h'(c(t'), w_m) = |y|$. А значит $\exists q \in \mathbb{YF} : t'(|c(t')| + 1) = q2y$. Таким образом, между $t'(|c(t')| + 1)$ и $t'(|c(t')|) = c(t')$ шаг “вниз” выглядит следующим образом:

$$q2y \to z1y.$$

Вспомним, как выглядят родители вершины графа Юнга – Фибоначчи:

$$\begin{tikzcd} & & 2221\ldots \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ 1221\ldots & 2121\ldots & & 2211\ldots & 222\ldots \end{tikzcd}$$

или

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 2222 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
1222 & 2122 & 2212 & & 2221
\end{tikzcd}$$

Становится ясно, что если q содержит хотя бы одну единицу, то любой родитель $q2y$ также заканчивается на $2y$. А значит, q не содержит ни одной единицы, то есть $\exists e \in \mathbb{N}_0 : q = 2^e$. Таким образом, между $t'(|c(t')|+1)$ и $t'(|c(t')|) = c(t')$ шаг "вниз" выглядит следующим образом:

$$2^e 2y \to 2^e 1y.$$

- $u := e+1$. Ясно, что $|t'(|c(t')|+1)| = |c(t')|+1 \geq n+1 > n$, то есть $|2^e 2y| > n \Longleftrightarrow |2^u y| > n \Longleftrightarrow |2^u| > n - |y|$;

  Также по Обозначению 32 $|y| = h'(c(t'), w_m) = h'(t'(|c(t')|), w_m) \leq h'(t'(n), w_m) = h'(t(n), w_m) =$ (так как $|w_m| \geq m \geq n = |t(n)|$) $= h'(t(n), w) < \big($так как $t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)\big) < (1-\delta)n$.

  Таким образом, можно сделать вывод, что $2u = |2^u| > n - |y| > n - (1-\delta)n \geq \delta n \Longrightarrow 2u > \delta n$.

  То есть $u > \frac{\delta n}{2}$.

- И снова по Обозначению 32 если $r \in \overline{|c(t')|+1, |w_m|}$, то $h'(t'(r), w_m) > h'(t'(|c(t')|), w_m) = h'(c(t'), w_m) = |y|$. А значит, номера вершин из множества $\left\{t'(r) : \ r \in \overline{|c(t')|+1, |w_m|}\right\}$ заканчиваются на $2y$.

- Путь t' выглядит следующим образом:

$$t'(|w_m|) = w_m = x2y \to t'(|w_m|-1) \to \ldots \to$$

$$\to t'(|c(t')|+1) = 2^e 2y = 2^u y \to t'(|c(t')|) = c(t') = 2^e 1y \to$$

$$\to \ldots \to t'(n) = t(n).$$

2° $\exists x, y, z \in \mathbb{YF} : w_m = x1y,\ c(t') = z2y.$

Как в данном случае проходит путь t'?

- По Обозначению 32 $h'(t'(|c(t')|+1), w_m) > h'(t'(|c(t')|), w_m) = h'(c(t'), w_m) = |y|$. А значит $\exists q \in \mathbb{YF} : t'(|c(t')|+1) = q1y$. Таким образом, между $t'(|c(t')|+1)$ и $t'(|c(t')|) = c(t')$ шаг "вниз" выглядит следующим образом:

$$q1y \to z2y.$$

Вспомним, как выглядят родители вершины графа Юнга–Фибоначчи:

$$\begin{tikzcd}
 & & 2221\ldots \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
1221\ldots & 2121\ldots & 2211\ldots & 222\ldots
\end{tikzcd}$$

или

$$\begin{tikzcd}
 & & 2222 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
1222 & 2122 & 2212 & 2221
\end{tikzcd}$$

Становится ясно, что если q содержит хотя бы одну единицу, то любой родитель $q1y$ также заканчивается на $1y$. А значит, q не содержит ни одной единицы, то есть $\exists e \in \mathbb{N}_0 : q = 2^e$. Таким образом, между $t'(|c(t')|+1)$ и $t'(|c(t')|) = c(t')$ шаг “вниз” выглядит следующим образом:

$$2^e 1y \to 2^e y.$$

- $u := e$. Ясно, что $|c(t')| \geq n$, то есть $|2^e y| \geq n \iff |2^u y| \geq n \iff |2^u| \geq n - |y|$;

  Также по Обозначению 32 $|y| = h'(c(t'), w_m) = h'(t'(|c(t')|), w_m) \leq h'(t'(n), w_m) = h'(t(n), w_m) =$ (так как $|w_m| \geq m \geq n = |t(n)|$) $= h'(t(n), w) <$ $\big($так как $t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)\big) < (1-\delta)n$.

  Таким образом, можно сделать вывод, что $2u = |2^u| \geq n - |y| > n - (1-\delta)n \geq \delta n \Longrightarrow 2u > \delta n$.

  То есть $u > \frac{\delta n}{2}$.

- И снова по Обозначению 32 если $r \in \overline{|c(t')| + 1, |w_m|}$, то $h'(t'(r), w_m) > h'(t'(|c(t')|), w_m) = h'(c(t'), w_m) = |y|$. А значит, номера вершин из множества $\left\{t'(r) : r \in \overline{|c(t')| + 1, |w_m|}\right\}$ заканчиваются на $1y$.

- Путь t' выглядит следующим образом:

$$t'(|w_m|) = w_m = x1y \to t'(|w_m| - 1) \to \ldots \to$$

$$\to t'(|c(t')|+1) = 2^e 1y \to t'(|c(t')|) = c(t') = 2^e y = 2^u y \to$$
$$\to \ldots \to t'(n) = t(n).$$

3° $\exists x, y \in \mathbb{YF} : w_m = xy,\ c(t') = y.$

По Обозначению 32 $n \le |c(t')| = h'(c(t'), w_m) = h'(t'(|c(t')|), w_m) \le h'(t'(n), w_m) = h'(t(n), w_m) =$ (так как $|w_m| \ge m \ge n = |t(n)|$) $= h'(t(n), w) <$ (так как $t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)$) $< (1-\delta)n \Longrightarrow n < (1-\delta)n$. Противоречие. Данный случай невозможен.

Ясно, что все случаи разобраны.
Итак, в обоих возможных случаях можно сделать следующие выводы:
$\exists x, y \in \mathbb{YF},\ u \in \mathbb{N}_0 :$

- Путь t' выглядит следующим образом:
$$w_m = xy \to \ldots \to 2^u y \to \ldots \to t'(n) = t(n);$$
- Номера всех вершин данного пути от $w_m = xy$ до $2^u y$ заканчиваются на y;
- $|y| < (1-\delta)n$;
- $u > \frac{\delta n}{2}$.

Обозначение 33. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\delta \in (0,1)$, $n, m \in \mathbb{N}_0 : m \ge n$. *Тогда обозначим за*
$$T(w, n, \delta, m)$$
множество таких путей $t \in T(\varepsilon, w_m)$, *что* $\exists x, y \in \mathbb{YF},\ u \in \mathbb{N}$, *такие что*

- *Путь* t *выглядит следующим образом:*
$$w_m = xy \to \ldots \to 2^u y \to \ldots \to \varepsilon;$$
- *Номера всех вершин данного пути от* $w_m = xy$ *до* $2^u y$ *заканчиваются на* y;
- $|y| < (1-\delta)n$;
- $u > \frac{\delta n}{2}$.

Мы рассмотрели путь $t \in T(\varepsilon, w_m)$ такой, что $t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)$, после чего поняли, что $t \in T(w, n, \delta, m)$.

Таким образом, ясно, что
$$|\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) \in \overline{P}(w, n, \delta)\}| \le |T(w, n, \delta, m)| \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} |\,\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\}\,| \le |T(w, n, \delta, m)|.$$

Теперь ясно, что если мы просуммируем по всем тройкам $(x, y, u) \in \mathbb{YF} \times \mathbb{YF} \times \mathbb{N}$, таким что

- $w_m = xy$,
- $|y| < (1-\delta)n$,
- $u > \frac{\delta n}{2}$,

количество путей вида

$$w_m = xy \to \ldots \to 2^u y \to \ldots \to \varepsilon,$$

таких что номера всех вершин данного пути от w_m до $2^u y$ заканчиваются на y, то мы посчитаем все пути из $T(w,n,\delta,m)$ хотя бы один раз.

А теперь вспомним определение $\overline{P}(w,n,\delta,m)$, поймём, что при фиксированных x, y и u количество путей вида

$$w_m = xy \to \ldots \to 2^u y \to \ldots \to \varepsilon,$$

таких что номера всех вершин данного пути от w_m до $2^u y$ заканчиваются на y, равно

$$d(\varepsilon, 2^u y) d(2^u, x)$$

и сделаем вывод, что

$$|T(w,n,\delta,m)| \leq \sum_{(x,y,u)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \left(d(\varepsilon, 2^u y) d(2^u, x)\right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} |\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\}| \leq |T(w,n,\delta,m)| \leq \sum_{(x,y,u)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \left(d(\varepsilon, 2^u y) d(2^u, x)\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} |\{t \in T(\varepsilon, w_m) :\ t(n) = v\}| \leq \sum_{(a,b,k)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \left(d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \leq \sum_{(a,b,k)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)}{d(\varepsilon, w_m)},$$

что и требовалось.

Лемма доказана. □

Обозначение 34. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : i \in \overline{1, d(x)}$. Тогда*

$$g'(x,i) := g(x,i) - 2i + 2.$$

Обозначение 35. *Пусть $a \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i = (i_1, \ldots, i_{d(a)-k}) \in \mathbb{N}^{d(a)-k}$: $d(a) \geq k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \leq d(a)$.*

Тогда:

- *за $d(2^k, a, i)$ обозначим число таких путей "вниз" из a в 2^k, при прохождении которых удаляются те и только те двойки, которые изначально были i_1-ой, i_2-ой, … и $i_{d(a)-k}$-ой в номере a, если считать справа;*

- *за $a(i)$ обозначим вершину графа Юнга–Фибоначчи, ($a(i) \in \mathbb{YF}$), номер которой получается из номера вершины a удалением i_1-ой, i_2-ой, ... и $i_{d(a)-k}$-ой двоек, если считать справа.*

Утверждение 7. *Пусть $a \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i = (i_1, \dots, i_{d(a)-k}) \in \mathbb{N}^{d(a)-k}$: $d(a) \geq k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \leq d(a)$. Тогда*

$$d(2^k, a, i) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2).$$

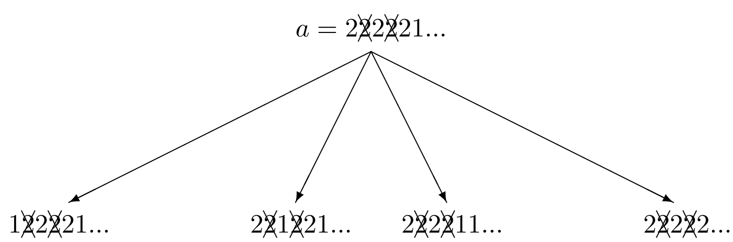
Доказательство. Хотим доказать, что

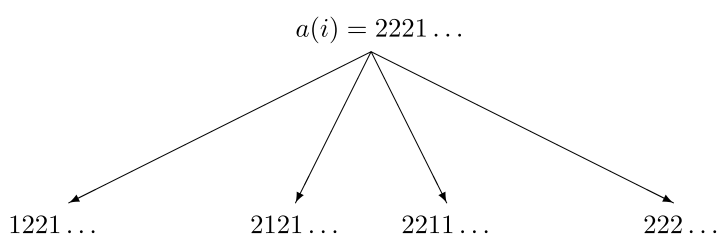
$$d(2^k, a, i) = d(\varepsilon, a(i)) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2).$$

Для начала поймём, что

$$d(2^k, a, i) = d(\varepsilon, a(i)):$$

Это несложно понять по следующим двум картинкам. Вверху нарисовано, как устроен шаг пути "вниз" из вершины a в 2^k. Перечёркнуты тут двойки, которые в процессе прохождения пути не должны быть удалены. Внизу нарисовано, как устроен соответствующий шаг пути "вниз" из вершины $a(i)$ в ε. Ясно, как из этого следует биекция между этими множествами путей.





Иными словами, ясно, что двойки, которые нельзя удалить, ни на что не влияют, так как их нельзя удалить, а также, так как их расположение относительно других символов никак не влияет на то, какие операции можно сделать с остальными символами.

Теперь хотим понять, что

$$d(\varepsilon, a(i)) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2).$$

По определению функции g' и формуле для числа путей "вниз" в ε можно понять, что

$$\prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j)+2j-2) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g(a, i_j)-2i_j+2+2j-2) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g(a, i_j)-2i_j+2j) =$$

=(Так как ясно, что $2i_j - 2j$ – это удвоенное количество таких двоек в номере a, которые нельзя удалять, и которые при этом стоят справа от j-ой "разрешённой" двойки)=

$$= \prod_{j=1}^{d(a)-k} g(a(i), j) = \prod_{j=1}^{d(a(i))} g(a(i), j) = d(\varepsilon, a(i)).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$d(2^k, a, i) = d(\varepsilon, a(i)) = \prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

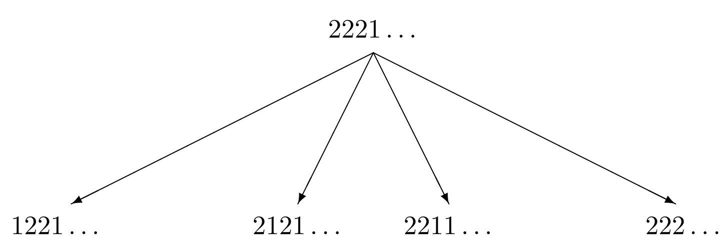
Утверждение 8. *Пусть $a \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда*

$$d(2^k, a) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1° $d(a) < k$.

Ясно, что при каждом шаге "вниз" количество двоек не увеличивается, так как мы можем только заменить двойку на единицу или удалить единицу



или

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 2222 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
1222 & 2122 & 2212 & 2221
\end{tikzcd}$$

А значит, так как справа сумма пустая,

$$d(2^k, a) = 0 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2) \right).$$

2° $d(a) \ge k$.

Ясно, что при любом пути “вниз” из вершины a в вершину 2^k при $d(a) \ge k$ какие-либо k из изначально находящихся $d(a)$ двоек в номере a остаются нетронутыми, а $d(a) - k$ — удаляются. Таким образом, для завершения доказательства Утверждения осталось только просуммировать Утверждение 7 по всем $i = (i_1, \ldots, i_{d(a)-k}) \in \mathbb{N}^{d(a)-k}$: $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)$.

$$d(2^k, a) = \sum_{\substack{i=(i_1,\ldots,i_{d(a)-k}): \\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)}} d(2^k, a, i) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod_{j=1}^{d(a)-k} (g'(a, i_j) + 2j - 2) \right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

$\square$

Утверждение 9. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{d(w)} \frac{1}{g(w, i)} < \infty.$$

Доказательство.

$$w \in \mathbb{YF}_\infty^+ \Longrightarrow \pi(w) > 0 \Longleftrightarrow \prod_{i: g(w,i) > 1} \frac{g(w, i) - 1}{g(w, i)} > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\iff \prod_{i:g(w,i)>1} \frac{g(w,i)}{g(w,i)-1} < \infty \iff \prod_{i:g(w,i)>1} \left(1+\frac{1}{g(w,i)-1}\right) < \infty.$$

$$\infty > \prod_{i:g(w,i)>1} \left(1+\frac{1}{g(w,i)-1}\right) \geq \prod_{i:g(w,i)>1} \left(1+\frac{1}{g(w,i)}\right) \geq 1+ \sum_{i:g(w,i)>1} \frac{1}{g(w,i)} \geq \sum_{i=1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)}.$$

$\square$

Лемма 3. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $s \in (0,1)$. *Тогда* $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0 : \forall a, b \in \mathbb{YF}$, $m, k \in \mathbb{N}_0 : w_m = ab$, $k \geq c_2$

$$\frac{d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} \leq c_1 \frac{s^{k-c_2}}{(k-c_2)!}.$$

Доказательство. Давайте рассмотрим $a, b \in \mathbb{YF}$, $m, k \in \mathbb{N}_0 : w_m = ab$, $d(a) \geq k$.

Очевидно, что в данном случае $|a| \geq 2k$.

Ясно, что $d\left(2^k, a\right) \leq d\left(2^k, a1^{|b|}\right)$, так как каждому пути $t \in T\left(2^k, a\right)$ "вниз"

$$a = t(|a|) \to t(|a|-1) \to t(|a|-2) \to \ldots \to t(|2k|) = 2^k$$

можно однозначно сопоставить путь $t' \in T\left(2^k, a1^{|b|}\right)$ "вниз"

$$a1^{|b|} = t(|a|)1^{|b|} \to t(|a|-1)1^{|b|} \to t(|a|-2)1^{|b|} \to \ldots \to$$

$$\to \ldots \to t(|2k|)1^{|b|} = 2^k 1^{|b|} \to 2^k 1^{|b|-1} \to 2^k 1^{|b|-2} \to \ldots \to 2^k,$$

причём любой паре таких путей соответствуют разные пути.

Давайте посчитаем:

$$\frac{d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} \leq \frac{d\left(2^k, a1^{|b|}\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} = \left(\text{По Утверждению 8 при } \left(a1^{|b|}\right) \in \mathbb{YF},\ k \in \mathbb{N}_0\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \leq d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} \left(g'\left(a1^{|b|}, i_j\right) + 2j - 2\right)\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} =$$

$$= (\text{По формуле для количества путей "вниз" в } \varepsilon) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \leq d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} \left(g'\left(a1^{|b|}, i_j\right) + 2j - 2\right)\right)}{\prod\limits_{j=1}^{d\left(a1^{|b|}\right)} g\left(a1^{|b|}, j\right)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} \left(g' \left(a1^{|b|}, i_j \right) + 2j - 2 \right) \right)}{\prod\limits_{j=1}^{d(a)} g \left(a1^{|b|}, j \right)} =$$

$$= (\text{По определению } g') =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} \left(g \left(a1^{|b|}, i_j \right) - 2i_j + 2 + 2j - 2 \right) \right)}{\prod\limits_{j=1}^{d(a)} g \left(a1^{|b|}, j \right)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} \left(g \left(a1^{|b|}, i_j \right) - 2i_j + 2j \right) \right)}{\prod\limits_{j=1}^{d(a)} g \left(a1^{|b|}, j \right)} \le$$

$$\le \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{d(a)-k} \le d(a)} \left(\prod\limits_{j=1}^{d(a)-k} g \left(a1^{|b|}, i_j \right) \right)}{\prod\limits_{j=1}^{d(a)} g \left(a1^{|b|}, j \right)} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d(a)} \left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g \left(a1^{|b|}, i_j \right)} \right) \le$$

$$\le \left(\text{Из определения функции } g \text{ ясно, что } \left\{ g \left(a1^{|b|}, j \right) \right\}_{j=1}^{d\left(a1^{|b|}\right)} = \left\{ g \left(a1^{|b|}, j \right) \right\}_{j=1}^{d(a)} \subseteq \{g(ab, j)\}_{j=1}^{d(ab)} \right) \le$$

$$\le \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d(ab)} \left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g(ab, i_j)} \right) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d(w_m)} \left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g(w_m, i_j)} \right) \le$$

$$\le \left(\text{Из определения функции } g \text{ ясно, что } \{g(w_m, j)\}_{j=1}^{d(w_m)} \subseteq \{g(w, j)\}_{j=1}^{d(w)} \right) \le$$

$$\le \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d(w)} \left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right).$$

Иными словами, последние два неравенства верны, так как w содержит все двойки из $a1^{|b|}$, причём именно на тех же местах.

Заметим, что данное выражение не зависит от a, b и m.

По Утверждению 9 при нашем $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$

$$\sum_{i=1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} < \infty \Longrightarrow \exists S \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} < s.$$

Выберем такое $S \in \mathbb{N}_0$. Пусть $c_2 = S$.

Несложно заметить (из раскрытия скобок при возведении в степень), что при $k \geq c_2 = S$

$$\sum_{S+1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \frac{\left(\sum_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} \right)^k}{k!} \leq \frac{s^k}{k!};$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < S+1 \leq i_2 < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right) \frac{\left(\sum_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} \right)^{k-1}}{(k-1)!} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!};$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < S+1 \leq i_3 < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right)^2 \frac{\left(\sum_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} \right)^{k-2}}{(k-2)!} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right)^2 \frac{s^{k-2}}{(k-2)!};$$

$$\ldots$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l < S+1 \leq i_{l+1} < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right)^l \frac{\left(\sum_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)} \right)^{k-l}}{(k-l)!} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{l} \frac{s^{k-l}}{(k-l)!};$$

$$\ldots$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_S < S+1 \leq i_{S+1} < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S} \frac{\left(\sum\limits_{i=S+1}^{d(w)} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{k-S}}{(k-S)!} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S} \frac{s^{k-S}}{(k-S)!}.$$

Выше написано $S+1$ неравенство, в l-ом неравенстве (при нумерации с нуля) слева написана сумма по таким k i-шкам, что ровно l из них строго меньше, чем $S+1$, а остальные $k-l$ – не меньше. И данную сумму мы оцениваем сверху. Ясно, что других вариантов расположения k i-шек нет, а значит, просуммировав данные неравенства, получим верхнюю оценку для всех таких наборов из k i-шек:

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d(w)} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \leq$$

$$\leq \frac{s^k}{k!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{2} \frac{s^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S} \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \leq$$

$$\leq \frac{s^k}{(k-S)!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right) \frac{s^{k-1}}{(k-S)!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{2} \frac{s^{k-2}}{(k-S)!} + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S} \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \leq$$

$$\leq (\text{Так как } s \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right) \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{2} \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S} \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} =$$

$$= \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right) + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{2} + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{S}\right) =$$

$$= \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \left(\sum_{j=0}^{S} \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{j}\right) \leq \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \left\lceil \sum_{j=0}^{S} \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)}\right)^{j} \right\rceil.$$

Пусть
$$c_1 = \left\lceil \sum_{j=0}^{S} \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right)^j \right\rceil < \infty.$$

При выбранных нами $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ и произвольных $a, b \in \mathbb{YF}$, $m, k \in \mathbb{N}_0$: $w_m = ab$, $k \geq c_2$ есть два случая:

1° $d(a) \geq k$.

В данном случае мы поняли, что

$$\frac{d(2^k, a)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d(w)} \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} g(w, i_j)} \right) \leq \frac{s^{k-S}}{(k-S)!} \left\lceil \sum_{j=0}^{S} \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{g(w,i)} \right)^j \right\rceil = c_1 \frac{s^{k-c_2}}{(k-c_2)!}.$$

2° $d(a) < k$.

Заметим, что при каждом шаге "вниз" количество двоек не увеличивается, так как мы можем только заменить двойку на единицу или удалить единицу, а значит, если $d(a) < k$, то $d(2^k, a) = 0$. Таким образом, в данном случае

$$\frac{d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} = 0 \leq c_1 \frac{s^{k-c_2}}{(k-c_2)!}.$$

Мы поняли, что при выбранных нами $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ и произвольных $a, b \in \mathbb{YF}$, $m, k \in \mathbb{N}_0$: $w_m = ab$, $k \geq c_2$ в любом случае

$$\frac{d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} \leq c_1 \frac{s^{k-c_2}}{(k-c_2)!},$$

что и требовалось.

Лемма доказана.

□

Теперь давайте докажем Теорему. Самое время вспомнить формулировку:

Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

1)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in \overline{P}(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in P(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 1.$$

Давайте при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $\delta \in (0,1)$ зафиксируем произвольные $m, n \in \mathbb{N}_0 : m \geq n \geq 1$.

Ясно, что если $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$ $\left(\text{то есть при } a,b \in \mathbb{YF},\ k \in \mathbb{N}\text{: } ab = w_m,\ |b| < (1-\delta)n,\ k > \frac{\delta n}{2}\right)$, то

$$\frac{|b|}{k} < \frac{(1-\delta)n}{\frac{\delta n}{2}} = \frac{2(1-\delta)n}{\delta n} = \frac{2(1-\delta)}{\delta} < \frac{2}{\delta} \Longrightarrow |b| < \frac{2}{\delta}k.$$

А значит, если $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$, то

$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right)}{d\left(\varepsilon, b\right)} = \left(\text{По Утверждению 1 при } (2^k b), 2^k, b \in \mathbb{YF}\right) = \frac{d\left(\varepsilon, b\right) d\left(\varepsilon, 2^k 1^{|b|}\right)}{d\left(\varepsilon, b\right)} =$$

$$= d\left(\varepsilon, 2^k 1^{|b|}\right) = (\text{По формуле для числа путей “вниз” в } \varepsilon) =$$

$$= \prod_{i=1}^{d\left(2^k 1^{|b|}\right)} g\left(2^k 1^{|b|}, i\right) = \prod_{i=1}^{k} g\left(2^k 1^{|b|}, i\right) = (\text{По определению функции } g) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} (|b| + 2i - 1) \leq \prod_{i=1}^{k} (|b| + 2k - 1) = (|b| + 2k - 1)^k < \left(\frac{2}{\delta}k + 2k - 1\right)^k.$$

Таким образом, мы поняли, что при $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$

$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right)}{d\left(\varepsilon, b\right)} < \left(\frac{2}{\delta}k + 2k - 1\right)^k.$$

Применим Лемму 3 при нашем $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $s = \dfrac{1}{2e\left(\frac{2}{\delta} + 2\right)}$ (ясно, что $s \in (0,1)$). По этой Лемме $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$: $\forall a,b \in \mathbb{YF}$, $m,k \in \mathbb{N}_0$: $w_m = ab$, $k \geq c_2$

$$\frac{d(2^k, a)}{d(\varepsilon, a1^{|b|})} \leq c_1 \frac{\left(\dfrac{1}{2e(\frac{2}{\delta} + 2)}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!}.$$

Рассматриваем данные c_1 и c_2.

Перемножив два неравенства и вспомнив определение $\overline{P}(w,n,\delta,m)$, получаем, что $\forall a,b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$, $k \geq c_2$

$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, b\right) d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} < \left(\frac{2}{\delta}k + 2k - 1\right)^k c_1 \frac{\left(\dfrac{1}{2e(\frac{2}{\delta} + 2)}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} \leq \left(\frac{2}{\delta}k + 2k\right)^k c_1 \frac{\left(\dfrac{1}{2e(\frac{2}{\delta} + 2)}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} \leq$$

$$\leq \left(k\left(\frac{2}{\delta} + 2\right)\right)^k c_1 \frac{\left(\dfrac{1}{2e\left(\frac{2}{\delta} + 2\right)}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} = k^k \left(\frac{2}{\delta} + 2\right)^k c_1 \frac{\left(\dfrac{1}{2e}\right)^{k-c_2} \left(\dfrac{2}{\delta} + 2\right)^{c_2 - k}}{(k-c_2)!} =$$

$$= k^k \left(\frac{2}{\delta}+2\right)^{c_2} c_1 \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} = c_1 \left(\frac{2}{\delta}+2\right)^{c_2} k^k \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} = \left(\text{при } C_1 = c_1 \left(\frac{2}{\delta}+2\right)^{c_2}\right) = C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!}.$$

Пусть $k > c_2$. Тогда ясно, что $(k-c_2) \in \mathbb{N}$. Применим формулу Стирлинга для $(k-c_2)$. Она гласит, что $\exists \theta_{k-c_2} \in (0,1)$:

$$(k-c_2)! = \sqrt{2\pi(k-c_2)} \left(\frac{k-c_2}{e}\right)^{k-c_2} \exp \frac{\theta_{k-c_2}}{12(k-c_2)}.$$

Таким образом, мы получаем, что $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$, $k > c_2$

$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, b) d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} < \left(\text{при } C_1 = c_1 \left(\frac{2}{\delta}+2\right)^{c_2}\right) < C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)!} =$$

$$= C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{\sqrt{2\pi(k-c_2)} \left(\frac{k-c_2}{e}\right)^{k-c_2} \exp \frac{\theta_{k-c_2}}{12(k-c_2)}} \le C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{k-c_2}}{\sqrt{2\pi(k-c_2)} \left(\frac{k-c_2}{e}\right)^{k-c_2}} \le$$

$$\le C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-c_2}}{\sqrt{2\pi(k-c_2)}\, (k-c_2)^{k-c_2}} \le C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-c_2}}{(k-c_2)^{k-c_2}} = C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{(k-c_2)^{k}} \cdot \frac{(k-c_2)^{c_2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{c_2}} \le$$

$$\le C_1 k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{(k-c_2)^{k}} k^{c_2} 2^{c_2} = 2^{c_2} C_1 k^{c_2} k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{(k-c_2)^{k}} = (\text{при } C_2 = 2^{c_2} C_1) =$$

$$= C_2 k^{c_2} k^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{(k-c_2)^{k}} = C_2 k^{c_2} \left(\frac{k}{k-c_2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Как известно,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k-c_2}\right)^k = e^{c_2},$$

а значит, существует $K \in \mathbb{N}$: $K > c_2$, $\forall k \in \mathbb{N} : k \ge K$

$$\left(\frac{k}{k-c_2}\right)^k < 2e^{c_2}.$$

Зафиксируем данное K.

Мы получаем, что $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a,b,k) \in \overline{P}(w,n,\delta,m)$, $k \ge K$

$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, b) d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} < \left(\text{при } C_2 = 2^{c_2} C_1,\ C_1 = c_1 \left(\frac{2}{\delta}+2\right)^{c_2}\right) < C_2 k^{c_2} \left(\frac{k}{k-c_2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k <$$

$$< C_2 k^{c_2} 2e^{c_2} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2C_2 e^{c_2} k^{c_2} \left(\frac{1}{2}\right)^k = (\text{при } C = 2C_2 e^{c_2}) = C k^{c_2} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ясно, что экспонента растёт быстрее многочлена, а значит, $\exists K' \in \mathbb{N}:$ $K' \geq K$, $\forall k \in \mathbb{N}: k \geq K'$
$$Ck^{c_2} < \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$
Зафиксируем данное K'.

Таким образом, мы получаем, что $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a, b, k) \in \overline{P}(w, n, \delta, m)$, $k \geq K'$
$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, b\right) d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right)} < \left(\text{при } C = 2C_2 e^{c_2},\ C_2 = 2^{c_2} C_1,\ C_1 = c_1 \left(\frac{2}{\delta} + 2\right)^{c_2}\right) <$$
$$< Ck^{c_2} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{4}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Это в свою очередь значит, что $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a, b, k) \in \overline{P}(w, n, \delta, m)$, $k \geq K'$
$$\frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d\left(\varepsilon, a1^{|b|}\right) d(\varepsilon, b)} < \left(\frac{2}{3}\right)^k \iff (\text{По Утверждению 1 при } (ab), a, b \in \mathbb{YF}) \iff$$
$$\iff \frac{d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)}{d(\varepsilon, ab)} < \left(\frac{2}{3}\right)^k \iff \frac{d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)}{d(\varepsilon, w_m)} < \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Пусть $m, n \in \mathbb{N}_0 : m \geq n \geq \dfrac{2K'}{\delta}$. Вспомним определение $\overline{P}(w, n, \delta, m)$ и поймём, что $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a, b, k) \in \overline{P}(w, n, \delta, m)$
$$k > \frac{\delta n}{2} \geq \frac{\delta \frac{2K'}{\delta}}{2} = \frac{2K'}{2} = K'.$$

Таким образом, мы получаем, что если $m, n \in \mathbb{N}_0 : m \geq n \geq \dfrac{2K'}{\delta}$, то $\forall a, b \in \mathbb{YF}$, $k \in \mathbb{N}$: $(a, b, k) \in \overline{P}(w, n, \delta, m)$
$$\frac{d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)}{d(\varepsilon, w_m)} < \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Давайте просуммируем данное выражение по $(a, b, k) \in \overline{P}(w, n, \delta, m)$. Для начала зафиксируем a и b и просуммируем по $k \in \mathbb{N} : k > \frac{\delta n}{2}$:
$$\sum_{k \in \mathbb{N}:\, k > \frac{\delta n}{2}} \frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, w_m)} < \sum_{k \in \mathbb{N}:\, k > \frac{\delta n}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k = \left\lfloor \frac{\delta n}{2} \right\rfloor + 1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{\left\lfloor \frac{\delta n}{2} \right\rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{\left\lfloor \frac{\delta n}{2} \right\rfloor + 1}.$$

Осталось просуммировать данное выражение по всем парам $(a, b) \in \mathbb{YF}^2 : ab = w_m$ и $|b| < (1 - \delta)n$. Несложно заметить, что наше выражение не зависит от a и b, а количество данных разбиений w_m точно не больше, чем n, так как $|b| < (1 - \delta)n < n \implies |b| \in \overline{n - 1}$.

А значит, если $m, n \in \mathbb{N}_0 : m \geq n \geq \dfrac{2K'}{\delta}$, то

$$\sum_{(a,b,k)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, w_m)} \leq n \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}_0\colon\, k>\frac{\delta n}{2}} \frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, w_m)} <$$

$$< n \cdot 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{\left\lfloor \frac{\delta n}{2} \right\rfloor + 1} = 3n \left(\frac{2}{3}\right)^{\left\lfloor \frac{\delta n}{2} \right\rfloor + 1} \leq 3n \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta n}{2}} = 3n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n.$$

Итак, таким образом, мы доказали, что $\exists N = K' \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $m \geq n \geq N$

$$\sum_{(a,b,k)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d\left(\varepsilon, 2^k b\right) d\left(2^k, a\right)}{d(\varepsilon, w_m)} < 3n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n.$$

А это значит, что $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$\sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \mu_w(v) = \sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)}\right) \leq$$

$$\leq \text{ (По Лемме 2 при } w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \delta \in (0,1),\ n, m \in \mathbb{N}_0) \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{(a,b,k)\in\overline{P}(w,n,\delta,m)} \frac{d(\varepsilon, 2^k b) d(2^k, a)}{d(\varepsilon, w_m)}\right) \leq 3n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n.$$

Ясно, что $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$

$$\mu_w(v) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \geq 0,$$

а значит, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\delta \in (0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$3n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n \geq \sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \mu_w(v) \geq 0.$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(3n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right)^n}\right) = 0,$$

так как экспонента растёт быстрее многочлена.

А значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{P}(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 0,$$

что доказывает первый пункт.

Также заметим, что

- $$\overline{P}(w,n,\delta)\cup P(w,n,\delta) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < (1-\delta)n\}\cup\{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq (1-\delta)n\} = \mathbb{YF}_n;$$

- $$\overline{P}(w,n,\delta)\cap P(w,n,\delta) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < (1-\delta)n\}\cap\{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq (1-\delta)n\} = \varnothing;$$

- (Следствие 2) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$ и $n \in \mathbb{N}_0$
$$\sum_{v\in\mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in P(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 1,$$

то есть второй пункт доказан.

Оба пункта доказаны.

Теорема доказана.

$\square$

4 Доказательство Следствия 5

Обозначение 36. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n, l \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

- $$Q(w,n,l) := \{v \in \mathbb{YF}_n : \ h'(v,w) \geq l\};$$
- $$\overline{Q}(w,n,l) := \{v \in \mathbb{YF}_n : \ h'(v,w) < l\}.$$

Следствие 5 (Из Теоремы 2)**.** *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $l \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

1)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_w(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in Q(w,n,l)} \mu_w(v) = 1.$$

Доказательство. Давайте применим Теорему 2 (первый пункт) при $\delta = \frac{1}{2}$ и том же $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{P}\left(w,n,\frac{1}{2}\right)} \mu_w(v) = 0.$$

Несложно заметить, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2l$
$$\overline{P}\left(w,n,\frac{1}{2}\right) = \left\{v \in \mathbb{YF}_n : \ h'(v,w) < \left(1 - \frac{1}{2}\right)n\right\} = \left\{v \in \mathbb{YF}_n : \ h'(v,w) < \frac{1}{2}n\right\} \supseteq$$
$$\supseteq \{v \in \mathbb{YF}_n : \ h'(v,w) < l\} = \overline{Q}(w,n,l).$$

Ясно, что $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$
$$\mu_w(v) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} \geq 0,$$
а значит, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $l \in \mathbb{N}_0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2l$
$$\sum_{v \in \overline{P}\left(w,n,\frac{1}{2}\right)} \mu_w(v) \geq \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_w(v) \geq 0.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_w(v) = 0,$$
что доказывает первый пункт.

Также заметим, что

- $$\overline{Q}\,(w,n,l) \cup Q\,(w,n,l) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < l\} \cup \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq l\} = \mathbb{YF}_n;$$

- $$\overline{Q}\,(w,n,l) \cap Q\,(w,n,l) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < l\} \cap \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq l\} = \varnothing;$$

- (Следствие 2) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$ и $n \in \mathbb{N}_0$
$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in Q(w,n,l)} \mu_w(v) = 1,$$

что доказывает второй пункт.

Таким образом, оба пункта доказаны.

Следствие доказано.

$\square$

5 Доказательство Следствия 6

Обозначение 37. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

- $$R(w,n,\varepsilon) := \{v \in \mathbb{YF}_n : \ \pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\};$$

- $$\overline{R}(w,n,\varepsilon) := \{v \in \mathbb{YF}_n : \ \pi(v) \notin (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\}.$$

Следствие 6 (Из Теоремы 2)**.** *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

1)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{R}(w,n,\varepsilon)} \mu_w(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in R(w,n,\varepsilon)} \mu_w(v) = 1.$$

Доказательство. Давайте докажем, что при данных $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют $\delta \in (0,1)$ и $N \in \mathbb{N}_0$: при любом $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$R(w,n,\varepsilon) \supseteq P(w,n,\delta).$$

Для этого докажем следующие утверждения:

Утверждение 10. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда* $\exists N'' \in \mathbb{N}_0$: $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : n \geq N''$, $v \in P(w,n,\delta)$

$$\frac{\pi(v)}{\pi(w)} < 1 + \varepsilon.$$

Доказательство. Ясно, что то, что $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ означает, что выражение $\frac{\pi(v)}{\pi(w)}$ определено.

Давайте считать, что при нашем $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и произвольно выбранной вершине $v \in \mathbb{YF}$
$$w = w'w''; \quad v = v'w'',$$
где w'' – самый длинный общий суффикс v и w. Ясно, что тут $w' \in \mathbb{YF}_\infty$, $v', w'' \in \mathbb{YF}$. Кроме того, из определения функции h' ясно, что $|w''| = h'(v,w)$.

Значит,

$$\frac{\pi(v)}{\pi(w)} = (\text{По Утверждению 4 при } v, v', w'' \in \mathbb{YF}, \text{ а также при } w, w', w'' \in \mathbb{YF}) =$$

$$= \frac{\pi(w'')\,\pi\left(v'1^{|w''|}\right)}{\pi(w'')\,\pi\left(w'1^{|w''|}\right)} = \frac{\pi\left(v'1^{|w''|}\right)}{\pi\left(w'1^{|w''|}\right)} \leq \left(\text{По Замечанию 12 при } \left(v'1^{|w''|}\right) \in \mathbb{YF}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi\left(w'1^{|w''|}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i:\, g\left(w'1^{|w''|},i\right)>1} \frac{g\left(w'1^{|w''|},i\right)-1}{g\left(w'1^{|w''|},i\right)}} =$$

$$= (\text{Следует из определения функции } g) = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i:\, g(w,i)>\max(1,|w''|)} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)}}.$$

Мы знаем, что $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, а это значит, что

$$\prod_{i:\, g(w,i)>1} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)} > 0,$$

а это значит, что $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n' \in \mathbb{N}_0 : n' \geq 1$ и

$$\prod_{i:\, g(w,i)>n'} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)} > 1-\varepsilon',$$

а это, в свою очередь, значит, что при нашем $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существует $n' \in \mathbb{N}_0$: $n' \geq 1$ и

$$\frac{1}{\displaystyle\prod_{i:\, g(w,i)>n'} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)}} < 1+\varepsilon.$$

Пусть $N'' = \left\lceil \frac{n'}{(1-\delta)} \right\rceil \in \mathbb{N}_0$. Тогда если $v \in P(w,n,\delta)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''$, то, по определению $P(w,n,\delta)$,

$$|w''| = h'(v,w) \geq (1-\delta)n \geq (1-\delta)N'' = (1-\delta)\left\lceil \frac{n'}{(1-\delta)} \right\rceil \geq (1-\delta)\frac{n'}{(1-\delta)} = n',$$

то есть

$$\frac{1}{\displaystyle\prod_{i:\, g(w,i)>|w''|} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)}} \leq \frac{1}{\displaystyle\prod_{i:\, g(w,i)>n'} \frac{g(w,i)-1}{g(w,i)}} < 1+\varepsilon,$$

а значит, если $v \in P(w,n,\delta)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''$, то

$$\frac{\pi(v)}{\pi(w)} < 1+\varepsilon,$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 11. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\delta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : n \geq 1$, $v \in P(w, n, \delta)$. *Тогда*

$$\prod_{i=1}^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} \frac{g\left(2^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} 1 2^{\left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil - 1}, i\right) - 1}{g\left(2^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} 1 2^{\left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil - 1}, i\right)} \leq \frac{\pi(v)}{\pi(w)}.$$

Доказательство. Ясно, что то, что $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ означает, что выражение $\dfrac{\pi(v)}{\pi(w)}$ определено.

Давайте считать, что при нашем $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и произвольно выбранной вершине $v \in \mathbb{YF}$

$$w = w'w''; \quad v = v'w'',$$

где w'' – самый длинный общий суффикс v и w. Ясно, что тут $w' \in \mathbb{YF}_\infty$, $v', w'' \in \mathbb{YF}$. Кроме того, из определения функции h' ясно, что $|w''| = h'(v, w)$.

Значит

$$\frac{\pi(v)}{\pi(w)} = (\text{По Утверждению 4 при } v, v', w'' \in \mathbb{YF}, \text{ а также при } w, w', w'' \in \mathbb{YF}) =$$

$$= \frac{\pi(w'')\, \pi\left(v'1^{|w''|}\right)}{\pi(w'')\, \pi\left(w'1^{|w''|}\right)} = \frac{\pi\left(v'1^{|w''|}\right)}{\pi\left(w'1^{|w''|}\right)} \geq \left(\text{По Замечанию 12 при } \left(w'1^{|w''|}\right) \in \mathbb{YF}\right) \geq$$

$$\geq \pi\left(v'1^{|w''|}\right) = \prod_{i:\, g\left(v'1^{|w''|}, i\right) > 1} \frac{g\left(v'1^{|w''|}, i\right) - 1}{g\left(v'1^{|w''|}, i\right)}.$$

Вспомним, что $v \in P(w, n, \delta)$ при $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 1$ и $\delta \in (0,1)$. А это значит, что

$$|w''| = h'(v, w) \geq (1-\delta)n > 0,$$

то есть (так как $|w''| \in \mathbb{N}_0$)

$$|w''| \geq 1.$$

Таким образом, из определения функции g ясно, что $\forall i \in \left\{1, \ldots, d\left(v'1^{|w''|}\right)\right\}$

$$g\left(v'1^{|w''|}, i\right) \geq 2.$$

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\prod_{i=1}^{d\left(v'1^{|w''|}\right)} \frac{g\left(v'1^{|w''|}, i\right) - 1}{g\left(v'1^{|w''|}, i\right)} = \prod_{i=1}^{d(v')} \frac{g\left(v'1^{|w''|}, i\right) - 1}{g\left(v'1^{|w''|}, i\right)}.$$

Вспомним, что $v \in P(w, n, \delta)$ при $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 1$ и $\delta \in (0,1)$. А это значит, что

$$|w''| = h'(v, w) \geq (1-\delta)n > 0.$$

Также ясно, что

$$(1-\delta)n+1 = 2\frac{(1-\delta)n}{2}+2-1 > 2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil - 1 \geq 2-1 = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\text{так как } \left(2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil - 1\right) \in \mathbb{Z}\right) \Longrightarrow (1-\delta)n \geq 2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil - 1 \geq 1.$$

Делаем вывод, что

$$|w''| = h'(v,w) \geq (1-\delta)n \geq 2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil - 1 \geq 1.$$

Таким образом, из определения функции g ясно, что $\forall i \in \left\{1,\ldots,d\left(v'1^{|w''|}\right)\right\} = \{1,\ldots,d\,(v')\} = \left\{1,\ldots,d\left(v'1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}\right)\right\}$

$$g\left(v'1^{|w''|},i\right) \geq g\left(v'1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right) \geq 2.$$

Таким образом, делаем вывод, что

$$\prod_{i=1}^{d(v')}\frac{g\left(v'1^{|w''|},i\right)-1}{g\left(v'1^{|w''|},i\right)} \geq \prod_{i=1}^{d(v')}\frac{g\left(v'1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)-1}{g\left(v'1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)} \geq$$

$$\geq (\text{По определению функции } g) \geq \prod_{i=1}^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}\frac{g\left(2^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)-1}{g\left(2^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)}.$$

Вспомним, что $v \in P(w,n,\delta)$ при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 1$ и $\delta \in (0,1)$. А это значит, что

$$|v'| = n-|w''| = n-h'(v,w) \leq n-(1-\delta)n = \delta n \Longrightarrow \frac{|v'|}{2} \leq \frac{\delta n}{2} \Longrightarrow \left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil \leq \left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil,$$

что, в свою очередь, значит, что

$$\prod_{i=1}^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}\frac{g\left(2^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)-1}{g\left(2^{\left\lceil\frac{|v'|}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)} \geq \prod_{i=1}^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}\frac{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)-1}{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{\pi(v)}{\pi(w)} \geq \prod_{i=1}^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}\frac{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)-1}{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1},i\right)},$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. $\square$

Лемма 4. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда* $\exists N' \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in (0,1) : \forall n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : n \geq N'$, $v \in P(w,n,\delta)$

$$1-\varepsilon < \frac{\pi(v)}{\pi(w)}.$$

Доказательство. По Утверждению 11 при нашем $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$ и произвольных $n \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in (0,1)$, $v \in \mathbb{YF} : n \geq 1$, $v \in P(w,n,\delta)$

$$\prod_{i=1}^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} \frac{g\left(2^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} 1^{2^{\left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil - 1}}, i\right) - 1}{g\left(2^{\left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil} 1^{2^{\left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil - 1}}, i\right)} \leq \frac{\pi(v)}{\pi(w)}.$$

Пусть $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ясно, что $\delta \in (0,1)$.

Теперь введём следующие обозначения:

- $$a = a(n) = \left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil;$$
- $$b = b(n) = \left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil.$$

Ясно, что

- $$a(n) = \left\lceil \frac{(1-\delta)n}{2} \right\rceil \geq \frac{(1-\delta)n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Longrightarrow a(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty;$$
- $$b(n) = \left\lceil \frac{\delta n}{2} \right\rceil \geq \frac{\delta n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Longrightarrow b(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Утверждение 11 при нашем $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$ и выбранном $\delta \in (0,1)$ в новых обозначениях принимает следующий вид (помним про определение функции g):

При произвольных $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : n \geq 1$, $v \in P(w,n,\delta)$

$$\prod_{i=a(n)}^{a(n)+b(n)-1} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{\pi(v)}{\pi(w)}.$$

Давайте найдём

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=a(n)}^{a(n)+b(n)-1} \frac{2i-1}{2i} \right).$$

Посчитаем, держа в голове, что $a(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ и $b(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, что в частности значит, что мы можем рассматривать только такие n, что $a(n) \geq 2$ и $b(n) \geq 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=a}^{a+b-1}\frac{2i-1}{2i}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=a}^{a+b-1}\frac{(2i-1)2i}{(2i)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\prod\limits_{i=2a-1}^{2a+2b-2} i}{\left(2^b\prod\limits_{i=a}^{a+b-1} i\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(2a+2b-2)!}{(2a-2)!}}{2^{2b}\left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!}\right)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2b}}\left(\frac{(a-1)!}{(a+b-1)!}\right)^2\frac{(2a+2b-2)!}{(2a-2)!}\right).$$

По формуле Стирлинга данное выражение равняется следующему выражению при некоторых $\theta_{a+b-1}, \theta_{a-1}, \theta_{2a-2}, \theta_{2a+2b-2} \in (0,1)$ (тут важно, что мы рассматривает только такие n, что $a(n) \geq 2$ и $b(n) \geq 1$, что, в свою очередь, значит, что $a+b-1 \geq 1$; $a-1 \geq 1$; $2a-2 \geq 1$; $2a+2b-2 \geq 1$):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2b}}\frac{2\pi(a-1)\left(\frac{(a-1)}{e}\right)^{2a-2}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{2\pi(a+b-1)\left(\frac{(a+b-1)}{e}\right)^{2a+2b-2}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2a+2b-2)}\left(\frac{(2a+2b-2)}{e}\right)^{2a+2b-2}\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\sqrt{2\pi(2a-2)}\left(\frac{(2a-2)}{e}\right)^{2a-2}\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2b}}\frac{(a-1)\left(a-1\right)^{2a-2}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{(a+b-1)\left(a+b-1\right)^{2a+2b-2}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt{(2a+2b-2)}\left(2a+2b-2\right)^{2a+2b-2}\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\sqrt{(2a-2)}\left(2a-2\right)^{2a-2}\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}\right).$$

Для начала рассмотрим

$$\frac{\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\frac{\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}.$$

Мы уже поняли, что $a(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ и $b(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, а это значит, что (помним, что если $i \in \mathbb{N}$, то $\theta_i \in (0,1)$)

- $$\lim_{n\to\infty}(a(n)-1)=\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)=1;$$

- $$\lim_{n\to\infty}(a(n)+b(n)-1)=\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)=1;$$

- $$\lim_{n\to\infty}(2a(n)+2b(n)-2)=\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}\right)=1;$$

- $$\lim_{n\to\infty}(2a(n)-2)=\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}\right)=1.$$

  А из этого следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\frac{\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}=1.$$

Таким образом, мы поняли, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2b}}\frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt{(2a+2b-2)}\,(2a+2b-2)^{2a+2b-2}\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\sqrt{(2a-2)}\,(2a-2)^{2a-2}\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2b}}\cdot\frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}}\cdot\frac{\sqrt{(2a+2b-2)}\,(2a+2b-2)^{2a+2b-2}}{\sqrt{(2a-2)}\,(2a-2)^{2a-2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}}\cdot\frac{\sqrt{(a+b-1)}\,(a+b-1)^{2a+2b-2}}{\sqrt{(a-1)}\,(a-1)^{2a-2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-1)}{(a+b-1)}\cdot\frac{\sqrt{(a+b-1)}}{\sqrt{(a-1)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+b-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a(n)-1}{a(n)+b(n)-1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil-1}}\right).$$

Заметим, что

- $$1-\frac{2}{(1-\delta)n}=\frac{(1-\delta)n-2}{(1-\delta)n}=\frac{\frac{(1-\delta)n}{2}-1}{\frac{(1-\delta)n}{2}}\leq\frac{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}{\frac{(1-\delta)n}{2}}\leq\frac{\frac{(1-\delta)n}{2}}{\frac{(1-\delta)n}{2}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{(1-\delta)n}\right)=1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}{\frac{(1-\delta)n}{2}}=1;$$

- $$1-\frac{2}{n+2}=\frac{n}{n+2}=\frac{\frac{n}{2}}{\frac{(1-\delta)n}{2}+\frac{\delta n}{2}+1}\leq\frac{\frac{n}{2}}{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil-1}\leq\frac{\frac{n}{2}}{\frac{(1-\delta)n}{2}+\frac{\delta n}{2}-1}=\frac{n}{n-2}=1+\frac{2}{n-2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)=1,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)=1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{2}}{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil-1}\right)=1.$$

А значит,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}{\frac{(1-\delta)n}{2}}\cdot\frac{(1-\delta)n}{2}\cdot\frac{\frac{n}{2}}{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil-1}\cdot\frac{2}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)n}{2}\cdot\frac{2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}(1-\delta)=1-\delta.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=a(n)}^{a(n)+b(n)-1}\frac{2i-1}{2i}\right)=1-\delta.$$

А это значит, что $\exists N'\in\mathbb{N}_0 : N'\geq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}_0 : n\geq N'$

$$\prod_{i=a(n)}^{a(n)+b(n)-1}\frac{2i-1}{2i}>1-2\delta\geq 1-2\frac{\varepsilon}{2}=1-\varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что при наших $w\in\mathbb{YF}_\infty^+$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ $\exists N'\in\mathbb{N}_0,\ \delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right)\in(0,1) : \forall n\in\mathbb{N}_0,\ v\in\mathbb{YF} : n\geq N',\ v\in P(w,n,\delta)$

$$1-\varepsilon<\prod_{i=a(n)}^{a(n)+b(n)-1}\frac{2i-1}{2i}=\prod_{i=1}^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}\frac{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2^{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}},i\right)-1}{g\left(2^{\left\lceil\frac{\delta n}{2}\right\rceil}1^{2^{\left\lceil\frac{(1-\delta)n}{2}\right\rceil-1}},i\right)}\leq\frac{\pi(v)}{\pi(w)},$$

что и требовалось.

Лемма доказана. □

Таким образом, по Утверждению 10 и Лемме 4 при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют $N = \max(N', N'') \in \mathbb{N}_0$ и $\delta \in (0,1)$: $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF}$: $n \geq N$, $v \in P(w, n, \delta)$

$$1 - \varepsilon < \frac{\pi(v)}{\pi(w)} < 1 + \varepsilon,$$

то есть

$$\pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon)),$$

то есть

$$v \in R(w, n, \varepsilon).$$

Таким образом, мы доказали, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют такие $N \in \mathbb{N}_0$ и $\delta \in (0,1)$: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$R(w, n, \varepsilon) \supseteq P(w, n, \delta).$$

Зафиксируем данные $N \in \mathbb{N}_0$ и $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

По Теореме 2 при нашем $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и только что зафиксированном $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in P(w,n,\delta)} \mu_w(v) = 1.$$

Кроме того, ясно что

- $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$ и $v \in \mathbb{YF}$

$$\mu_w(v) = \lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v) d(v, w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \geq 0;$$

- $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$R(w, n, \varepsilon) = \{v \in \mathbb{YF}_n : \ \pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} \subseteq \mathbb{YF}_n;$$

- (Следствие 2) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$ и $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

А значит, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$\sum_{v \in P(w,n,\delta)} \mu_w(v) \leq \sum_{v \in R(w,n,\varepsilon)} \mu_w(v) \leq \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in R(w,n,\varepsilon)} \mu_w(v) = 1,$$

что доказывает второй пункт.

Также заметим, что

- $$\overline{R}(w,n,\varepsilon) \cup R(w,n,\varepsilon) =$$
  $$= \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \notin (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} \cup \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} = \mathbb{YF}_n;$$
- $$\overline{R}(w,n,\varepsilon) \cap R(w,n,\varepsilon) =$$
  $$= \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \notin (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} \cap \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} = \varnothing;$$
- (Следствие 2) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$ и $n \in \mathbb{N}_0$
  $$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_w(v) = 1.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v \in \overline{R}(w,n,\varepsilon)} \mu_w(v) = 0,$$

что доказывает первый пункт.

Таким образом, оба пункта доказаны.

Следствие доказано.

□

6 Подготовка ко второй части доказательства гипотезы

Обозначение 38.

$$n(x,a) : \{(x,a) \subseteq \mathbb{YF} \times \mathbb{N}_0 : \ a \in \overline{\#x}\} \to \mathbb{YF}$$

– это функция, определённая следующим образом:
Если $\exists x', x'' \in \mathbb{YF} : x = x'x''$ и $\#x'' = a$, то $n(x,a) = x'$.

Обозначение 39.

$$k(x,a) : \{(x,a) \subseteq \mathbb{YF} \times \mathbb{N}_0 : \ a \in \overline{\#x}\} \to \mathbb{YF}$$

– это функция, определённая следующим образом:
Если $\exists x', x'' \in \mathbb{YF} : x = x'x''$ и $\#x'' = a$, то $k(x,a) = x''$.

Замечание 16.

- *Ясно, что $\forall x \in \mathbb{YF}$ и $a \in \overline{\#x}$ значение функции $n(x,a)$ – это вершина графа Юнга – Фибоначчи, номер которой – это первые (то есть самые левые) $(\#x - a)$ цифр номера x.*
- *Ясно, что $\forall x \in \mathbb{YF}$ и $a \in \overline{\#x}$ значение функции $k(x,a)$ – это вершина графа Юнга – Фибоначчи, номер которой – это последние (то есть самые правые) a цифр номера x.*
- *Очевидно, что $\forall x \in \mathbb{YF}$ и $a \in \overline{\#x}$ значение функции $n(x,a)$ всегда существует и однозначно определено.*
- *Очевидно, что $\forall x \in \mathbb{YF}$ и $a \in \overline{\#x}$ значение функции $k(x,a)$ всегда существует и однозначно определено.*

Замечание 17. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $a \in \mathbb{N}_0 : a \in \overline{\#x}$. Тогда*

- $$x = n(x,a)k(x,a);$$
- $$|x| = |n(x,a)| + |k(x,a)|.$$

Замечание 18. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда*

- $$n(x,0) = k(x,\#x) = x;$$
- $$n(x,\#x) = k(x,0) = \varepsilon.$$

Утверждение 12. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $a \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_0 \in \{1,2\} : a \in \overline{\#x}$. Тогда*

- $$n(\alpha_0 x, a) = \alpha_0 n(x, a);$$

- $$k(\alpha_0 x, a) = k(x, a).$$

Доказательство. Воспользуемся определением:

$$x = n(x,a)k(x,a),\ \#(k(x,a)) = a \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_0 x = \alpha_0 n(x,a)k(x,a),\ \#(k(x,a)) = a \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n(\alpha_0 x, a) = \alpha_0 n(x,a),\ k(\alpha_0 x, a) = k(x,a),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Обозначение 40. *Пусть* $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. *Тогда*

- $$K(n,y) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \exists v', v'' \in \mathbb{YF} :\ v = v'v'' \text{ и } |v''| = y\};$$

- $$\overline{K}(n,y) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \nexists v', v'' \in \mathbb{YF} :\ v = v'v'' \text{ и } |v''| = y\}.$$

Замечание 19. *Пусть* $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. *Тогда*

- $$K(n,y) = \{v'v'' :\ v' \in \mathbb{YF}_{n-y},\ v'' \in \mathbb{YF}_y\} = \mathbb{YF}_{n-y} \cdot \mathbb{YF}_y;$$

- $$\overline{K}(n,y) = \mathbb{YF}_n \backslash K(n,y) = \mathbb{YF}_n \backslash \left(\mathbb{YF}_{n-y} \cdot \mathbb{YF}_y\right);$$

- $$K(n,y) \cup \overline{K}(n,y) = \mathbb{YF}_n;$$

- $$K(n,y) \cap \overline{K}(n,y) = \varnothing.$$

Обозначение 41. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0 : y \leq |v|$. *Тогда*

- $$v(y) := \begin{cases} v' & \text{если } \exists v', v'' \in \mathbb{YF} : v = v'v'' \text{ и } |v''| = y \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases};$$

- $$v'(y) := \begin{cases} v'' & \text{если } \exists v', v'' \in \mathbb{YF} : v = v'v'' \text{ и } |v''| = y \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases}.$$

Замечание 20. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : v \in \mathbb{YF}_n$, $y \leq n$. *Тогда*

- $$v(y) \text{ определено} \Longleftrightarrow v'(y) \text{ определено} \Longleftrightarrow v \in K(n, y);$$

- $$v(y) \text{ не определено} \Longleftrightarrow v'(y) \text{ не определено} \Longleftrightarrow v \in \overline{K}(n, y).$$

Замечание 21. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$, $v \in K(n, y)$. *Тогда*

- $$v = v(y)v'(y);$$

- $$|v| = |v(y)| + |v'(y)|.$$

Замечание 22. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$. *Тогда*

- $$v(0) = v'(|v|) = v;$$

- $$v(|v|) = v'(0) = \varepsilon.$$

Обозначение 42. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0, 1]$. *Тогда*

$$d_\beta(x) := \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\,(x, i, 0)\right).$$

Утверждение 13. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда*

$$d'_1(x, y) = \sum_{i=0}^{\#x} \Big(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x, i)) \cdot d'_1(k(x, i), y)\Big).$$

Доказательство. По обозначению

$$d_1(n(x, i)) = \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} \left(1^i f\,(n(x, i), j, 0)\right) = \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\,(n(x, i), j, 0).$$

Утверждение 14 (Утверждение 5[1], Утверждение 1.7[2]). *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$: $x \neq \varepsilon$. *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{|x|} f\,(x, i, 0) = 0.$$

Подставим в Утверждение 14 $n(x,i)$ на место x и получим, что если $n(x,i) \neq \varepsilon$, то

$$d_1(n(x,i)) = \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i), j, 0\right) = 0.$$

Несложно заметить, что если $i \in \overline{\#x-1}$, то $n(x,i) \neq \varepsilon$, а если $i = \#x$, то $n(x,i) = \varepsilon$. А значит

$$\sum_{i=0}^{\#x} \left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\#x-1} \left(d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right)\right) + \left(\sum_{i=\#x}^{\#x} \left(d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\#x-1} \left(0 \cdot d'_1(k(x,i),y)\right)\right) + d_1(n(x,\#x)) \cdot d'_1(k(x,\#x),y) = d_1(n(x,\#x)) \cdot d'_1(k(x,\#x),y) =$$

$$= (\text{По Замечанию 18 при } x \in \mathbb{YF}) = d_1(\varepsilon) \cdot d'_1(x,y) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(1^i f(\varepsilon,i,0)\right)\right) d'_1(x,y) = \left(\sum_{i=0}^{0} \left(1^i f(\varepsilon,i,0)\right)\right) d'_1(x,y) = 1^0 f(\varepsilon,0,0) \cdot d'_1(x,y) = d'_1(x,y),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Утверждение 15. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$. *Тогда*

$$d'_\beta(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right).$$

Доказательство. Зафиксируем данный $y \in \mathbb{YF}_\infty$ и будем решать задачу по индукции по $\#x$.

<u>База</u>. $x \in \mathbb{YF}: \ \#x = 0 \Longleftrightarrow x = \varepsilon$:

$$\sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right) = \sum_{i=0}^{\#\varepsilon} \left(\beta^{|k(\varepsilon,i)|} d_\beta(n(\varepsilon,i)) \cdot d'_1(k(\varepsilon,i),y)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{0} \left(\beta^{|k(\varepsilon,i)|} d_\beta(n(\varepsilon,i)) \cdot d'_1(k(\varepsilon,i),y)\right) = \beta^{|k(\varepsilon,0)|} d_\beta(n(\varepsilon,0)) \cdot d'_1(k(\varepsilon,0),y) =$$

$$= \beta^{|\varepsilon|} d_\beta(\varepsilon) \cdot d'_1(\varepsilon,y) = \beta^0 \left(\sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(\beta^i f\left(\varepsilon,i,0\right)\right)\right) \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(1^i f\left(\varepsilon,i,h(\varepsilon,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \beta^0 \left(\sum_{i=0}^{0} \left(\beta^i f\left(\varepsilon, i, 0\right) \right) \right) \sum_{i=0}^{0} \left(1^i f\left(\varepsilon, i, h(\varepsilon, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) =$$

$$= \beta^0 \cdot \beta^0 f\left(\varepsilon, 0, 0\right) \left(1^0 f\left(\varepsilon, 0, 0\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - 0\right)}{g\left(y, j\right)} \right) = \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{g\left(y, j\right)}{g(y, j)} = 1.$$

$$d'_\beta(x, y) = d'_\beta(\varepsilon, y) = \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(\beta^i f\left(\varepsilon, i, h(\varepsilon, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{0} \left(\beta^i f\left(\varepsilon, i, h(\varepsilon, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) = \beta^0 f\left(\varepsilon, 0, 0\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - 0\right)}{g\left(y, j\right)} = \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{g\left(y, j\right)}{g(y, j)} = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\sum_{i=0}^{\#\varepsilon} \left(\beta^{|k(\varepsilon, i)|} d_\beta(n(\varepsilon, i)) \cdot d'_1(k(\varepsilon, i), y) \right) = 1 = d'_\beta(\varepsilon, y),$$

что и требовалось.

База доказана.

Переход к $x \in \mathbb{YF} : \ \#x \geq 1$:

Ясно, что $\#x \geq 1 \Longrightarrow \exists \alpha_0 \in \{1, 2\},\ x' \in \mathbb{YF} : x = \alpha_0 x'$.

Утверждение 16 (Лемма 7[1], Утверждение 1.8[2])**.** *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y, z \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_0 \in \{1, 2\} : y \in \overline{|x|}$, $z \in \overline{\#x}$. *Тогда*

$$f(x, y, z) = f(\alpha_0 x, y, z)(|\alpha_0 x| - y).$$

Ясно, что в условии Утверждения 16 $|\alpha_0 x| - y \geq |\alpha_0 x| - |x| = |\alpha_0| + |x| - |x| = \alpha_0 > 0$, что значит, что при $x \in \mathbb{YF}$, $y, z \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_0 \in \{1, 2\} : y \in \overline{|x|}$, $z \in \overline{\#x}$

$$f(\alpha_0 x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{(|\alpha_0 x| - y)}.$$

Посчитаем, воспользовавшись этим Утверждением. Рассмотрим два случая:

1° $h(x, y) < \#x$.

Снова рассмотрим два случая:

1.1° $\alpha_0 = 1$.

Вначале посчитаем, чему равна левая часть нашего равенства:

$$d'_\beta(x, y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, h(x, y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|1x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=|1x'|}^{|1x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y, j\right)}.$$

Применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{|x'|}$, $h(1x', y) \in \overline{\#x'}$ и $1 \in \{1, 2\}$ к каждому слагаемому суммы (Действительно верно, что $h(1x', y) \in \overline{\#x'}$, так как в данном случае $h(1x', y) = h(x, y) < \#x \Longrightarrow h(1x', y) \leq \#x - 1 = \#(1x') - 1 = 1 + \#x' - 1 = \#x'$). Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x', i, h(1x', y)\right)}{|1x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, h(1x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y, j\right)}.$$

Тут мы посчитали, чему равна левая сторона нашего равенства. Теперь будем считать, чему равна правая:

$$\sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x, i)) \cdot d_1'(k(x, i), y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(x,i)|} \left(\beta^j f\left(n(x, i), j, 0\right) \right) \right) d_1'(k(x, i), y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(\beta^{|k(1x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|} \left(\beta^j f\left(n(1x', i), j, 0\right) \right) \right) d_1'(k(1x', i), y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(1x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|} \left(\beta^j f\left(n(1x', i), j, 0\right) \right) \right) d_1'(k(1x', i), y) \right) +$$

$$+\sum_{i=\#(1x')}^{\#(1x')}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)=\right.$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+\right.$$

$$+\beta^{|k(1x',\#(1x'))|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',\#(1x'))|}\left(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$= ($По Замечанию 18 при $(1x') \in \mathbb{YF}) =$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1}\left(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=|n(1x',i)|}^{|n(1x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+\right.$$

$$+\beta^{|1x'|}\left(\sum_{j=0}^{|\varepsilon|}\left(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1}\left(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\beta^{|n(1x',i)|}f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\left(\sum_{j=0}^{0}\left(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$= ($По Утверждению 12 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $1 \in \{1,2\}$, ко всем слагаемым первой строчки$) =$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|1n(x',i)|-1}\left(\beta^j f\left(1n(x',i),j,0\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|+|n(1x',i)|}f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\cdot\beta^0 f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Применим Утверждение 16 при $(n(x',i)) \in \mathbb{YF}$, $j \in \overline{|1n(x',i)|-1} = \overline{|n(x',i)|}$, $0 \in \overline{\#(n(x',i))}$ и $1 \in \{1,2\}$ к каждому слагаемому первой строчки.

Кроме того, применим Замечание 17 при $(1x') \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому второй строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(1x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|1n(x',i)|-1} \left(\beta^j \frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|1n(x',i)|-j} \right) \right) d_1'(k(1x',i),y) \right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|1x'|} f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) +$$

$$+\beta^{|1x'|} f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right) \cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y) =$$

$= ($По Утверждению 12 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $1 \in \{1,2\}$ ко всем слагаемым первой строчки$) =$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(1x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1} \left(\beta^j \frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(1x',i)|-j} \right) \right) d_1'(k(1x',i),y) \right) +$$

$$+\beta^{|1x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) +$$

$$+\beta^{|1x'|} f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right) \cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Очевидно, что $\forall i \in \overline{\#x'}$

$$|k(1x',i)| + (|n(1x',i)|-1) = (|k(1x',i)| + |n(1x',i)|) - 1 =$$

$$= (\text{По Замечанию 17 при } (1x') \in \mathbb{YF},\ i \in \mathbb{N}_0) =$$

$$= |1x'| - 1 = 1 + |x'| - 1 = |x'|.$$

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0: \\ l+|k(1x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|n(1x',m)|-l} \cdot d_1'(k(1x',m),y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|1x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) +$$

$$+\beta^{|1x'|} f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right) \cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Очевидно, что если у нас есть пара $(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : l + |k(1x',m)| = k$, то по Замечанию 17 при $(1x') \in \mathbb{YF}$, $m \in \mathbb{N}_0$ ясно, что $l + |1x'| -$

$|n(1x',m)| = k$, а это значит, что $|n(1x',m)| - l = |1x'| - k$. Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(1x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(1x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Тут у нас есть пары $(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : l+|k(1x',m)| = k$ при $k\le|x'|$. Если $m=\#(1x')$, то

$$k = l+|k(1x',m)| = l+|k(1x',\#(1x'))| =$$

$$= (\text{По Замечанию 18 при } (1x')\in\mathbb{YF}) =$$

$$= l+|1x'| = l+1+|x'| \ge 0+1+k > k.$$

Противоречие. А это значит, что $m<\#(1x')$, то есть $m\in\overline{\#x'}$. Таким образом,

$$1x' = n(1x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff (\text{По Утверждению 12 при } x'\in\mathbb{YF},\ m\in\mathbb{N}_0,\ 1\in\{1,2\}) \iff$$

$$\iff 1x' = 1n(x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff x' = n(x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff k(x',m) = k(1x',m).$$

А значит наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Заметим, что

$$0 = |\varepsilon| = (\text{По Замечанию 18 при } (1x')\in\mathbb{YF}) = |n(1x',\#(1x'))|.$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),|n(1x',\#(1x'))|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=\#(1x')}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right).$$

Тут мы посчитали, чему равна правая сторона нашего равенства. Таким образом, мы поняли, что (вычтем правую сторону равенства из левого):

$$d_\beta'(x,y)-\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i\frac{f\left(x',i,h(1x',y)\right)}{|1x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(1x',|1x'|,h(1x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)}-$$

$$-\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)-$$

$$-\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right).$$

Запомним это равенство.

Теперь воспользуемся предположением индукции при $x'\in\mathbb{YF}$:

$$d_\beta'(x',y)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)\iff$$

$$\iff\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,h(x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)\iff$$

$\iff$ (По определению функции h, так как в данном случае $h(1x',y)<\#(1x')$) $\iff$

$$\iff\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,h(1x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right).$$

Заметим, что по обозначению

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(x',i)|}\left(\beta^j\left(f\left(n(x',i),j,0\right)\right)\right)\right)d_1'(k(x',i),y)\right)=$$

$=$ (По Замечанию 17 при $x'\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$, если $i\in\overline{\#x'}$, то $|k(x',i)|+|n(x',i)|=|x'|$) $=$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right).$$

А значит

$$\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,h(1x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d_1'(k(x',m),y)\right) \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \left(f\left(x',i,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d_1'(k(x',m),y)\right) \right)\right) = 0.$$

И это равенство верно для любого $\beta \in (0,1]$. А значит слева находится многочлен от β, тождественно равный нулю. А значит любой его коэффициент при β^i при $i \in \overline{|x'|}$ равен нулю. То есть $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$f\left(x',i,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} - \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d_1'(k(x',m),y)\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f\left(x',i,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d_1'(k(x',m),y)\right).$$

Теперь заметим, что если $i \in \overline{|x'|}$, то $|1x'| - i \geq |1x'| - |x'| = 1 + |x'| - |x'| = 1 > 0$. А значит $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$\beta^i \frac{f\left(x',i,h(1x',y)\right)}{|1x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} =$$

$$= \beta^i \frac{\sum\limits_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d_1'(k(x',m),y)\right)}{|1x'|-i} =$$

$$= \beta^i \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-i} \cdot d_1'(k(x',m),y)\right).$$

Просуммируем данное равенство по $i \in \overline{|x'|}$:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x',i,h(1x',y)\right)}{|1x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-i} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right).$$

А это значит, что (вернёмся к запомненному равенству)

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x',i,h(1x',y)\right)}{|1x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x',|1x'|,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right) -$$

$$- \beta^{|1x'|} \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} f\left(1x',|1x'|,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \beta^{|1x'|} \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} \left(f\left(1x',|1x'|,h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y) \right) \right).$$

По Утверждению 13 при наших $x \in \mathbb{YF}$ и $y \in \mathbb{YF}_\infty$

$$d_1'(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

а это значит, что (подставим $\beta = 1$ в равенство, к которому мы пришли)

$$0 = d_1'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= 1^{|1x'|} \left(f\left(1x', |1x'|, h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\left(1x', |1x'|, h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) = 0.$$

Таким образом, ясно, что

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} \left(f\left(1x', |1x'|, h(1x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) \right) = \beta^{|1x'|} \cdot 0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d_\beta'(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

что и требовалось.

В данном случае **Переход** доказан.

1.2° $\alpha_0 = 2$:

Вначале посчитаем, чему равна левая часть нашего равенства:

$$d'_\beta(x,y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|2x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=|x'|+1}^{|x'|+1} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=|2x'|}^{|2x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|x'|+1} f\left(2x', |x'|+1, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |x'| - 1\right)}{g\left(y,j\right)} +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Утверждение 17 (Утверждение 9.3[1], Утверждение 1.11[2])**.** *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $z \in \mathbb{N}_0 : z \in \overline{\#(2x)}$. *Тогда*

$$f(2x, |x|+1, z) = 0.$$

Применим Утверждение 17 при $x' \in \mathbb{YF}$, $h(2x', y) \in \mathbb{N}_0$ и поймём, что наше выражение равно следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|x'|+1} \cdot 0 \cdot \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |x'| - 1\right)}{g\left(y,j\right)} +$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(2x',|2x'|,h(2x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(2x',i,h(2x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(2x',|2x'|,h(2x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{|x'|}$, $h(2x',y) \in \overline{\#x'}$ и $2 \in \{1,2\}$ к каждому слагаемому суммы (Действительно верно, что $h(2x',y) \in \overline{\#x'}$, так как в данном случае $h(2x',y) = h(x,y) < \#x \Longrightarrow h(2x',y) \leq \#x-1 = \#(2x')-1 = 1+\#x'-1 = \#x'$):
Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x',i,h(2x',y)\right)}{|2x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(2x',|2x'|,h(2x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Тут мы посчитали, чему равна левая сторона нашего равенства. Теперь будем считать, чему равна правая:

$$\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(x,i)|}\left(\beta^j f\left(n(x,i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=\#(2x')}^{\#(2x')}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|k(2x',\#(2x'))|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',\#(2x'))|}\left(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=(\text{По Замечанию 18 при } (2x')\in\mathbb{YF})=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=|n(2x',i)|-1}^{|n(2x',i)|-1}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=|n(2x',i)|}^{|n(2x',i)|}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\left(\sum_{j=0}^{|\varepsilon|}\left(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|-1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\left(\sum_{j=0}^{0}\left(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=(\text{По Утверждению 12 при } x'\in\mathbb{YF},\ i\in\mathbb{N}_0,\ 2\in\{1,2\} \text{ ко всем слагаемым первых строчек})=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|2n(x',i)|-2}\left(\beta^j f\left(2n(x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|2n(x',i)|-1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|+|n(2x',i)|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\cdot\beta^0 f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Применим Утверждение 16 при $(n(x',i)) \in \mathbb{YF}$, $j \in \overline{|2n(x',i)|-2} = \overline{|n(x',i)|}$, $0 \in \overline{\#(n(x',i))}$ и $2 \in \{1,2\}$ к каждому слагаемому первой строчки.

Кроме того, применим Замечание 17 при $(2x') \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому третьей строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|2n(x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|2n(x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|n(x',i)|+1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$=$ (По Утверждению 12 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $2 \in \{1,2\}$ ко всем слагаемым первой строчки) $=$

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(2x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|n(x',i)|+1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Применим Утверждение 17 к каждому слагаемому второй строчки при $n(x',i) \in \mathbb{YF}$, $0 \in \mathbb{N}_0$ и поймём, что наше выражение равно следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(2x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}\cdot 0\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(n(2x', \#(2x')), 0, 0\right) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(2x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2} \left(\beta^j \frac{f\left(n(x',i), j, 0\right)}{|n(2x',i)| - j} \right) \right) d_1'(k(2x',i), y) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i), y) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(n(2x', \#(2x')), 0, 0\right) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y).$$

Очевидно, что $\forall i \in \overline{\#x'}$

$$|k(2x',i)| + (|n(2x',i)| - 2) = (|k(2x',i)| + |n(2x',i)|) - 2 =$$

$$= (\text{По Замечанию 17 при } (2x') \in \mathbb{YF},\ i \in \mathbb{N}_0) =$$

$$= |2x'| - 2 = 2 + |x'| - 2 = |x'|.$$

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(2x',m)| = k}} \left(\frac{f\left(n(x',m), l, 0\right)}{|n(2x',m)| - l} \cdot d_1'(k(2x',m), y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i), y) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(n(2x', \#(2x')), 0, 0\right) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y).$$

Очевидно, что если у нас есть пара $(l, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : l + |k(2x', m)| = k$, то по Замечанию 17 при $(2x') \in \mathbb{YF}$, $m \in \mathbb{N}_0$ ясно, что $l + |2x'| - |n(2x', m)| = k$, а это значит, что $|n(2x', m)| - l = |2x'| - k$. Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(2x',m)| = k}} \left(\frac{f\left(n(x',m), l, 0\right)}{|2x'| - k} \cdot d_1'(k(2x',m), y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i), y) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(n(2x', \#(2x')), 0, 0\right) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y).$$

Тут у нас есть пары $(l, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : l + |k(2x', m)| = k$ при $k \leq |x'|$. Если $m = \#(2x')$, то

$$k = l + |k(2x', m)| = l + |k(2x', \#(2x'))| =$$

$$= (\text{По Замечанию 18 при } (2x') \in \mathbb{YF}) =$$

$$= l + |2x'| = l + 2 + |x'| \geq 0 + 2 + k > k.$$

Противоречие. А это значит, что $m < \#(2x')$, то есть $m \in \overline{\#x'}$. Таким образом,

$$2x' = n(2x', m)k(2x', m),\ \#(k(2x', m)) = m,\ m \in \overline{\#x'} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\text{По Утверждению 12 при } x' \in \mathbb{YF},\ m \in \mathbb{N}_0,\ 2 \in \{1, 2\}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2x' = 2n(x', m)k(2x', m),\ \#(k(2x', m)) = m,\ m \in \overline{\#x'} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x' = n(x', m)k(2x', m),\ \#(k(2x', m)) = m,\ m \in \overline{\#x'} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow k(x', m) = k(2x', m).$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x', m)| = k}} \left(\frac{f\,(n(x', m), l, 0)}{|2x'| - k} \cdot d_1'(k(x', m), y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} (f\,(n(2x', i), |n(2x', i)|, 0) \cdot d_1'(k(2x', i), y)) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\,(n(2x', \#(2x')), 0, 0) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y).$$

Заметим, что

$$0 = |\varepsilon| = (\text{По Замечанию 18 при } (2x') \in \mathbb{YF}) = |n(2x', \#(2x'))|.$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x', m)| = k}} \left(\frac{f\,(n(x', m), l, 0)}{|2x'| - k} \cdot d_1'(k(x', m), y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} (f\,(n(2x', i), |n(2x', i)|, 0) \cdot d_1'(k(2x', i), y)) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\,(n(2x', \#(2x')), |n(2x', \#(2x'))|, 0) \cdot d_1'(k(2x', \#(2x')), y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#x'} \left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=\#(2x')}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right).$$

Тут мы посчитали, чему равна правая сторона нашего равенства. Таким образом, мы поняли, что (вычтем правую сторону равенства из левого)

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x',i,h(2x',y)\right)}{|2x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x',|2x'|,h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k} \cdot d_1'(k(x',m),y) \right) \right) -$$

$$-\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right).$$

Запомним это равенство.

Теперь воспользуемся предположением индукции при $x' \in \mathbb{YF}$:

$$d'_\beta(x', y) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} d_\beta(n(x',i)) \cdot d'_1(k(x',i),y)\right) \iff$$

$$\iff \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, h(x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} d_\beta(n(x',i)) \cdot d'_1(k(x',i),y)\right) \iff$$

$\iff$ (По определению функции h, так как в данном случае $h(2x', y) < \#(2x')$) $\iff$

$$\iff \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} d_\beta(n(x',i)) \cdot d'_1(k(x',i),y)\right).$$

Заметим, что по обозначению

$$\sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} d_\beta(n(x',i)) \cdot d'_1(k(x',i),y)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(x',i)|} \left(\beta^j \left(f\left(n(x',i),j,0\right)\right)\right)\right) d'_1(k(x',i),y)\right) =$$

$= $ (По Замечанию 17 при $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ если $i \in \overline{\#x'}$, то $|k(x',i)| + |n(x',i)| = |x'|$) $=$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0: \\ l+|k(x',m)|=k}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d'_1(k(x',m),y)\right)\right).$$

А значит

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0: \\ l+|k(x',m)|=k}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d'_1(k(x',m),y)\right)\right) \iff$$

$$\iff \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \left(f\left(x', i, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0: \\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right) \cdot d'_1(k(x',m),y)\right)\right)\right) = 0.$$

И это равенство верно для любого $\beta \in (0,1]$. А значит слева находится многочлен от β, тождественно равный нулю. А значит любой его коэффициент при β^i при $i \in \overline{|x'|}$ равен нулю. То есть $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$f\left(x', i, h(2x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} - \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x', m), l, 0\right) \cdot d'_1(k(x', m), y)\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f\left(x', i, h(2x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} = \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x', m), l, 0\right) \cdot d'_1(k(x', m), y)\right).$$

Теперь заметим, что если $i \in \overline{|x'|}$, то $|2x'| - i \geq |2x'| - |x'| = 2 + |x'| - |x'| = 2 > 0$. А значит $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$\beta^i \frac{f\left(x', i, h(2x', y)\right)}{|2x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} =$$

$$= \beta^i \frac{\sum\limits_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x', m), l, 0\right) \cdot d'_1(k(x', m), y)\right)}{|2x'| - i} =$$

$$= \beta^i \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(\frac{f\left(n(x', m), l, 0\right)}{|2x'| - i} \cdot d'_1(k(x', m), y)\right).$$

Просуммируем данное равенство по $i \in \overline{|x'|}$:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x', i, h(2x', y)\right)}{|2x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(\frac{f\left(n(x', m), l, 0\right)}{|2x'| - i} \cdot d'_1(k(x', m), y)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = k}} \left(\frac{f\left(n(x', m), l, 0\right)}{|2x'| - k} \cdot d'_1(k(x', m), y)\right)\right).$$

А это значит, что (вернёмся к запомненному равенству)

$$d'_\beta(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x', i, h(2x',y)\right)}{|2x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$-\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0: \\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k} \cdot d'_1(k(x',m),y)\right)\right) -$$

$$-\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d'_1(k(2x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$-\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d'_1(k(2x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|2x'|}\left(f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d'_1(k(2x',i),y)\right)\right).$$

По Утверждению 13 при наших $x \in \mathbb{YF}$ и $y \in \mathbb{YF}_\infty$

$$d'_1(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x}\left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right),$$

а это значит, что (подставим $\beta = 1$ в равенство, к которому мы пришли):

$$0 = d'_1(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x}\left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right) =$$

$$= 1^{|2x'|} \left(f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) = 0.$$

Таким образом, ясно, что

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|2x'|} \left(f\left(2x', |2x'|, h(2x',y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) \right) = \beta^{|2x'|} \cdot 0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d_\beta'(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

что и требовалось.

В данном случае <u>**Переход**</u> доказан.

2° $h(x,y) = \#x$.

Опять рассмотрим два случая:

2.1° $\alpha_0 = 1$.

Вначале посчитаем, чему равна левая часть нашего равенства:

$$d_\beta'(x,y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, \#x\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|1x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=|1x'|}^{|1x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Утверждение 18 (Утверждение 9.2[1], Утверждение 1.10[2])**.** *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0 : y \in \overline{|x|}$. *Тогда*

$$f(1x, y, \#x) = f(1x, y, \#(1x)).$$

Применим Утверждение 18 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому первой строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(1x', i, \#x'\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{|x'|}$, $\#x' \in \overline{\#x'}$ и $1 \in \{1, 2\}$ к каждому слагаемому суммы и поймём, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x'\right)}{|1x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Тут мы посчитали, чему равна левая сторона нашего равенства. Теперь будем считать, чему равна правая:

$$\sum_{i=0}^{\#x}\Big(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d'_1(k(x,i),y)\Big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(x,i)|}\big(\beta^j f\left(n(x,i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=\#(1x')}^{\#(1x')}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|k(1x',\#(1x'))|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',\#(1x'))|}\big(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$$=(\text{По Замечанию 18 при }(1x')\in\mathbb{YF})=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=|n(1x',i)|}^{|n(1x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\left(\sum_{j=0}^{|\varepsilon|}\big(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1}\big(\beta^j f\left(n(1x',i),j,0\right)\big)\right)d'_1(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\Big(\beta^{|k(1x',i)|}\Big(\beta^{|n(1x',i)|}f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\Big)d'_1(k(1x',i),y)\Big)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\left(\sum_{j=0}^{0}\left(\beta^j f\left(n(1x',\#(1x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

= (По Утверждению 12 при $x'\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$, $1\in\{1,2\}$ ко всем слагаемым первой строчки) =

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|1n(x',i)|-1}\left(\beta^j f\left(1n(x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|+|n(1x',i)|}f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\cdot\beta^0 f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Применим Утверждение 16 при $(n(x',i))\in\mathbb{YF}$, $j\in\overline{|1n(x',i)|-1}=\overline{|n(x',i)|}$, $0\in\overline{\#(n(x',i))}$ и $1\in\{1,2\}$ к каждому слагаемому первой строчки.

Кроме того, применим Замечание 17 при $(1x')\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому второй строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|1n(x',i)|-1}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|1n(x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

= (По Утверждению 12 при $x'\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$, $1\in\{1,2\}$ ко всем слагаемым первой строчки) =

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(1x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(1x',i)|-1}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(1x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Очевидно, что $\forall i\in\overline{\#x'}$

$$|k(1x',i)|+(|n(1x',i)|-1)=(|k(1x',i)|+|n(1x',i)|)-1=$$

$$=(\text{По Замечанию 17 при }(1x')\in\mathbb{YF},\ i\in\mathbb{N}_0)=$$

$$=|1x'|-1=1+|x'|-1=|x'|.$$

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(1x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|n(1x',m)|-l}\cdot d_1'(k(1x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Очевидно, что если у нас есть пара $(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : l+|k(1x',m)|=k$, то по Замечанию 17 при $(1x')\in\mathbb{YF}$, $m\in\mathbb{N}_0$ ясно, что $l+|1x'|-|n(1x',m)|=k$, а это значит, что $|n(1x',m)|-l=|1x'|-k$. Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(1x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(1x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\left(f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Тут у нас есть пары $(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : l+|k(1x',m)|=k$ при $k\le|x'|$. Если $m=\#(1x')$, то

$$k=l+|k(1x',m)|=l+|k(1x',\#(1x'))|=$$
$$=(\text{По Замечанию 18 при } (1x')\in\mathbb{YF})=$$
$$=l+|1x'|=l+1+|x'|\ge 0+1+k>k.$$

Противоречие. А это значит, что $m<\#(1x')$, то есть $m\in\overline{\#x'}$. Таким образом,

$$1x'=n(1x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m))=m,\ m\in\overline{\#x'}\iff$$
$$\iff(\text{По Утверждению 12 при } x'\in\mathbb{YF},\ m\in\mathbb{N}_0,\ 1\in\{1,2\})\iff$$
$$\iff 1x'=1n(x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m))=m,\ m\in\overline{\#x'}\iff$$
$$\iff x'=n(x',m)k(1x',m),\ \#(k(1x',m))=m,\ m\in\overline{\#x'}\iff$$
$$\iff k(x',m)=k(1x',m).$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y).$$

Заметим, что

$$0=|\varepsilon|=(\text{По Замечанию 18 при } (1x')\in\mathbb{YF})=|n(1x',\#(1x'))|.$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(n(1x',\#(1x')),|n(1x',\#(1x'))|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',\#(1x')),y)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=\#(1x')}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right).$$

Тут мы посчитали, чему равна правая сторона нашего равенства. Таким образом, мы поняли, что (вычтем правую сторону равенства из левого)

$$d_\beta'(x,y)-\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i\frac{f\left(x',i,\#x'\right)}{|1x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)+$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(1x',|1x'|,\#(1x')\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)}-$$

$$-\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)-$$

$$-\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right).$$

Запомним это равенство.

Теперь воспользуемся предположением индукции при $x'\in\mathbb{YF}$:

$$d_\beta'(x',y)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,h(x',y)\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)\Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow$ (По определению функции h, так как в данном случае $h(1x',y)=\#(1x')$) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,\#x'\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right).$$

Заметим, что по обозначению

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(x',i)|}d_\beta(n(x',i))\cdot d_1'(k(x',i),y)\right)=$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x',i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(x',i)|} \left(\beta^j \left(f\left(n(x',i), j, 0 \right) \right) \right) d'_1(k(x',i), y) \right) =$$

= (Так как по Замечанию 17 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$, если $i \in \overline{\#x'}$, то $|k(x',i)| + |n(x',i)| = |x'|$) =

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = k}} \left(f\left(n(x',m), l, 0 \right) \cdot d'_1(k(x',m), y) \right) \right).$$

А значит

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, \#x' \right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j \right) - i \right)}{g\left(y, j \right)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = k}} \left(f\left(n(x',m), l, 0 \right) \cdot d'_1(k(x',m), y) \right) \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \left(f\left(x', i, \#x' \right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j \right) - i \right)}{g\left(y, j \right)} - \right.\right. -$$

$$\left.\left. - \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x',m), l, 0 \right) \cdot d'_1(k(x',m), y) \right) \right) \right) = 0.$$

И это равенство верно для любого $\beta \in (0, 1]$. А значит слева находится многочлен от β, тождественно равный нулю. А значит любой его коэффициент при β^i при $i \in \overline{|x'|}$ равен нулю. То есть $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$f\left(x', i, \#x' \right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j \right) - i \right)}{g\left(y, j \right)} - \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x',m), l, 0 \right) \cdot d'_1(k(x',m), y) \right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f\left(x', i, \#x' \right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j \right) - i \right)}{g\left(y, j \right)} = \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x',m)| = i}} \left(f\left(n(x',m), l, 0 \right) \cdot d'_1(k(x',m), y) \right).$$

Теперь заметим, что если $i \in \overline{|x'|}$, то $|1x'| - i \geq |1x'| - |x'| = 1 + |x'| - |x'| = 1 > 0$. А значит $\forall i \in \overline{|x'|}$

$$\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x' \right)}{|1x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j \right) - i \right)}{g\left(y, j \right)} =$$

$$= \beta^i \frac{\sum\limits_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)}{|1x'|-i} =$$

$$= \beta^i \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-i}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right).$$

Просуммируем данное равенство по $i \in \overline{|x'|}$:

$$\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x',i,\#x'\right)}{|1x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-i}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right).$$

А это значит, что (вернёмся к запомненному равенству)

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x',i,\#x'\right)}{|1x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+\beta^{|1x'|}f\left(1x',|1x'|,\#(1x')\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|1x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right) -$$

$$-\beta^{|1x'|}\sum_{i=0}^{\#(1x')}\left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$-\beta^{|1x'|} \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} \left(f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) \right).$$

По Утверждению 13 при наших $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{YF}_\infty$

$$d_1'(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

а это значит, что (подставим $\beta = 1$ в равенство, к которому мы пришли)

$$0 = d_1'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(1^{|k(x,i)|} d_1(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= 1^{|1x'|} \left(f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i), |n(1x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(1x',i),y)\right) = 0.$$

Таким образом, ясно, что

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|1x'|} \left(f\left(1x', |1x'|, \#(1x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |1x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$- \sum_{i=0}^{\#(1x')} \left(f\left(n(1x',i),|n(1x',i)|,0\right) \cdot d'_1(k(1x',i),y)\right)\Bigg) = \beta^{|1x'|} \cdot 0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d'_\beta(x,y) = \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i),y)\right),$$

что и требовалось.

В данном случае **Переход** доказан.

2.2° $\alpha_0 = 2$:

Вначале посчитаем, чему равна левая часть нашего равенства:

$$d'_\beta(x,y) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x,i,h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x,i,\#x\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|2x'|} \left(\beta^i f\left(2x',i,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x',i,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+ \sum_{i=|x'|+1}^{|x'|+1} \left(\beta^i f\left(2x',i,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+ \sum_{i=|2x'|}^{|2x'|} \left(\beta^i f\left(2x',i,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x',i,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+\beta^{|x'|+1} f\left(2x',|x'|+1,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|x'|-1\right)}{g\left(y,j\right)} +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x',|2x'|,\#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Применим Утверждение 17 для $x' \in \mathbb{YF}$, $\#(2x') \in \mathbb{N}_0$ и поймём, что наше выражение равно следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|x'|+1} \cdot 0 \cdot \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |x'| - 1\right)}{g\left(y,j\right)} +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Утверждение 19 (Утверждение 9.1[1], Утверждение 1.9[2])**.** *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0 : y \in \overline{2x}$. *Тогда*

$$f(2x, y, \#x) = f(2x, y, \#(2x)).$$

Применим Утверждение 19 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ к каждому слагаемого первой строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(2x', i, \#x'\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{|x'|}$, $\#x' \in \overline{\#x'}$ и $2 \in \{1, 2\}$ к каждому слагаемому суммы и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x'\right)}{|2x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - i\right)}{g\left(y,j\right)} \right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}.$$

Тут мы посчитали, чему равна левая сторона нашего равенства. Теперь будем считать, чему равна правая:

$$\sum_{i=0}^{\#x}\Big(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\Big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(x,i)|}\big(\beta^j f\left(n(x,i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=\#(2x')}^{\#(2x')}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|k(2x',\#(2x'))|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',\#(2x'))|}\big(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=(\text{По Замечанию 18 при }(2x')\in\mathbb{YF})=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=|n(2x',i)|-1}^{|n(2x',i)|-1}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=|n(2x',i)|}^{|n(2x',i)|}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\left(\sum_{j=0}^{|\varepsilon|}\big(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\big(\beta^j f\left(n(2x',i),j,0\right)\big)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|-1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\left(\sum_{j=0}^{0}\left(\beta^j f\left(n(2x',\#(2x')),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

= (По Утверждению 12 при $x'\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$, $2\in\{1,2\}$ ко всем слагаемым первых строчек) =

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|2n(x',i)|-2}\left(\beta^j f\left(2n(x',i),j,0\right)\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|2n(x',i)|-1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|+|n(2x',i)|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\beta^0 f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Применим Утверждение 16 при $(n(x',i))\in\mathbb{YF}$, $j\in\overline{|2n(x',i)|-2}=\overline{|n(x',i)|}$, $0\in\overline{\#(n(x',i))}$ и $2\in\{1,2\}$ к каждому слагаемому первой строчки.

Кроме того, применим Замечание 17 при $(2x')\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому третьей строчки и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|2n(x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|2n(x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|n(x',i)|+1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

= (По Утверждению 12 при $x'\in\mathbb{YF}$, $i\in\mathbb{N}_0$, $2\in\{1,2\}$ ко всем слагаемым первой строчки) =

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(2x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}f\left(2n(x',i),|n(x',i)|+1,0\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Применим Утверждение 17 при $n(x',i)\in\mathbb{YF}$ и $0\in\mathbb{N}_0$ к каждому слагаемому второй строчки и поймём, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(2x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\beta^{|n(2x',i)|-1}\cdot 0\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\#x'}\left(\beta^{|k(2x',i)|}\left(\sum_{j=0}^{|n(2x',i)|-2}\left(\beta^j\frac{f\left(n(x',i),j,0\right)}{|n(2x',i)|-j}\right)\right)d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Очевидно, что $\forall i\in\overline{\#x'}$

$$|k(2x',i)|+(|n(2x',i)|-2)=(|k(2x',i)|+|n(2x',i)|)-2=$$

$$=(\text{По Замечанию 17 при }(2x')\in\mathbb{YF},\ i\in\mathbb{N}_0)=$$

$$=|2x'|-2=2+|x'|-2=|x'|.$$

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(2x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|n(2x',m)|-l}\cdot d_1'(k(2x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Очевидно, что если у нас есть пара $(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : l+|k(2x',m)| = k$, то по Замечанию 17 при $(2x')\in\mathbb{YF}$, $m\in\mathbb{N}_0$ ясно, что $l+|2x'|-|n(2x',m)| = k$, а это значит, что $|n(2x',m)|-l = |2x'|-k$. Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(2x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(2x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Тут у нас есть пары $(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : l+|k(2x',m)| = k$ при $k\le|x'|$. Если $m=\#(2x')$, то

$$k = l+|k(2x',m)| = l+|k(2x',\#(2x'))| =$$

$$= (\text{По Замечанию 18 при } (2x')\in\mathbb{YF}) =$$

$$= l+|2x'| = l+2+|x'| \ge 0+2+k > k.$$

Противоречие. А это значит, что $m<\#(2x')$, то есть $m\in\overline{\#x'}$. Таким образом,

$$2x' = n(2x',m)k(2x',m),\ \#(k(2x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff (\text{По Утверждению 12 при } x'\in\mathbb{YF},\ m\in\mathbb{N}_0,\ 2\in\{1,2\}) \iff$$

$$\iff 2x' = 2n(x',m)k(2x',m),\ \#(k(2x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff x' = n(x',m)k(2x',m),\ \#(k(2x',m)) = m,\ m\in\overline{\#x'} \iff$$

$$\iff k(x',m) = k(2x',m).$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),0,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y).$$

Заметим, что

$$0=|\varepsilon|=(\text{По Замечанию 18 при }(2x')\in\mathbb{YF})=|n(2x',\#(2x'))|.$$

Таким образом, наше выражение равно следующему:

$$\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}f\left(n(2x',\#(2x')),|n(2x',\#(2x'))|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',\#(2x')),y)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#x'}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=\#(2x')}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)+$$

$$+\beta^{|2x'|}\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)d_1'(k(2x',i),y)\right).$$

Тут мы посчитали, чему равна правая сторона нашего равенства. Таким образом, мы поняли, что (вычтем правую сторону равенства из левого)

$$d_\beta'(x,y)-\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x'\right)}{|2x'| - i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) +$$

$$+ \beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - |2x'|\right)}{g\left(y, j\right)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x', m)| = k}} \left(\frac{f\left(n(x', m), l, 0\right)}{|2x'| - k} \cdot d_1'(k(x', m), y) \right) \right) -$$

$$- \beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x', i), |n(2x', i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x', i), y)\right).$$

Запомним это равенство.

Теперь воспользуемся предположением индукции при $x' \in \mathbb{YF}$:

$$d_\beta'(x', y) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x', i)|} d_\beta(n(x', i)) \cdot d_1'(k(x', i), y) \right) \iff$$

$$\iff \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, h(x', y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x', i)|} d_\beta(n(x', i)) \cdot d_1'(k(x', i), y) \right) \iff$$

$\iff$ (По определению функции h, так как в данном случае $h(2x', y) = \#(2x')$) $\iff$

$$\iff \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, \#x'\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y, j\right) - i\right)}{g\left(y, j\right)} \right) = \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x', i)|} d_\beta(n(x', i)) \cdot d_1'(k(x', i), y) \right).$$

Заметим, что по обозначению

$$\sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x', i)|} d_\beta(n(x', i)) \cdot d_1'(k(x', i), y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x'} \left(\beta^{|k(x', i)|} \left(\sum_{j=0}^{|n(x', i)|} \left(\beta^j \left(f\left(n(x', i), j, 0\right)\right)\right) \right) d_1'(k(x', i), y) \right) =$$

$=$ (По Замечанию 17 при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ если $i \in \overline{\#x'}$, то $|k(x', i)| + |n(x', i)| = |x'|$) $=$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|} \left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0: \\ l + |k(x', m)| = k}} \left(f\left(n(x', m), l, 0\right) \cdot d_1'(k(x', m), y)\right) \right).$$

А значит

$$\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i f\left(x',i,\#x'\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i\left(f\left(x',i,\#x'\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right)\right)=0.$$

И это равенство верно для любого $\beta\in(0,1]$. А значит слева находится многочлен от β, тождественно равный нулю. А значит любой его коэффициент при β^i при $i\in\overline{|x'|}$ равен нулю. То есть $\forall i\in\overline{|x'|}$

$$f\left(x',i,\#x'\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}-\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)=0\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f\left(x',i,\#x'\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}=\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right).$$

Теперь заметим, что если $i\in\overline{|x'|}$, то $|2x'|-i\geq|2x'|-|x'|=2+|x'|-|x'|=2>0$. А значит $\forall i\in\overline{|x'|}$

$$\beta^i\frac{f\left(x',i,\#x'\right)}{|2x'|-i}\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}=$$

$$=\beta^i\frac{\displaystyle\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}}\left(f\left(n(x',m),l,0\right)\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)}{|2x'|-i}=$$

$$=\beta^i\sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}}\left(\frac{f\left(n(x',m),l,0\right)}{|2x'|-i}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right).$$

Просуммируем данное выражение по $i \in \overline{|x'|}$:

$$\sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x'\right)}{|2x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=i}} \left(\frac{f\left(n(x',m), l, 0\right)}{|2x'|-i}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m), l, 0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right).$$

А это значит, что (вернёмся к запомненному равенству)

$$d_\beta'(x,y) - \sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|} d_\beta(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),y)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|}\left(\beta^i \frac{f\left(x', i, \#x'\right)}{|2x'|-i} \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-i\right)}{g\left(y,j\right)}\right) +$$

$$+\beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{|x'|}\left(\beta^k \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:\\ l+|k(x',m)|=k}} \left(\frac{f\left(n(x',m), l, 0\right)}{|2x'|-k}\cdot d_1'(k(x',m),y)\right)\right) -$$

$$-\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|2x'|} f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} -$$

$$-\beta^{|2x'|} \sum_{i=0}^{\#(2x')} \left(f\left(n(2x',i), |n(2x',i)|, 0\right) \cdot d_1'(k(2x',i),y)\right) =$$

$$= \beta^{|2x'|} \left(f\left(2x', |2x'|, \#(2x')\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)} - \right.$$

$$-\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)\Bigg).$$

По Утверждению 13 при наших $x\in\mathbb{YF}$, $y\in\mathbb{YF}_\infty$

$$d_1'(x,y)=\sum_{i=0}^{\#x}\left(1^{|k(x,i)|}d_1(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

а это значит, что (подставим $\beta=1$ в равенство, к которому мы пришли)

$$0=d_1'(x,y)-\sum_{i=0}^{\#x}\left(1^{|k(x,i)|}d_1(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=1^{|2x'|}\Bigg(f\left(2x',|2x'|,\#(2x')\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)\Bigg)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\left(2x',|2x'|,\#(2x')\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)=0.$$

Таким образом, ясно, что

$$d_\beta'(x,y)-\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right)=$$

$$=\beta^{|2x'|}\Bigg(f\left(2x',|2x'|,\#(2x')\right)\prod_{j=1}^{d(y)}\frac{\left(g\left(y,j\right)-|2x'|\right)}{g\left(y,j\right)}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\#(2x')}\left(f\left(n(2x',i),|n(2x',i)|,0\right)\cdot d_1'(k(2x',i),y)\right)\Bigg)=\beta^{|2x'|}\cdot 0=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d_\beta'(x,y)=\sum_{i=0}^{\#x}\left(\beta^{|k(x,i)|}d_\beta(n(x,i))\cdot d_1'(k(x,i),y)\right),$$

что и требовалось.

В данном случае <u>**Переход**</u> доказан.

В каждом случае **Переход** доказан.

Ясно, что все случаи разобраны, а значит **Переход** доказан.

Утверждение доказано.

$\square$

Обозначение 43. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда*

$$q(x) := \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#x} |k(x,i)|}.$$

Замечание 23. *Из определения функции f ясно, что $\forall x \in \mathbb{YF}$*

$$q(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#x} |k(x,i)|} = f(x,0,0).$$

Утверждение 20. *Пусть $x, x' \in \mathbb{YF}$, $\alpha_0 \in \{1,2\} : x = \alpha_0 x'$. Тогда*

$$q(x') = |x| q(x).$$

Доказательство. По определению функции q

$$q(x') = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(x',i)|} = \frac{|\alpha_0 x'|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(x',i)|\right) |\alpha_0 x'|}.$$

Ясно, что $\forall i \in \overline{1, \#x'}$

$$\alpha_0 x' = n(\alpha_0 x', i) k(\alpha_0 x', i),\ \#(k(\alpha_0 x', i)) = i,\ i \in \overline{\#x'} \iff$$

$$\iff \text{(По Утверждению 12 при } x \text{ при } x' \in \mathbb{YF},\ i \in \mathbb{N}_0,\ \alpha_0 \in \{1,2\}) \iff$$

$$\iff \alpha_0 x' = \alpha_0 n(x', i) k(\alpha_0 x', i),\ \#(k(\alpha_0 x', i)) = i,\ i \in \overline{\#x'} \iff$$

$$\iff x' = n(x', i) k(\alpha_0 x', i),\ \#(k(\alpha_0 x', i)) = i,\ i \in \overline{\#x'} \iff$$

$$\iff k(x', i) = k(\alpha_0 x', i).$$

А значит данное выражение равняется следующему:

$$\frac{|\alpha_0 x'|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(\alpha_0 x',i)|\right) |\alpha_0 x'|} = \text{(По Замечанию 18 при } x' \in \mathbb{YF}) =$$

$$= \frac{|\alpha_0 x'|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(\alpha_0 x',i)|\right) |k(\alpha_0 x', \#(\alpha_0 x'))|} = \frac{|\alpha_0 x'|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(\alpha_0 x',i)|\right) |k(\alpha_0 x', \#x'+1)|} =$$

$$= \frac{|\alpha_0 x'|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{\#x'} |k(\alpha_0 x', i)|\right)\left(\prod\limits_{i=\#x'+1}^{\#x'+1} |k(\alpha_0 x', i)|\right)} =$$

$$= \frac{|\alpha_0 x'|}{\prod\limits_{i=1}^{\#x'+1} |k(\alpha_0 x', i)|} = \frac{|\alpha_0 x'|}{\prod\limits_{i=1}^{\#(\alpha_0 x')} |k(\alpha_0 x', i)|} = \frac{|x|}{\prod\limits_{i=1}^{\#x} |k(x, i)|} = |x| q(x),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Утверждение 21. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$. Тогда $d_\beta(x)$ делится на $(1-\beta)$ $\quad \#x$ раз и не делится на $(1-\beta)$ $\quad (\#x+1)$ раз.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1° $x \in \mathbb{YF} : \#x = 0 \Longleftrightarrow x = \varepsilon$.

В данном случае

$$d_\beta(x) = d_\beta(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{|\varepsilon|} \left(\beta^i f(\varepsilon, i, 0)\right) = \sum_{i=0}^{0} \left(\beta^i f(\varepsilon, i, 0)\right) = \beta^0 f(\varepsilon, 0, 0) = f(\varepsilon, 0, 0) = 1.$$

Ясно, что 1 как многочлен от β делится на $(1-\beta)$ $\quad 0 = \#x$ раз и не делится на $(1-\beta)$ $\quad 1 = (\#x+1)$ раз, что и требовалось.

В данном случае Утверждение доказано.

2° $x \in \mathbb{YF} :\ \#x \geq 1$.

В данном случаю есть два варианта:

а) $\exists x' \in \mathbb{YF} : x = x'1$.

В данном случае заметим, что по обозначению

$$(d_\beta(x))' = (d_\beta(x'1))' = \left(\sum_{i=0}^{|x'1|} \left(\beta^i f(x'1, i, 0)\right)\right)' = \sum_{i=1}^{|x'1|} \left(i\beta^{i-1} f(x'1, i, 0)\right).$$

Утверждение 22 (Утверждение 1.1[1], Утверждение 1.1[2])**.** *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0 : y \in \overline{1, |x1|}$. Тогда*

$$-y f(x1, y, 0) = f(x, y-1, 0).$$

Из Утверждения 22, применённого к каждому слагаемому нашей суммы при $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$, следует, что

$$(d_\beta(x))' = (d_\beta(x'1))' = \sum_{i=1}^{|x'1|} \left(i\beta^{i-1} f(x'1, i, 0)\right) = \sum_{i=1}^{|x'1|} \left(-\beta^{i-1} f(x', i-1, 0)\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{|x'1|} \left(\beta^{i-1} f\left(x', i-1, 0\right)\right) = -\sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^{i} f\left(x', i, 0\right)\right) = -(d_\beta(x')).$$

b) $\exists x' \in \mathbb{YF} : x = x'2.$
В данном случае

$$(d_\beta(x))' = (d_\beta(x'2))' = \left(\sum_{i=0}^{|x'2|} \left(\beta^{i} f\left(x'2, i, 0\right)\right)\right)' = \sum_{i=1}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{1} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right) + \sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right) =$$

$$= (1\beta^{1-1} f(x'2,1,0)) + \sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right) = f(x'2,1,0) + \sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right).$$

По определению функции f ясно, что $f(x'2,1,0) = 0$, а значит наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right).$$

Утверждение 23 (Утверждение 1.2[1], Утверждение 1.2[2])**.** *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$*,* $y \in \mathbb{N}_0 : y \in \overline{|x2|}$*. Тогда*

$$(1-y) f(x11, y, 0) = f(x2, y, 0).$$

Посчитаем, воспользовавшись Утверждениями 22 и 23:

$$\sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1} f\left(x'2, i, 0\right)\right) =$$

$$= \Big(\text{По Утверждению 23 ко всем слагаемым при } x' \in \mathbb{YF},\ i \in \overline{|x'2|}\Big) =$$

$$= \sum_{i=2}^{|x'2|} \left(i\beta^{i-1}(1-i) f\left(x'11, i, 0\right)\right) =$$

$$= \Big(\text{По Утверждению 22 ко всем слагаемым при } (x'1) \in \mathbb{YF},\ i \in \overline{1, |x'11|}\Big) =$$

$$= \sum_{i=2}^{|x'2|} \left(-\beta^{i-1}(1-i) f\left(x'1, i-1, 0\right)\right) = \sum_{i=1}^{|x'2|-1} \left(-\beta^{i}(-i) f\left(x'1, i, 0\right)\right) =$$

$$= \Big(\text{По Утверждению 22 ко всем слагаемым при } x' \in \mathbb{YF},\ i \in \overline{1, |x'1|}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{|x'2|-1} \left(-\beta^i f\left(x', i-1, 0\right)\right) = \sum_{i=0}^{|x'2|-2} \left(-\beta^{i+1} f\left(x', i, 0\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x'|} \left(-\beta^{i+1} f\left(x', i, 0\right)\right) = -\beta \sum_{i=0}^{|x'|} \left(\beta^i f\left(x', i, 0\right)\right) = -\beta(d_\beta(x')).$$

Утверждается, что если мы продифференцируем $d_\beta(x)$ ровно b раз, где $b \in \overline{\#x}$, то мы получим выражение вида

$$\sum_{i=0}^{b} \left(c_i \beta^{|k(x,i)|-b} \cdot d_\beta(n(x,i))\right),$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, причём $c_b = \pm 1$ и если $i \in \overline{b} : |k(x,i)| - b < 0$, то $c_i = 0$.

Докажем это утверждение по индукции по b:

<u>**База**</u>: $b = 0$:

В данном случае пусть $c_0 = 1$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{b} \left(c_i \beta^{|k(x,i)|-b} \cdot d_\beta(n(x,i))\right) = \sum_{i=0}^{0} \left(1\beta^{|k(x,i)|-b} \cdot d_\beta(n(x,i))\right) = 1\beta^{|k(x,0)|-0} \cdot d_\beta(n(x,0)) =$$

$= (\text{По Замечанию 18 при } x \in \mathbb{YF}) = 1\beta^{|\varepsilon|-0} \cdot d_\beta(x) = \beta^0 \cdot d_\beta(x) = d_\beta(x)$,

что и требовалось.

<u>**База**</u> доказана.

<u>**Переход**</u> к $(b+1) \in \overline{1, \#x}$:

Зафиксируем $i \in \overline{b} \subseteq \overline{\#x - 1}$. Ясно, что если $i \in \overline{\#x - 1}$, то $n(x,i) \neq \varepsilon$. Рассмотрим два случая:

a) $\exists n' \in \mathbb{YF} : n(x,i) = n'1$.

В данном случае

$$x = n(x,i)k(x,i),\ \#(k(x,i)) = i \Longleftrightarrow x = n'1k(x,i),\ \#(k(x,i)) = i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = n'1k(x,i),\ \#(1k(x,i)) = i{+}1 \Longleftrightarrow n(x,i{+}1) = n',\ k(x,i{+}1) = 1k(x,i).$$

А это, как мы поняли раньше, значит, что

$$\left(c_i \beta^{|k(x,i)|-b} \cdot d_\beta(n(x,i))\right)' = \left(c_i \beta^{|k(x,i)|-b} \cdot d_\beta(n'1)\right)' =$$

$$= c_i \beta^{|k(x,i)|-b} \cdot (-d_\beta(n')) + c_i \left(|k(x,i)| - b\right) \beta^{|k(x,i)|-b-1} \cdot d_\beta(n'1) =$$

$$= -c_i \beta^{|1k(x,i)|-1-b} \cdot d_\beta(n') + c_i \left(|k(x,i)| - b\right) \beta^{|k(x,i)|-b-1} \cdot d_\beta(n'1) =$$

$$= -c_i \beta^{|k(x,i+1)|-(b+1)} \cdot d_\beta(n(x,i+1)) + c_i \left(|k(x,i)| - b\right) \beta^{|k(x,i)|-(b+1)} \cdot d_\beta(n(x,i)),$$

кроме того, очевидно, что

- Если $|k(x,i)| - b > 0$, то

  $$|k(x,i)|-b \geq 1 \Longrightarrow |k(x,i{+}1)|-(b{+}1) = |1k(x,i)|-(b{+}1) \geq 1,\ |k(x,i)|-(b{+}1) \geq 0;$$

- Если $|k(x,i)| - b = 0$, то

  $$|k(x,i+1)| - (b+1) = |1k(x,i)| - (b+1) = 0,$$

  то есть наше выражение равно следующему:

  $$-c_i\beta^0(d_\beta(n(x,i+1))){+}c_i\,(0)\,\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}(d_\beta(n(x,i))) = -c_i(d_\beta(n(x,i{+}1)));$$

- Если $|k(x,i)|{-}b < 0$, то по предположению индукции $c_i = 0$, а это значит, что наше выражение равняется тождественному нулю.

b) $\exists n' \in \mathbb{YF} : n(x,i) = n'2$.
В данном случае

$$x = n(x,i)k(x,i),\ \#(k(x,i)) = i \Longleftrightarrow x = n'2k(x,i),\ \#(k(x,i)) = i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = n'2k(x,i),\ \#(2k(x,i)) = i{+}1 \Longleftrightarrow n(x,i{+}1) = n',\ k(x,i{+}1) = 2k(x,i).$$

А это, как мы поняли, значит, что

$$\Big(c_i\beta^{|k(x,i)|-b}\cdot d_\beta(n(x,i))\Big)' = \Big(c_i\beta^{|k(x,i)|-b}\cdot d_\beta(n'2)\Big)' =$$

$$= c_i\beta^{|k(x,i)|-b}\cdot(-\beta d_\beta(n')) + c_i\,(|k(x,i)|-b)\,\beta^{|k(x,i)|-b-1}\cdot d_\beta(n'2) =$$
$$= -c_i\beta^{|2k(x,i)|-2-b+1}\cdot d_\beta(n'){+}c_i\,(|k(x,i)|-b)\,\beta^{|k(x,i)|-b-1}\cdot d_\beta(n'2) =$$
$$= -c_i\beta^{|k(x,i+1)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i+1)){+}c_i\,(|k(x,i)|-b)\,\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i)),$$

кроме того, очевидно, что

- Если $|k(x,i)| - b > 0$, то

  $$|k(x,i)|-b \geq 1 \Longrightarrow |k(x,i{+}1)|-(b{+}1) = |2k(x,i)|-(b{+}1) \geq 2,\ |k(x,i)|-(b{+}1) \geq 0;$$

- Если $|k(x,i)| - b = 0$, то

  $$|k(x,i+1)| - (b+1) = |2k(x,i)| - (b+1) = 1,$$

  то есть наше выражение равно следующему:

  $$-c_i\beta^1\cdot d_\beta(n(x,i+1)){+}c_i\,(0)\,\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i)) = -c_i\beta(d_\beta(n(x,i{+}1)));$$

- Если $|k(x,i)|{-}b < 0$, то по предположению индукции $c_i = 0$, а это значит, что наше выражение равняется тождественному нулю.

Таким образом, мы получаем, что

$$\left(\sum_{i=0}^{b}\left(c_i\beta^{|k(x,i)|-b}\cdot d_\beta(n(x,i))\right)\right)'=$$

$$=\sum_{i=0}^{b}\left(-c_i\beta^{|k(x,i+1)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i+1))+c_i\left(|k(x,i)|-b\right)\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i))\right)=$$

$$=c_0\left(|k(x,0)|-b\right)\beta^{|k(x,0)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,0))+$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\left(-c_{i-1}\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i))+c_i\left(|k(x,i)|-b\right)\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i))\right)-$$

$$-c_b\beta^{|k(x,b+1)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,b+1))=$$

$$=c_0\left(|k(x,0)|-b\right)\beta^{|k(x,0)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,0))+$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\left((-c_{i-1}+c_i\left(|k(x,i)|-b\right))\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i))\right)-$$

$$-c_b\beta^{|k(x,b+1)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,b+1)),$$

то есть если

- $$c_0'=c_0\left(|k(x,0)|-b\right);$$
- $$\text{Если } i\in\overline{1,b},\ \text{ то } c_i'=(-c_{i-1}+c_i\left(|k(x,i)|-b\right));$$
- $$c_{b+1}'=-c_b,$$

то наше выражение равно следующему:

$$\sum_{i=0}^{b+1}\left(c_i'\beta^{|k(x,i)|-(b+1)}\cdot d_\beta(n(x,i))\right),$$

причём, как мы поняли, если $\forall i\in\overline{b}$ выполнялось условие $|k(x,i)|-b<0\Longrightarrow c_i=0$, то и $\forall i\in\overline{b+1}$ выполняется условие $|k(x,i)|-(b+1)<0\Longrightarrow c_i'=0$, а также если $c_b=\pm1$, то $c_{b+1}'=-c_b=\pm1$.

Таким образом, **Переход** доказан.

Как мы поняли, если мы продифференцируем $d_\beta(x)$ ровно b раз, где $b\in\overline{\#x-1}$, и подставим $\beta=1$, то мы получим выражение вида

$$\sum_{i=0}^{b}\left(c_i1^{|k(x,i)|-b}\cdot d_1(n(x,i))\right)=\sum_{i=0}^{b}\left(c_i1^{|k(x,i)|-b}\cdot\sum_{j=0}^{|n(x,i)|}\left(1^jf\left(n(x,j),j,0\right)\right)\right)=0,$$

так как в каждом слагаемом нашего выражения $i \in \overline{b} \subseteq \overline{\#x-1}$, что значит, что $n(x,i) \neq \varepsilon$, из чего следует по Утверждению 14 при $n(x,i) \in \mathbb{YF} : n(x,i) \neq \varepsilon$, что

$$\sum_{j=0}^{|n(x,i)|} \left(1^j f\left(n(x,j),j,0\right)\right) = \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,j),j,0\right) = 0.$$

Кроме того, если мы продифференцируем $d_\beta(x)$ ровно b раз, где $b = \#x$, и подставим $\beta = 1$, то мы получим выражение вида

$$\sum_{i=0}^{b} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-b} \cdot d_1(n(x,i))\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} \left(1^j f\left(n(x,i),j,0\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\#x-1} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right)\right) +$$

$$+ \sum_{i=\#x}^{\#x} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right)\right).$$

Ясно, что в каждом слагаемом первой строчки $i \in \overline{\#x-1}$, что значит, что $n(x,i) \neq \varepsilon$, из чего следует по Утверждению 14 при $n(x,i) \in \mathbb{YF} : n(x,i) \neq \varepsilon$, что

$$\sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right) = 0.$$

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{i=0}^{\#x-1} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \cdot 0\right) + \sum_{i=\#x}^{\#x} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=\#x}^{\#x} \left(c_i 1^{|k(x,i)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,i)|} f\left(n(x,i),j,0\right)\right) =$$

$$= c_{\#x} 1^{|k(x,\#x)|-\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,\#x)|} f\left(n(x,\#x),j,0\right) = c_{\#x} \sum_{j=0}^{|n(x,\#x)|} f\left(n(x,\#x),j,0\right) =$$

$$= (\text{По Замечанию 18 при } x \in \mathbb{YF}) = c_{\#x}\sum_{j=0}^{|\varepsilon|} f(\varepsilon, j, 0) = c_{\#x}\sum_{j=0}^{0} f(\varepsilon, j, 0) =$$

$$= c_{\#x} f(\varepsilon, 0, 0) = c_{\#x} = (\text{Так как мы знаем, что } c_{\#x} = \pm 1) = \pm 1 \neq 0.$$

Мы поняли, что если мы продифференцируем $d_\beta(x)$ как многочлен от β ровно $b \in \overline{\#x - 1}$ раз и подставим $\beta = 1$, то мы получим ноль, а если мы продифференцируем $d_\beta(x)$ как многочлен от β ровно $\#x$ раз и подставим $\beta = 1$, то мы получим не ноль, а значит $d_\beta(x)$ как многочлен от β делится на $(1-\beta)$ $\#x$ раз и не делится на $(1-\beta)$ $\#x+1$ раз, что и требовалось.

Утверждение доказано.

$\square$

Утверждение 24. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1) : \#x \geq 1$. Тогда*

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}\right)\right).$$

Доказательство. Знаем, что по биному Ньютона

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{|x|}\left(\beta^j f(x,j,0)\right)}{(1-\beta)^{\#x}} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{|x|}\left(\beta^j f(x,j,0)\right)\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\beta^i\binom{\#x-1+i}{i}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{|x|}\left(\beta^j f(x,j,0)\right)\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\beta^i\binom{\#x-1+i}{\#x-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{|x|}\left(\beta^{i+j} f(x,j,0)\binom{\#x-1+i}{\#x-1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta^k \sum_{j=0}^{\min(k,|x|)}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+k-j}{\#x-1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}\right)\right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. $\square$

Следствие 7. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \geq 1$, $i \in \left(\overline{|x|} \backslash \overline{|x| - \#x}\right)$. *Тогда*

$$\sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) = 0.$$

Доказательство. По Утверждению 24 если $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1) : \#x \geq 1$, то

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right).$$

Несложно заметить, что

$$d_\beta(x) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, 0\right) \right)$$

– это многочлен от β степени не более, чем $|x|$, а значит, из Утверждения 21 при $x \in \mathbb{YF}$ ясно, что $\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}}$ – многочлен от β степени не более $(|x| - \#x)$, а значит и

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right)$$

– это многочлен от β степени не более $(|x| - \#x)$, а значит $\forall i \in \mathbb{N}_0 : i > (|x| - \#x)$

$$\sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) = 0,$$

а значит и $\forall i \in \left(\overline{|x|} \backslash \overline{|x| - \#x}\right)$

$$\sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) = 0,$$

что и требовалось.

Следствие доказано. □

Следствие 8. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1) : \#x \geq 1$. *Тогда*

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{|x|-\#x} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right).$$

Доказательство. По Утверждению 24 если $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1) : \#x \geq 1$, то

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right).$$

Несложно заметить, что

$$d_\beta(x) = \sum_{i=0}^{|x|} \left(\beta^i f\left(x, i, 0\right)\right)$$

– это многочлен от β степени не более, чем $|x|$, а значит, из Утверждения 21 при $x \in \mathbb{YF}$ ясно, что $\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}}$ – многочлен от β степени не более $(|x| - \#x)$, а значит и

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right)$$

– это многочлен от β степени не более $(|x| - \#x)$, а значит

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|-\#x} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{\min(i,|x|)} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) =$$

$$= (\text{так как в каждом слагаемом } i \le |x| - \#x \le |x| - 1\ ) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|-\#x} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right),$$

что и требовалось.

Следствие доказано. □

Утверждение 25. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \ge 2$, $i \in \overline{1, |x|}$. *Тогда*

$$\left(\sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i - \#x + 1) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x,j,0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right).$$

Доказательство. Ясно, что нам достаточно доказать, что $\forall j \in \overline{i-1}$

$$f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} (|x| - i) =$$

$$= f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}(|x|-i-\#x+1)+(|x|-j)f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-2},$$

а также то, что при $j = i$

$$f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}(|x|-i) = (|x|-j)f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-2}$$

(так как если мы это докажем, то останется просто просуммировать эти равенства по $j \in \overline{i}$).

Давайте доказывать. Начнём со второго равенства. Подставим в него $j = i$ и получим следующее:

$$f(x,i,0)\binom{\#x-1+i-i}{\#x-1}(|x|-i) = (|x|-i)f(x,i,0)\binom{\#x-2+i-i}{\#x-2} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow \binom{\#x-1+i-i}{\#x-1} = \binom{\#x-2+i-i}{\#x-2} \Longleftrightarrow \binom{\#x-1}{\#x-1} = \binom{\#x-2}{\#x-2} \Longleftrightarrow 1 = 1,$$

второе равенство доказано.

Теперь перейдём к первому равенству (при $j \in \overline{i-1}$):

$$f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}(|x|-i) =$$

$$= f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}(|x|-i-\#x+1)+(|x|-j)f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-2} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow \binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}(|x|-i) =$$

$$= \binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}(|x|-i-\#x+1) + (|x|-j)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(\#x-1+i-j)!}{(\#x-1)!(i-j)!}(|x|-i) =$$

$$= \frac{(\#x-2+i-j)!}{(\#x-1)!(i-j-1)!}(|x|-i-\#x+1) + \frac{(\#x-2+i-j)!}{(\#x-2)!(i-j)!}(|x|-j) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(\#x-1+i-j)}{(\#x-1)(i-j)}(|x|-i) = \frac{1}{(\#x-1)}(|x|-i-\#x+1)+\frac{1}{(i-j)}(|x|-j) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\#x-1+i-j)(|x|-i) = (|x|-i-\#x+1)(i-j) + (|x|-j)(\#x-1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \#x|x| - \#xi - |x| + i + i|x| - i^2 - j|x| + ji =$$

$$= |x|i - |x|j - i^2 + ij - \#xi + \#xj + i - j + |x|\#x - |x| - j\#x + j \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

первое равенство также доказано.

А значит и Утверждение доказано.

$\square$

Утверждение 26. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \geq 1$, $i \in \overline{\#x}$. *Тогда*

$$\sum_{j=0}^{i} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \leq q(x) \binom{\#x}{i}.$$

Доказательство. Давайте доказывать Утверждение по индукции по $\#x$, а при равных $\#x$ — по i.

<u>**База**</u>: $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{\#x} : \#x = 1$:

Ясно, что в данном случае $x \in \{1, 2\}$, а $i \in \{0, 1\}$. Итак, рассмотрим четыре случая:

1° $x = 1$, $i = 0$.

В данном случае неравенство имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{0} \left(f(1, j, 0) \binom{1 - 1 + 0 - j}{1 - 1} \right) \leq q(1) \binom{1}{0} \iff f(1, 0, 0) \binom{1 - 1 + 0 - 0}{1 - 1} \leq q(1) \iff$$

$$\iff f(1, 0, 0) \binom{0}{0} \leq q(1) \iff f(1, 0, 0) \leq q(1) \iff$$

$$\iff (\text{По Замечанию 23 при } 1 \in \mathbb{YF}) \iff f(1, 0, 0) \leq f(1, 0, 0) \iff 0 \leq 0.$$

Мы поняли, что в данном случае неравенство верно, то есть <u>**База**</u> доказана.

2° $x = 1$, $i = 1$.

В данном случае неравенство имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{1} \left(f(1, j, 0) \binom{1 - 1 + 1 - j}{1 - 1} \right) \leq q(1) \binom{1}{1} \iff$$

$$\iff f(1, 0, 0) \binom{1 - 1 + 1 - 0}{1 - 1} + f(1, 1, 0) \binom{1 - 1 + 1 - 1}{1 - 1} \leq q(1) \iff$$

$$\iff f(1, 0, 0) \binom{1}{0} + f(1, 1, 0) \binom{0}{0} \leq q(1) \iff f(1, 0, 0) + f(1, 1, 0) \leq q(1) \iff$$

$$\iff (\text{По Замечанию 23 при } 1 \in \mathbb{YF}) \iff f(1, 0, 0) + f(1, 1, 0) \leq$$

$$\leq f(1, 0, 0) \iff f(1, 1, 0) \leq 0 \iff -1 \leq 0.$$

Мы поняли, что в данном случае неравенство верно, то есть <u>**База**</u> доказана.

3° $x = 2$, $i = 0$.

В данном случае неравенство имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{0}\left(f(2,j,0)\binom{1-1+0-j}{1-1}\right) \le q(2)\binom{1}{0} \iff f(2,0,0)\binom{1-1+0-0}{1-1} \le q(2) \iff$$

$$\iff f(2,0,0)\binom{0}{0} \le q(2) \iff f(2,0,0) \le q(2) \iff$$

$\iff$ (По Замечанию 23 при $2 \in \mathbb{YF}$) $\iff f(2,0,0) \le f(2,0,0) \iff 0 \le 0$.

Мы поняли, что в данном случае неравенство верно, то есть **База** доказана.

4° $x = 2$, $i = 1$.

В данном случае неравенство имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{1}\left(f(2,j,0)\binom{1-1+1-j}{1-1}\right) \le q(2)\binom{1}{1} \iff$$

$$\iff f(2,0,0)\binom{1-1+1-0}{1-1} + f(2,1,0)\binom{1-1+1-1}{1-1} \le q(2) \iff$$

$$\iff f(2,0,0)\binom{1}{0}+f(2,1,0)\binom{0}{0} \le q(2) \iff f(2,0,0)+f(2,1,0) \le q(2) \iff$$

$\iff$ (По Замечанию 23 при $2 \in \mathbb{YF}$) $\iff f(2,0,0) + f(2,1,0) \le$

$$\le f(2,0,0) \iff f(2,1,0) \le 0 \iff 0 \le 0.$$

Мы поняли, что в данном случае неравенство верно, то есть **База** доказана.

Ясно, что все случаи разобраны.
База доказана.
Переход к $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \overline{\#x} : \#x \ge 2$:
Рассмотрим четыре случая:

1° $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \{0\}$: $\#x \ge 2$.

В данном случае неравенство имеет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{0}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+0-j}{\#x-1}\right) \le q(x)\binom{\#x}{0} \iff$$

$$\iff f(x,0,0)\binom{\#x-1+0-0}{\#x-1} \le q(x) \iff$$

$$\iff f(x,0,0)\binom{\#x-1}{\#x-1} \le q(x) \iff f(x,0,0) \le q(x).$$

По Замечанию 23 при $x \in \mathbb{YF}$

$$f(x,0,0) = q(x),$$

а значит в данном случае <u>**Переход**</u> доказан.

2° $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \ge 2$, $i \in \left(\overline{\#x} \backslash \overline{|x| - \#x}\right)$.

Ясно, что если $x \in \mathbb{YF}$, то $\#x \le |x|$, а значит $\left(\overline{\#x} \backslash \overline{|x| - \#x}\right) \subseteq \left(\overline{|x|} \backslash \overline{|x| - \#x}\right)$, а поэтому в данном случае по Следствию 7 при $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1} \right) = 0 \le \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#x} |k(x,i)|} \binom{\#x}{i} = q(x)\binom{\#x}{i},$$

что и требовалось.

В данном случае <u>**Переход**</u> доказан.

3° $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \ge 2$, $i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right)$.

Заметим, что $i \ne 0$, что значит, что по предположению индукции наше равенство верно при x и $i-1$, то есть

$$\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1} \right) \le q(x)\binom{\#x}{i-1}.$$

Давайте заметим, что $i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right) \implies i \le |x| - \#x \iff |x| - \#x - i \ge 0 \iff |x| - i - \#x + 1 \ge 1$, а значит данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1} \right) \right) (|x| - i - \#x + 1) \le q(x)\binom{\#x}{i-1} (|x| - i - \#x + 1).$$

Назовём это первым <u>запомненным</u> неравенством.

Также в данном случае воспользуемся неравенством для $x' : x = \alpha_0 x'$ (при некотором $\alpha_0 \in \{1,2\}$), а также $i \in \mathbb{N}_0 : i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right)$. Если $i \in \overline{\#x'}$, то оно верно по предположению индукции. Давайте обоснуем, что $i \in \overline{\#x'}$:

$$i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right) \subseteq (\text{Ясно, что } |x| \le 2\#x \iff |x| - \#x \le \#x) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{\#x} \backslash \{0, \#x\} \subseteq \overline{\#x - 1} = \overline{\#(\alpha_0 x') - 1} = \overline{1 + \#(x') - 1} = \overline{\#(x')}.$$

Обосновали, а значит мы можем воспользоваться неравенством для $x' : x = \alpha_0 x'$ (при некотором $\alpha_0 \in \{1, 2\}$), а также $i \in \mathbb{N}_0 : i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right)$. Давайте воспользуемся:

$$\sum_{j=0}^{i} \left(f(x', j, 0) \binom{\#x' - 1 + i - j}{\#x' - 1} \right) \leq q(x') \binom{\#x'}{i}.$$

К каждому слагаемому применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $j \in \overline{|x'|}$, $0 \in \overline{\#x'}$ и $\alpha_0 \in \{1, 2\}$ (в каждом слагаемом действительно $j \in \overline{|x'|}$, так как в данном случае $j \in \overline{i} \subseteq \overline{\#x'} \subseteq \overline{|x'|}$) и получим, что наше неравенство равносильно следующему:

$$\sum_{j=0}^{i} \left((|\alpha_0 x'| - j) f(\alpha_0 x', j, 0) \binom{\#x' - 1 + i - j}{\#x' - 1} \right) \leq q(x') \binom{\#x'}{i} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\text{Так как ясно, что } \#x' = \#(\alpha_0 x') - 1 = \#x - 1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right) \leq q(x') \binom{\#x - 1}{i} =$$

$$= (\text{По Утверждению 20 при } x, x' \in \mathbb{YF},\ \alpha_0 \in \{1, 2\}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right) \leq |x| q(x) \binom{\#x - 1}{i}.$$

Назовём это вторым <u>запомненным</u> неравенством.

Теперь напишем Утверждение 25 при наших $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \geq 2$, $i \in \left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0, \#x\}\right) \subseteq \overline{1, |x|}$:

$$\left(\sum_{j=0}^{i} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i - \#x + 1) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\text{так как } i \leq |x| - \#x \Longrightarrow |x| - i \geq \#x \geq 2 > 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{i}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sum_{j=0}^{i-1}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}\right)\right)(|x|-i-\#x+1)}{|x|-i}+$$

$$+\frac{\sum_{j=0}^{i}\left((|x|-j)f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-2}\right)}{|x|-i}\leq$$

$\leq$ (По первому <u>запомненному</u> неравенству и второму <u>запомненному</u> неравенству) $\leq$

$$\leq\frac{q(x)\binom{\#x}{i-1}(|x|-i-\#x+1)+|x|q(x)\binom{\#x-1}{i}}{|x|-i}.$$

Теперь давайте доказывать, что

$$\frac{q(x)\binom{\#x}{i-1}(|x|-i-\#x+1)+|x|q(x)\binom{\#x-1}{i}}{|x|-i}\leq q(x)\binom{\#x}{i}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \text{(По положительности функции } q\text{)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\frac{(\#x)!}{(\#x-i+1)!(i-1)!}(|x|-i-\#x+1)+|x|\frac{(\#x-1)!}{(\#x-i-1)!(i)!}}{|x|-i}\leq\frac{(\#x)!}{(\#x-i)!(i)!}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \text{(так как } i\leq|x|-\#x\Longrightarrow|x|-i\geq\#x\geq 2>0\text{)}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\frac{(\#x)!}{(\#x-i+1)!(i-1)!}(|x|-i-\#x+1)+|x|\frac{(\#x-1)!}{(\#x-i-1)!(i)!}\leq\frac{(\#x)!}{(\#x-i)!(i)!}(|x|-i)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\frac{(\#x)}{(\#x-i+1)(\#x-i)}(|x|-i-\#x+1)+|x|\frac{1}{(i)}\leq\frac{(\#x)}{(\#x-i)(i)}(|x|-i)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow i\#x(|x|-i-\#x+1)+|x|(\#x-i+1)(\#x-i)\leq\#x(\#x-i+1)(|x|-i)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow i\#x|x|-i\#xi-i(\#x)^2+i\#x+|x|(\#x)^2+|x|i^2-2|x|\#xi+|x|\#x-i|x|\leq$$

$$\leq(\#x)^2|x|-(\#x)^2i-\#xi|x|+\#xi^2+|x|\#x-\#xi\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -i\#xi+i\#x+|x|i^2-i|x|\leq\#xi^2-\#xi\Longleftrightarrow 0\leq(-2\#x+|x|)(1-i)i.$$

В нашем случае $i\geq 1$, а значит $i>0$, $(1-i)\leq 0$.

Также ясно, что $2\#x\geq|x|$, а значит $(-2\#x+|x|)\leq 0$.

Из этого можно понять, что $(-2\#x+|x|)(1-i)i\geq 0$, что и требовалось.

Можно заметить, что мы доказали, что в данном случае

$$\sum_{j=0}^{i}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}\right)\leq$$

$$\leq \frac{q(x)\binom{\#x}{i-1}(|x|-i-\#x+1)+|x|q(x)\binom{\#x-1}{i}}{|x|-i} \leq q(x)\binom{\#x}{i} \implies$$

$$\implies \sum_{j=0}^{i}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-1+i-j}{\#x-1}\right) \leq q(x)\binom{\#x}{i},$$

что и требовалось.

А значит в данном случае <u>**Переход**</u> доказан.

4° $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \geq 2$, $i \in \left(\left(\overline{|x|-\#x}\backslash\{0\}\right) \cap \{\#x\}\right)$.

Заметим, что $i \neq 0$, что значит, что по предположению индукции наше равенство верно при x и $i-1$, то есть

$$\sum_{j=0}^{i-1}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}\right) \leq q(x)\binom{\#x}{i-1}.$$

Давайте заметим, что $i \in \left(\overline{|x|-\#x}\backslash\{0\}\right) \implies i \leq |x|-\#x \iff |x|-\#x-i \geq 0 \implies |x|-i-\#x+1 \geq 1$, а значит данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\sum_{j=0}^{i-1}\left(f(x,j,0)\binom{\#x-2+i-j}{\#x-1}\right)\right)(|x|-i-\#x+1) \leq q(x)\binom{\#x}{i-1}(|x|-i-\#x+1).$$

Назовём это <u>запомненным</u> неравенством.

Также заметим, что в данном случае $i \in \left(\left(\overline{|x|-\#x}\backslash\{0\}\right) \cap \{\#x\}\right)$, значит $\#x \in \overline{|x|-\#x} \implies \#x \leq |x|-\#x \iff 2\#x \leq |x| \iff$ (так как ясно, что $2\#x \geq |x|$) $\iff 2\#x = |x| \iff$ номер x состоит только из двоек $\iff x = 2^{\#x}$.

Рассмотрим $x' := 2^{\#x-1}$ а также наше $i = \#x$. Заметим, что

- $$i = \#x \leq (\text{так как в данном случае } \#x \geq 2) \leq 2\#x-2 = 2(\#x-1) = \left|2^{\#x-1}\right| = |x'|;$$

- $$|x'|-\#x' = \left|2^{\#x-1}\right|-\#\left(2^{\#x-1}\right) = 2(\#x-1)-(\#x-1) = (\#x-1) < \#x = i;$$

- $$\#x' = \#\left(2^{\#x-1}\right) = (\#x-1) \geq 2-1 \geq 1.$$

То есть мы поняли, что $x' \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$: $\#x' \geq 1$, $i \in \left(\overline{|x'|}\backslash\overline{|x'|-\#x'}\right)$,
а это значит, что в данном случае по Следствию 7

$$\sum_{j=0}^{i}\left(f(x',j,0)\binom{\#x'-1+i-j}{\#x'-1}\right) = 0.$$

К каждому слагаемому применим Утверждение 16 при $x' \in \mathbb{YF}$, $j \in \overline{|x'|}$, $0 \in \overline{\#x'}$ и $\alpha_0 \in \{1, 2\}$ (в каждом слагаемом действительно $j \in \overline{|x'|}$, так как в данном случае $j \in \overline{i} \subseteq \overline{|x'|}$) и получим, что наше равенство равносильно следующему:

$$\sum_{j=0}^{i} \left((|\alpha_0 x'| - j) f(\alpha_0 x', j, 0) \binom{\#x' - 1 + i - j}{\#x' - 1} \right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \text{(Так как ясно, что } \#x' = \#(\alpha_0 x') - 1 = \#x - 1\text{)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right) = 0.$$

Назовём это запомненным равенством.

Итак, давайте считать. Напишем Утверждение 25 при наших $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0 : \#x \geq 2$, $i \in \left(\left(\overline{|x| - \#x} \backslash \{0\} \right) \cap \{\#x\} \right) \subseteq \overline{1, |x|}$:

$$\left(\sum_{j=0}^{i} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i - \#x + 1) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \text{(так как } i \leq |x| - \#x \Longrightarrow |x| - i \geq \#x \geq 2 > 0\text{)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{i} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) =$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) (|x| - i - \#x + 1)}{|x| - i} +$$

$$+ \frac{\sum_{j=0}^{i} \left((|x| - j) f(x, j, 0) \binom{\#x - 2 + i - j}{\#x - 2} \right)}{|x| - i} \leq$$

$$\leq \Big(\text{По запомненному неравенству и запомненному равенству}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{q(x) \binom{\#x}{i - 1} (|x| - i - \#x + 1) + 0}{|x| - i} =$$

$= \big($так как мы уже поняли, что в данном случае $x = 2^{\#x}$, $|x| = 2\#x$, $i = \#x\big) =$

$$= \frac{q(x)\binom{\#x}{\#x-1}(2\#x - \#x - \#x + 1)}{2\#x - \#x} = \frac{q(x)\#x}{\#x} = q(x) = q(x)\binom{\#x}{\#x} = q(x)\binom{\#x}{i},$$

что и требовалось, а значит в данном случае **Переход** доказан.

Ясно, что все случаи разобраны, то есть **Переход** доказан.
Утверждение доказано.

□

Утверждение 27. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1)$. *Тогда*

$$d_\beta(x) \leq q(x)\left(1-\beta^2\right)^{\#x}.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1° $\#x = 0 \Longleftrightarrow x = \varepsilon$.

В данном случае

$$d_\beta(\varepsilon) \leq q(\varepsilon)\left(1-\beta^2\right)^{\#\varepsilon} \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{|\varepsilon|}\left(\beta^i f(\varepsilon, i, 0)\right) \leq \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#\varepsilon}|k(\varepsilon, i)|}\left(1-\beta^2\right)^0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{0}\left(\beta^i f(\varepsilon, i, 0)\right) \leq \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{0}|k(\varepsilon, i)|}\left(1-\beta^2\right)^0 \Longleftrightarrow \beta^0 f(\varepsilon, 0, 0) \leq 1 \cdot 1 \Longleftrightarrow 1 \leq 1,$$

что и требовалось.

В данном случае Утверждение доказано.

2° $\#x \geq 1$.

Ясно, что (так как $\beta \in (0,1)$)

$$d_\beta(x) \leq q(x)\left(1-\beta^2\right)^{\#x} \Longleftrightarrow \frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} \leq q(x)\,(1+\beta)^{\#x}.$$

По Следствию 8 при $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1)$

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} = \sum_{i=0}^{|x|-\#x}\left(\beta^i \sum_{j=0}^{i}\left(f(x, j, 0)\binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1}\right)\right).$$

По Утверждению 26 при $x \in \mathbb{YF}$, $i \in \mathbb{N}_0$ применённому к каждому слагаемому (это законно, так как если $x \in \mathbb{YF}$, то $2\#x \geq |x| \iff \#x \geq |x| - \#x$, а также так как $\beta \in (0,1)$) получаем, что

$$\sum_{i=0}^{|x|-\#x} \left(\beta^i \sum_{j=0}^{i} \left(f(x,j,0) \binom{\#x - 1 + i - j}{\#x - 1} \right) \right) \leq \sum_{i=0}^{|x|-\#x} \left(\beta^i q(x) \binom{\#x}{i} \right) \leq$$

$\leq$ (так как если $x \in \mathbb{YF}$, то $2\#x \geq |x| \iff \#x \geq |x| - \#x$, а также так как $q(x) \geq 0$ и $\beta \in (0,1)$) $\leq$

$$\leq \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^i q(x) \binom{\#x}{i} \right) = q(x) \sum_{i=0}^{\#x} \left(\beta^i \binom{\#x}{i} \right) = q(x)(1+\beta)^{\#x},$$

так как тут написан бином Ньютона.

То есть мы доказали, что при $x \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1)$: $\#x \geq 1$

$$\frac{d_\beta(x)}{(1-\beta)^{\#x}} \leq q(x)(1+\beta)^{\#x}.$$

А это (так как $\beta \in (0,1)$) равносильно тому, что

$$d_\beta(x) \leq q(x) \left(1 - \beta^2\right)^{\#x},$$

что и требовалось.

В данном случае Утверждение доказано.

Ясно, что все случаи разобраны.

Утверждение доказано.

$\square$

7 Волшебные таблицы

Определение 5. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда волшебной таблицей* $T_{w,\beta,n}(x,y)$ *с параметрами* w, β *и* n *назовём функцию*

$$T_{w,\beta,n} : \mathbb{YF}_n \times \overline{n} \to \mathbb{R},$$

определённую следующим образом:

$$T_{w,\beta,n}(x,y) = \begin{cases} d(\varepsilon,x) \cdot q(x(y)) \cdot d_1'(x'(y),w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(x(y))} & \text{если } x \in K(n,y) \\ 0 & \text{если } x \in \overline{K}(n,y). \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$T_{w,\beta,n}(x,y) = \begin{cases} d(\varepsilon,x) \cdot q(n(x,i)) \cdot d_1'(k(x,i),w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(x,i))} & \text{если } \exists i \in \overline{\#x} : \ |k(x,i)| = y \\ 0 & \text{если } \nexists i \in \overline{\#x} : \ |k(x,i)| = y. \end{cases}$$

Замечание 24. *Из всех обозначений очевидно, что эти определения равносильны.*

Визуализируем данную функцию мы следующим образом (отсюда и название):

Пример 3. $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n = 5$:

	0	1	2	3	4	5
122	$\frac{3}{40}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^3$	0	$\frac{3}{6}d_1'(2,w)\beta^2(1-\beta^2)^2$	0	$\frac{3}{1}d_1'(22,w)\beta^4(1-\beta^2)$	$\frac{3}{1}d_1'(122,w)\beta^5$
212	$\frac{4}{30}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^3$	0	$\frac{4}{3}d_1'(2,w)\beta^2(1-\beta^2)^2$	$\frac{4}{2}d_1'(12,w)\beta^3(1-\beta^2)$	0	$\frac{4}{1}d_1'(212,w)\beta^5$
1112	$\frac{1}{120}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^4$	0	$\frac{1}{6}d_1'(2,w)\beta^2(1-\beta^2)^3$	$\frac{1}{2}d_1'(12,w)\beta^3(1-\beta^2)^2$	$\frac{1}{1}d_1'(112,w)\beta^4(1-\beta^2)$	$\frac{1}{1}d_1'(1112,w)\beta^5$
221	$\frac{8}{15}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^3$	$\frac{8}{8}d_1'(1,w)\beta(1-\beta^2)^2$	0	$\frac{8}{2}d_1'(21,w)\beta^3(1-\beta^2)$	0	$\frac{8}{1}d_1'(221,w)\beta^5$
1121	$\frac{2}{60}d_1'(\varepsilon,w)(1-x^2)^4$	$\frac{2}{24}d_1'(1,w)\beta(1-\beta^2)^3$	0	$\frac{2}{2}d_1'(21,w)\beta^3(1-\beta^2)^2$	$\frac{2}{1}d_1'(121,w)\beta^4(1-\beta^2)$	$\frac{2}{1}d_1'(1121,w)\beta^5$
1211	$\frac{3}{40}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^4$	$\frac{3}{12}d_1'(1,w)\beta(1-\beta^2)^3$	$\frac{3}{6}d_1'(11,w)\beta^2(1-\beta^2)^2$	0	$\frac{3}{1}d_1'(211,w)\beta^4(1-\beta^2)$	$\frac{3}{1}d_1'(1211,w)\beta^5$
2111	$\frac{4}{30}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^4$	$\frac{4}{8}d_1'(1,w)\beta(1-\beta^2)^3$	$\frac{4}{3}d_1'(11,w)\beta^2(1-\beta^2)^2$	$\frac{4}{2}d_1'(111,w)\beta^3(1-\beta^2)$	0	$\frac{4}{1}d_1'(2111,w)\beta^5$
11111	$\frac{1}{120}d_1'(\varepsilon,w)(1-\beta^2)^5$	$\frac{1}{24}d_1'(1,w)\beta(1-\beta^2)^4$	$\frac{1}{6}d_1'(11,w)\beta^2(1-\beta^2)^3$	$\frac{1}{2}d_1'(111,w)\beta^3(1-\beta^2)^2$	$\frac{1}{1}d_1'(1111,w)\beta^4(1-\beta^2)$	$\frac{1}{1}d_1'(11111,w)\beta^5$

Утверждение 28. *Пусть* $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{YF}_\infty$. *Тогда*

$$d_1'(x,y) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(x,y_m)}{d(\varepsilon,y_m)}.$$

Доказательство. Посчитаем (всегда считаем, что $m \geq |x|$, что значит, что $|y_m| \geq \#y_m = m \geq |x|$):

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d(x,y_m)}{d(\varepsilon,y_m)} = (\text{По Теореме 1 при } x, y_m \in \mathbb{YF}) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x,i,h(x,y_m)\right) \prod\limits_{j=1}^{d(y_m)} \left(g\left(y_m,j\right)-i\right) \right)}{\prod\limits_{j=1}^{d(y_m)} g\left(y_m,j\right)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x,i,h(x,y_m)\right) \prod_{j=1}^{d(y_m)} \frac{(g\left(y_m,j\right)-i)}{g\left(y_m,j\right)} \right) \right) =$$

$$= (\text{Ясно, что } \#y_m = m \geq |x| \geq \#x \Longrightarrow h(x,y_m) = h(x,y)) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x,i,h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y_m)} \frac{(g\left(y_m,j\right)-i)}{g\left(y_m,j\right)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x,i,h(x,y)\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{d(y_m)} \frac{(g\left(y_m,j\right)-i)}{g\left(y_m,j\right)} \right) =$$

$$= (\text{По определению функции } g) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} \left(f\left(x,i,h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{(g\left(y,j\right)-i)}{g\left(y,j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} \left(1^i f\left(x,i,h(x,y)\right) \prod_{j=1}^{d(y)} \frac{(g\left(y,j\right)-i)}{g\left(y,j\right)} \right) = d_1'(x,y),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Следствие 9. *Пусть $x \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{YF}_\infty$. Тогда*

$$d_1'(x,y) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(x,y_m)}{d(\varepsilon,y_m)} \geq 0.$$

Следствие 10. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $v \in \mathbb{YF}$. Тогда*

$$\mu_{w,1}(v) = \mu_w(v).$$

Доказательство. Воспользуется Утверждением 28 и обозначениями:

$$\mu_{w,1}(v) = d(\varepsilon,v) \cdot d_1'(v,w) = d(\varepsilon,v) \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{d(v,w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{d(\varepsilon,v)d(v,w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} = \mu_w(v),$$

что и требовалось.

Следствие доказано. □

Замечание 25. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда функция $T_{w,\beta,n}(x,y)$ неотрицательна.*

Утверждение 29. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. Тогда*

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) = \sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x') \cdot d(\varepsilon, x'1^y) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x'} \right).$$

Доказательство. По Замечанию 19 при $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) = \left(\sum_{x\in K(n,y)} T_{w,\beta,n}(x,y)\right) + \left(\sum_{x\in\overline{K}(n,y)} T_{w,\beta,n}(x,y)\right) =$$

$$= (\text{По определению функции } T) =$$

$$= \left(\sum_{x\in K(n,y)} T_{w,\beta,n}(x,y)\right) + 0 = \sum_{x\in K(n,y)} T_{w,\beta,n}(x,y) =$$

$$= \sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(x(y))}\right).$$

Ясно, что в каждом слагаемом по Замечанию 21 при $x \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$x = x(y)x'(y).$$

А значит к каждому слагаемому можно применить Утверждение 1 при $x, x(y), x'(y) \in \mathbb{YF}$ и получить, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x'(y))\cdot d\left(\varepsilon, x(y)1^{|x'(y)|}\right)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(x(y))}\right) =$$

$$= (\text{По обозначению } x'(y)) =$$

$$= \sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x'(y))\cdot d\left(\varepsilon, x(y)1^{y}\right)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(x(y))}\right).$$

Заметим, что по обозначениям при $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$

- если $x \in K(n,y)$, то $x = x(y)x'(y)$, причём $x(y) \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $x'(y) \in \mathbb{YF}_y$;
- если $x_1, x_2 \in K(n,y)$: $x_1 \neq x_2$, то $x_1(y) \neq x_2(y)$ или $x_1'(y) \neq x_2'(y)$;
- если $x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $x''' \in \mathbb{YF}_y$, то $(x''x''') \in K(n,y)$, $(x''x''')(y) = x''$, $(x''x''')'(y) = x'''$.

А это значит, что при всех $x \in K(n,y)$, пара $(x(y), x'(y))$ принимает все возможные значения в $\mathbb{YF}_{n-y} \times \mathbb{YF}_y$, причём ровно по одному разу.

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(\sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot q(x'')\cdot d_1'(x''',w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#x''}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#x''}\right)\right)\left(\sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\cdot d_1'(x''',w)\right)\right) =$$

$$= (\text{По Утверждению 28 при } x''' \in \mathbb{YF},\ w \in \mathbb{YF}_\infty) =$$

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x''} \right) \right) \left(\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x''} \right) \right) \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right).$$

Заметим, что по Утверждению 3 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $m, y \in \mathbb{N}_0$ если $|w_m| \geq y$, то

$$\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = 1.$$

А значит если $m \geq y$, то $|w_m| \geq m \geq y$, то есть

$$\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = 1,$$

а значит

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) = 1.$$

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x''} \right) \cdot 1 =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x''} \right) =$$

$$= \sum_{x' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x') \cdot d\left(\varepsilon, x'1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#x'} \right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Утверждение 30. *Пусть* $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. *Тогда*

$$\sum_{x' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x') \cdot d(\varepsilon, x'1^y) \right) = \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i}.$$

Доказательство. Будем доказывать это Утверждение по индукции по n.

<u>База</u>: $n = 0$:

В данном случае ясно, что $y = 0$. А это значит, что равенство принимает следующий вид:

$$\sum_{x' \in \mathbb{YF}_{0-0}} \left(q(x') \cdot d\left(\varepsilon, x'1^0\right)\right) = \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor} \frac{2i+0}{2i} \Longleftrightarrow \sum_{x' \in \mathbb{YF}_0} (q(x') \cdot d(\varepsilon, x')) = \prod_{i=1}^{0} \frac{2i}{2i} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{x' \in \{\varepsilon\}} (q(x') \cdot d(\varepsilon, x')) = 1 \Longleftrightarrow q(\varepsilon) \cdot d(\varepsilon, \varepsilon) = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#\varepsilon} |k(\varepsilon, i)|} \cdot 1 = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{0} |k(\varepsilon, i)|} = 1 \Longleftrightarrow 1 = 1.$$

База доказана.
Переход к $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 1$:
Рассмотрим три случая:

1° $n, y \in \mathbb{N}_0 : (n - y) \geq 2$.

Давайте считать:

$$\sum_{x' \in \mathbb{YF}_{n-y}} (q(x') \cdot d(\varepsilon, x'1^y)) =$$

$$= \left(\sum_{(1x'') \in \mathbb{YF}_{n-y}} (q(1x'') \cdot d(\varepsilon, 1x''1^y)) \right) + \left(\sum_{(2x'') \in \mathbb{YF}_{n-y}} (q(2x'') \cdot d(\varepsilon, 2x''1^y)) \right) =$$

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} (q(1x'') \cdot d(\varepsilon, 1x''1^y)) \right) + \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} (q(2x'') \cdot d(\varepsilon, 2x''1^y)) \right) =$$

= (По Утверждению 20 при $(1x''), x'' \in \mathbb{YF}$, $1 \in \{1, 2\}$ к каждому слагаемому первой суммы и при $(2x''), x'' \in \mathbb{YF}$, $2 \in \{1, 2\}$ к каждому слагаемому второй суммы) =

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{|1x''|} d(\varepsilon, 1x''1^y) \right) \right) + \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{|2x''|} d(\varepsilon, 2x''1^y) \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, 1x''1^y) \right) \right) + \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, 2x''1^y) \right) \right).$$

Применим Утверждение 1 при $(1x''1^y), 1, (x''1^y) \in \mathbb{YF}$ к каждому слагаемому первой суммы и при $(2x''1^y), 2, (x''1^y) \in \mathbb{YF}$ к каждому слагаемому второй суммы и получим, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) d\left(\varepsilon, 11^{|x''1^y|}\right) \right) +$$

$$+ \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) d\left(\varepsilon, 21^{|x''1^y|}\right) \right) =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) d\left(\varepsilon, 1^{1+|x''|+y}\right) \right) +$$

$$+ \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) d\left(\varepsilon, 21^{|x''|+y}\right) \right) =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{d\left(1^{1+|x''|+y}\right)} g\left(1^{1+|x''|+y}, i\right) \right) +$$

$$+ \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{d\left(21^{|x''|+y}\right)} g\left(21^{|x''|+y}, i\right) \right) =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{0} g\left(1^{1+|x''|+y}, i\right) \right) +$$

$$+ \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{1} g\left(21^{(n-y-2)+y}, i\right) \right) =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{0} g\left(1^{1+|x''|+y}, i\right) \right) +$$

$$+ \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \prod_{i=1}^{1} g\left(21^{n-2}, i\right) \right) =$$

$$= (\text{По определению функции } g) =$$

$$= \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \right) \right) + \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} \left(q(x'') \frac{1}{n-y} d(\varepsilon, x''1^y) \cdot (n-1) \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n-y} \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-1}} (q(x'') \cdot d(\varepsilon, x''1^y)) \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y-2}} (q(x'') \cdot d(\varepsilon, x''1^y)) \right) =$$

$= (\text{По предположению индукции при } n-1 \text{ и } n-2 \text{ (ясно, что } n-1 \geq y \text{ и } n-2 \geq y)) =$

$$= \left(\frac{1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-1}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-2}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right).$$

Рассмотрим два подслучая:

1.1° $(n-y) \; mod \; 2 = 0$.

В данном подслучае ясно, что

$$\left(\frac{1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-1}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-2}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n-y} \prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}-1} \frac{2i+y}{2i} \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}-1} \frac{2i+y}{2i} \right) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}-1} \frac{2i+y}{2i} \right) \frac{n}{n-y} = \left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}-1} \frac{2i+y}{2i} \right) \left(\prod_{i=\frac{n-y}{2}}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y}{2i} \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y}{2i} = \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i}.$$

Таким образом, мы поняли, что в данном случае

$$\sum_{x' \in \mathbb{YF}_{n-y}} (q(x') \cdot d(\varepsilon, x'1^y)) = \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i},$$

что и требовалось.

В данном случае **Переход** доказан.

1.2° $(n-y) \; mod \; 2 = 1$.

В данном подслучае ясно, что

$$\left(\frac{1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-1}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y-2}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n-y} \prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}} \frac{2i+y}{2i} \right) + \left(\frac{n-1}{n-y} \prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1} \frac{2i+y}{2i} \right) =$$

$$= \frac{1}{n-y}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)\left(\prod_{i=\frac{n-y-1}{2}}^{\frac{n-y-1}{2}}\frac{2i+y}{2i}\right)+\frac{n-1}{n-y}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)=$$

$$= \frac{1}{n-y}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)\frac{n-1}{n-y-1}+\frac{n-1}{n-y}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)=$$

$$= \frac{n-1}{n-y}\left(\frac{1}{n-y-1}+1\right)\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}=\frac{n-1}{n-y}\cdot\frac{n-y}{n-y-1}\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}=$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)\frac{n-1}{n-y-1}=\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}-1}\frac{2i+y}{2i}\right)\left(\prod_{i=\frac{n-y-1}{2}}^{\frac{n-y-1}{2}}\frac{2i+y}{2i}\right)=$$

$$= \prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}}\frac{2i+y}{2i}=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}.$$

Таким образом, мы поняли, что в данном случае

$$\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i},$$

что и требовалось.

В данном случае **Переход** доказан.

2° $(n-y)=1$.

В данном случае

$$\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\iff\sum_{x'\in\mathbb{YF}_1}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\iff$$

$$\iff\sum_{x'\in\{1\}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{0}\frac{2i+y}{2i}\iff q(1)\cdot d(\varepsilon,11^y)=1\iff q(1)\cdot d(\varepsilon,1^{y+1})=1\iff$$

$$\iff\frac{1}{\prod_{i=1}^{\#1}|k(1,i)|}\prod_{i=1}^{d(1^{y+1})}g(1^{y+1},i)=1\iff\frac{1}{\prod_{i=1}^{1}|k(1,i)|}\prod_{i=1}^{0}g(1^{y+1},i)=1\iff$$

$$\iff\frac{1}{|k(1,1)|}\cdot 1=1\iff\frac{1}{|1|}\cdot 1=1\iff 1=1.$$

То есть в данном случае **Переход** снова доказана.

3° $(n-y)=0$.

В данном случае

$$\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\iff\sum_{x'\in\mathbb{YF}_0}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{0}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\iff$$

$$\iff\sum_{x'\in\{\varepsilon\}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))=\prod_{i=1}^{0}\frac{2i+y}{2i}\iff q(\varepsilon)\cdot d(\varepsilon,1^y)=1\iff\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\#\varepsilon}|k(\varepsilon,i)|}\prod_{i=1}^{d(1^y)}g(1^y,i)=1\iff$$

$$\iff\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{0}|k(\varepsilon,i)|}\prod_{i=1}^{0}g(1^y,i)=1\iff 1\cdot 1=1\iff 1=1.$$

То есть в данном случае **<u>Переход</u>** опять же доказан.

Ясно, что все случаи разобраны, во всех **<u>Переход</u>** доказан.

Утверждение доказано.

□

Утверждение 31. *Пусть* $w\in\mathbb{YF}_\infty$, $\beta\in(0,1]$, $n,y\in\mathbb{N}_0: y\le n$. *Тогда*

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\le\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}.$$

Доказательство. По Утверждению 29 при $w\in\mathbb{YF}_\infty$, $\beta\in(0,1]$, $n,y\in\mathbb{N}_0$: $y\le n$

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)=\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}\left(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#x'}\right)\le$$

$$\le(\text{Так как } \beta\in(0,1] \text{ и если } x'\in\mathbb{YF}\text{, то } 2\#x'\ge|x'|)\le$$

$$\le\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}\left(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\frac{|x'|}{2}}\right)\le$$

$$\le\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}\left(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{|x'|}{2}\right\rfloor}\right)=$$

$$=\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}\left(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)=$$

$$=\left(\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}}(q(x')\cdot d(\varepsilon,x'1^y))\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}.$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что

$$\left(\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} (q(x')\cdot d(\varepsilon, x'1^y))\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor} \le \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow (\text{Так как } \beta\in(0,1]) \Longleftarrow \sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} (q(x')\cdot d(\varepsilon, x'1^y)) \le \prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}.$$

А это верно по Утверждению 30 при наших $n, y \in \mathbb{YF} : y \le n$.

Таким образом, мы доказали, что по Утверждению 30 при наших $n, y \in \mathbb{YF} : y \le n$

$$\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} (q(x')\cdot d(\varepsilon, x'1^y)) = \prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i} \Longrightarrow (\text{Так как } \beta\in(0,1]) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} (q(x')\cdot d(\varepsilon, x'1^y))\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor} = \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\text{Как мы уже доказали}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \le \left(\sum_{x'\in\mathbb{YF}_{n-y}} (q(x')\cdot d(\varepsilon, x'1^y))\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor} = \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Обозначение 44. *Пусть* $n, a, b \in \mathbb{N}_0 : a \ge 2,\ b \in \overline{a-1}$. *Тогда*

$$\overline{n}(a,b) := \{c \in \overline{n} : c \bmod a = b\}.$$

Утверждение 32. *Пусть* $\beta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\sum_{y=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right) \le 1+\frac{1}{\beta}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим только чётные игреки:

$$\sum_{y\in\overline{n}(2,0)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right) = \sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-2y'}{2}\right\rfloor}\frac{2i+2y'}{2i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-2y'}{2}\right\rfloor}\right) =$$

$$= \sum_{y'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - y'} \right) = \sum_{y'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i}{\prod\limits_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - y'} \right) =$$

$$= \sum_{y'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - y'} \right) = (\text{так как это Бином Ньютона}) = \left(\beta^2 + \left(1-\beta^2\right)\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1.$$

Теперь рассмотрим нечётные игреки:

Рассмотрим два случая:

1° $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0.$

Посчитаем, помня, что $\beta \in (0,1)$:

$$\sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n-y}{2} \rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^{y} \left(1-\beta^2\right)^{\lfloor \frac{n-y}{2} \rfloor} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n-y}{2} \rfloor} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y} \left(1-\beta^2\right)^{\lfloor \frac{n-y}{2} \rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 0 \text{ и } y \; mod \; 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y-1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y-1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}(2,1)$, при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\left\{1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$, то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\sum_{y'=1}^{\frac{n}{2}}\left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'}\frac{i+y'}{i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)+\frac{1}{\beta}\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{i}{i}\right)\beta^0\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\beta}\sum_{y'=1}^{\frac{n}{2}}\left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'}\frac{i+y'}{i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)+\frac{1}{\beta}\sum_{y'=0}^{0}\left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'}\frac{i+y'}{i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\sum_{y'=0}^{\frac{n}{2}}\left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'}\frac{i+y'}{i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\sum_{y'=0}^{\frac{n}{2}}\left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} i}\right)\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\sum_{y'=0}^{\frac{n}{2}}\left(\binom{\frac{n}{2}}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'}\right)=$$

$$=(\text{так как это Бином Ньютона})=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left(\beta^2+\left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{\beta}.$$

В данном случае сумма по чётным игрекам равна единице, а сумма по нечётным игрекам оценивается сверху как $\frac{1}{\beta}$, а значит вся сумма не больше, чем $1+\frac{1}{\beta}$, то есть

$$\sum_{y=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)=$$

$$=\sum_{y\in\overline{n}(2,0)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)+\sum_{y\in\overline{n}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\leq 1+\frac{1}{\beta},$$

что и требовалось.

2° $n\ mod\ 2=1$:

Посчитаем, помня, что $\beta\in(0,1)$:

$$\sum_{y\in\overline{n}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\leq\sum_{y\in\overline{n}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y+1}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)=$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \ mod\ 2 = 1 \text{ и } y \ mod\ 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{n}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}(2,1)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \ mod\ 2 = 1$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\left\{1, \ldots, \frac{n+1}{2}\right\}$, то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{i}{i} \right) \beta^0 \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{0} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n+1}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\frac{n+1}{2}} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= (\text{так как это Бином Ньютона}) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \left(\beta^2 + \left(1-\beta^2\right)\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\beta}.$$

В данном случае сумма по чётным игрекам равна единице, а сумма по нечётным игрекам оценивается сверху как $\frac{1}{\beta}$, а значит вся сумма не больше, чем $1+\frac{1}{\beta}$, то есть

$$\sum_{y=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^{y}\left(1-\beta^{2}\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)=$$

$$=\sum_{y\in\overline{n}(2,0)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^{y}\left(1-\beta^{2}\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)+\sum_{y\in\overline{n}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^{y}\left(1-\beta^{2}\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\leq 1+\frac{1}{\beta},$$

что и требовалось.

В обоих случаях Утверждение доказано. □

Следствие 11. *Пусть $w\in\mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}_0$. Тогда*

$$\sum_{y=0}^{n}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\leq 1+\frac{1}{\beta}.$$

Доказательство. Возьмём Утверждение 31 при наших $w\in\mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta\in(0,1]$, $n\in\mathbb{N}_0$ и просуммируем его по $y\in\overline{n}$:

$$\sum_{y=0}^{n}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\leq\sum_{y=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^{y}\left(1-\beta^{2}\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\leq$$

$$\leq(\text{По Утверждению 32 при наших }\beta\in(0,1)\text{ и }n\in\mathbb{N}_0)\leq 1+\frac{1}{\beta},$$

что и требовалось.

Следствие доказано. □

Утверждение 33. *Пусть $w\in\mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}_0$, $v\in\mathbb{YF}$. Тогда*

$$\mu_{w,\beta}(v)\leq\sum_{y=0}^{|v|}T_{w,\beta,n}(v,y).$$

Доказательство. По обозначению

$$\mu_{w,\beta}(v)=d(\varepsilon,v)\cdot d'_{\beta}(v,w)=\ (\text{По Утверждению 15 при }w\in\mathbb{YF}_{\infty},\ v\in\mathbb{YF}\text{ и }\beta\in(0,1])\ =$$

$$=d(\varepsilon,v)\sum_{i=0}^{\#v}\left(\beta^{|k(v,i)|}d_{\beta}(n(v,i))\cdot d'_{1}(k(v,i),w)\right).$$

Таким образом, наше неравенство равносильно следующему:

$$d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{\#v} \left(\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w)\right) \leq \sum_{y=0}^{|v|} T_{w,\beta,n}(v,y).$$

По определению волшебных таблиц:

$$T_{w,\beta,n}(x,y) = \begin{cases} d(\varepsilon, x) \cdot q(n(x,i)) \cdot d'_1(k(x,i), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(x,i))} & \text{если } \exists i \in \overline{\#x}: \ |k(x,i)| = y \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Ясно, что для v определение можно написать следующим образом:

$$T_{w,\beta,n}(v,y) = \begin{cases} d(\varepsilon, v) \cdot q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))} & \text{если } \exists i \in \overline{\#v}: \ |k(v,i)| = y \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

По определению функции $k(v,i)$ ясно, что

- если $i \in \overline{\#v}$, то $|k(v,i)| \in \overline{|v|}$;
- если $i, j \in \overline{\#v} : i \neq j$, то $|k(v,i)| \neq |k(v,j)|$.

А из этого ясно, что

$$\sum_{y=0}^{|v|} T_{w,\beta,n}(v,y) = \sum_{i=0}^{\#v} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}\right).$$

Таким образом, наше неравенство равносильно следующему:

$$d(\varepsilon, v) \sum_{i=0}^{\#v} \left(\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\#v} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\#v} \left(\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w)\right) \leq \sum_{i=0}^{\#v} \left(q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}\right).$$

Ясно, что чтобы доказать это неравенство, достаточно доказать, что $\forall i \in \overline{\#v}$

$$\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \leq q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}.$$

Давайте докажем. Пусть $i \in \overline{\#v}$. Тогда

$$\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \leq q(n(v,i)) \cdot d'_1(k(v,i), w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d_\beta(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \le q(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow (\text{По Следствию 9 при } k(v,i) \in \mathbb{YF},\ w \in \mathbb{YF}_\infty) \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow d_\beta(n(v,i)) \le q(n(v,i)) \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))},$$

а это в точности Утверждение 27 при $n(v,i) \in \mathbb{YF}$, $\beta \in (0,1)$.

То есть мы доказали, что $\forall i \in \overline{\#v}$

$$\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \le q(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))},$$

а значит

$$\sum_{i=0}^{\#v} \left(\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w)\right) \le \sum_{i=0}^{\#v} \left(q(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d(\varepsilon,v) \sum_{i=0}^{\#v} \left(\beta^{|k(v,i)|} d_\beta(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w)\right) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\#v} \left(d(\varepsilon,v) \cdot q(n(v,i)) \cdot d_1'(k(v,i),w) \cdot \beta^{|k(v,i)|} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(n(v,i))}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mu_{w,\beta}(v) \le \sum_{y=0}^{|v|} T_{w,\beta,n}(v,y),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. $\square$

8 Доказательство Теоремы 3

Теорема 3. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

1)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

Доказательство.

Утверждение 34. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y, l \in \mathbb{N}_0 : n \geq y \geq 2l$. *Тогда*

$$\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \left(\sum_{v\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y)\right)\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v)\right).$$

Доказательство. По Замечанию 19 при $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) + \left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap\overline{K}(n,y)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) =$$

$$= (\text{По определению функции } T) =$$

$$= \left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) + 0 = \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} T_{w,\beta,n}(v,y) =$$

$$= \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} \Big(d(\varepsilon,v)\cdot q(v(y))\cdot d_1'(v'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))}\Big).$$

Ясно, что в каждом слагаемом по Замечанию 21 при $v \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$v = v(y)v'(y).$$

А значит можно воспользоваться Утверждением 1 при $v, v(y), v'(y) \in \mathbb{YF}$ и получить, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} \Big(d(\varepsilon,v'(y))\cdot d\left(\varepsilon, v(y)1^{|v'(y)|}\right)\cdot q(v(y))\cdot d_1'(v'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))}\Big) =$$

$$= (\text{По обозначению } v'(y)) =$$

$$= \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)\cap K(n,y)} \Big(d(\varepsilon,v'(y))\cdot d\left(\varepsilon,v(y)1^y\right)\cdot q(v(y))\cdot d_1'(v'(y),w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))}\Big).$$

Заметим, что при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n, y, l \in \mathbb{N}_0 : n \geq y \geq 2l$:

- если $v \in \overline{Q}(w,n,l) \cap K(n,y)$, то $v = v(y)v'(y)$, причём $v(y) \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $v'(y) \in \overline{Q}(w,y,l)$ (так как $y \geq 2l$, а значит $h(w,v) = h(w,v'(y))$);

- если $v_1, v_2 \in \overline{Q}(w,n,l) \cap K(n,y)$: $v_1 \neq v_2$, то $v_1(y) \neq v_2(y)$ или $v_1'(y) \neq v_2'(y)$;

- если $v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $v''' \in \overline{Q}(w,y,l)$, то $(v''v''') \in \overline{Q}(w,n,l) \cap K(n,y)$, $(v''v''')(y) = v''$, $(v''v''')'(y) = v'''$ (так как $y \geq 2l$, а значит $h(w,v''') = h(w,v''v'''))$.

А это значит, что при всех $v \in \overline{Q}(w,n,l) \cap K(n,y)$, пара $(v(y), v'(y))$ принимает все значения в $\mathbb{YF}_{n-y} \times \overline{Q}(w,y,l)$, причём ровно по одному разу.

А это, в свою очередь, значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(\sum_{v''' \in \overline{Q}(w,y,l)} \left(d(\varepsilon, v''') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot q(v'') \cdot d_1'(v''', w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(v'') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) \sum_{v''' \in \overline{Q}(w,y,l)} (d(\varepsilon, v''') \cdot d_1'(v''', w)) =$$

$$= (\text{По Утверждению 28 при } v''' \in \mathbb{YF},\ w \in \mathbb{YF}_\infty) =$$

$$= \left(\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(v'') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) \sum_{v''' \in \overline{Q}(w,y,l)} \left(d(\varepsilon, v''') \lim_{m \to \infty} \frac{d(v''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) =$$

$$= (\text{По Утверждению 29 при } w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1],\ n, y \in \mathbb{N}_0) =$$

$$= \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \sum_{v''' \in \overline{Q}(w,y,l)} \left(\lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v''') d(v''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = (\text{По обозначению}) =$$

$$= \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \left(\sum_{v''' \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v''') \right) = \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) \right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

□

Лемма 5. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда* $\exists Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq Y$

$$\sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \varepsilon.$$

Доказательство. По Утверждению 34 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y, l \in \mathbb{N}_0$: $n \geq y \geq 2l$

$$\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) \right),$$

а значит если $n, Y \in \mathbb{N}_0$: $n \geq Y \geq 2l$, то мы можем просуммировать данное выражение по $y \in \overline{Y,n}$. Просуммируем:

$$\sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \sum_{y=Y}^{n} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) \right) \right).$$

По Теореме 5 при $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $l \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{y \to \infty} \sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) = 0,$$

то есть по определению предела для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(1+\frac{1}{\beta})}$ $\exists Y \in \mathbb{N}_0$: при $y \in \mathbb{N}_0$: $y \geq Y$

$$\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) < \varepsilon',$$

а из этого ясно, что для $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(1+\frac{1}{\beta})}$ $\exists Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq \max(1, 2l)$ и при $y \in \mathbb{N}_0$: $y \geq Y$

$$\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) < \varepsilon'.$$

Зафиксируем данный Y. Ясно, что $Y \geq 1$. Кроме того, как мы уже поняли, $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq Y$

$$\sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \sum_{y=Y}^{n} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} \mu_w(v) \right) \right) <$$

$$< (\text{так как в каждом большом слагаемом } y \geq Y) <$$

$$< \sum_{y=Y}^{n} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \varepsilon' \right) = \varepsilon' \sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq$$

$$\leq (\text{так как функция } T \text{ неотрицательна}) \leq$$

$$\leq \varepsilon' \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq \ (\text{По Следствию 11 при } w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}_0) \ \leq$$

$$\leq \varepsilon' \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{\varepsilon}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Лемма доказана. □

Обозначение 45. *Пусть $a, b \in \mathbb{N}_0 : a \geq 2,\ b \in \overline{a-1},\ f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда*

$$\overset{(a,b)}{\lim_{n\to\infty}} f(n) := \lim_{n\to\infty} f(an+b)$$

Лемма 6. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $l, Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq 1$. Тогда*

$$\sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Доказательство. Давайте во всём доказательстве рассматривать только $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq Y$ (ясно, что так можно).

Заметим, что функция T неотрицательна, а также то, что по обозначению $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty,\ n, l \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{Q}(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}_n.$$

Это значит, что

$$0 \leq \sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) \leq \sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y)\right).$$

Давайте оценивать сверху правую часть данного неравенства. Для начала оценим чётные игреки. Если $n, y \in \mathbb{N}_0 : n \geq Y > y$, то по Утверждению 31 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \leq \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y \in \overline{Y-1}(2,0)$. Просуммируем:

$$\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y)\right) \leq \sum_{y\in\overline{Y-1}(2,0)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right) =$$

$$= \sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-2y'}{2}\right\rfloor}\frac{2i+2y'}{2i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-2y'}{2}\right\rfloor}\right) = \sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\frac{i+y'}{i}\right)\beta^{2y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\right) =$$

$$= \sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} i}{\prod\limits_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'} i}\right)\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\right) = \sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\right).$$

Ясно, что
$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$
а значит
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\right)\right)=\lim_{n'\to\infty}\left(\sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\binom{n'}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n'-y'}\right)\right)=0.$$
(Этот предел действительно равен нулю при $\beta\in(0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов).

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n\in\mathbb{N}_0$
$$0\le\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\le\sum_{y'=0}^{\left\lfloor\frac{Y-1}{2}\right\rfloor}\left(\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-y'}\right),$$
а значит, по Лемме о двух полицейских,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right)=0.$$

Теперь будем оценивать нечётные игреки. Рассмотрим две подпоследовательности:

а) Подпоследовательность $n\in\mathbb{N}_0 : n\ mod\ 2=0$.

Зафиксируем какое-то $n\in\mathbb{N}_0 : n\ mod\ 2=0$.

Если $n,y\in\mathbb{N}_0 : n\ge Y>y$, то по Утверждению 31 при $w\in\mathbb{YF}_\infty$, $\beta\in(0,1]$, $n,y\in\mathbb{N}_0$
$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\le\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y\in\overline{Y-1}(2,1)$. Просуммируем и посчитаем, помня, что $\beta\in(0,1)$:
$$\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\le$$
$$\le\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\le$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y} \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 0 \text{ и } y \; mod \; 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y-1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y-1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{Y-1}(2,1)$ при $Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq 1$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\left\{1, \ldots, \left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor\right\}$, то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{i}{i} \right) \beta^{0} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{0} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\frac{\prod_{i=y'+1}^{\frac{n}{2}} i}{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n'\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{n'}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n'-y'} \right) \right) = 0.$$

(Этот предел действительно равен нулю при $\beta \in (0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов).

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$

$$0 \leq \sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0.$$

b) Подпоследовательность $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$.

Зафиксируем какое-то $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$.

Если $n, y \in \mathbb{N}_0 : n \geq Y > y$, то по Утверждению 31 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \leq \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y \in \overline{Y-1}(2,1)$. Просуммируем и посчитаем, помня, что $\beta \in (0,1)$:

$$\sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 1 \text{ и } y \; mod \; 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{Y-1}(2,1)$, при $Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq 1$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\left\{1, \ldots, \left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor\right\}$, то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{i}{i} \right) \beta^0 \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=1}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{0} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n+1}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n'\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{n'+1}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n'+1-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n'\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{n'}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n'-y'} \right) \right) = 0.$$

(Этот предел действительно равен нулю при $\beta \in (0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов).

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$

$$0 \leq \sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{\left\lfloor \frac{Y}{2} \right\rfloor} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0.$$

Итак, подытожив написанное выше, получаем, что мы разбиваем последовательность $n \in \mathbb{N}_0$ на две подпоследовательности, а также, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $l, Y \in \mathbb{N}_0 : Y \geq 1$

- $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \leq \sum_{y=0}^{Y-1} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq \sum_{y=0}^{Y-1} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) =$$

$$= \left(\sum_{y \in \overline{Y-1}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \left(\sum_{y \in \overline{Y-1}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right);$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right)=0.$$
- $$\overset{(2,0)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right)=0.$$
- $$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y\in\overline{Y-1}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right)=0.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских

- $$\overset{(2,0)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)}T_{w,\beta,n}(v,y)\right)\right)=0;$$
- $$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)}T_{w,\beta,n}(v,y)\right)\right)=0.$$

а из этого ясно, что если $w\in\mathbb{YF}_\infty$, $\beta\in(0,1)$, $l,Y\in\mathbb{N}_0 : Y\geq 1$, то

$$\sum_{y=0}^{Y-1}\left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)}T_{w,\beta,n}(v,y)\right)\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

что и требовалось.

Лемма доказана. □

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось собрать всё доказанное ранее. Сейчас самое время вспомнить формулировку:

Пусть $w\in\mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta\in(0,1)$, $l\in\mathbb{N}_0$. Тогда

1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)}\mu_{w,\beta}(v)=0;$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in Q(w,n,l)}\mu_{w,\beta}(v)=1.$$

Мы знаем, что при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \le \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) \le$$

$\le$ (По Утверждению 33 при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF}$ для всех $v \in \overline{Q}(w,n,l)$) $\le$

$$\le \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \left(\sum_{y=0}^{|v|} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \left(\text{так как } \overline{Q}(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}_n\right) =$$

$$= \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \left(\sum_{y=0}^{n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right).$$

Зафиксируем произвольный $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

По Лемме 5 при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$ и $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists Y \in \mathbb{N}_0 : Y \ge 1$, $\forall n \ge Y$

$$\sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,y,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем данный $Y \in \mathbb{N}_0 : Y \ge 1$.

Также из Леммы 6 при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta \in (0,1)$, $l, Y \in \mathbb{N}_0$ следует то, что при нашем $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N \in \mathbb{N}_0 :$ при $n \ge N$

$$\sum_{y=0}^{Y-1} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь зафиксируем данное $N \in \mathbb{N}_0$.

Мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ для любого $n \ge \max(Y, N)$

$$\sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \left(\sum_{y=0}^{Y-1} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) + \left(\sum_{y=Y}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) < \varepsilon,$$

то есть в силу неотрицательности функции T

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) = 0.$$

Мы уже поняли, что при $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \le \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) \le \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских ясно, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$ и $l \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = 0,$$

что доказывает первый пункт.

Кроме того, ясно, что

-
  $$\overline{Q}\,(w,n,l) \cup Q\,(w,n,l) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < l\} \cup \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq l\} = \mathbb{YF}_n;$$

-
  $$\overline{Q}\,(w,n,l) \cap Q\,(w,n,l) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) < l\} \cap \{v \in \mathbb{YF}_n :\ h'(v,w) \geq l\} = \varnothing;$$

- (Следствие 4) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$

  $$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

А из этого очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in Q(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = 1,$$

что доказывает второй пункт.

Таким образом, оба пункта доказаны.

Теорема доказана. $\square$

9 Доказательство Теоремы 4

Обозначение 46. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

- $$R(w,\beta,n,\varepsilon) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\}\,;$$
- $$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\}\,.$$

Замечание 26. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

- $$R(w,1,n,\varepsilon) = \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \in (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} = R(w,n,\varepsilon);$$
- $$\overline{R}(w,1,n,\varepsilon) := \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(1-\varepsilon), \pi(w)(1+\varepsilon))\} = \overline{R}(w,n,\varepsilon).$$

Теорема 4. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

1) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 0;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in R(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

Доказательство. Для начала нам надо ввести очень много обозначений:

Обозначение 47. *Пусть* $n \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $a, b \in \mathbb{N}_0 : a \geq 2$, $b \in \overline{a-1}$. *Тогда*

- $$\overline{n}[\beta,\varepsilon] := \overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2-\varepsilon\right), n\left(\beta^2+\varepsilon\right)\right);$$
- $$\overline{n}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{n} \setminus \left(n\left(\beta^2-\varepsilon\right), n\left(\beta^2+\varepsilon\right)\right);$$
- $$\overline{n}[\beta,\varepsilon](a,b) := \{c \in \overline{n}[\beta,\varepsilon] :\ c \mod a = b\};$$
- $$\overline{n}\{\beta,\varepsilon\}(a,b) := \{c \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon\} :\ c \mod a = b\};$$
- $$\overline{n}_{00}\{\beta,\varepsilon\} := \frac{\overline{n}}{2} \setminus \left(\frac{n\left(\beta^2-\varepsilon\right)}{2}, \frac{n\left(\beta^2+\varepsilon\right)}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{00,2}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{n}\backslash\left(n\left(\beta^2-\varepsilon\right), n\left(\beta^2+\varepsilon\right)\right);$$

- $$\overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{\frac{n-1}{2}}\backslash\left(\frac{n\left(\beta^2-\varepsilon\right)}{2}, \frac{n\left(\beta^2+\varepsilon\right)}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{n}\backslash\left(\frac{(2n+1)\left(\beta^2-\varepsilon\right)}{2}, \frac{(2n+1)\left(\beta^2+\varepsilon\right)}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{01}\{\beta,\varepsilon\} := \frac{\overline{n}}{2}\backslash\left(\frac{n\left(\beta^2-\varepsilon\right)+1}{2}, \frac{n\left(\beta^2+\varepsilon\right)+1}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{01,2}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{n}\backslash\left(n\left(\beta^2-\varepsilon\right)+\frac{1}{2}, n\left(\beta^2+\varepsilon\right)+\frac{1}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{\frac{n+1}{2}}\backslash\left(\frac{n\left(\beta^2-\varepsilon\right)+1}{2}, \frac{n\left(\beta^2+\varepsilon\right)+1}{2}\right);$$

- $$\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon\} := \overline{n}\backslash\left(\frac{(2n-1)\left(\beta^2-\varepsilon\right)+1}{2}, \frac{(2n-1)\left(\beta^2+\varepsilon\right)+1}{2}\right).$$

Замечание 27. *Пусть* $n \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

- $$\overline{n}[\beta,\varepsilon] \cup \overline{n}\{\beta,\varepsilon\} = \overline{n};$$

- $$\overline{n}[\beta,\varepsilon] \cap \overline{n}\{\beta,\varepsilon\} = \varnothing.$$

Обозначение 48. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

- $$\pi_y(v) := \begin{cases} \pi(v'1^y) & \text{если } \exists v', v'' \in \mathbb{YF} : v = v'v'' \text{ и } |v''| = y \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases};$$

- $$\pi'_y(v) := \begin{cases} \pi(v'') & \text{если } \exists v', v'' \in \mathbb{YF} : v = v'v'' \text{ и } |v''| = y \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases}.$$

Замечание 28. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : v \in \mathbb{YF}_n$, $y \leq n$. *Тогда*

- $$v(y) \text{ определено} \Longleftrightarrow v'(y) \text{ определено} \Longleftrightarrow \pi_y(v) \text{ определено} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \pi'_y(v) \text{ определено} \Longleftrightarrow v \in K(n,y);$$

- $$v(y) \text{ не определено} \Longleftrightarrow v'(y) \text{ не определено} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \pi_y(v) \text{ не определено} \Longleftrightarrow \pi'_y(v) \text{ не определено} \Longleftrightarrow v \in \overline{K}(n,y).$$

Утверждение 35. *Пусть* $v \in \mathbb{YF}$, $y \in \mathbb{N}_0 : \exists v', v'' \in \mathbb{YF} : v = v'v''$ *и* $|v''| = y$. *Тогда*
$$\pi(v) = \pi_y(v)\pi'_y(v).$$

Доказательство. По Утверждению 4 при $v, v', v'' \in \mathbb{YF} \in \mathbb{YF}$

$$\pi(v) = \pi(v'')\pi\left(v'1^{|v''|}\right) = \pi(v'')\pi\left(v'1^y\right) = (\text{По обозначению}) = \pi'_y(v)\pi_y(v) = \pi_y(v)\pi'_y(v).$$

□

Обозначение 49. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0} : y \leq n$. *Тогда*

- $$R(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) := \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon)), \pi_y(v) \in (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3)\};$$

- $$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) := \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon)), \pi_y(v) \in (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3)\};$$

- $$R'(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) := \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon)), \pi_y(v) \notin (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3)\};$$

- $$\overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) := \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon)), \pi_y(v) \notin (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3)\};$$

- $$R''(w,\beta,n,\varepsilon,y) := \left\{v \in \overline{K}(n,y) :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\right\};$$

- $$\overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y) := \left\{v \in \overline{K}(n,y) :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\right\}.$$

Замечание 29. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0} : y \leq n$. *Тогда*

- *пересечение любых двух множеств среди*

$$R(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3), \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3), R'(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3),$$

$$\overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3), R''(w,\beta,n,\varepsilon,y), \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y)$$

  пусто;

- $$R(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup R'(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup$$
$$\cup \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup R''(w,\beta,n,\varepsilon,y) \cup \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y) = \mathbb{YF}_n;$$

- $$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y) =$$
$$= \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} \cup$$
$$\cup \left\{v \in \overline{K}(n,y) :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\right\} =$$
$$= \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} = \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon);$$

- $$R(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup R'(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \cup R''(w,\beta,n,\varepsilon,y) =$$
$$= \{v \in K(n,y) :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} \cup$$
$$\cup \left\{v \in \overline{K}(n,y) :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\right\} =$$
$$= \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} = R(w,\beta,n,\varepsilon).$$

Обозначение 50. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n, y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0} : y \leq n$. *Тогда*

- $$\widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5) := \left\{v \in K(n,y) :\ \pi'_y(v) \notin (\pi(w)(1-\varepsilon_5), \pi(w)(1+\varepsilon_5))\right\}.$$

Теперь давайте что-то докажем:

Утверждение 36. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. *Тогда*

$$\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v)\right).$$

Доказательство. По определению функции T ясно, что (так как если $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n, y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0} : y \leq n$, то $\widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5) \subseteq K(n,y)$)

$$\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))} \right).$$

Ясно, что в каждом слагаемом по Замечанию 21 при $v \in \mathbb{YF}$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$v = v(y)v'(y).$$

А значит к каждому слагаемому можно применить Утверждение 1 при $v, v(y), v'(y) \in \mathbb{YF}$ и получить, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v'(y)) \cdot d\left(\varepsilon, v(y)1^{|v'(y)|}\right) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))} \right) =$$

$$= (\text{По обозначению } v'(y)) =$$

$$= \sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v'(y)) \cdot d\left(\varepsilon, v(y)1^{y}\right) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#(v(y))} \right).$$

Заметим, что при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $n, y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0} : n \geq y$:

- если $v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$, то $v = v(y)v'(y)$, причём $v(y) \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $v'(y) \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)$ (очевидно из определений $\widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$ и $\overline{R}(w,y,\varepsilon_5)$);
- если $v_1, v_2 \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$: $v_1 \neq v_2$, то либо $v_1(y) \neq v_2(y)$ или $v_1'(y) \neq v_2'(y)$;
- если $v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}$, $v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)$, то $(v''v''') \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$, $(v''v''')(y) = v''$, $(v''v''')'(y) = v'''$ (очевидно из определений $\widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$ и $\overline{R}(w,y,\varepsilon_5)$).

А это значит, что при всех $v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)$, пара $(v(y), v'(y))$ принимает все значения в $\mathbb{YF}_{n-y} \times \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)$, причём ровно по одному разу.

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(\sum_{v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v''') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot q(v'') \cdot d_1'(v''', w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(v'') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) \left(\sum_{v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v''') \cdot d_1'(v''', w) \right) \right) =$$

$$= (\text{По Утверждению 28 при } v''' \in \mathbb{YF},\ w \in \mathbb{YF}_\infty) =$$

$$= \left(\sum_{v'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(v'') \cdot d\left(\varepsilon, v''1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\#v''} \right) \right) \left(\sum_{v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \left(d(\varepsilon, v''') \cdot \lim_{m \to \infty} \frac{d(v''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) =$$

$= (\text{По Утверждению 29 при } w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1],\ n, y \in \mathbb{N}_0) =$

$$= \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \left(\sum_{v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \left(\lim_{m \to \infty} \frac{d(\varepsilon, v''') d(v''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) = (\text{По обозначению}) =$$

$$= \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \left(\sum_{v''' \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v''') \right) = \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) \right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

$\square$

Утверждение 37. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1', \varepsilon_5, \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0} : \varepsilon_1' \in \big(0, \beta^2\big)$. *Тогда* $\exists N' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$:

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon'}.$$

Доказательство. По Утверждению 36 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$

$$\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) = \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) \right),$$

а значит если $n \in \mathbb{N}_0$, то мы можем просуммировать данное выражение по $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']$ (ясно, что $\overline{n}[\beta, \varepsilon_1'] \subseteq \overline{n}$). Просуммируем и получим, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon_1', \varepsilon_5, \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0} : \varepsilon_1' \in \big(0, \beta^2\big)$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) \right) \right).$$

Зафиксируем $\overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$.

По Теореме 6 при нашем $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$ и $\varepsilon = \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{y \to \infty} \sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) = 0,$$

то есть по определению предела для $\varepsilon' = \frac{\overline{\varepsilon'}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$ $\exists Y \in \mathbb{N}_0$: при $y \in \mathbb{N}_0$: $y \geq Y$

$$\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) < \varepsilon'.$$

Зафиксируем данный $Y \in \mathbb{N}_0$. Пусть $N' = \left\lceil \frac{Y}{\beta^2 - \varepsilon_1'} \right\rceil$ (помним, что $\varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$). Тогда если $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_1'\right)\right)\right)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$, то

$$y \geq n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) \geq N'\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) = \left\lceil \frac{Y}{\beta^2 - \varepsilon_1'} \right\rceil \left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) \geq \left(\frac{Y}{\beta^2 - \varepsilon_1'}\right)\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) = Y.$$

Таким образом, мы получаем, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1', \varepsilon_5, \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0} : \varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$ и выбранном $N' \in \mathbb{N}_0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) = \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,y,\varepsilon_5)} \mu_w(v) \right) \right) <$$

$$< (\text{Так как в каждом слагаемом } y \geq Y) <$$

$$< \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \cdot \varepsilon' \right) = \varepsilon' \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq$$

$$\leq (\text{так как функция } T \text{ неотрицательна и } \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'] \subseteq \overline{n}) \leq$$

$$\leq \varepsilon' \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq (\text{По Следствию 11 при } w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}_0) \leq$$

$$\leq \varepsilon' \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\overline{\varepsilon'}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \overline{\varepsilon'},$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

□

Лемма 7. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда* $\exists \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0} : \forall \varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right), \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon'}.$$

Доказательство. Ясно, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют такие ε_3, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, что $\forall n, y \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : y \leq n$, $v \in K(n,y)$ если $\pi(v) \notin (\pi(w)(\beta - \varepsilon), \pi(w)(\beta + \varepsilon))$ и $\pi_y(v) \in (\beta - \varepsilon_3, \beta + \varepsilon_3)$, то $\pi_y'(v) \notin (\pi(w)(1 - \varepsilon_5), \pi(w)(1 + \varepsilon_5))$ (так как по Утверждению 35 при $v \in \mathbb{YF}$ и $y \in \mathbb{N}_0$ если $v \in K(n,y)$, то $\pi(v) = \pi_y(v)\pi_y'(v)$).

Таким образом, из определений $\overline{R}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$ и $\widetilde{R}(w, n, y, \varepsilon_5)$ ясно, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют такие $\varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, что $\forall n, y \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF} : y \leq n$ если $v \in \overline{R}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$, то $v \in \widetilde{R}(w, n, y, \varepsilon_5)$.

А это значит, что при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют такие $\varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, что $\forall n, y \in \mathbb{N}_0 : y \le n$

$$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \subseteq \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5).$$

Из этого делаем следующий вывод (из-за неотрицательности функции T): при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ существуют такие $\varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, что $\forall n, y \in \mathbb{N}_0 : y \le n$

$$\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \le \sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y).$$

Зафиксируем эти $\varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$

Теперь зафиксируем произвольные $\varepsilon_1' \in \left(0,\beta^2\right)$, $\overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ясно, что если $n \in \mathbb{N}_0$, то мы можем просуммировать наше выражение по $y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']$ (ясно, что $\overline{n}[\beta,\varepsilon_1'] \subseteq \overline{n}$). Просуммируем и получим, что при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\varepsilon_1' \in \left(0,\beta^2\right)$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \le \sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right).$$

По Утверждению 37 при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1', \varepsilon_5, \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$: $\varepsilon_1' \in \left(0,\beta^2\right)$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \ge N'$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon'}.$$

Зафиксируем этот $N' \in \mathbb{N}_0$.

Таким образом, мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ мы выбрали $\varepsilon_3, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ так, что $\forall \varepsilon_1' \in \left(0,\beta^2\right)$, $\overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0$: $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $n \ge N'$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \le \sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \widetilde{R}(w,n,y,\varepsilon_5)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon'},$$

что и требовалось.

Лемма доказана. $\square$

Обозначение 51. *Пусть* $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \ge 1$. *Тогда*

$$U(\beta,\varepsilon_1,N) := \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 :\ a+b \ge N,\ \beta^2 - \varepsilon_1 < \frac{a}{a+b} < \beta^2 + \varepsilon_1 \right\}.$$

Обозначение 52.

- $$N_1 : \left\{(\beta, \varepsilon_1, A) : \ \beta \in (0,1), \ \varepsilon_1 \in \left(0, \beta^2\right), \ A \in \mathbb{N}_0\right\} \to \mathbb{N}_0$$

  – это функция, определённая следующим образом:

  $$N_1(\beta, \varepsilon_1, A) := \left\lceil \frac{A}{\beta^2 - \varepsilon_1} \right\rceil;$$

- $$N_2 : \ \left\{(\beta, \varepsilon_1, B) : \ \beta \in (0,1), \ \varepsilon_1 \in \left(0, 1-\beta^2\right), \ B \in \mathbb{N}_0\right\} \to \mathbb{N}_0$$

  – это функция, определённая следующим образом:

  $$N_2(\beta, \varepsilon_1, B) := \left\lceil \frac{B}{1 - \beta^2 - \varepsilon_1} \right\rceil.$$

Утверждение 38.

1) *Пусть* $\beta \in (0,1), \ \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}, \ A, a, b, N \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon_1 \in \left(0, \beta^2\right), \ (a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N), \ N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, A))$. *Тогда*

$$a \geq A.$$

2) *Пусть* $\beta \in (0,1), \ \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}, \ B, a, b, N \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon_1 \in \left(0, 1-\beta^2\right), \ (a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N), \ N \geq \max(1, N_2(\beta, \varepsilon_1, B))$. *Тогда*

$$b \geq B.$$

Доказательство.

1) Из обозначения множества U в данном случае ясно, что в если $a, b, N \in \mathbb{N}_0 : (a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N), \ N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, A))$, то

$$\beta^2 - \varepsilon_1 < \frac{a}{a+b},$$

а значит, так как $a + b \geq N \geq 1$ $\left(\text{при счёте помним, что } \varepsilon_1 \in \left(0, \beta^2\right)\right)$,

$$a > (a+b)(\beta^2 - \varepsilon_1) \geq N(\beta^2 - \varepsilon_1) \geq N_1(\beta, \varepsilon_1, A)(\beta^2 - \varepsilon_1) =$$

$$= \left\lceil \frac{A}{\beta^2 - \varepsilon_1} \right\rceil (\beta^2 - \varepsilon_1) \geq \left(\frac{A}{\beta^2 - \varepsilon_1}\right)(\beta^2 - \varepsilon_1) = A,$$

что и требовалось.

Первый пункт Утверждения доказан.

2) Из обозначения множества U в данном случае ясно, что в если $a, b, N \in \mathbb{N}_0 : (a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N),\ N \geq \max(1, N_2(\beta, \varepsilon_1, B))$, то

$$\frac{a}{a+b} < \beta^2 + \varepsilon_1 \iff 1 - \frac{b}{a+b} < \beta^2 + \varepsilon_1 \iff 1 - \beta^2 - \varepsilon_1 < \frac{b}{a+b},$$

а значит, так как $a+b \geq N \geq 1$ $\left(\text{при счёте помним, что } \varepsilon_1 \in \left(0, 1-\beta^2\right)\right)$,

$$b > (a+b)(1-\beta^2-\varepsilon_1) \geq N(1-\beta^2-\varepsilon_1) \geq N_2(\beta, \varepsilon_1, B)(1-\beta^2-\varepsilon_1) =$$

$$= \left\lceil \frac{B}{1-\beta^2-\varepsilon_1} \right\rceil (1-\beta^2-\varepsilon_1) \geq \frac{B}{1-\beta^2-\varepsilon_1}(1-\beta^2-\varepsilon_1) = B,$$

что и требовалось.

Второй пункт Утверждения доказан.

Оба пункта Утверждения доказаны.

□

Утверждение 39. *Пусть* $\beta \in (0, 1)$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда* $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$

$$\beta - \varepsilon_2 < \prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i} < \beta + \varepsilon_2.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, 2))$. Тогда по Утверждению 38 (пункт 1) при $\beta \in (0, 1)$, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $2, a, b, N \in \mathbb{N}_0$ ясно, что если $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то $a \geq 2$.

А значит если $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, 2))$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то

$$\prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i} = \prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{(2i-1)2i}{(2i)^2} = \frac{\prod\limits_{i=2a-1}^{2a+2b-2} i}{\left(2^b \prod\limits_{i=a}^{a+b-1} i\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2a+2b-2)!}{(2a-2)!}}{2^{2b}\left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!}\right)^2} = \frac{1}{2^{2b}} \left(\frac{(a-1)!}{(a+b-1)!}\right)^2 \frac{(2a+2b-2)!}{(2a-2)!}.$$

А значит если $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, 2))$ и $(a, b) \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то по формуле Стирлинга данное выражение равняется следующему выражению при некоторых $\theta_{a-1}, \theta_{a+b-1}, \theta_{2a+2b-2}, \theta_{2a-2} \in$

$(0,1)$ (тут важно, что в данном случае $a \geq 2$ и $b \geq 1$, что, в свою очередь, значит, что $a-1 \geq 1$, $a+b-1 \geq 1$, $2a+2b-2 \geq 1$, $2a-2 \geq 1$):

$$\frac{1}{2^{2b}} \frac{2\pi(a-1)\left(\frac{(a-1)}{e}\right)^{2a-2}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{2\pi(a+b-1)\left(\frac{(a+b-1)}{e}\right)^{2a+2b-2}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2a+2b-2)}\left(\frac{(2a+2b-2)}{e}\right)^{2a+2b-2}\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\sqrt{2\pi(2a-2)}\left(\frac{(2a-2)}{e}\right)^{2a-2}\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2b}} \frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{(2a+2b-2)}\,(2a+2b-2)^{2a+2b-2}\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\sqrt{(2a-2)}\,(2a-2)^{2a-2}\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}.$$

Для начала рассмотрим

$$\frac{\left(\exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{\left(\exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2}\cdot\frac{\exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\exp\frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}}.$$

Ясно, что $\forall\varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A_1' \in \mathbb{N}_0 : \forall a,b \in \mathbb{N}_0 : a \geq A_1'$:

- $0 < \frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)} < \varepsilon_1'$;
- $0 < \frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)} < \varepsilon_1'$;
- $0 < \frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)} < \varepsilon_1'$;
- $0 < \frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)} < \varepsilon_1'$.

А это значит, что $\forall\varepsilon_2' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A_2' \in \mathbb{N}_0 : \forall a,b \in \mathbb{N}_0 : a \geq A_2'$:

- $1 < \exp\frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)} < 1+\varepsilon_2'$;
- $1 < \exp\frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)} < 1+\varepsilon_2'$;
- $1 < \exp\frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)} < 1+\varepsilon_2'$;

- $1 < \exp \frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)} < 1 + \varepsilon_2'$.

А это, в свою очередь, значит, что $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A'(\varepsilon') \in \mathbb{N}_0 : \forall a, b \in \mathbb{N}_0 :$ $a \geq A'(\varepsilon')$

$$1 - \varepsilon' < \frac{\left(\exp \frac{\theta_{a-1}}{12(a-1)}\right)^2}{\left(\exp \frac{\theta_{a+b-1}}{12(a+b-1)}\right)^2} \cdot \frac{\exp \frac{\theta_{2a+2b-2}}{12(2a+2b-2)}}{\exp \frac{\theta_{2a-2}}{12(2a-2)}} < 1 + \varepsilon'.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A'(\varepsilon') \in \mathbb{N}_0 :$ если $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1 - \beta^2\right)\right)$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, \max(2, A'(\varepsilon'))))$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то по Утверждению 38 (пункт 1) при $\beta \in (0, 1)$, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $A'(\varepsilon'), a, b, N \in \mathbb{N}_0$ наше выражение равняется следующему выражению при некотором $c' \in (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon')$:

$$c' \frac{1}{2^{2b}} \frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}} \cdot \frac{\sqrt{(2a+2b-2)}\,(2a+2b-2)^{2a+2b-2}}{\sqrt{(2a-2)}\,(2a-2)^{2a-2}} =$$

$$= c' \frac{(a-1)\,(a-1)^{2a-2}}{(a+b-1)\,(a+b-1)^{2a+2b-2}} \cdot \frac{\sqrt{(a+b-1)}\,(a+b-1)^{2a+2b-2}}{\sqrt{(a-1)}\,(a-1)^{2a-2}} = c' \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{\sqrt{a+b-1}}{\sqrt{a-1}} =$$

$$= c' \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+b-1}} = c' \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b-1}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} = c' \sqrt{\frac{a-1}{a}} \sqrt{\frac{a+b}{a+b-1}} \sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Ясно, что $\forall \varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A_1'' \in \mathbb{N}_0 : \forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a \geq A_1''$:

- $1 - \varepsilon_1'' < \sqrt{\frac{a-1}{a}} < 1 + \varepsilon_1''$;
- $1 - \varepsilon_1'' < \sqrt{\frac{a+b}{a+b-1}} < 1 + \varepsilon_1''$.

А это, в свою очередь, значит, что $\forall \varepsilon'' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A''(\varepsilon'') \in \mathbb{N}_0 : \forall a, b \in \mathbb{N}_0 :$ $a \geq A''(\varepsilon'')$

$$1 - \varepsilon'' \sqrt{\frac{a-1}{a}} \sqrt{\frac{a+b}{a+b-1}} < 1 + \varepsilon''.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A'(\varepsilon'), A''(\varepsilon'') \in \mathbb{N}_0 :$ если $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1 - \beta^2\right)\right)$, $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq \max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, \max(2, A'(\varepsilon'), A''(\varepsilon''))))$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то по Утверждению 38 (пункт 1) при $\beta \in (0, 1)$, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $A''(\varepsilon''), a, b, N \in \mathbb{N}_0$ наше выражение равняется следующему выражению при некоторых $c' \in (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon')$, $c'' \in (1 - \varepsilon'', 1 + \varepsilon'')$:

$$c'c'' \sqrt{\frac{a}{a+b}} = c'c'' \sqrt{c_1}$$

при некотором $c_1 \in (\beta^2 - \varepsilon_1, \beta^2 + \varepsilon_1)$.

А из этого ясно, что $\forall \varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1 - \beta^2\right)\right)\ \exists N'(\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1) =$ $\max(1, N_1(\beta, \varepsilon_1, \max(2, A'(\varepsilon'), A''(\varepsilon'')))) \in \mathbb{N}_0 :$ если $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq N'(\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1)$

и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то наше выражение равняется следующему выражению при некоторых $c' \in (1-\varepsilon', 1+\varepsilon')$, $c'' \in (1-\varepsilon'', 1+\varepsilon'')$, $c_1 \in (\beta^2 - \varepsilon_1, \beta^2 + \varepsilon_1)$:

$$c' c'' \sqrt{c_1}.$$

Ясно, что мы можем выбрать $\varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$ так, что:

- $$(1-\varepsilon')(1-\varepsilon'')\sqrt{\beta^2 - \varepsilon_1} > \beta - \varepsilon_2;$$
- $$(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')\sqrt{\beta^2 + \varepsilon_1} < \beta + \varepsilon_2.$$

Очевидно, что при выбранных $\varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$ если $c' \in (1-\varepsilon', 1+\varepsilon')$, $c'' \in (1-\varepsilon'', 1+\varepsilon'')$, $c_1 \in (\beta^2 - \varepsilon_1, \beta^2 + \varepsilon_1)$, то

$$\beta - \varepsilon_2 < c' c'' \sqrt{c_1} < \beta + \varepsilon_2.$$

Теперь пусть $N = N'(\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1)$ при выбранных $\varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$.

Из того, что мы уже поняли, очевидно следует, что $N \in \mathbb{N}_0$, $N \geq 1$ и что $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$

$$\beta - \varepsilon_2 < \prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{2-i}{2i} < \beta + \varepsilon_2,$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Утверждение 40. *Пусть* $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in (0, 1)$. *Тогда* $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ *или* } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x 1^{2a}\right) < \beta + \varepsilon_3.$$

Доказательство. По Утверждению 39 при нашем $\beta \in (0, 1)$ и $\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1', N')$

$$\beta - \varepsilon_2 < \prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i} < \beta + \varepsilon_2.$$

А это по определению функций π и g равносильно тому, что при нашем $\beta \in (0, 1)$ и $\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1', N')$

$$\beta - \varepsilon_2 < \pi\left(2^b 1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_2.$$

Теперь докажем, что при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N'' \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } 1 - \varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} < 1 + \varepsilon_4.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$. Пусть $\varepsilon_1'' = \min\left(\frac{\beta^2}{2}, \frac{1-\beta^2}{2}\right) \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. После чего зафиксируем произвольное $d \in \mathbb{N}_0$. Пусть $N_1'' = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_4} \right\rceil$. Ясно, что $N_1'' \in \mathbb{N}_0$ и $N_1'' \geq 1$.

Давайте рассмотрим $a, b \in \mathbb{N}_0$: $a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_1'')$. Заметим, что

$$\frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \geq (\text{так как } a \geq 1 \text{ и } |x| \leq 2b+1) \geq \frac{\pi\left(2^{b+1} 1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} =$$

$$= (\text{По определению функций } \pi \text{ и } g) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=a}^{a+b} \dfrac{2i}{2i+1}}{\prod\limits_{i=a}^{a+b-1} \dfrac{2i-1}{2i}} \geq \frac{\prod\limits_{i=a}^{a+b} \dfrac{2i-1}{2i}}{\prod\limits_{i=a}^{a+b-1} \dfrac{2i-1}{2i}} = \prod_{i=a+b}^{a+b} \frac{2i-1}{2i} = \frac{2a+2b-1}{2a+2b} = 1 - \frac{1}{2a+2b} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2N_1''} > 1 - \frac{1}{N_1''} = 1 - \frac{1}{\left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon_4} \right\rceil} \geq 1 - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_4}} = 1 - \varepsilon_4.$$

Теперь давайте рассмотрим $a, b \in \mathbb{N}_0$: $a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$ (N_2'' мы выберем позднее), а также $x \in \mathbb{YF} : |x| \in \{2b, 2b+1\}$ и $e(x) \leq d$.

Помним, что $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$. Пусть $N_2'' \in \mathbb{N}_0 : N_2'' \geq \max\left(1, N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)\right)$. Тогда по Утверждению 38 (пункт 2) при $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$, $\left(\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)$, $a, b, N_2'' \in \mathbb{N}_0$ ясно, что если $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то $b \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2$.

Кроме того, ясно, что если $e(x) \leq d$, то (так как $|x| \geq 2b$) $d(x) \geq b - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$, также ясно, что (так как $a \geq 1$) максимальное значение функции π может быть достигнуто, если двойки располагаются слева (из определений функций π и g). Таким образом (так как $|x| \leq 2b+1$), при выбранном $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$ если $N_2'' \in \mathbb{N}_0 : N_2'' \geq \max\left(1, N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)\right)$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$, то

$$\frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \leq \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil} 1^{2\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil+1} 1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \leq$$

$$\leq \left(\text{Из определений функций } \pi \text{ и } g \text{ и так как } b - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \geq 2\right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil-1}1^{2\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+1}1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b1^{2a-1}\right)} = \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil-1}1^{2\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+2}1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b1^{2a-1}\right)} =$$

$$= (\text{Из определений функций } \pi \text{ и } g) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=a+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+1}^{a+b-1}\frac{2i-1}{2i}}{\prod\limits_{i=a}^{a+b-1}\frac{2i-1}{2i}} = \frac{1}{\prod\limits_{i=a}^{a+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil}\frac{2i-1}{2i}} = \prod_{i=a}^{a+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil}\frac{2i}{2i-1} \leq \left(\frac{2a}{2a-1}\right)^{\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+1}.$$

Ясно, что $\exists A(\varepsilon_4) \in \mathbb{N}_0$: при $a \geq A(\varepsilon_4)$

$$\left(\frac{2a}{2a-1}\right)^{\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+1} < 1+\varepsilon_4.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists A(\varepsilon_4) \in \mathbb{N}_0$: при выбранных $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$, $N_2'' = \max\left(1, N_1(\beta, \varepsilon_1'', A(\varepsilon_4)), N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil+2\right)\right) \in \mathbb{N}_0$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$ по Утверждению 38 (пункт 1) при $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$, $A(\varepsilon_4), a, b, N_2'' \in \mathbb{N}_0$ наше выражение меньше, чем $1+\varepsilon_4$.

Таким образом, мы доказали, что при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall\varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N'' = \max(N_1'', N_2'') \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF}$: $a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$, $e(x) \leq d$

$$1-\varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b1^{2a-1}\right)} < 1+\varepsilon_4,$$

что и требовалось.

То есть у нас доказано, что

- При нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1', N')$

$$\beta-\varepsilon_2 < \pi\left(2^b1^{2a-1}\right) < \beta+\varepsilon_2;$$

- При нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall\varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N'' \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } 1-\varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b1^{2a-1}\right)} < 1+\varepsilon_4.$$

Ясно, что при наших $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\beta \in (0,1)$ мы можем выбрать $\varepsilon_2 \in (0,\beta)$, $\varepsilon_4 \in (0,1)$ так, что

-
$$(\beta-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_4) > \beta-\varepsilon_3;$$

•

$$(\beta+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4) < \beta+\varepsilon_3.$$

Воспользуемся этими двумя фактами при только что выбранных $\varepsilon_2 \in (0,\beta)$, $\varepsilon_4 \in (0,1)$ и поймём, что при наших $\beta \in (0,1)$ и $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1 = \min(\varepsilon_1', \varepsilon_1'') \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N = \max(N', N'') \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } \pi\left(2^b 1^{2a-1}\right) \cdot \frac{\pi\left(x1^{2a}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} = \pi\left(x1^{2a}\right) \in (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

□

Утверждение 41. *Пусть* $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in (0,1)$. *Тогда* $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \textit{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_3.$$

Доказательство. По Утверждению 39 при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N')$

$$\beta - \varepsilon_2 < \prod_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i} < \beta + \varepsilon_2.$$

А это по определению функций π и g равносильно тому, что при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1', N')$

$$\beta - \varepsilon_2 < \pi\left(2^b 1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_2.$$

Теперь докажем, что при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N'' \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } 1 - \varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} < 1 + \varepsilon_4.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$. Пусть $\varepsilon_1'' = \min\left(\frac{\beta^2}{2}, \frac{1-\beta^2}{2}\right) \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. После чего зафиксируем произвольное $d \in \mathbb{N}_0$. Пусть $N_1'' = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_4} \right\rceil$. Ясно, что $N_1'' \in \mathbb{N}_0$ и $N_1'' \geq 1$.

Давайте рассмотрим $a, b \in \mathbb{N}_0$: $a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_1'')$. Заметим, что

$$\frac{\pi\left(x1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \geq (\text{так как } a \geq 1 \text{ и } |x| \leq 2b+1) \geq \frac{\pi\left(2^{b+1} 1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} =$$

$$= (\text{По определению функций } \pi \text{ и } g) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=a}^{a+b} \frac{2i-1}{2i}}{\prod\limits_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i}} = \prod_{i=a+b}^{a+b} \frac{2i-1}{2i} = \frac{2a+2b-1}{2a+2b} = 1 - \frac{1}{2a+2b} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2N_1''} > 1 - \frac{1}{N_1''} = 1 - \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon_4} \right\rceil} \geq 1 - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_4}} = 1 - \varepsilon_4.$$

Теперь давайте рассмотрим $a, b \in \mathbb{N}_0$: $a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$ (N_2'' мы выберем позднее), а также $x \in \mathbb{YF} : |x| \in \{2b, 2b+1\}$ и $e(x) \leq d$.

Помним, что $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$. Пусть $N_2'' \in \mathbb{N}_0 : N_2'' \geq \max\left(1, N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)\right)$. Тогда по Утверждению 38 (пункт 2) при $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$, $\left(\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)$, $a, b, N_2'' \in \mathbb{N}_0$ ясно, что если $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, то $b \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2$.

Кроме того, ясно, что если $e(x) \leq d$, то (так как $|x| \geq 2b$) $d(x) \geq b - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$, также ясно, что (так как $a \geq 1$) максимальное значение функции π может быть достигнуто, если двойки располагаются слева (из определений функций π и g). Таким образом (так как $|x| \leq 2b+1$), при выбранном $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$ если $N_2'' \in \mathbb{N}_0 : N_2'' \geq \max\left(1, N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)\right)$ и $a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$, то

$$\frac{\pi\left(x 1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \leq \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil} 1^{2\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1} 1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \leq \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil} 1^{2\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2} 1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} \leq$$

$$\leq \left(\text{Из определений функций } \pi \text{ и } g \text{ и так как } b - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \geq 2\right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi\left(2^{b-\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil - 1} 1^{2\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2} 1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} = (\text{Из определений функций } \pi \text{ и } g) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=a+\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i}}{\prod\limits_{i=a}^{a+b-1} \frac{2i-1}{2i}} = \frac{1}{\prod\limits_{i=a}^{a+\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil} \frac{2i-1}{2i}} = \prod_{i=a}^{a+\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil} \frac{2i}{2i-1} \leq \left(\frac{2a}{2a-1}\right)^{\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1}.$$

Ясно, что $\exists A(\varepsilon_4) \in \mathbb{N}_0$: при $a \geq A(\varepsilon_4)$

$$\left(\frac{2a}{2a-1}\right)^{\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1} < 1 + \varepsilon_4.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists A(\varepsilon_4) \in \mathbb{N}_0$: при выбранных $\varepsilon_1'' \in \left(0, \min\left(\beta^2, 1-\beta^2\right)\right)$, $N_2'' = \max\left(1, N_1(\beta, \varepsilon_1'', A(\varepsilon_4)), N_2\left(\beta, \varepsilon_1'', \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 2\right)\right) \in \mathbb{N}_0$ и $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N_2'')$

по Утверждению 38 (пункт 1) при $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0}$, $A(\varepsilon_4), a, b, N_2'' \in \mathbb{N}_0$ наше выражение меньше, чем $1+\varepsilon_4$.

Таким образом, мы доказали, что при нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N'' = \max(N_1'', N_2'') \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF}$: $a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$, $e(x) \leq d$

$$1-\varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} < 1+\varepsilon_4,$$

что и требовалось.

То есть у нас доказано, что:

- При нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $N' \in \mathbb{N}_0$: $N' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1', N')$
$$\beta - \varepsilon_2 < \pi\left(2^b 1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_2;$$
- При нашем $\beta \in (0,1)$ и $\forall \varepsilon_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1'' \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N'' \in \mathbb{N}_0 : N'' \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1'', N'')$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$
$$e(x) \geq d \text{ или } 1-\varepsilon_4 < \frac{\pi\left(x1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} < 1+\varepsilon_4.$$

Ясно, что при наших $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\beta \in (0,1)$ мы можем выбрать $\varepsilon_2 \in (0,\beta)$, $\varepsilon_4 \in (0,1)$ так, что

- $$(\beta-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_4) > \beta - \varepsilon_3;$$
- $$(\beta+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4) < \beta + \varepsilon_3.$$

Воспользуемся этими двумя фактами при только что выбранных $\varepsilon_2 \in (0,\beta)$, $\varepsilon_4 \in (0,1)$ и поймём, что при наших $\beta \in (0,1)$ и $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1 = \min(\varepsilon_1', \varepsilon_1'') \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N = \max(N', N'') \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } \pi\left(2^b 1^{2a-1}\right) \cdot \frac{\pi\left(x1^{2a-1}\right)}{\pi\left(2^b 1^{2a-1}\right)} = \pi\left(x1^{2a-1}\right) \in (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. □

Утверждение 42. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$. *Тогда*

$$\sum_{x \in K(n,y)} \left(d(\varepsilon, x) \cdot q(x(y)) \cdot d_1'(x'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) = \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d(\varepsilon, x''1^y) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot \beta^y\cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right).$$

Ясно, что в каждом слагаемом по Замечанию 21 при $x\in\mathbb{YF}$, $n,y\in\mathbb{N}_0$

$$x = x(y)x'(y).$$

А значит можно воспользоваться Утверждением 1 при $x, x(y), x'(y)\in\mathbb{YF}$ и получить, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x'(y))\cdot d\left(\varepsilon, x(y)1^{|x'(y)|}\right)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) =$$

$$= (\text{По обозначению } x'(y)) =$$

$$= \sum_{x\in K(n,y)} \left(d(\varepsilon,x'(y))\cdot d\left(\varepsilon, x(y)1^{y}\right)\cdot q(x(y))\cdot d_1'(x'(y),w)\cdot \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right).$$

Заметим, что при $n,y\in\mathbb{N}_0 : y\le n$

- если $x\in K(n,y)$, то $x = x(y)x'(y)$, причём $x(y)\in\mathbb{YF}_{n-y}$, $x'(y)\in\mathbb{YF}_y$;
- если $x_1,x_2\in K(n,y)$: $x_1\ne x_2$, то $x_1(y)\ne x_2(y)$ или $x_1'(y)\ne x_2'(y)$;
- если $x''\in\mathbb{YF}_{n-y}$, $x'''\in\mathbb{YF}_y$, то $(x''x''')\in K(n,y)$, $(x''x''')(y) = x''$, $(x''x''')'(y) = x'''$.

А это значит, что при всех $x\in K(n,y)$ пара $(x(y),x'(y))$ принимает все значения в $\mathbb{YF}_{n-y}\times\mathbb{YF}_y$, причём ровно по одному разу.

А это значит, что наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(\sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot q(x'')\cdot d_1'(x''',w)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\cdot d_1'(x''',w)\right) =$$

$$= (\text{По Утверждению 28 при } x'''\in\mathbb{YF},\ w\in\mathbb{YF}_\infty) =$$

$$= \left(\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\cdot \lim_{m\to\infty}\frac{d(x''',w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} \right) =$$

$$= \left(\sum_{x''\in\mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'')\cdot d\left(\varepsilon,x''1^y\right)\cdot\beta^y\cdot\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{x'''\in\mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon,x''')\frac{d(x''',w_m)}{d(\varepsilon,w_m)} \right) \right).$$

Заметим, что по Утверждению 3, при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $y, m \in \mathbb{N}_0$ если $|w_m| \geq y$, то

$$\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = 1.$$

А значит если $m \geq y$, то $|w_m| \geq m \geq y$, то есть

$$\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) = 1,$$

а значит

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{x''' \in \mathbb{YF}_y} \left(d(\varepsilon, x''') \frac{d(x''', w_m)}{d(\varepsilon, w_m)} \right) \right) = 1.$$

Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x'' 1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot 1 =$$

$$= \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d\left(\varepsilon, x'' 1^y\right) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right),$$

что и требовалось.

Утверждение доказано. $\square$

Лемма 8. *Пусть $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$. Тогда $\exists \varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$: $\forall \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N'' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''$*

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) + \left(\sum_{v \in \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) < \overline{\varepsilon'}.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$ и воспользуемся определением волшебных таблиц:

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) + \left(\sum_{v \in \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) =$$

$$= \left(\text{так как } \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y) \subseteq \overline{K}(n,y)\right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) + 0 \right) = \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) =$$

$$= \left(\text{так как } \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \subseteq K(n,y)\right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\# v(y)} \right) \right).$$

Ясно, что если $v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$, то $|v(y)| = n-y$, а значит $n - y = |v(y)| = 2d(v(y)) + e(v(y)) = 2d(v(y)) + 2e(v(y)) - e(v(y)) = 2(d(v(y)) + e(v(y))) - e(v(y)) = 2\#(v(y)) - e(v(y)) \Longrightarrow \#(v(y)) = \dfrac{n-y+e(v(y))}{2}$. Таким образом, наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y+e(v(y))}{2}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \right) \right).$$

Обозначение 53. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon, \varepsilon_3, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда:*

- *Если* $\exists y \in \mathbb{N}_0,\ v \in \mathbb{YF} : y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$, *то*

$$\overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} = \max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}};$$

- *Если* $\nexists y \in \mathbb{N}_0,\ v \in \mathbb{YF} : y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$, *то*

$$\overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} = 0.$$

Далее рассмотрим два случая. Ясно, что:

а) Если $\nexists y \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{YF}$: $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']$, $v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$, то

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \right) \right) =$$

$$= 0 = 0 \cdot 0 = \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}}.$$

b) Если $\exists y \in \mathbb{N}_0,\ v \in \mathbb{YF} : y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\ v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$, то

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \right) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}}.$$

А значит в любом из двух случаев (ясно, что других нет) наше выражение не превосходит следующее:

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq$$

$\leq \big($так как если $w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1),\ \varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0},\ n, y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$, то $\overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3) \subseteq K(n, y)\big) \leq$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in K(n,y)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq$$

$\leq$ (так как если $n \in \mathbb{N}_0,\ \beta \in (0,1),\ \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, то $\overline{n}[\beta, \varepsilon_1'] \subseteq \overline{n}$) $\leq$

$$\leq \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in K(n,y)} \left(d(\varepsilon, v) \cdot q(v(y)) \cdot d_1'(v'(y), w) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} =$$

$=$ (По Утверждению 42 при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty,\ \beta \in (0,1],\ n \in \mathbb{N}_0$, просуммированному по $y \in \overline{n}$) $=$

$$= \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} \left(q(x'') \cdot d(\varepsilon, x''1^y) \cdot \beta^y \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \right) \cdot \overset{0}{\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'],\\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} =$$

$$= \sum_{y=0}^{n} \left(\beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \cdot \sum_{x'' \in \mathbb{YF}_{n-y}} (q(x'')d(\varepsilon, x''1^y)) \right) \cdot \max^{0}_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}}.$$

По Утверждению 30 при зафиксированном нами $n \in \mathbb{N}_0$, просуммированному по $y \in \overline{n}$, это выражение равняется следующему:

$$\sum_{y=0}^{n} \left(\beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \cdot \max^{0}_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} =$$

$$= \sum_{y=0}^{n} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) \cdot \max^{0}_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{y=0}^{n} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) \cdot \max^{0}_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq$$

$$\leq (\text{По Утверждению 32 при наших } \beta \in (0,1) \text{ и } n \in \mathbb{N}_0) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \max^{0}_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}}.$$

Что значит, что $v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$ при $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']$?

Это значит, что $v \in K(n,y)$, $\pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))$, $\pi_y(v) \notin (\beta-\varepsilon_3, \beta+\varepsilon_3)$, $y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right), n\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)\right)\right)$.

Сначала рассмотрим чётные игреки.

Мы знаем, что по Утверждению 40 при наших $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\beta \in (0,1)$ $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0\ \exists N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a,b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a,b \geq 1$, $(a,b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x1^{2a}\right) < \beta + \varepsilon_3.$$

Рассмотрим $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, удовлетворяющее условию Утверждения, зафиксируем какое-нибудь $d \in \mathbb{N}_0$, для него рассмотрим $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, удовлетворяющее условию Утверждения.

Теперь пусть $\varepsilon_{10} = \min\left(\frac{\beta^2}{2}, \frac{1-\beta^2}{2}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \in \left(0, \beta^2\right)$, $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N_0 := \max\left(2N+2, \left\lceil \frac{2\left(\beta^2+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\frac{\varepsilon_1}{2}} + 3 \right\rceil, \frac{4}{1-\beta^2}\right)$ и $v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)$ при $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}](2,0)$.

Наконец, пусть $a = \frac{y}{2}$, $b = \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor$, $x = v(y)$ ($v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3) \subseteq K(n,y) \Longrightarrow v(y)$ существует).

Тогда заметим, что

- $$a = \frac{y}{2} \geq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)\right)\right)\right) \geq$$
$$\geq n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right) \geq n\left(\beta^2 - \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{n\beta^2}{2} > 0 \Longrightarrow (\text{так как } a \in \mathbb{N}_0) \Longrightarrow a \geq 1;$$
- $$b = \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor \geq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)\right)\right)\right) \geq$$
$$\geq \left\lfloor \frac{n - n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n\left(1 - \beta^2 - \varepsilon_{10}\right)}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n\left(1 - \beta^2 - \frac{1-\beta^2}{2}\right)}{2} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor n\frac{\left(1-\beta^2\right)}{4} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{4}{1-\beta^2} \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1;$$
- $$a+b = \frac{y}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor \geq \frac{y}{2} + \left(\frac{n-y}{2} - 1\right) = \frac{n}{2} - 1 \geq \frac{N_0}{2} - 1 \geq \frac{2N+2}{2} - 1 = N;$$
- $$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{y}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} = \frac{y}{y + 2\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \geq \frac{y}{y + 2\left(\frac{n-y}{2}\right)} = \frac{y}{n} \geq$$
$$\geq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)\right)\right)\right) \geq$$
$$\geq \frac{n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right)}{n} = \beta^2 - \varepsilon_{10} \geq \beta^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} > \beta^2 - \varepsilon_1;$$
- $$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{y}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} = \frac{y}{y + 2\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \leq \frac{y}{y + 2\left(\frac{n-y}{2} - 1\right)} = \frac{y}{n-2} \leq$$
$$\leq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)\right)\right)\right) \leq$$
$$\leq \frac{n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{n-2} = \frac{(n-2)\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{n-2} + \frac{2\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{n-2} = \beta^2 + \varepsilon_{10} + \frac{2\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{n-2} \leq$$
$$\leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{n-2} \leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{N_0 - 2} \leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\frac{\varepsilon_1}{2}} + 3 - 2} <$$
$$< \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\frac{2\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}{\frac{\varepsilon_1}{2}}} = \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \beta^2 + \varepsilon_1;$$

- Если $(n-y) \; mod \; 2 = 0$, то

$$|x| = n - y = 2\frac{n-y}{2} = 2\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor = 2b;$$

- Если $(n-y) \; mod \; 2 = 1$, то

$$|x| = n - y = 2\frac{n-y-1}{2} + 1 = 2\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor + 1 = 2b + 1.$$

То есть $a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$.

А это по Утверждению 40 значит, что

$$e(x) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x1^{2a}\right) < \beta + \varepsilon_3,$$

то есть

$$e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{2a}\right) < \beta + \varepsilon_3 \iff$$
$$\iff e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{2\frac{y}{2}}\right) < \beta + \varepsilon_3 \iff$$
$$\iff e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{y}\right) < \beta + \varepsilon_3 \iff$$
$$\iff (\text{По определению } \pi_y(v)) \iff$$
$$\iff e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi_y(v) < \beta + \varepsilon_3 \iff$$
$$\iff \left(\text{так как } v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)\right) \iff$$
$$\iff e(v(y)) \geq d.$$

Таким образом, мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_{10} \in \left(0, \beta^2\right)$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$, $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}](2, 0)$

$$e(v(y)) \geq d.$$

Теперь рассмотрим нечётные игреки:

Мы знаем, что по Утверждению 41 при наших $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\beta \in (0,1)$ $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : (a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$

$$e(x) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_3.$$

Рассмотрим $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, удовлетворяющее условию Утверждения, зафиксируем какое-нибудь $d \in \mathbb{N}_0$, для него рассмотрим $N \in \mathbb{N}_0 : N \geq 1$, удовлетворяющее условию Утверждения.

Теперь пусть $\varepsilon_{11} = \min\left(\frac{\beta^2}{2}, \frac{1-\beta^2}{2}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \in \left(0, \beta^2\right)$, $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N_1 := \max\left(2N+2, \left\lceil\frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{\frac{\varepsilon_1}{2}} + 2\right\rceil, \frac{4}{1-\beta^2}\right)$ и $v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$ при $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{11}](2, 1)$.

Наконец, пусть $a = \frac{y+1}{2}$, $b = \left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor$, $x = v(y)$ ($v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3) \subseteq K(n, y) \implies v(y)$ существует).

Тогда заметим, что

- $$a = \frac{y+1}{2} \geq \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \Longrightarrow (\text{так как } a \in \mathbb{N}_0) \Longrightarrow a \geq 1;$$

- $$b = \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor \geq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{10}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{10}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)\right)\right)\right) \geq$$
$$\geq \left\lfloor \frac{n - n\left(\beta^2 + \varepsilon_{10}\right)}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n\left(1 - \beta^2 - \varepsilon_{10}\right)}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n\left(1 - \beta^2 - \frac{1-\beta^2}{2}\right)}{2} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor n\frac{\left(1-\beta^2\right)}{4} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{4}{1-\beta^2} \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)}{4} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1;$$

- $$a+b = \frac{y+1}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor \geq \frac{y}{2} + \left(\frac{n-y}{2} - 1\right) = \frac{n}{2} - 1 \geq \frac{N_1}{2} - 1 \geq \frac{2N+2}{2} - 1 = N;$$

- $$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{y+1}{2}}{\frac{y+1}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} = \frac{y+1}{y+1+2\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \geq \frac{y+1}{y+1+2\left(\frac{n-y}{2}\right)} \geq \frac{y}{y+2\left(\frac{n-y}{2}\right)} = \frac{y}{n} \geq$$
$$\geq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{11}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{11}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right)\right)\right)\right) \geq$$
$$\geq \frac{n\left(\beta^2 - \varepsilon_{11}\right)}{n} = \beta^2 - \varepsilon_{11} \geq \beta^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} > \beta^2 - \varepsilon_1;$$

- $$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{y+1}{2}}{\frac{y+1}{2} + \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} = \frac{y+1}{y+1+2\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \leq \frac{y+1}{y+1+2\left(\frac{n-y}{2} - 1\right)} = \frac{y+1}{n-1} \leq$$
$$\leq \left(\text{так как } y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{11}] \Longleftrightarrow y \in \left(\overline{n} \cap \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_{11}\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right)\right)\right)\right) \leq$$
$$\leq \frac{n\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right) + 1}{n-1} = \frac{(n-1)\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right)}{n-1} + \frac{\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right) + 1}{n-1} = \beta^2 + \varepsilon_{11} + \frac{\left(\beta^2 + \varepsilon_{11}\right) + 1}{n-1} \leq$$
$$\leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{n-1} \leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{N_1 - 1} \leq \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{\frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{\frac{\varepsilon_1}{2}} + 2 - 1} <$$
$$< \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{\frac{\beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + 1}{\frac{\varepsilon_1}{2}}} = \beta^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \beta^2 + \varepsilon_1;$$

- Если $(n-y)\ mod\ 2 = 0$, то

$$|x| = n - y = 2\frac{n-y}{2} = 2\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor = 2b;$$

- Если $(n-y)\ mod\ 2 = 1$, то

$$|x| = n - y = 2\frac{n-y-1}{2} + 1 = 2\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor + 1 = 2b + 1.$$

То есть $a, b \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{YF} : a, b \geq 1$, $(a, b) \in U(\beta, \varepsilon_1, N)$, $|x| \in \{2b, 2b+1\}$.
А это по Утверждению 41 значит, что

$$e(x) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(x1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_3,$$

то есть

$$e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{2a-1}\right) < \beta + \varepsilon_3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{2\frac{y+1}{2}-1}\right) < \beta + \varepsilon_3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi\left(v(y)1^{y}\right) < \beta + \varepsilon_3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\text{По определению } \pi_y(v)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e(v(y)) \geq d \text{ или } \beta - \varepsilon_3 < \pi_y(v) < \beta + \varepsilon_3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\text{так как } v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e(v(y)) \geq d.$$

Таким образом, мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_{11} \in \left(0, \beta^2\right)$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}_0 : \forall v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$ при $n \in \mathbb{N}_0 :$ $n \geq N'$, $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_{11}](2,1)$

$$e(v(y)) \geq d.$$

Итак, объединяем информацию про чётные и нечётные игреки:

Мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon'_1 = \min(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{11}) \in \left(0, \beta^2\right)$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N' = \max(N_0, N_1) \in \mathbb{N}_0 : \forall v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$, $y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon'_1]$

$$e(v(y)) \geq d.$$

Таким образом, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon'_1 \in \left(0, \beta^2\right) :$ $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0 :$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$

$$\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon'_1],\\ v \in \overline{R'}(w, \beta, n, \varepsilon, y, \varepsilon_3)}} \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq \left(1 - \beta^2\right)^{\frac{d}{2}}.$$

А значит при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$: $\forall d \in \mathbb{N}_0$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0$: при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'$

$$\max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}^{0} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} \leq \left(1-\beta^2\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Ясно, что наших $\beta \in (0,1)$ и $\overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists d \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(1-\beta^2\right)^{\frac{d}{2}} < \frac{\overline{\varepsilon'}}{1+\frac{1}{\beta}}.$$

Зафиксируем это d.

Как мы поняли при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \left(0, \beta^2\right)$: при только что зафиксированном d $\exists N'' \in \mathbb{N}_0$: при $n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) + \left(\sum_{v \in \overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \cdot \max_{\substack{y \in \overline{n}[\beta, \varepsilon_1'], \\ v \in \overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)}}^{0} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{e(v(y))}{2}} < \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\overline{\varepsilon'}}{1+\frac{1}{\beta}} = \overline{\varepsilon'},$$

что и требовалось.

Лемма доказана. ☐

Лемма 9. *Пусть* $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$. *Тогда*

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Доказательство. Заметим, что функция T неотрицательна, а также то, что $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon) \subseteq \mathbb{YF}_n.$$

Это значит, что

$$0 \leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y) \right).$$

Рассмотрим две подпоследовательности:

a) Подпоследовательность $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$.

   Для начала рассмотрим чётные игреки.

   Зафиксируем какое-то $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$.

Если $y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$, то по Утверждению 31 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \leq \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,0)$. Просуммируем:

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 0 \text{ и } y \; mod \; 2 = 0, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y}{2} \right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2\frac{y}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2\frac{y}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,0)$, при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$, то $\frac{y}{2}$ пробегает все значения в множестве $\overline{n}_{00}\{\beta, \varepsilon'_1\}$ (просто по определению этого множества), то есть данное выражение равняется следующему:

$$\sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta,\varepsilon'_1\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta,\varepsilon'_1\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta,\varepsilon'_1\}} \left(\left(\frac{\prod_{i=y'+1}^{\frac{n}{2}} i}{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y' \in \overline{2n}_{00}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) =$$

$$= (\text{просто по определению множества } \overline{n}_{00,2}\{\beta, \varepsilon_1'\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y' \in \overline{n}_{00,2}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right).$$

Мы знаем, что

$$\overline{n}_{00,2}\{\beta, \varepsilon_1'\} = \overline{n} \backslash \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right), n\left(\beta^2 + \varepsilon_1'\right)\right).$$

А значит при $\beta \in (0,1)$, по закону распределения биномиальных коэффициентов,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y' \in \overline{n}_{00,2}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) = 0.$$

А значит

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) = 0.$$

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \ mod\ 2 = 0$

$$0 \leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq \sum_{y' \in \overline{n}_{00}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0.$$

Теперь рассмотрим нечётные игреки.

Зафиксируем какое-то $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$.

Если $y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$, то по Утверждению 31 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \leq \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,1)$. Просуммируем:

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 0 \text{ и } y \; mod \; 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y-1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y-1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,1)$, при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon'_1\} \backslash \{0\}$ (просто по определению этого множества), то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta,\varepsilon'_1\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta,\varepsilon'_1\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

Тут есть два случая:

1° $0 \notin \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}$.

В данном случае $\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\} \backslash \{0\} = \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}$, а значит

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

2° $0 \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}$.

В данном случае

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{i}{i} \right) \beta^0 \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\} \backslash \{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{0} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

В обоих случаях (ясно, что других нет) наше выражение не превосходит следующее:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{2n}_{01}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) =$$

$$= (\text{просто по определению множества } \overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon_1'\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right).$$

Ясно, что

- $$\overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon_1'\} = \overline{n} \setminus \left(n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2}, n\left(\beta^2 + \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2} \right);$$

- Если $n \in \mathbb{N}_0 : n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_1'} \right\rceil$, то

$$\frac{n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2}}{n} = \beta^2 - \varepsilon_1' + \frac{1}{2n} < \beta^2 - \varepsilon_1' + \frac{1}{2\left\lceil \frac{1}{\varepsilon_1'} \right\rceil} \leq \beta^2 - \varepsilon_1' + \frac{1}{2\frac{1}{\varepsilon_1'}} = \beta^2 - \varepsilon_1' + \frac{\varepsilon_1'}{2} = \beta^2 - \frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n\left(\beta^2 - \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2} < n\left(\beta^2 - \frac{\varepsilon_1'}{2}\right);$$

- Если $n \in \mathbb{N}_0 : n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_1'} \right\rceil$, то

$$\frac{n\left(\beta^2 + \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2}}{n} = \beta^2 + \varepsilon_1' + \frac{1}{2n} > \beta^2 + \frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n\left(\beta^2 + \varepsilon_1'\right) + \frac{1}{2} > n\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1'}{2}\right).$$

А значит если $n \in \mathbb{N}_0 : n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_1'} \right\rceil$, то

$$\overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon_1'\} \subset \overline{n} \setminus \left(n\left(\beta^2 - \frac{\varepsilon_1'}{2}\right), n\left(\beta^2 + \frac{\varepsilon_1'}{2}\right) \right) = \overline{n}\left\{\beta, \frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}.$$

А значит (так как $\beta \in (0,1)$), если $n \in \mathbb{N}_0 : n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon'_1} \right\rceil$, то

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}\left\{\beta, \frac{\varepsilon'_1}{2}\right\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \geq \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon'_1\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \geq 0.$$

Ясно, что при $\beta \in (0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}\left\{\beta, \frac{\varepsilon'_1}{2}\right\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) = 0.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01,2}\{\beta, \varepsilon'_1\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) = 0.$$

А значит

$$\overset{(2,0)}{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon'_1\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right) \right) = 0.$$

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 0$

$$0 \leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{01}\{\beta, \varepsilon'_1\}} \left(\binom{\frac{n}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n}{2}-y'} \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\overset{(2,0)}{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0.$$

b) Подпоследовательность $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$.

Для начала рассмотрим чётные игреки.

Зафиксируем какое-то $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$.

Если $y \in \mathbb{N}_0 : y \leq n$, то по Утверждению 31 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n, y \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \leq \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y \in \overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}(2,0)$. Просуммируем:

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod \; 2 = 1 \text{ и } y \; mod \; 2 = 0 \text{, то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y-1}{2} \right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y-1}{2}} \frac{2i+y}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y-1}{2}} \right) =$$

$$= \sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-1-2\frac{y}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1-2\frac{y}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}\{\beta, \varepsilon_1'\}(2,0)$, при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$, то $\frac{y}{2}$ пробегает все значения в множестве $\overline{n}_{10}\{\beta, \varepsilon_1'\}$ (просто по определению этого множества), то есть наше выражение равняется следующему:

$$\sum_{y' \in \overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-1-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n-1}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \sum_{y' \in \overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n-1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \sum_{y' \in \overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n-1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y'\in\overline{2n+1}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right) =$$

$$= (\text{просто по определению множества } \overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y'\in\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right).$$

Ясно, что

- $$\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\} = \overline{n}\backslash\left(\frac{(2n+1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)}{2}, \frac{(2n+1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2}\right);$$

- Если $n\in\mathbb{N}_0 : n > \left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\frac{\frac{(2n+1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)}{2}}{n} = \frac{(2n+1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)}{2n} = \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)}{2n} < (\text{Так как } \beta\in(0,1)) <$$

$$< \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{1}{2n} < \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{1}{2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil} \le \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{1}{2\frac{1}{\varepsilon_1'}} = \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{2} = \beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n+1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)}{2} < n\left(\beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2}\right);$$

- Если $n\in\mathbb{N}_0 : n > \left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\frac{\frac{(2n+1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2}}{n} = \frac{(2n+1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2n} > \frac{2n\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2n} = \beta^2+\varepsilon_1' > \beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n+1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2} > n\left(\beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2}\right);$$

А значит если $n\in\mathbb{N}_0 : n > \left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\} \subset \overline{n}\backslash\left(n\left(\beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2}\right), n\left(\beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2}\right)\right) = \overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}.$$

А значит (так как $\beta\in(0,1)$), если $n\in\mathbb{N}_0 : n > \left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\sum_{y'\in\overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right) \ge \sum_{y'\in\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right) \ge 0.$$

Ясно, что при $\beta \in (0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y'\in\overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right)=0.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{y'\in\overline{n}_{10,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right)=0.$$

А значит

$$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\sum_{y'\in\overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{\frac{n-1}{2}}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'}\right)=0.$$

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n\in\mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2=1$

$$0\le\sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\le\sum_{y'\in\overline{n}_{10}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{\frac{n-1}{2}}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}-y'}\right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right)=0.$$

Теперь рассмотрим нечётные игреки.

Зафиксируем какое-то $n\in\mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2=1$.

Если $y\in\mathbb{N}_0 : y\le n$, то по Утверждению 31 при $w\in\mathbb{YF}_\infty$, $\beta\in(0,1]$, $n,y\in\mathbb{N}_0$

$$\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\le\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}.$$

Ясно, что мы можем просуммировать это выражение по $y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)$. Просуммируем:

$$\sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n}T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\le\sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\frac{2i+y}{2i}\right)\beta^y\left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor\frac{n-y}{2}\right\rfloor}\right)\le$$

$$\leq \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^y \left(1-\beta^2\right)^{\left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor} \right) =$$

$$= \left(\text{Так как ясно, что если } n \; mod\; 2 = 1 \text{ и } y \; mod\; 2 = 1, \text{ то } \left\lfloor \frac{n-y}{2} \right\rfloor = \frac{n-y}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n-y}{2}} \frac{2i+y+1}{2i} \right) \beta^{y+1} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n-y}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \frac{2i+2\frac{y+1}{2}}{2i} \right) \beta^{2\frac{y+1}{2}} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2\frac{y+1}{2}}{2}} \right).$$

Ясно, что если y пробегает все значения в множестве $\overline{n}\{\beta,\varepsilon'_1\}(2,1)$ при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod\; 2 = 1$, то $\frac{y+1}{2}$ пробегает все значения в множестве $\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\}$ (просто по определению этого множества), то есть наше выражение равняется следующему:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'\in\left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1-2y'}{2}} \frac{2i+2y'}{2i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1-2y'}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'\in\left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right).$$

Тут есть два случая:

1° $0 \notin \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}$.
   В данном случае $\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\} = \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}$, а значит

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'\in\left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y'\in\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right).$$

2° $0 \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}$.
   В данном случае

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y'\in\left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon'_1\}\backslash\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) \leq (\text{Так как } \beta \in (0,1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}\setminus\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{i}{i} \right) \beta^0 \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \left(\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}\setminus\{0\}\right)} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\beta} \sum_{y'=0}^{0} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right).$$

В обоих случаях (ясно, что других нет) наше выражение не превосходит

$$\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} \frac{i+y'}{i} \right) \beta^{2y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\left(\frac{\prod\limits_{i=y'+1}^{\frac{n+1}{2}} i}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-y'} i} \right) \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right).$$

Ясно, что

$$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{2n+1}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{n+1}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n+1-y'} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{y' \in \overline{2n-1}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\binom{n}{y'} \left(\beta^2\right)^{y'} \left(1-\beta^2\right)^{n-y'} \right) \right) =$$

$$= (\text{просто по определению множества } \overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right).$$

Ясно, что

- $$\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon\} = \overline{n}\backslash\left(\frac{(2n-1)\left(\beta^2-\varepsilon\right)+1}{2}, \frac{(2n-1)\left(\beta^2+\varepsilon\right)+1}{2}\right);$$

- Если $n\in\mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\frac{\frac{(2n-1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)+1}{2}}{n} = \frac{(2n-1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)+1}{2n} = \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{-\beta^2+\varepsilon_1'+1}{2n} < \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{2n}+\frac{1}{2n} <$$

$$< \left(\text{так как мы рассматриваем случай } n\in\mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil > 2\right) <$$

$$< \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{4}+\frac{1}{2n} < \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{4}+\frac{1}{4\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil} < \beta^2-\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{4}+\frac{1}{4\frac{1}{\varepsilon_1'}} = \beta^2+\varepsilon_1'+\frac{\varepsilon_1'}{4}+\frac{\varepsilon_1'}{4} = \beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n-1)\left(\beta^2-\varepsilon_1'\right)+1}{2} < n\left(\beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2}\right);$$

- Если $n\in\mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\frac{\frac{(2n-1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)+1}{2}}{n} = \frac{(2n-1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)+1}{2n} = \beta^2+\varepsilon_1'+\frac{-\beta^2-\varepsilon_1'+1}{2n} >$$

$$> (\text{Так как } \beta\in(0,1)) > \beta^2+\varepsilon_1'-\frac{\varepsilon_1'}{2n} >$$

$$> \left(\text{так как мы рассматриваем случай } n\in\mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil > 1\right) >$$

$$> \beta^2+\varepsilon_1'-\frac{\varepsilon_1'}{2} = \beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n-1)\left(\beta^2+\varepsilon_1'\right)}{2} > n\left(\beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2}\right).$$

А значит если $n\in\mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil\frac{1}{\varepsilon_1'}\right\rceil$, то

$$\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon_1'\} \subset \overline{n}\backslash\left(n\left(\beta^2-\frac{\varepsilon_1'}{2}\right), n\left(\beta^2+\frac{\varepsilon_1'}{2}\right)\right) = \overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}.$$

А значит (так как $\beta \in (0,1)$), если $n \in \mathbb{N}_0 : n > 2\left\lceil \frac{1}{\varepsilon_1'} \right\rceil$, то

$$\frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right) \geq \frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right) \geq 0.$$

Ясно, что при $\beta \in (0,1)$ по закону распределения биномиальных коэффициентов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}\left\{\beta,\frac{\varepsilon_1'}{2}\right\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n-y'}\right)\right) = 0,$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}_{11,2}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{n}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{n'-y'}\right)\right) = 0.$$

А значит

$$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'}\right)\right) = 0.$$

В силу доказанного выше, а также неотрицительности функции T, ясно, что при $n \in \mathbb{N}_0 : n \; mod \; 2 = 1$

$$0 \leq \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y)\right) \leq \frac{1}{\beta}\sum_{y'\in\overline{n}_{11}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\binom{\frac{n+1}{2}}{y'}\left(\beta^2\right)^{y'}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{n+1}{2}-y'}\right).$$

а значит, по Лемме о двух полицейских,

$$\overset{(2,1)}{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y)\right)\right) = 0.$$

Итак, подытожив написанное выше, получаем, что мы разбиваем последовательность $n \in \mathbb{N}_0$ на две подпоследовательности, а также, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$

- $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \leq \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) \leq \sum_{y\in\overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}}\left(\sum_{x\in\mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) =$$

$$= \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right);$$

•

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0;$$

•

$$\lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,0)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) + \lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}(2,1)} \left(\sum_{x \in \mathbb{YF}_n} T_{w,\beta,n}(x,y) \right) \right) = 0.$$

А значит, по Лемме о двух полицейских

- $$\lim_{n\to\infty}^{(2,0)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) = 0;$$
- $$\lim_{n\to\infty}^{(2,1)} \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) = 0.$$

а из этого ясно, что если $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$, то

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

что и требовалось.

Лемма доказана.

□

Вернёмся к доказательству Теоремы. Вначале вспомним, что мы вообще доказываем: $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

1)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 0;$$

2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

Давайте доказывать:

При наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ и произвольном $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \le \big(\text{По Следствию 3 при наших } w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ \beta \in (0,1] \text{ и всех } v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)\big) \le \sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) \le$$

$$\le \big(\text{По Утверждению 33 при наших } w \in \mathbb{YF}_{\infty},\ \beta \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ и всех } v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon) \subseteq \mathbb{YF}\big) \le$$

$$\le \sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \left(\sum_{y=0}^{|v|} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) = \sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \left(\sum_{y=0}^{n} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) = \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right).$$

Зафиксируем произвольный $\overline{\varepsilon} \in \mathbb{R} > 0$.

Пусть $\overline{\varepsilon'} = \frac{\overline{\varepsilon}}{3}$.

Заметим, что

- (Лемма 7) При наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$: $\forall \varepsilon_1' \in \big(0,\beta^2\big)$, $\overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N' \in \mathbb{N}_0$: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \ge N'$

$$\sum_{y\in\overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) < \overline{\varepsilon'} = \frac{\overline{\varepsilon}}{3}.$$

  Зафиксируем данный $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$.

- (Лемма 8) При наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists \varepsilon_1' \in \big(0,\beta^2\big)$: $\forall \overline{\varepsilon'} \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N'' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \ge N''$

$$\sum_{y\in\overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\left(\sum_{v\in\overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) + \left(\sum_{v\in\overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right)\right) < \overline{\varepsilon'} = \frac{\overline{\varepsilon}}{3}.$$

  Зафиксируем данный $\varepsilon_1' \in \big(0,\beta^2\big)$.

Таким образом, сложив эти два факта, получаем, что при наших $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_3, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N''' = \max(N', N'') \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \ge N'''$

$$\sum_{y\in\overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) + \sum_{v\in\overline{R'}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y) + \sum_{v\in\overline{R''}(w,\beta,n,\varepsilon,y,\varepsilon_3)} T_{w,\beta,n}(v,y)\right) < \frac{2\overline{\varepsilon}}{3} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow$ (По Замечанию 29 при $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $y \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}_{>0} : y \leq n$) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{2\overline{\varepsilon}}{3}.$$

Таким образом, мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N''' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'''$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{2\overline{\varepsilon}}{3}.$$

По Лемме 9 при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

то есть, по определению предела, при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N'''' \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''''$

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{\overline{\varepsilon}}{3}.$$

Итак, мы поняли, что

- (Из Лемм 7 и 8) При наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N''' \in \mathbb{N}_0 :$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N'''$

$$\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{2\overline{\varepsilon}}{3};$$

- (Из Леммы 9) При наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N'''' \in \mathbb{N}_0 :$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N''''$

$$\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \frac{\overline{\varepsilon}}{3}.$$

Таким образом, сложив эти два факта, получаем, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon, \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N = \max(N''', N'''') \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$\left(\sum_{y \in \overline{n}[\beta,\varepsilon_1']} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) + \left(\sum_{y \in \overline{n}\{\beta,\varepsilon_1'\}} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) < \overline{\varepsilon} \Longleftrightarrow$$

$$\iff (\text{По Замечанию 27 при } n \in \mathbb{N}_0,\ \beta \in (0,1],\ \varepsilon_1' \in \mathbb{R}_{>0}) \iff$$

$$\iff \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon}.$$

Таким образом, мы поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists N : \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N$

$$\sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) < \overline{\varepsilon}.$$

То есть в силу неотрицательности функции T

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right) \right) = 0.$$

Мы уже поняли, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ и произвольном $n \in \mathbb{N}_0$

$$0 \leq \sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) \leq \sum_{y=0}^{n} \left(\sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} T_{w,\beta,n}(v,y) \right),$$

а значит, по Лемме о двух полицейских ясно, что при наших $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v \in \overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 0,$$

что доказывает первый пункт.

Кроме того, ясно, что

- $$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon) \cup R(w,\beta,n,\varepsilon) =$$
$$= \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} \cup$$
$$\cup \{v \in \mathbb{YF}_n :\ \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} = \mathbb{YF}_n;$$

- $$\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon) \cap R(w,\beta,n,\varepsilon) =$$
$$= \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \notin (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} \cap$$
$$\cap \{v \in \mathbb{YF}_n : \pi(v) \in (\pi(w)(\beta-\varepsilon), \pi(w)(\beta+\varepsilon))\} = \varnothing;$$

- (Следствие 4) $\forall w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \mu_{w,\beta}(v) = 1.$$

А из этого очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)} \mu_{w,\beta}(v) = 1,$$

что доказывает второй пункт.

Таким образом, оба пункта доказаны.

Теорема доказана. $\square$

10 Завершение доказательства гипотезы

Следствие 12. *Пусть* $\{w_i'\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty}$, $w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+}$, $\beta \in (0,1]$, $l \in \mathbb{N}_0$: $\{w_i'\} \xrightarrow{i\to\infty} w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(w_m')}{\pi(w)} = \beta.$$

Тогда

1)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{\{w_i'\}}(v) = 0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{\{w_i'\}}(v) = 1.$$

Доказательство. Начнём с первого пункта.

По обозначению

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{\{w_i'\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \left(\lim_{m\to\infty} \mu_{\{w_i'\}}(v,m) \right) \right) =$$

$$= \left(\text{По Лемме 1 при наших } \{w_i'\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty},\ w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ \beta \in (0,1] \text{ и всех } v \in \overline{Q}(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v).$$

Далее рассмотрим два случая:

1° $\beta = 1$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{\{w_i'\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,1}(v) =$$

$$= \left(\text{По Следствию 10 при нашем } w \in \mathbb{YF}_{\infty} \text{ и всех } v \in \overline{Q}(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_w(v) =$$

$$= (\text{По Теореме 5 при наших } w \in \mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ l \in \mathbb{N}_0) = 0,$$

что доказывает первый пункт в данном случае.

2° $\beta \in (0,1)$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{\{w_i'\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in\overline{Q}(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) =$$

$= (\text{По Теореме 3 при наших } w \in \mathbb{YF}_\infty^+,\ \beta \in (0,1),\ l \in \mathbb{N}_0) = 0,$

что доказывает первый пункт в данном случае.

Ясно, что все случаи разобраны, первый пункт доказан.
Перейдём ко второму пункту:
По обозначению

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{\{w'_i\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{v\in Q(w,n,l)} \left(\lim_{m\to\infty} \mu_{\{w'_i\}}(v,m) \right) \right) =$$

$$= \left(\text{По Лемме 1 при наших } \{w'_i\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty},\ w \in \mathbb{YF}_\infty^+,\ \beta \in (0,1] \text{ и всех } v \in Q(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v).$$

Далее рассмотрим два случая:

1° $\beta = 1$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{\{w'_i\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{w,1}(v) =$$

$$= (\text{По Следствию 10 при нашем } w \in \mathbb{YF}_\infty \text{ и всех } v \in Q(w,n,l) \subseteq \mathbb{YF}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_w(v) =$$

$$= (\text{По Теореме 5 при наших } w \in \mathbb{YF}_\infty^+,\ l \in \mathbb{N}_0) = 1,$$

что доказывает второй пункт в данном случае.

2° $\beta \in (0,1)$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{\{w'_i\}}(v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v\in Q(w,n,l)} \mu_{w,\beta}(v) =$$

$$= (\text{По Теореме 3 при } w \in \mathbb{YF}_\infty^+,\ \beta \in (0,1),\ l \in \mathbb{N}_0) = 1,$$

что доказывает второй пункт в данном случае.

Ясно, что все случаи разобраны, второй пункт доказан.
Следствие доказано.

□

Следствие 13. *Пусть* $\{w'_i\}_{i=1}^{\infty} \in (\mathbb{YF})^{\infty}$, $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$: $\{w'_i\} \xrightarrow{i\to\infty} w$ *и при этом существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(w'_m)}{\pi(w)} = \beta.$$

Тогда

1)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=0;$$

2)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=1.$$

Доказательство. Начнём с первого пункта.

По обозначению

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\left(\lim_{m\to\infty}\mu_{\{w'_i\}}(v,m)\right)\right)=$$

$$=\Big(\text{По Лемме 1 при наших } \{w'_i\}_{i=1}^{\infty}\in(\mathbb{YF})^{\infty},\ w\in\mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ \beta\in(0,1], \text{ и всех } v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)\subseteq\mathbb{YF}\Big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v).$$

Далее рассмотрим два случая:

1° $\beta=1$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,1}(v)=$$

$$=\Big(\text{По Следствию 10 при нашем } w\in\mathbb{YF}_{\infty} \text{ и всех } v\in\overline{R}(w,\beta,n,l)\subseteq\mathbb{YF}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w}(v)=$$

$$=(\text{По Замечанию 26 при наших } w\in\mathbb{YF}_{\infty},\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0} \text{ и всех } n\in\mathbb{N}_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,n,\varepsilon)}\mu_{w}(v)=$$

$$=(\text{По Теореме 6 при наших } w\in\mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})=0,$$

что доказывает первый пункт в данном случае.

2° $\beta\in(0,1)$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in\overline{R}(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v)=$$

$$=(\text{По Теореме 4 при наших } w\in\mathbb{YF}_{\infty}^{+},\ \beta\in(0,1),\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})=0,$$

что доказывает первый пункт в данном случае.

Ясно, что все случаи разобраны, первый пункт доказан.

Перейдём ко второму пункту:

По обозначению

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\left(\lim_{m\to\infty}\mu_{\{w'_i\}}(v,m)\right)\right)=$$

$$=\big(\text{По Лемме 1 при наших } \{w'_i\}_{i=1}^{\infty}\in(\mathbb{YF})^{\infty},\ w\in\mathbb{YF}^{+}_{\infty},\ \beta\in(0,1],\text{ и всех } v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)\subseteq\mathbb{YF}\big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v).$$

Далее рассмотрим два случая:

1° $\beta=1$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,1}(v)=$$

$$=(\text{По Следствию 10 при нашем } w\in\mathbb{YF}_{\infty}\text{ и всех } v\in R(w,\beta,n,l)\subseteq\mathbb{YF})=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w}(v)=$$

$$=(\text{По Замечанию 26 при наших } w\in\mathbb{YF}_{\infty},\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\text{ и всех } n\in\mathbb{N}_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,n,\varepsilon)}\mu_{w}(v)=$$

$$=(\text{По Теореме 6 при наших } w\in\mathbb{YF}^{+}_{\infty},\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})=1,$$

что доказывает второй пункт в данном случае.

2° $\beta\in(0,1)$.

В данном случае

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{\{w'_i\}}(v)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v\in R(w,\beta,n,\varepsilon)}\mu_{w,\beta}(v)=$$

$$=(\text{По Теореме 4 при наших } w\in\mathbb{YF}^{+}_{\infty},\ \beta\in(0,1),\ \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})=1,$$

что доказывает второй пункт в данном случае.

Ясно, что все случаи разобраны, второй пункт доказан.

Следствие доказано.

□

Следствие 14 (Из Следствий 12 и 13)**.** *Любая мера с границы Мартина графа Юнга–Фибоначчи эргодична.*

Доказательство. Рассмотрим центральную меру $\mu_{w'_i} = \mu_{w,\beta}$ при некоторых $w \in \mathbb{YF}_\infty^+$, $\beta \in (0,1]$ на пространстве путей в графе Юнга–Фибоначчи: мера цилиндрического множества, соответствующего данному начальному отрезку пути от вершины ε до v равна $\frac{\mu_{w,\beta}(v)}{d(\varepsilon,v)}$.

Мы доказали такое свойство этой меры: для любого k существует такое n_k, что мера тех путей $u_0 u_1 \ldots$, у которых вершина u_{n_k} имеет последние k цифр не такие как у слова w либо $|\pi(u_{n_k}) - \beta| > \frac{1}{k}$, меньше чем $1/2^k$.

Пусть A_m – объединение множеств путей из предыдущего абзаца по $k = m, m+1, \ldots$; B_m – дополнение A_m. Тогда мера A_m не больше чем $2/2^m$. Значит, пересечение A_m имеет меру 0 и почти все пути по нашей мере сосредоточены на множестве $B = \cup_m B_m$.

С другой стороны, по каждой из остальных мер множество A_m имеет меру 1: для мер вида $\mu_{w,\beta}$ это следует из того же утверждения, а для меры Планшереля из работы Керова — Гнедина [3]. Стало быть, множество B имеет меру 0.

Таким образом, если мера $\mu_{w,\beta}$ является смесью других мер, сужая на множество B получаем противоречие. $\square$

11 Благодарности

Я признателен моему научному руководителю Фёдору Владимировичу Петрову за постановку задачи, помощь в публикации статьи и моральную поддержку на протяжении всего периода работы, Ивану Алексеевичу Бочкову за помощь в работе, а также Павлу Андреевичу Ходунову за проявленное при проверке доказательства терпение.

Список литературы

[1] Евтушевский В. Ю. *Перечисление путей в графе Юнга–Фибоначчи*, arXiv:2012.06379 (2020), 1-105.

[2] Евтушевский В. Ю. *Перечисление путей в графе Юнга–Фибоначчи*. Зап. научн. сем. ПОМИ, 481 (2019), 39-62.

[3] A. Gnedin and S. Kerov. *The Plancherel measure of the Young–Fibonacci graph*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 129 (2000), 433-446.

[4] A. M. Vershik. *Asymptotic theory of path spaces of graded graphs and its applications.* Japanese J. Math. 11 (2016), no. 2, 151-218.

[5] F. M. Goodman, S. V. Kerov. *The Martin Boundary of the Young–Fibonacci Lattice*. J. Algebr. Comb. 11 (2000), no. 1, 17-48.

[6] S. Okada. *Algebras associated to the Young–Fibonacci lattice*. Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994), 549-568.

[7] С. В. Фомин. *Обобщенное соответствие Робинсона – Шенстеда – Кнута*. Зап. научн. сем. ЛОМИ, 155 (1986), 156-175.

[8] S. Fomin. *Duality of Graded Graphs*. Journal of Alg. Comb. 3 (1994), 357-404.

[9] R. P. Stanley. *Differential posets*. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 919-961.