

Нелинейная динамика МЭМС-акселерометра с балочными чувствительными элементами, основанного на явлении модальной локализации*

Н. Ф. Морозов^{1,2}, Д. А. Индейцев^{2,3}, В. С. Игумнова³,
А. В. Лукин³, И. А. Попов³, Л. В. Штукин^{2,3}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, В. О., Большой пр., 61

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Игумнова В. С., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. Нелинейная динамика МЭМС-акселерометра с балочными чувствительными элементами, основанного на явлении модальной локализации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 233–246. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.204>

В представленной работе предложена модель микроэлектромеханического акселерометра с двумя подвижными балочными элементами, расположенными между двумя неподвижными электродами. Действие переносных сил инерции в продольном направлении приводит к изменению спектральных свойств системы, что является полезным выходным сигналом датчика. Динамика системы при наличии слабой электростатической связи между чувствительными элементами характеризуется явлением модальной локализации — значительным изменением амплитудных соотношений для форм синфазных и противофазных колебаний при малых изменениях измеряемой компоненты вектора ускорения подвижного объекта. Построены диаграммы положений равновесия при варьировании разности потенциалов между неподвижным электродом и подвижным элементом и между двумя подвижными элементами. Исследованы зависимости частот и отношение компонент собственных векторов от величины инерционного воздействия. Показано, что чувствительность датчика, основанного на модальной локализации, может на порядки превосходить чувствительность известных систем, базирующихся на измерении сдвига собственных частот. Построена нелинейная динамическая модель акселерометра при внешнем гармоническом электростатическом возбуждении колебаний. Получены резонансные характеристики, проведено сравнение модели, описывающей модальные характеристики системы, и модели, демонстрирующей реальный динамический режим работы с учетом нелинейных факторов.

Ключевые слова: резонансный акселерометр, слабосвязанная система, модальная локализация, резонансные кривые.

1. Введение. Одним из передовых направлений развития индустрии нано- и микросистем является разработка высокоточных нано- и микроэлектромеханических сенсоров, основанных на принципе модальной локализации колебаний в слабо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант № 51092930) и РФФИ (грант № 18-01-00884-А).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

связанных системах [1, 2]. Явление модальной локализации состоит в существенном изменении соотношения амплитуд колебаний слабосвязанных упругих чувствительных элементов в ответ на изменение жесткости системы [3, 4]. В мировой инженерной и научной литературе сообщается об успехах в создании широкого класса датчиков различных физических величин, построенных на указанном принципе: детекторов массы нано- и микрочастиц, датчиков перемещений и жесткости, электрометров. Ряд работ посвящен экспериментальному исследованию общих характеристик модально-локализованных микросистем и разработке алгоритмов управления их колебаниями [5, 6].

Интенсивное развитие в последние годы имеет направление разработки высокоточных МЭМС-датчиков инерциальной информации — акселерометров и гироскопов. Активные исследования ведутся в области проектирования резонансных акселерометров, принцип работы которых основан на измерении сдвига собственных частот чувствительного элемента при действии переносных сил инерции [7]. Модально-локализованные МЭМС-акселерометры являются перспективным развитием этого класса датчиков [8, 9]. Результаты работ последних лет показывают, что чувствительность систем, в которых используется явление локализации колебаний, может быть на 1–4 порядка выше, чем у датчиков, основанных на измерении сдвига частот [10]. Реализация электромеханических архитектур с дифференциальным съемом выходного сигнала позволяет обеспечить также значительно меньшую чувствительность системы к побочным факторам окружающей среды (изменение температуры, давления и т. д.) в сравнении с классическими схемотехническими решениями.

В настоящей работе предлагается модель и исследуется нелинейная динамика свободных и вынужденных колебаний дифференциального модально-локализованного МЭМС-акселерометра, состоящего из двух электростатически связанных микробалочных чувствительных элементов с симметрично расположенными инерционными массами (рис. 1).

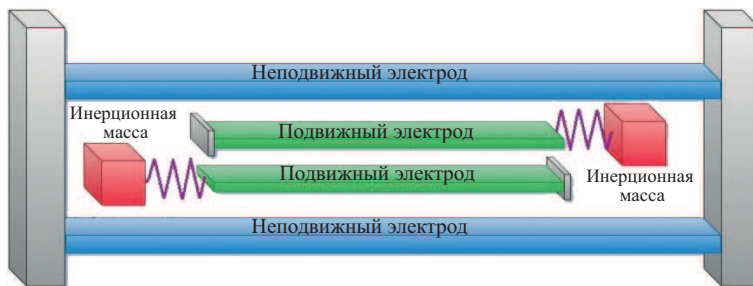


Рис. 1. Схема акселерометра.

При возникновении продольного ускорения в системе инерционные массы создают продольную сжимающую силу для одного резонатора и растягивающую силу для другого резонатора, что приводит к изменению спектральных свойств системы. Как показано далее, при наличии слабой электростатической связи между чувствительными элементами динамика системы характеризуется явлением модальной локализации — значительным изменением амплитудных соотношений для форм синфазных и противофазных колебаний при малых изменениях измеряемой компоненты вектора ускорения объекта.

Результаты решения нелинейной задачи статики деформируемых элементов системы в электрическом поле, а также исследования спектральных характеристик колебательной системы в линейном приближении представлены в работе [11].

2. Построение нелинейной модели датчика. Перейдем к исследованию динамического режима работы предлагаемой модели акселерометра. Рассмотрим случай возбуждения колебаний от внешнего генератора — динамику системы в открытом контуре. Примем, что переменное напряжение сообщается к одному из электродов; второй неподвижный электрод используется для измерения колебаний соответствующего балочного элемента.

Нелинейные уравнения динамики системы в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} w_1'''' + C_{non}\dot{w}_1 + \ddot{w}_1 + [P_{non} - C_{sp}\int_0^1 w_1'^2 dx]w_1'' - \frac{\alpha(V_{DC} + V_{AC} \cos \omega_f t)^2}{(1-w_1)^2} + \frac{\alpha\Delta V^2}{(1+w_1-w_2)^2} = 0, \\ w_2'''' + C_{non}\dot{w}_2 + \ddot{w}_2 + [-P_{non} - C_{sp}\int_0^1 w_2'^2 dx]w_2'' + \frac{\alpha V_{DC}^2}{(1+w_2)^2} - \frac{\alpha\Delta V^2}{(1+w_1-w_2)^2} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В практических задачах $V_{AC} \ll V_{DC}$, поэтому

$$(V_{DC} + V_{AC} \cos \omega_f t)^2 = V_{DC}^2 + 2V_{DC}V_{AC} \cos \omega_f t + V_{AC}^2 \cos^2 \omega_f t \approx V_{DC}^2 + 2V_{DC}V_{AC} \cos \omega_f t. \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$\begin{cases} w_1'''' + C_{non}\dot{w}_1 + \ddot{w}_1 + [P_{non} - C_{sp}\int_0^1 w_1'^2 dx]w_1'' - \frac{\alpha V_{DC}^2}{(1-w_1)^2} - \frac{2\alpha V_{DC}V_{AC} \cos \omega_f t}{(1-w_1)^2} + \frac{\alpha\Delta V^2}{(1+w_1-w_2)^2} = 0, \\ w_2'''' + C_{non}\dot{w}_2 + \ddot{w}_2 + [-P_{non} - C_{sp}\int_0^1 w_2'^2 dx]w_2'' + \frac{\alpha V_{DC}^2}{(1+w_2)^2} - \frac{\alpha\Delta V^2}{(1+w_1-w_2)^2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Раскладываем прогибы наших балок на статическую и динамическую часть:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= w_{1s}(x) + w_{1d}(x, t), \\ w_2(x, t) &= w_{2s}(x) + w_{2d}(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $w_{1s}(x)$ и $w_{2s}(x)$ берутся из решения статики. Электростатическая компонента раскладывается в ряд Тейлора до 3-го порядка включительно, также статическая компонента уравнений уходит из-за условия нахождения положения равновесия. В итоге получаем уравнения движения вокруг найденного положения равновесия, которые не приводятся здесь в силу своей громоздкости.

Используем метод Галеркина, учитывая лишь нижние формы колебаний двух балок:

$$\begin{aligned} w_{1d}(x, t) &= u(t)\phi_1(x), \\ w_{2d}(x, t) &= v(t)\phi_1(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $u(t), v(t)$ — модальные координаты, ϕ_1 — первая собственная форма.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{u} + G_{20}u &= -G_1u - G_2u^2 - G_3u^3 + G_4u + G_5u - G_6u^2 + G_7u^3 - G_8v - G_9v^2 - \\ &- G_{10}v^3 + G_{11}u + G_{12}u^2 + G_{13}u^3 + G_{14}u \cos \omega_f t + G_{15}u^2 \cos \omega_f t + G_{16}u^3 \cos \omega_f t + \\ &\quad + G_{17}v^2u - G_{18}vu^2 + G_{19}vu + G_{21} \cos \omega_f t - G_{22}\dot{u}, \\ \ddot{v} + F_{17}v &= -F_1v + F_2v^2 - F_3v^3 - F_4v + F_5v + F_6v^2 + F_7v^3 - F_8u - F_9u^2 - \\ &\quad - F_{10}u^3 + F_{11}v - F_{12}v^2 + F_{13}v^3 - F_{14}v^2u + F_{15}vu^2 - F_{16}vu - F_{18}\dot{v}, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты G_i и F_j зависят от параметров $P_{non}, C_{sp}, V_{DC}, V_{AC}, \Delta V$.

Решение системы нелинейных ОДУ будем находить с помощью асимптотического метода многих масштабов. Введем в уравнения (6) малый параметр ε следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + w^2u &= -\varepsilon G_1u - G_2u^2 - G_3u^3 + \varepsilon G_4u + \varepsilon G_5u - G_6u^2 + G_7u^3 - \varepsilon G_8v - G_9v^2 - \\ &- G_{10}v^3 + \varepsilon G_{11}u + G_{12}u^2 + G_{13}u^3 + \varepsilon^3 G_{14}u \cos \omega_f t + \varepsilon^3 G_{15}u^2 \cos \omega_f t + \varepsilon^3 G_{16}u^3 \cos \omega_f t + \\ &\quad + G_{17}v^2u - G_{18}vu^2 + G_{19}vu + \varepsilon^3 G_{21} \cos \omega_f t - \varepsilon G_{22}\dot{u}, \\ \ddot{v} + w^2v &= -\varepsilon F_1v + F_2v^2 - F_3v^3 - \varepsilon F_4v + \varepsilon F_5v + F_6v^2 + F_7v^3 - \varepsilon F_8u - F_9u^2 - \\ &\quad - F_{10}u^3 + \varepsilon F_{11}v - F_{12}v^2 + F_{13}v^3 - F_{14}v^2u + F_{15}vu^2 - F_{16}vu - \varepsilon F_{18}\dot{v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следуя методу многих масштабов, решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2), \\ v &= \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 v_3(T_0, T_1, T_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_k = \varepsilon^k \tau$ — различные масштабы времени.

Рассмотрим случай главного резонанса — близость собственной частоты шарнирно-опертой балки и частоты возбуждения:

$$\omega_f = w + \sigma_1, \quad (9)$$

где σ_1 — частотная расстройка внешнего воздействия, w — собственная частота шарнирно-опертой балки.

Производные по реальному времени τ выразим через производные по T_k :

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2), \quad (10)$$

где $D_k = \partial/\partial T_k$. Подставляя (8) и (10) в уравнения (7) и группируя члены по степеням параметра ε , получим итерационную последовательность систем уравнений:

уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + w^2 u_1 &= 0, \\ D_0^2 v_1 + w^2 v_1 &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 u_2 + w^2 u_2 = & -2D_0 D_1 u_1 + G_4 u_1 - G_{22} D_0 u_1 - G_1 u_1 + G_5 u_1 + G_{11} u_1 - \\
 & -G_8 v_1 - G_2 u_1^2 - G_6 u_1^2 + G_{12} u_1^2 - G_9 v_1^2 + G_{19} u_1 v_1, \\
 D_0^2 v_2 + w^2 v_2 = & F_5 v_1 - 2D_0 D_1 v_1 - F_{18} D_0 v_1 - F_8 u_1 - F_1 v_1 - F_4 v_1 + \\
 & + F_{11} v_1 - F_9 u_1^2 + F_2 v_1^2 + F_6 v_1^2 - F_{12} v_1^2 - F_{16} u_1 v_1;
 \end{aligned} \tag{12}$$

уравнения третьего приближения:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 u_3 + w^2 u_3 = & G_4 u_2 - 2D_0 D_1 u_2 - 2D_0 D_2 u_1 - D_1^2 u_1 - G_1 u_2 + G_5 u_2 + \\
 & + G_{11} u_2 - G_8 v_2 + G_{21} \cos \omega_f t - G_3 u_1^3 + G_7 u_1^3 + G_{13} u_1^3 - \\
 & - G_{10} v_1^3 - G_{22} (D_0 u_2 + D_1 u_1) - 2G_2 u_1 u_2 - 2G_6 u_1 u_2 + \\
 & + 2G_{12} u_1 u_2 + G_{19} u_1 v_2 + G_{19} u_2 v_1 - 2G_9 v_1 v_2 + G_{17} u_1 v_1^2 - G_{18} u_1^2 v_1, \\
 D_0^2 v_3 + w^2 v_3 = & F_5 v_2 - 2D_0 D_1 v_2 - 2D_0 D_2 v_1 - D_1^2 v_1 - F_8 u_2 - F_1 v_2 - \\
 & - F_4 v_2 + F_{11} v_2 - F_{10} u_1^3 - F_3 v_1^3 + F_7 v_1^3 + F_{13} v_1^3 - \\
 & - F_{18} (D_0 v_2 + D_1 v_1) - 2F_9 u_1 u_2 - F_{16} u_1 v_2 - F_{16} u_2 v_1 + \\
 & + 2F_2 v_1 v_2 + 2F_6 v_1 v_2 - 2F_{12} v_1 v_2 - F_{14} u_1 v_1^2 + F_{15} u_1^2 v_1.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Решение порождающей системы уравнений (11) имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_1 = & A_1 (T_1, T_2) e^{iwT_0} + \bar{A}_1 (T_1, T_2) e^{-iwT_0}, \\
 v_1 = & A_2 (T_1, T_2) e^{iwT_0} + \bar{A}_2 (T_1, T_2) e^{-iwT_0},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где комплексные амплитуды колебаний могут быть записаны как

$$A_{1,2} (T_1, T_2) = \frac{1}{2} a_{1,2} (T_1, T_2) e^{i\beta_{1,2}(T_1, T_2)}. \tag{15}$$

Здесь a_i и β_i — подлежащие определению амплитуды и фазы колебаний как функции медленных переменных T_1, T_2 .

Условия отсутствия секулярных слагаемых в решениях уравнений для старших приближений позволяют записать систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно величин a_1, a_2, χ_1, χ_2 вида

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{d\tau} = & F_1 (a_1, a_2, \chi_1, \chi_2), \\
 \frac{da_2}{d\tau} = & F_2 (a_1, a_2, \chi_1, \chi_2), \\
 \frac{d\chi_1}{d\tau} = & F_3 (a_1, a_2, \chi_1, \chi_2), \\
 \frac{d\chi_2}{d\tau} = & F_4 (a_1, a_2, \chi_1, \chi_2),
 \end{aligned} \tag{16}$$

где модифицированные фазовые переменные χ_1, χ_2 связаны с β_1, β_2 по формулам

$$\chi_{1,2} = \beta_{1,2} - \sigma_1 \tau. \tag{17}$$

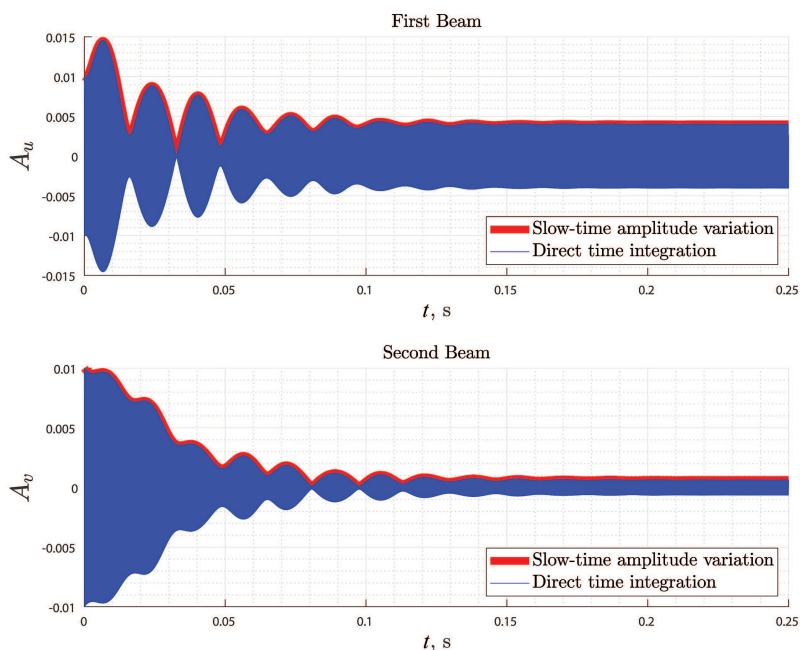


Рис. 2. Сравнение точного и асимптотического решений при $V_{DC} = 2V$, $\Delta V = 0.4V$, $P_{non} = 0$.

Явный вид уравнений (16) имеет громоздкий вид и поэтому здесь не приводится. Необходимые символьные вычисления выполнены методами компьютерной алгебры в программном комплексе MATLAB.

3. Верификация построенной модели в медленных переменных. Выполним верификацию построенной модели в медленных переменных путем сопоставления полученного асимптотического решения уравнений (16) с прямым численным интегрированием системы (6) для некоторых фиксированных значений параметров.

В таблице приведены параметры системы, при которых проводятся расчеты.

**Значения основных параметров системы
и введенных безразмерных параметров**

Параметр	Значение
Разность потенциалов между подвижным и неподвижным электродом (V_{DC})	2V
Разность потенциалов между подвижными электродами (ΔV)	0.4V
Прикладываемое переменное напряжение (V_{AC})	0.002V
Жесткость пружины (C_{sp})	0.0013
Параметр диссипации (C_{non})	0.004
Коэффициент перед электростатической силой (α)	0.2913

На рис. 2 показано сравнение прямого численного интегрирования с решением в медленных переменных, полученным методом многих масштабов.

В данном случае возбуждение колебаний происходит по одному электроду (верхнему), поэтому амплитуда верхней балки имеет большее значение, чем амплитуда нижней балки. Как видно из рисунка, прямое численное интегрирование

совпадает с асимптотическим решением, что позволяет использовать асимптотическое разложение для дальнейшего исследования амплитудно-частотных характеристик (АЧХ).

4. Исследование резонансных кривых системы. На рис. 3 показана АЧХ верхней и нижней балок при варьировании параметра слабой связи ΔV при фиксированном значении переменного напряжения $V_{AC} = 0.002V$.

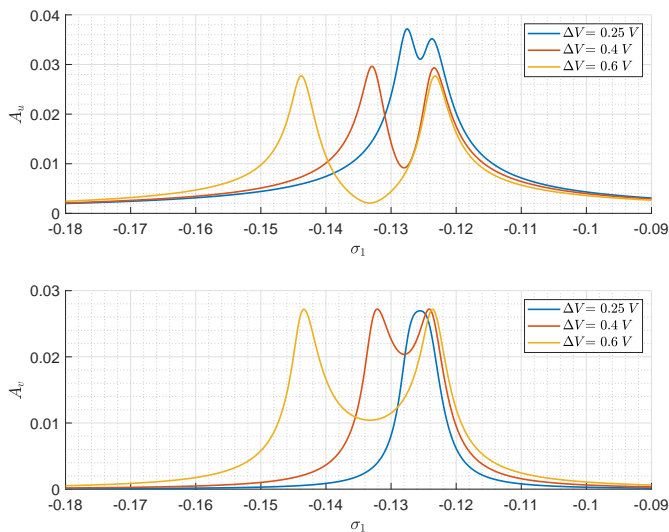


Рис. 3. АЧХ первой и второй балок при варьировании параметра слабой связи ΔV при $V_{AC} = 0.002V$, $P_{non} = 0$.

Как видно из рис. 3 при $\Delta V = 0.25V$ на втором подвижном элементе не наблюдается двух резонансных пиков, это происходит из-за недостаточной величины разности потенциалов между двумя подвижными элементами, т.е. существует некоторый порог снизу для величины слабой связи. Также можно заметить, что резонансная частота, соответствующая частоте синфазных колебаний ($\sigma_1 = -0.123$) практически не изменяется.

На рис. 4 показана АЧХ верхней и нижней балок при варьировании параметра слабой связи ΔV при фиксированном значении переменного напряжения $V_{AC} = 0.02V$. Из рисунка видно, что при увеличении величины переменного напряжения генератора V_{AC} амплитудно-частотные характеристики имеют сильно выраженный нелинейный характер с множественным чередованием устойчивых и неустойчивых ветвей диаграммы.

На рис. 5 показана АЧХ верхней и нижней балок при варьировании параметра осевой силы P_{non} . Из рисунка видно, что наличие осевой инерционной силы существенно влияет на динамику подвижных элементов. Так, при $P_{non} = -0.002$ амплитуда первой балки в противофазном режиме ниже, чем в синфазном режиме, амплитуда второй балки в синфазном и противофазном режимах не имеет такой ярко выраженной зависимости. При $P_{non} = 0.002$ поведение первого подвижного элемен-

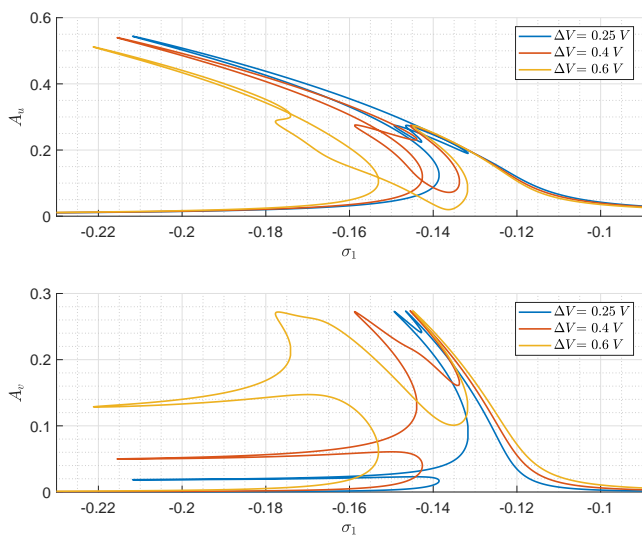


Рис. 4. АЧХ первой и второй балок при варьировании параметра слабой связи ΔV при $V_{AC} = 0.02V$, $P_{non} = 0$.

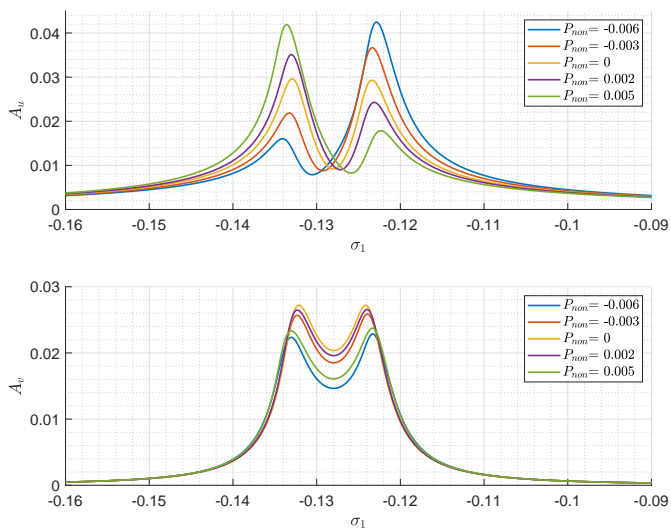


Рис. 5. АЧХ первой и второй балок при варьировании параметра осевой силы P_{non} при $V_{AC} = 0.002V$.

та изменяется на противоположное, а для второй балки сохраняется неизменность величины амплитуды.

На рис. 6 показана АЧХ верхней и нижней балок при варьировании величины переменного напряжения V_{AC} .

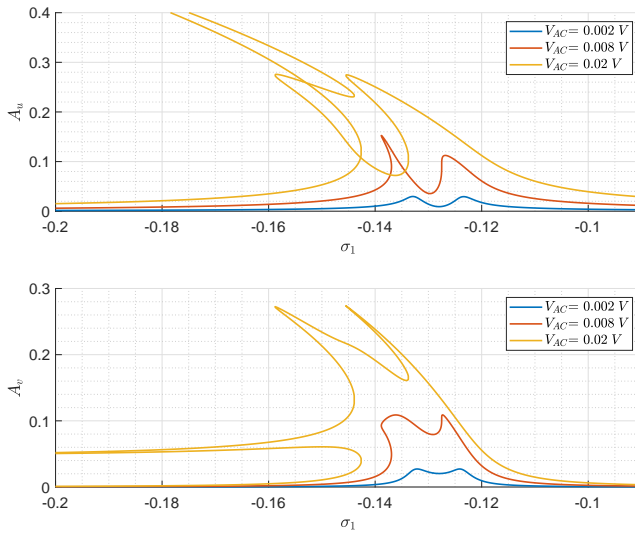


Рис. 6. АЧХ первой и второй балок при варьировании величины переменного напряжения V_{AC} при $P_{non} = 0$.

Из рис. 6 видно, что при увеличении переменного напряжения V_{AC} зависимость амплитуды колебаний от расстройки внешней частоты становится сильно нелинейной, характер зависимости приобретает сложный вид.

Для получения численной зависимости амплитудного отношения двух подвижных элементов от величины осевой силы были построены АЧХ для первой и второй балок и отмечены необходимые точки для расчета. Для первой балки было найдено значение частотной расстройки $\sigma_1 = -0.133$, соответствующее резонансному пику на кривой. Для второй балки при этой же частотной расстройке пик амплитуды не наблюдается.

На рис. 7 показано максимальное значение амплитуды для первого и второго подвижных элементов. Из рисунка видно, что для первого подвижного элемента зависимость максимального значения амплитуды от величины осевой силы для синфазного и противофазного режимов имеет противоположный характер, тогда как для второго подвижного элемента, который не находится под прямым возбуждением переменным напряжением имеет схожий характер для синфазного и антифазного режимов.

На рис. 8 показана АЧХ первой и второй балок с учетом найденных точек на резонансных кривых, необходимых для расчета амплитудного отношения.

Амплитудное отношение двух подвижных электродов вычисляется следующим образом:

$$R_\alpha = \frac{a_1 \cos[(w + \sigma_1)t + \chi_1]}{a_2 \cos[(w + \sigma_1)t + \chi_2]}, \quad (18)$$

где $a_{1,2}, \chi_{1,2}$ — амплитуда и фаза соответствующего подвижного элемента, w — собственная частота шарнирно-опертой балки, t находится из условия $(w + \sigma_1)t + \chi_2 = 0$.

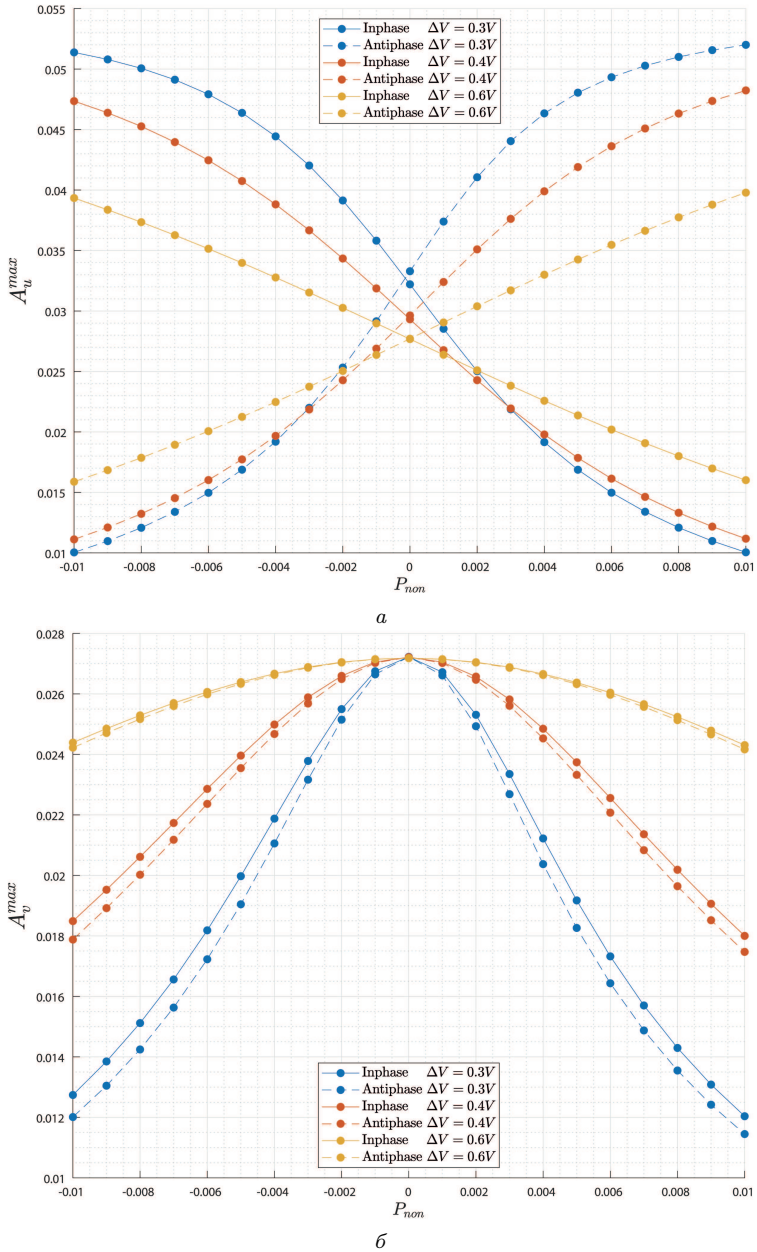


Рис. 7. Максимальные амплитуды двух подвижных элементов от осевой силы P_{non} : а — первый подвижный элемент; б — второй подвижный элемент.

На рис. 9 показано сравнение зависимости отношения амплитуд первого и второго подвижного элемента для модели, описывающей модальные характеристики системы, и модели, описывающей реальный динамический режим работы с учетом нелинейных факторов от величины осевой инерционной силы при заданных пара-

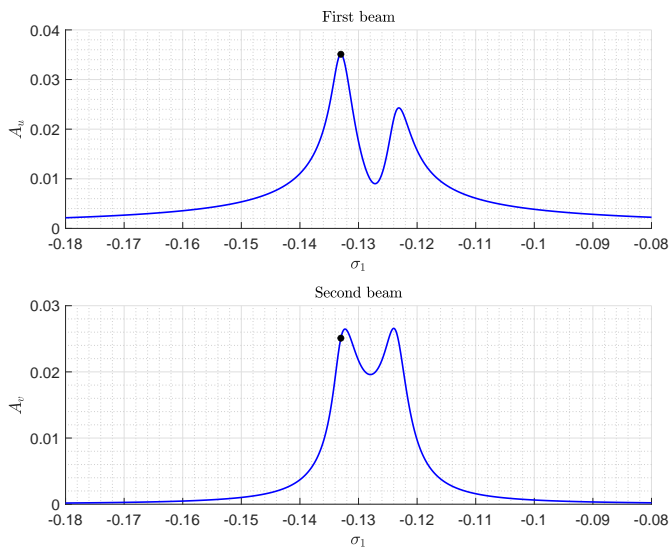


Рис. 8. АЧХ первой и второй балок. Точками обозначены значения амплитуд, которые будут использоваться для дальнейшего расчета амплитудного отношения при $V_{AC} = 0.002V$, $V_{DC} = 2V$, $\Delta V = 0.4V$, $P_{non} = 0.002$.

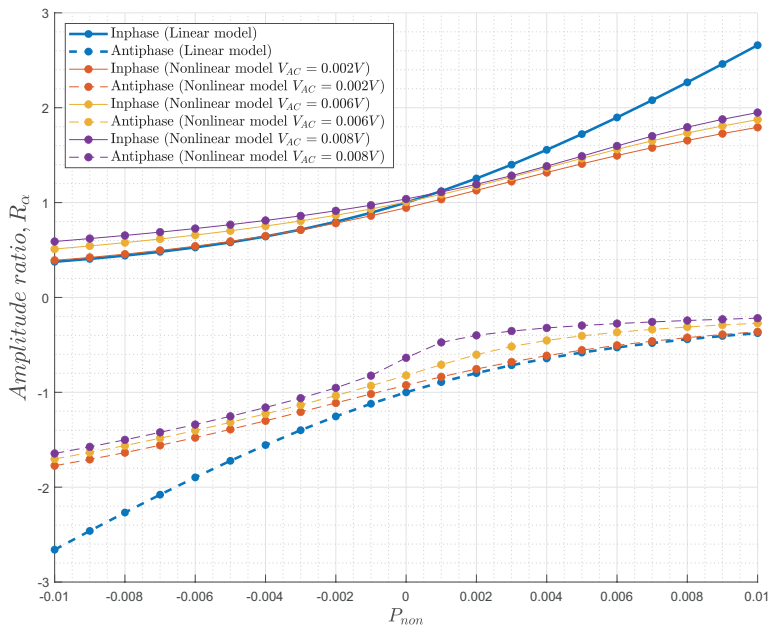


Рис. 9. Зависимость отношения амплитуд первого и второго подвижных элементов от величины осевой силы P_{non} при $V_{DC} = 2V$, $\Delta V = 0.4V$.

метрах $V_{DC} = 2V$, $\Delta V = 0.4V$. Из рисунка видно, что для антифазного режима совпадение результатов наблюдается в положительном диапазоне значений P_{non} , для синфазного режима, наоборот, — в отрицательном диапазоне значений P_{non} .

5. Заключение. В представленной работе предложена модель микроэлектромеханического акселерометра с двумя подвижными балочными элементами, расположенными между двумя неподвижными электродами. Построены диаграммы положений равновесия при варьировании разности потенциалов между неподвижным электродом и подвижным элементом и между двумя подвижными элементами. Исследованы зависимости частот и отношение компонент собственных векторов от величины инерционного воздействия. Показано, что чувствительность датчика, основанного на модальной локализации, может на порядки превосходить чувствительность известных систем, базирующихся на измерении сдвига собственных частот. Построена нелинейная динамическая модель акселерометра при внешнем гармоническом электростатическом возбуждении колебаний. Получены резонансные характеристики, проведено сравнение модели, описывающей модальные характеристики системы, и модели, демонстрирующей реальный динамический режим работы с учетом нелинейных факторов.

Литература

1. Zhao Ch., Montaseri M. H., Wood G. S., Pu S. H., Seshia A. A., Kraft M. A Review on MEMS Coupled Resonators for Sensing Applications Utilizing Mode Localization. *Sensors and Actuators A: Physical* **249**, 93–111 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.07.015>
2. Hajjaj A. Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F. K., Younis M. I. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **119**, 103328 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
3. Pierre C., Dowell E. H. Localization of vibrations by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration* **114**, 549–564 (1987). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(87\)80023-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)80023-8)
4. Pierre C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration* **126**, 485–502 (1988). [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90226-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90226-X)
5. Zhang H. Ambient pressure drift rejection of mode-localized resonant sensors. *2017 IEEE 30th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, 1095–1098 (2017). <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2017.7863604>
6. Zhao C., Pandit M., Sun B., Sobreviela G., Zou X., Seshia A. A Closed-Loop Readout Configuration for Mode-Localized Resonant MEMS Sensors. *Journal of Microelectromechanical Systems* **26** (3), 501–503. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2017.2690942>
7. Wang C., Chen F., Wang Y., Sadeghpour S., Wang C., Baijot M., Esteves R., Zhao C., Bai J., Liu H., Kraft M. Micromachined Accelerometers with Sub-mug/rHz Noise Floor: A Review. *Sensors* **20** (14), 4054 (2020). <https://doi.org/10.3390/s20144054>
8. Zhang H. M., Yuan W. Z., B. Y. Li, Hao Y. C., Kraft M., Chang H. L. A novel resonant accelerometer based on mode localization of weakly coupled resonators. *2015 Transducers — 2015 18th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS)*, 1073–1076 (2015). <https://doi.org/10.1109/TRANSDUCERS.2015.7181112>
9. Zhang H., Li B., Yuan W., Kraft M., Chang H. An Acceleration Sensing Method Based on the Mode Localization of Weakly Coupled Resonators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **25** (2), 286–296. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2015.2514092>
10. Manav M., Phani A. S., Cretu E. Mode Localization and Sensitivity in Weakly Coupled Resonators. *IEEE Sensors Journal* **19** (8), 2999–3007 (2019). <https://doi.org/10.1109/JSEN.2018.2889646>
11. Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Игумнова В. С., Беляев Я. В., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. Модель микромеханического акселерометра, основанного на явлении модальной локализации. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки* **494** (1), 51–56 (2020). <https://doi.org/10.31857/S2686740020050132>

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2020 г.;
после доработки 16 декабря 2020 г.;
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — д-р физ.-мат. наук, академик РАН; morozov@NM1016.spb.edu

Индейцев Дмитрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН;

indejtsev_da@spbstu.ru

Игумнова Василиса Сергеевна — инженер; igumnova_vs@spbstu.ru

Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; lukin_av@spbstu.ru

Попов Иван Алексеевич — ассистент; popov_ia@spbstu.ru

Штукун Лев Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; shtukin_lv@spbstu.ru

Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements*

N. I. Morozov^{1,2}, D. A. Indeitsev^{2,3}, V. S. Igumnova³,
A. V. Lukin³, I. A. Popov³, L. V. Shtukin^{2,3}

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, V. O., Bolshoi pr., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29, ul. Polytechnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Morozov N. I., Indeitsev D. A., Igumnova V. S., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 233–246.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.204> (In Russian)

In the presented work, a model of a microelectromechanical accelerometer with two movable beam elements located between two fixed electrodes is proposed. The action of the transfer forces of inertia in the longitudinal direction leads to a change in the spectral properties of the system, which is a useful output signal of the sensor. The dynamics of the system in the presence of a weak electrostatic coupling between the sensitive elements is characterized by the phenomenon of modal localization — a significant change in the amplitude ratios for the forms of inphase and antiphase oscillations with small changes in the measured component of the acceleration vector of the moving object. Diagrams of equilibrium positions are plotted for varying the potential difference between a fixed electrode and a movable element and between two movable elements. The dependences of the frequencies and the ratio of the components of the eigenvectors on the magnitude of the inertial action are investigated. It is shown that the sensitivity of a sensor based on modal localization can be orders of magnitude higher than the sensitivity of known systems based on measuring the shift of natural frequencies. A nonlinear dynamic model of an accelerometer with external harmonic electrostatic excitation of oscillations is constructed. Resonance characteristics are obtained, a comparison is made between the model describing the modal characteristics of the system and the model describing the real dynamic mode of operation taking into account nonlinear factors.

Keywords: resonant accelerometer, weakly coupled system, modal localization, resonance curves.

*This work is supported by St. Petersburg University (project no. 51092930) and Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00884-A).

References

1. Zhao Ch., Montaseri M. H., Wood G. S., Pu S. H., Seshia A. A., Kraft M. A Review on MEMS Coupled Resonators for Sensing Applications Utilizing Mode Localization. *Sensors and Actuators A: Physical* **249**, 93–111 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.07.015>
2. Hajjaj A. Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F. K., Younis M. I. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **119**, 103328 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
3. Pierre C., Dowell E. H. Localization of vibrations by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration* **114**, 549–564 (1987). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(87\)80023-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)80023-8)
4. Pierre C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration* **126**, 485–502 (1988). [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90226-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90226-X)
5. Zhang H. Ambient pressure drift rejection of mode-localized resonant sensors. *2017 IEEE 30th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, 1095–1098 (2017). <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2017.7863604>
6. Zhao C., Pandit M., Sun B., Sobreviela G., Zou X., Seshia A. A Closed-Loop Readout Configuration for Mode-Localized Resonant MEMS Sensors. *Journal of Microelectromechanical Systems* **26** (3), 501–503. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2017.2690942>
7. Wang C., Chen F., Wang Y., Sadeghpour S., Wang C., Bajot M., Esteves R., Zhao C., Bai J., Liu H., Kraft M. Micromachined Accelerometers with Sub-mg/rHz Noise Floor: A Review. *Sensors* **20** (14), 4054 (2020). <https://doi.org/10.3390/s20144054>
8. Zhang H. M., Yuan W. Z., B. Y. Li, Hao Y. C., Kraft M., Chang H. L. A novel resonant accelerometer based on mode localization of weakly coupled resonators. *2015 Transducers — 2015 18th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS)*, 1073–1076 (2015). <https://doi.org/10.1109/TRANSDUCERS.2015.7181112>
9. Zhang H., Li B., Yuan W., Kraft M., Chang H. An Acceleration Sensing Method Based on the Mode Localization of Weakly Coupled Resonators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **25** (2), 286–296. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2015.2514092>
10. Manav M., Phani A. S., Cretu E. Mode Localization and Sensitivity in Weakly Coupled Resonators. *IEEE Sensors Journal* **19** (8), 2999–3007 (2019). <https://doi.org/10.1109/JSEN.2018.2889646>
11. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Igumnova V. S., Belyaev Ya. V., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. A Novel Model of a Mode-Localized MEMS Accelerometer. *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk. Fizika, Tekhnicheskie Nauki* **494** (1), 51–56 (2020). <https://doi.org/10.31857/S2686740020050132> (In Russian)

Received: November 16, 2020

Revised: December 16, 2020

Accepted: December 17, 2020

Authors' information:

Nikita F. Morozov — morozov@NM1016.spb.edu

Dmitriy A. Indeitsev — indejtsev_da@spbstu.ru

Vasilisa S. Igumnova — igumnova_vs@spbstu.ru

Alexei V. Lukin — lukin_av@spbstu.ru

Ivan A. Popov — popov_ia@spbstu.ru

Lev V. Shtukin — shtukin_lv@spbstu.ru