УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2021. Т. 17. Вып. 2
MSC 93C10, 93C35

Метод преобразования сложных систем автоматического управления к интегрируемой форме

А. М. Камачкин, Д. К. Потапов, В. В. Евстафьева

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Метод преобразования сложных систем автоматического управления к интегрируемой форме // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 196–212. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.209

Рассматриваемый класс систем автоматического управления описывается многомерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой аддитивно состоит из линейной части и произведения матрицы управления на вектор, представленный суммой вектора управления и вектора внешнего возмущения. Вектор управления задается нелинейной функцией, зависящей от произведения матрицы обратной связи и вектора текущих координат системы. Решается задача конструирования матрицы неособого преобразования, которое матрицу линейной части системы приводит к жордановой нормальной форме или к первой естественной нормальной форме. Переменные величины, входящие в преобразование, позволяют варьировать параметры настройки системы, к которым относят параметры матрицы управления и матрицы обратной связи, и приводить систему к интегрируемой форме. Под последней понимаем такую форму, при которой система может быть проинтегрирована в конечном виде или сведена к совокупности подсистем более низких порядков, при этом сумма порядков подсистем равна порядку исходной системы. Особое внимание уделено случаям, когда матрица линейной части имеет комплексно сопряженные собственные числа, в том числе кратные.

Ключевые слова: система автоматического управления, многомерная нелинейная динамическая система, неособое преобразование, жорданова нормальная форма матрицы, первая естественная нормальная форма матрицы, интегрируемая форма системы.

1. Введение. По мере развития инженерной практики создания систем автоматического регулирования возрастали проблемы теории автоматического управления, связанные с вопросами определения динамического поведения таких систем. Естественным образом появилась идея использовать канонические преобразования для линейных частей многомерных систем. Впервые такое преобразование предложил в 1951 г. А. И. Лурье [1], что послужило стимулом исследований на эту тему (см., например, [2]). Первый итог этих усилий подвел А. М. Летов [3]. Однако оставались нерешенными многие вопросы, работа над которыми привела к разработке новых подходов и созданию метода редукции пространства параметров [4] и метода сечений пространства параметров [5, 6]. Цель данных подходов заключается в декомпозиции многомерной системы на подсистемы меньшей размерности, которые могут быть проинтегрированы в конечном виде или, по крайней мере, изучены до конца. В таких подходах используют алгебраические методы, которые основываются на приведении матрицы линейной части системы к жордановой форме, когда эта матрица имеет, как правило, вещественные различные собственные числа, или собственным числам матрицы отвечает ящик Жордана низкой размерности. Анализ публикаций иностранных ученых (см. [7]) показал, что они работали в тех же направлениях и использовали такие же алгебраические методы, но избегали рассмотрения случаев, когда собственные числа комплексно сопряженные. В настоящей работе устранен данный пробел для одного класса систем автоматического управления и охарактеризованы случаи комплексно сопряженных собственных чисел, в том числе кратных.

2. Постановка задачи. Математическая модель системы автоматического управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(N(y(t)) + \psi(t)), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Здесь A, B и C — вещественные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$ и $m \times n$ соответственно; $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $y(t)$ — векторы переменных размерностей $n \times 1$, $n \times 1$ и $m \times 1$ соответственно, причем $n \geqslant m$; $\psi(t)$ — вектор внешнего возмущающего воздействия размерности $m \times 1$. Нелинейная часть системы (1) — это вектор управления $u = N(y(t))$, т. е. вектор $N(y(t))$ нелинейных функций размерности $m \times 1$. Считаем, что элементы матрицы A определены, т. е. матрица A описывает инерционные свойства объекта, а элементы матриц B и C являются параметрами настройки и могут изменяться в задаваемых диапазонах для придания системе требуемых свойств.

При исследовании систем вида (1) важно хотя бы для некоторых сочетаний элементов матриц A, B и C иметь достоверные сведения о динамическом поведении объекта, характеризуемого системой (1). Такое поведение описывается решением системы (1), но получить в аналитическом виде такое решение, как правило, не удается. Численный анализ также непрост и при определенных условиях может приводить к недостоверным результатам. Действительно, динамика линейной части системы (1) определяется постоянной матрицей A, но даже в системе $\dot{x}(t) = Ax(t)$ могут существовать почти периодические колебания, если у матрицы A есть несколько чисто мнимых собственных чисел, среди которых и несоизмеримые [8]. Кроме того, в правую часть системы (1) аддитивно входит нелинейная функция $N(y(t))$, которая может быть неоднозначной [9] и в фазовом пространстве иметь поверхности переключения. Желательно, чтобы поверхности были поверхностями без контакта [10], что не всегда выполнимо, поскольку на выход нелинейного элемента действует внешнее возмущающее воздействие. Все эти особенности делают численный анализ сложным и требуют дополнительных исследований.

Ставится задача построения неособого преобразования системы (1), чтобы ее решение можно было получить аналитически для наиболее широкого множества параметров, входящих в матрицы B и C как элементы. Преобразование будем искать алгебраическими методами. Пусть матрица A имеет комплексные собственные числа, в том числе кратные. Считаем, что такой подход облегчает в том числе и численный анализ систем вида (1), поскольку применим для изучения робастности системы (1). Действительно, нам становятся известны множества элементов матриц B и C, при которых динамика системы полностью обозримая. Дополнения этих множеств могут быть предметом дальнейшего численного исследования. Если принимать во внимание декомпозицию системы [7, 11–13], то подсистемы низких порядков, как правило, позволяют охарактеризовать динамику систем полностью [14–24].

3. Преобразование системы. Известно, что неособым преобразованием $x(t) = Tz(t)$ исходная система (1) приводится к эквивалентной системе относительно $z(t)$, т. е.

$$\dot{z}(t) = A_T z(t) + B_T(N(y(t)) + \psi(t)), \quad y(t) = C_T z(t) \tag{2}$$

с начальным условием $z(0) = T^{-1}x_0$, в которой $A_T = T^{-1}AT$, $B_T = T^{-1}B$, $C_T = CT$.

Неособая матрица T канонического преобразования, приводящего матрицу A к первой естественной нормальной или жордановой форме, определяется неоднозначно [25]. Если приравнять к нулю конкретные элементы матриц B_T и C_T, то можно получить расщепление системы (2) на подсистемы низкой размерности, каждая из которых допускает аналитическое исследование. Матрицы B_T и C_T зависят от матрицы T, поэтому можно подобрать T таким образом, чтобы преобразование приводило систему (1) к системе (2) с наперед заданными свойствами. Пусть $T = SQ$, где S — некоторая неособая матрица такая, что $S^{-1}AS = A_T$, а Q — матрица, элементы которой являются параметрами. Матрица Q задает неоднозначность выбора матрицы T, должна быть невырожденной и удовлетворять равенству $A_T Q = QA_T$ (см. [13]). Итак, Q может быть любой невырожденной матрицей, перестановочной с матрицей A_T. Элементы матрицы Q можно использовать как переменные множители в элементах матриц B_T и C_T, при этом сохраняется условие $\det Q \neq 0$.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы построить матрицы Q и Q^{-1} так, чтобы воспользоваться преимуществами приведения к системе (2) с матрицами $A_T = A_j$ или $A_T = A_n$, в которой A_j — матрица в жордановой форме, A_n — матрица в первой естественной нормальной форме. В первом случае $T = SQ$, во втором случае $T = SQ_n$, где S и Q_n — невырожденные матрицы такие, что $S^{-1}AS = A_n$ и $Q_n^{-1}A_nQ_n = A_n$. Для того чтобы различать эти случаи, если $A_T = A_j$, будем обозначать $M = SQ$ (т. е. $T = M$), где S состоит из собственных и дополнительных векторов матрицы A. Кроме того, $B_T = \overline{B_M} = Q^{-1}S^{-1}B = Q^{-1}B_M$ и $C_T = \overline{C_M} = CSQ = C_MQ$.

4. Случай жордановой нормальной формы. Пусть матрица A имеет q пар комплексно сопряженных собственных чисел и, следовательно, $n - 2q$ вещественных собственных чисел. Тогда полученная из нее матрица A_j блочно-диагональная:

$$\begin{pmatrix} A_{jC} & 0 \\ 0 & A_{jR} \end{pmatrix}.$$

Перестановочная с ней матрица Q также будет блочно-диагональной:

$$\begin{pmatrix} Q_C & 0 \\ 0 & Q_R \end{pmatrix}.$$

При этом матрица Q_C будет перестановочной с матрицей A_{jC}, а матрица Q_R — с матрицей A_{jR}.

Рассмотрим матрицу A_{jC}, четный порядок которой $2q$. На главной диагонали такой матрицы расположены q блоков второго порядка вида $\begin{pmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$, соответствующих комплексно сопряженным собственным числам $\mu \pm i\gamma$. Кроме того, если среди чисел $\mu \pm i\gamma$ есть кратные, например кратности ρ, то порядок соответствующей им подматрицы матрицы A_{jC} $2\rho \times 2\rho$, на ее главной диагонали стоят указанные блоки второго порядка, а над нею — блоки второго порядка вида $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выясним, как строятся матрицы Q и Q^{-1}.

Рассмотрим матрицу

$$A_{jC} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Theta_k \end{pmatrix},$$

где Θ_i — блочные матрицы порядка r_i, а $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i$ — число пар комплексно сопряженных чисел с учетом кратности этих пар. Тогда матрица

$$Q_C = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_k \end{pmatrix},$$

здесь матрицы Q_i также являются блочными матрицами размерности блоков Θ_i ($i = \overline{1,k}$). Блоки Θ_i могут быть двух типов.

К первому типу отнесем блок

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} \mu_j & -\gamma_j \\ \gamma_j & \mu_j \end{pmatrix}, \tag{3}$$

соответствующий некратной паре собственных чисел $\mu_j \pm i\gamma_j$. Тогда Θ_i отвечает блок $Q_i = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, удовлетворяющий равенству $\Theta_i Q_i = Q_i \Theta_i$. Очевидно, можно положить, что $q_{11} = q_{22} = \nu$, $q_{12} = -\xi$, $q_{21} = \xi$, где ν и ξ — произвольные вещественные числа такие, что $\nu^2 + \xi^2 \neq 0$. Тогда матрица

$$Q_i = \begin{pmatrix} \nu & -\xi \\ \xi & \nu \end{pmatrix} \tag{4}$$

коммутативна с блоком Θ_i и матрица

$$Q_i^{-1} = \frac{1}{\nu^2 + \xi^2} \begin{pmatrix} \nu & \xi \\ -\xi & \nu \end{pmatrix}. \tag{5}$$

На параметры ν и ξ не накладываются дополнительные ограничения, кроме $\nu^2 + \xi^2 \neq 0$. Для блока Θ_i первого типа найдены матрицы Q_i и Q_i^{-1}.

Блоки второго типа имеют вид

$$\Theta_i = \begin{pmatrix} \Phi & I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & I_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Phi & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Phi \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $\Phi = \begin{pmatrix} \mu_j & -\gamma_j \\ \gamma_j & \mu_j \end{pmatrix}$, где j — номер соответствующей кратной пары собственных чисел $\mu_j \pm i\gamma_j$. При этом, если кратность данной пары равна ρ, то размерность матрицы Θ_i есть $2\rho \times 2\rho$. Для восстановления блоков матрицы Q_C, соответствующих блочным матрицам Θ_i вида (6), поставим матрицу вида $I_\Phi + H$, в которой I_Φ — блочно-диагональная матрица с блоками I_2 на главной диагонали, H — блочная матрица с наддиагональю, состоящей из единичных матриц второго порядка, а все остальные блоки — нулевые, т. е.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда блок Q_i имеет вид

$$Q_i = \alpha_0 I_\Phi + \alpha_1 H + \alpha_2 H^2 + \dots + \alpha_{\rho-1} H^{\rho-1}, \tag{7}$$

где α_0, α_1, α_2, …, $\alpha_{\rho-1}$ — ненулевые параметры. Коммутативность матриц Θ_i и Q_i при их умножении не вызывает сомнений. Следовательно, матрицы A_{jC} и Q_C (с блоками (3) и (6)) коммутируют между собой.

Обратная матрица Q_i^{-1} находится из равенства $Q_i Q_i^{-1} = I$ (I — единичная матрица соответствующего порядка):

$$Q_i^{-1} = \beta_0 I_\Phi + \beta_1 H + \dots + \beta_{\rho-1} H^{\rho-1}, \tag{8}$$

а коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\rho-1}$ выражаются через выбранные значения параметров α_0, α_1, …, $\alpha_{\rho-1}$.

Рассмотрим примеры с преобразованием $T = SQ$, где Q — параметрическая матрица.

Пример 1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Тогда

$$A_j = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и $A_j = S^{-1}AS$. Обозначим $A_j^0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Из равенства $SA_j = AS$ получаем матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда имеем, что

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере есть только одна пара комплексно сопряженных собственных чисел, поэтому конструкция матрицы Q, перестановочной с матрицей A_j, предстанет в виде $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha_0 I_2 \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$, блок $\alpha_0 I_2$ отвечает матрице A_j^0. Тогда

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Далее применим второй способ получения Q, т. е.

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -\xi \\ 0 & \xi & \nu \end{pmatrix},$$

где ν, ξ — произвольные вещественные числа такие, что $\nu^2 + \xi^2 \neq 0$. Матрица $Q_0 = \begin{pmatrix} \nu & -\xi \\ \xi & \nu \end{pmatrix}$ коммутирует с матрицей A_j^0 и $Q_0^{-1} = \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}\begin{pmatrix} \nu & \xi \\ -\xi & \nu \end{pmatrix}$. Пусть матрица B имеет элементы b_{ij} ($i = \overline{1,3}$, $j = 1,2$). Тогда

$$B_M = S^{-1}B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -b_{21}/2 + b_{31} & -b_{22}/2 + b_{32} \\ b_{21}/2 & b_{22}/2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{B_M} = Q^{-1}B_M =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}/\alpha & b_{12}/\alpha \\ \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}(\nu(-b_{21}/2 + b_{31}) + \xi b_{21}/2) & \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}(\nu(-b_{22}/2 + b_{32}) + \xi b_{22}/2) \\ \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}(-\xi(-b_{21}/2 + b_{31}) + \nu b_{21}/2) & \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}(-\xi(-b_{22}/2 + b_{32}) + \nu b_{22}/2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}/\alpha & b_{12}/\alpha \\ \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}((\xi-\nu)b_{21}/2 + \nu b_{31}) & \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}((\xi-\nu)b_{22}/2 + \nu b_{32}) \\ \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}((\xi+\nu)b_{21}/2 - \xi b_{31}) & \dfrac{1}{\nu^2+\xi^2}((\xi+\nu)b_{22}/2 - \xi b_{32}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$C_M = CS = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 2c_{12} + c_{13} \\ c_{21} & c_{23} & 2c_{22} + c_{23} \end{pmatrix}.$$

Затем имеем

$$\overline{C_M} = C_M Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & 2c_{12} + c_{13} \\ c_{21} & c_{23} & 2c_{22} + c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -\xi \\ 0 & \xi & \nu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha c_{11} & \nu c_{13} + \xi(2c_{12} + c_{13}) & -\xi c_{13} + \nu(2c_{12} + c_{13}) \\ \alpha c_{21} & \nu c_{23} + \xi(2c_{22} + c_{23}) & -\xi c_{23} + \nu(2c_{22} + c_{23}) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$B_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $b_{11} = b_{12} = 1$, $b_{21} = b_{22} = b_{31} = b_{32} = 0$. Если $\overline{B_M} = B_M$, то $b_{11} = b_{12} = \alpha$, а остальные элементы нулевые. Пусть теперь

$$B_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда $b_{11} = b_{12} = 1$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = 2$, $b_{31} = b_{32} = 1$. Если $\overline{B_M} = B_M$, то получаем элементы

$$b_{11} = \alpha,\ b_{12} = \alpha,\ b_{21} = 2\xi,\ b_{22} = 2\nu,\ b_{31} = \xi + \nu,\ b_{32} = \nu - \xi, \tag{9}$$

где ξ, ν — произвольные вещественные числа такие, что $\xi^2 + \nu^2 \neq 0$. Параметры ξ и ν существенно расширяют выбор элементов матрицы B. Перейдем к выбору матрицы C по матрицам C_M и $\overline{C_M}$. Пусть $C_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $c_{11} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 0$ и $c_{23} = 0$. Положим теперь, что $\overline{C_M} = C_M$. Тогда набор составляют элементы

$$c_{11} = \alpha^{-1},\ c_{12} = 0,\ c_{13} = 0,\ c_{21} = \alpha^{-1},\ c_{22} = 0,\ c_{23} = 0. \tag{10}$$

После введения параметрической матрицы Q стало возможным получение заданной $\overline{C_M}$ с использованием параметра α. При этом наборы элементов (9) и (10) матриц B и C по выбору значений параметров α, ν и ξ должны быть согласованы.

Пример 2. Пусть матрица A размерности 4×4 имеет две одинаковые пары комплексно сопряженных собственных чисел вида $\mu \pm i\gamma$. Тогда существует неособая матрица S такая, что

$$A_j = A_{jC} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu & -\gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & \mu \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Рассмотрим два способа введения параметров в преобразование системы. В первом матрица (11) относится ко второму типу матриц Θ_i, поэтому в качестве Q_i выбираем матрицу по формуле (7). Поскольку $\rho = 2$, имеем матрицу

$$Q_i = \alpha_0 \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

с параметрами α_0, α_1 такими, что $\alpha_0 \neq 0$ и $\alpha_1 \neq 0$. Согласно (8), получаем $Q_i^{-1} = \beta_0 \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Коэффициенты β_0 и β_1 находим из равенства $Q_iQ_i^{-1} = I$, в котором I — единичная матрица размерности 4×4. Так, $\beta_0 = 1/\alpha_0$ и $\beta_1 = -\alpha_1/\alpha_0^2$. При таком выборе Q_i имеем параметры α_0 и α_1.

Рассмотрим второй способ. Пусть $A_{jC} = \begin{pmatrix} \Phi & I_2 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$. Выберем матрицу $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ так, чтобы она коммутировала с матрицей Φ. Как Q можно выбрать матрицу $\begin{pmatrix} \nu & -\xi \\ \xi & \nu \end{pmatrix}$, где ν и ξ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\nu^2 + \xi^2 \neq 0$. Итак, сначала поступаем так же, как в случае, когда $\Theta_i = \Phi$. Затем получаем в блочном виде $Q_i = \begin{pmatrix} Q & I_2 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Тогда матрица Q_i зависит от параметров ν и ξ. При этом матрица

$$Q_i^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & \Lambda \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

здесь

$$Q^{-1}=\frac{1}{\nu^2+\xi^2}\begin{pmatrix}\nu & \xi\\ -\xi & \nu\end{pmatrix},\quad \Lambda=\frac{1}{(\nu^2+\xi^2)^2}\begin{pmatrix}\xi^2-\nu^2 & -2\nu\xi\\ 2\nu\xi & \xi^2-\nu^2\end{pmatrix}. \tag{14}$$

В матрице Q_i элементы двух блоков зависят от ν и ξ, а в соответствующей ей обратной матрице Q_i^{-1}, согласно (13) и (14), элементы трех блоков зависят от ν и ξ. Покажем, как меняются матрицы B и C после приведения матрицы A к виду (11). Имеем неособую матрицу S размерности 4×4. Для простоты выкладок рассмотрим матрицу B размерности 4×1 и матрицу C размерности 1×4. Если $T=M=SQ$, то $B_T=\overline{B_M}=Q^{-1}S^{-1}B=Q^{-1}B_M$. Если матрица S известна, то нетрудно найти матрицу S^{-1}. Тогда вектор

$$B_M=S^{-1}B. \tag{15}$$

Если элементы вектора B — это параметры настройки, т. е. их можно менять в определенных диапазонах, то, задав желаемый после преобразования исходной системы вектор B_M, получаем линейную систему уравнений (15) относительно элементов вектора B. Покажем, как расширяет возможности введение параметрической матрицы Q. В системе (15) обозначим $B_M=(b_1^M,b_2^M,b_3^M,b_4^M)^*$, где $*$ — символ операции траспонирования. Возьмем сначала матрицу Q_i типа (12). Имеем матрицу

$$Q_i^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha_0} & 0 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha_0} & 0 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_0}\end{pmatrix},$$

откуда

$$\overline{B_M}=Q_i^{-1}B_M=\begin{pmatrix}\alpha_0^{-1}b_1^M-\alpha_1\alpha_0^{-2}b_3^M\\ \alpha_0^{-1}b_2^M-\alpha_1\alpha_0^{-2}b_4^M\\ \alpha_0^{-1}b_3^M\\ \alpha_0^{-1}b_4^M\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Допустим, необходимо получить $B_T=(0,0,1,0)^*$ и $C_T=(0,0,0,1)$. Тогда при $\mu=0$ исходная система с матрицей (11) интегрируется в конечном виде, т. е. $B_T=B_M$ или $B_T=\overline{B_M}$. Если $B_T=B_M$, то (15) — это система четырех уравнений

$$b_1^M=0,\ b_2^M=0,\ b_3^M=1,\ b_4^M=0 \tag{17}$$

и с матрицей S^{-1}. Если $B_T=\overline{B_M}$, то вместо системы (17) в силу (16) находим систему

$$\begin{cases}\alpha_0^{-1}b_1^M-\alpha_1\alpha_0^{-2}b_3^M=0,\\ \alpha_0^{-1}b_2^M-\alpha_1\alpha_0^{-2}b_4^M=0,\\ \alpha_0^{-1}b_3^M=1,\\ \alpha_0^{-1}b_4^M=0,\end{cases} \tag{18}$$

где α_0, α_1 — произвольные вещественные числа, отличные от нуля. Система (18) приводится к виду

$$b_1^M=\alpha_1,\ b_2^M=0,\ b_3^M=\alpha_0,\ b_4^M=0. \tag{19}$$

Очевидно, что система (19) за счет параметров α_0, α_1 имеет расширенное множество решений относительно элементов вектора B по сравнению с системой (17).

Если решение системы (19) не подходит, то можно воспользоваться вторым способом построения Q_i. Согласно (13) и (14), имеем

$$Q_i^{-1} = \frac{1}{\nu^2+\xi^2}\begin{pmatrix} \nu & \xi & \dfrac{\xi^2-\nu^2}{\nu^2+\xi^2} & \dfrac{-2\nu\xi}{\nu^2+\xi^2} \\ -\xi & \nu & \dfrac{2\nu\xi}{\nu^2+\xi^2} & \dfrac{\xi^2-\nu^2}{\nu^2+\xi^2} \\ 0 & 0 & \nu & \xi \\ 0 & 0 & -\xi & \nu \end{pmatrix}.$$

Полагаем $\overline{B_M}$, как в системе (18). Тогда приходим к системе

$$\begin{cases} \nu b_1^M + \xi b_2^M + \dfrac{\xi^2-\nu^2}{\xi^2+\nu^2} b_3^M - \dfrac{2\nu\xi}{\xi^2+\nu^2} b_4^M = 0, \\ -\xi b_1^M + \nu b_2^M + \dfrac{2\nu\xi}{\xi^2+\nu^2} b_3^M + \dfrac{\xi^2-\nu^2}{\xi^2+\nu^2} b_4^M = 0, \\ \nu b_3^M + \xi b_4^M = \xi^2+\nu^2, \\ -\xi b_3^M + \nu b_4^M = 0, \end{cases} \tag{20}$$

в которой параметры ξ и ν связаны условием $\xi^2+\nu^2 \neq 0$.

Упростим систему (20). Из третьего и четвертого ее уравнений получаем, что $b_3^M = \nu$ и $b_4^M = \xi$. Подставляем их в первое и второе уравнения, тогда $b_1^M = 1$ и $b_2^M = 0$. Следовательно, теперь вместо (17) имеем относительно элементов вектора B систему

$$b_1^M = 1,\ b_2^M = 0,\ b_3^M = \nu,\ b_4^M = \xi \tag{21}$$

при условии $\xi^2+\nu^2 \neq 0$. Далее

$$C_T = C_M = CM = CS, \quad C_T = \overline{C_M} = CSQ = C_M Q. \tag{22}$$

Матрица S известна, поэтому будем считать, что в первом уравнении (22) $C_M = (c_1^M, c_2^M, c_3^M, c_4^M)$. Требуется выбрать вектор $C_T = (0,0,0,1)$. Если $C_T = C_M$, то получаем систему линейных уравнений с матрицей S относительно элементов вектора C. Тогда элементы

$$c_1^M = 0,\ c_2^M = 0,\ c_3^M = 0,\ c_4^M = 1. \tag{23}$$

После введения параметрической матрицы Q_i типа (12) получаем

$$\overline{C_M} = (\alpha_0 c_1^M, \alpha_0 c_2^M, \alpha_1 c_1^M + \alpha_0 c_3^M, \alpha_1 c_2^M + \alpha_0 c_4^M),$$

откуда находим, что

$$c_1^M = 0,\ c_2^M = 0,\ c_3^M = 0,\ c_4^M = \alpha_0^{-1}, \tag{24}$$

где α_0 — произвольное вещественное число, отличное от нуля. Система (24) имеет расширенное множество решений по сравнению с множеством решений системы (23). Применим второй способ введения матрицы Q_i. Тогда $Q_i = \begin{pmatrix} Q & I_2 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ при $Q = \begin{pmatrix} \nu & -\xi \\ \xi & \nu \end{pmatrix}$. Имеем

$$\overline{C_M} = (\nu c_1^M + \xi c_2^M, -\xi c_1^M + \nu c_2^M, c_1^M + \nu c_3^M + \xi c_4^M, c_2^M - \xi c_3^M + \nu c_4^M),$$

откуда получаем

$$c_1^M = 0,\ c_2^M = 0,\ c_3^M = -\frac{\xi}{\xi^2+\nu^2},\ c_4^M = \frac{\nu}{\xi^2+\nu^2}, \tag{25}$$

здесь ξ и ν — произвольные вещественные числа такие, что $\xi^2+\nu^2 \neq 0$.

Учитывая, что матрицы A, B и C преобразуются одновременно, найденные элементы вектора B должны удовлетворять системам (17) и (23). Если вводим параметрическую матрицу, то при введении первым способом элементы вектора B должны удовлетворять системам (19) и (24), а при введении вторым способом — системам (21) и (25), чему и способствуют параметры в обоих способах введения параметрических матриц Q_i.

Сформулируем предлагаемое правило построения параметрической матрицы Q.

Предложение 1. *Если матрица A с комплексно сопряженными собственными числами преобразованием с неособой матрицей S приводится к жордановой нормальной форме A_{jC}, то матрица параметрического неособого преобразования имеет вид $T = SQ$, где Q — блочно-диагональная матрица с блоками Q_i, элементы которой удовлетворяют условию* $\det Q \neq 0$. *При этом диагональному блоку Θ_i вида* (3) *матрицы A_{jC}, отвечающему комплексно сопряженному числу $\mu \pm i\gamma$, соответствует блок Q_i вида* (4) *с обратной матрицей* (5). *Если комплексно сопряженное собственное число кратное, то диагональному блоку Θ_i вида* (6) *матрицы A_{jC} соответствует блок Q_i вида* (7) *с обратной матрицей* (8). *В обоих случаях выполняется условие $\Theta_i Q_i = Q_i \Theta_i$. Для блоков Θ_i вида* (6) *можно использовать второй способ построения блоков Q_i, когда на главной диагонали матрицы Q_i стоят блоки* (4), *а над главной диагональю — блоки I_2.*

5. Случай первой естественной нормальной формы. Достаточные условия приведения матрицы A к подобной ей квазидиагональной матричной форме известны (см. [25]). При этом матрица A размерности $n \times n$ подобна матрице

$$L = \operatorname{diag}(A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}), \tag{26}$$

где матричные блоки A_{n_l} $(l = \overline{1,k})$ имеют размерности $n_l \times n_l$, причем $\sum\limits_{l=1}^{k} n_l = n$. Каждая A_{n_l} — это сопровождающая матрица инвариантного многочлена со старшей степенью n_l и коэффициентом единица при старшей степени. Имеются в виду инвариантные многочлены матрицы $I_\lambda - A$ (λ — числовой параметр), при этом сумма их степеней равна n.

Пусть матрица A такая, что существует невырожденная матрица T преобразования $x(t) = Tz(t)$, приводящего матрицу A к виду $L = T^{-1}AT$. Здесь L — первая естественная нормальная форма (26). Известно, что матрица T выбирается неоднозначно. Действительно, пусть $T = SQ$, где S и Q — невырожденные матрицы такие, что $S^{-1}AS = L$, а Q — матрица, определяемая из равенства

$$LQ = QL. \tag{27}$$

Матрица Q задает неоднозначность выбора матрицы T. Матрица L блочно-диагональная. Потому $Q = \operatorname{diag}(Q_{n_1}, Q_{n_2}, \ldots, Q_{n_k})$, где $\sum_{l=1}^{k} n_l = n$. Следовательно, из (27) имеем равенство

$$A_{n_l} Q_{n_l} = Q_{n_l} A_{n_l}. \tag{28}$$

В дальнейшем индекс l опускаем. Обозначим через P_n множество невырожденных матриц Q_n, удовлетворяющих равенству (28). Очевидно, что такие Q_n образуют группу относительно операции перемножения этих матриц, т. е. P_n — группа автоморфизмов матрицы A_n. Установим конструкцию матрицы Q_n в зависимости от ее порядка n.

Пусть $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$, где A_2 — сопровождающая матрица для многочлена $f(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. Тогда матрицу $Q_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ ищем из равенства (28). Получаем $Q_2 = \begin{pmatrix} a_1x + y & -a_2x \\ x & y \end{pmatrix}$, где x и y — числовые параметры, удовлетворяющие условию $a_1xy + y^2 + a_2x^2 \neq 0$ (т. е. $\det Q_2 \neq 0$), при котором определяется Q_2^{-1}.

Далее, пусть $n = 3$, $f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ и матрица

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу

$$Q_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

ищем из равенства (28). Получим систему девяти линейных однородных уравнений с девятью неизвестными x_i, y_i, z_i $(i = \overline{1,3})$. Из ее рассмотрения можно сделать следующие выводы. Если $a_3^2(1 + a_2 + a_3) \neq 0$, то группа автоморфизмов P_3 матрицы A_3 состоит из матриц $Q_3 = xI$, где x — ненулевой параметр. Если $a_3^2(1 + a_2 + a_3) = 0$, то при $a_3 = 0$ имеем трехпараметрическую матрицу

$$Q_3 = \begin{pmatrix} a_2x + a_1y + z & 0 & 0 \\ a_1x + y & a_1y + z & -a_2y \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

в которой x, y, z — параметры, удовлетворяющие условию $(a_2x + a_1y + z)(a_2y^2 + a_1yz + z^2) \neq 0$. Если $a_3 = -1$, $a_2 = 0$, то получаем матрицу Q_3, зависящую от двух параметров.

Отметим, что общей формулы для вычисления матриц Q_n не существует. Однако, чтобы показать, как можно использовать матрицу Q_n в случае, когда матрица A_n имеет хотя бы две пары комплексно сопряженных собственных чисел, перейдем к рассмотрению случая $n = 4$.

Пусть $f(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$. Тогда для матрицы

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

из равенства (28) находим группу P_4, т. е. семейство матриц Q_4. Для матрицы

$$Q_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

должно выполняться равенство

$$A_4Q_4 = Q_4A_4. \tag{29}$$

Умножив A_4 на Q_4, получаем матрицу размерности 4×4, элементы которой зависят от элементов матриц A_4 и Q_4. Аналогично делаем для матрицы Q_4A_4. Перенесем элементы матрицы Q_4A_4 в левую часть равенства (29) на соответствующие места в матрице A_4Q_4. Тогда слева будем иметь матрицу из разностей элементов матриц A_4Q_4 и Q_4A_4, т. е.

$$A_4Q_4 - Q_4A_4, \tag{30}$$

а справа — нулевую матрицу. Каждый элемент матрицы (30) определяет левую часть одного из уравнений однородной системы уравнений для определения 16 неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4, t_1, t_2, t_3 и t_4. Если уравнения выписать построчно в указанном порядке неизвестных, то построим матрицу коэффициентов этой системы размерности 16×16. Сами коэффициенты — это либо нули, либо один из коэффициентов многочлена $f(\lambda)$. Применяя обратный ход метода Гаусса, приведем матрицу с помощью элементарных преобразований к аналогу трапецевидной формы так, что в ее первых четырех строках все элементы нули, кроме элементов с индексами $(3, 14)$ и $(4, 14)$, первый из них равен $-a_2a_3$, а второй — $a_1a_2a_3$. Из вида этой матрицы следует, что ее ранг равен 12 или 13. Потому при $a_1a_2a_3 \neq 0$ или при $a_1 = 0$ и $a_2a_3 \neq 0$ группа P_4 будет трехпараметрической, а при $a_2 = 0$ или $a_3 = 0$ она будет четырехпараметрической. Пусть, например, $a_1a_2a_3 \neq 0$ и соответственно $a_2a_3 \neq 0$, тогда $t_2 = 0$, так как t_2 соответствует четырнадцатому столбцу матрицы (30). Это означает, что в четырех первых строках матрицы все элементы нули и все элементы четырнадцатого столбца также равны нулю. Убирая в такой матрице нулевые строки и нулевой столбец, построим систему с матрицей размерности 12×15. Полагаем теперь $t_1 = x$, $t_3 = y$, $t_4 = z$, где x, y, z — ненулевые параметры. Тогда получаем, что $x_1 = a_3x + a_1y + z$ из первого уравнения преобразованной системы, $x_2 = -a_4x$ из второго, $x_3 = 0$ из третьего, $x_4 = -a_4y$ из четвертого, $y_1 = a_2x + y$ из пятого, $y_2 = a_1y + z$ из шестого, $y_3 = -a_4x$ из седьмого, $y_4 = -a_3y$ из восьмого, $z_1 = a_1x$ из девятого, $z_2 = y$ из десятого, $z_3 = a_1y + z$ из одиннадцатого, $z_4 = -a_4x - a_2y$ из двенадцатого. Подставим эти решения в матрицу Q_4:

$$Q_4 = \begin{pmatrix} a_3x + a_1y + z & -a_4x & 0 & -a_4y \\ a_2x + y & a_1y + z & -a_4x & -a_3y \\ a_1x & y & a_1y + z & -a_4x - a_2y \\ x & 0 & y & z \end{pmatrix}, \tag{31}$$

в которой параметры x, y, $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ такие, что $\det Q_4 \neq 0$. Тогда матрица Q_4^{-1} легко находится из матрицы (31). Если $a_1 = 0$ и $a_2a_3 \neq 0$, то получим другую трехпараметрическую матрицу Q_4. Если $a_2 = 0$ или $a_3 = 0$, то группа P_4 четырехпараметрическая. Аналогичное утверждение справедливо, если $a_2 = a_3 = 0$.

На примерах построения матриц Q_2, Q_3 и Q_4 видно, что общей формулы их определения в зависимости от n не существует, так как вид этих матриц существенно зависит от величин a_1, a_2, a_3, a_4. Однако, используя формулу (28), процесс построения групп автомофизмов P_n может быть продолжен для $n \geqslant 5$. Опираясь на приведенный скалярный многочлен $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$, строим для него сопровождающую матрицу. При этом надо иметь в виду, что если матрицы A и A_0 имеют одинаковые характеристические многочлены, то они приводятся к виду L не обязательно одним и тем же преобразованием.

Отметим, что в приложениях системы автоматического управления с матрицей $A = A_n$ встречаются достаточно часто. Например, если выход одномерной системы n-го порядка с управлением u в правой части является взвешенной суммой производных текущих переменных до порядка m включительно и $n > m$, то после соответствующей замены переменных приходим к системе вида $\dot{x} = A_n x + B_T u$, $y = (C_T, x)$, где B_T и C_T — преобразованные векторы.

Пример 3. Пусть матрица A размерности 4×4 имеет две пары комплексно сопряженных корней $\mu \pm i\gamma = -1 \pm i$ (в отличие от примера 2 здесь заданы конкретные собственные числа матрицы A). Тогда $f(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4$. Пусть неособая матрица S_L приводит матрицу A к виду A_4, т. е. $S_L^{-1} A S_L = A_4$, где

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулами из примера 2. Если S_L известна, а вектор C_T задан (т. е. $C_T = (0, 0, 0, 1)$, как в примере 2), то $C_T = CS_L = C_L$, если не используем параметрическую матрицу Q_4, иначе $C_T = \overline{C_L} = CS_L Q_4 = C_L Q_4$, где матрица Q_4 строится по формуле (31), т. е.

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 8x + 4y + z & -4x & 0 & -4y \\ 8x + y & 4y + z & -4x & -8y \\ 4x & y & 4y + z & -4x - 8y \\ x & 0 & y & z \end{pmatrix},$$

$\det Q_4 \neq 0$. Обозначим $C_L = (c_1^L, c_2^L, c_3^L, c_4^L)$. Задан вектор $\overline{C_L} = (0, 0, 0, 1)$. Далее получаем для нахождения c_1^L, c_2^L, c_3^L, c_4^L систему

$$\begin{cases} c_1^L(8x + 4y + z) + c_2^L(8x + y) + c_3^L 4x + c_4^L x = 0, \\ c_1^L(-4x) + c_2^L(4y + z) + c_3^L y = 0, \\ c_2^L(-4x) + c_3^L(4y + z) + c_4^L y = 0, \\ c_1^L(-4y) + c_2^L(-8y) + c_3^L(-4x - 8y) + c_4^L z = 1 \end{cases} \tag{32}$$

при условиях, что x, y, $z \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ и $\det Q_4 \neq 0$. Решение c_k^L $(k = \overline{1, 4})$ — это рациональные функции от параметров x, y и z. Нахождение Q_4 является более трудоемкой задачей, чем параметрической матрицы в случае приведения к жордановой форме. Если не подходит система решений вида (25), то можно обратиться к решению системы (32).

Сформулируем правило построения параметрического преобразования.

Предложение 2. *Пусть матрица A линейной части системы* (1) *преобразованием с неособой матрицей S приводится к первой естественной нормальной форме L вида* (26) *с матричными блоками A_{n_l}. Тогда матрица параметрического неособого преобразования $T = SQ$, где Q — блочно-диагональная матрица с блоками Q_{n_l}, элементы которой удовлетворяют условию* $\det Q \neq 0$. *При этом диагональному блоку A_{n_l} соответствует блок Q_{n_l}, выбираемый из равенства $A_{n_l} Q_{n_l} = Q_{n_l} A_{n_l}$. Это уравнение для определения элементов матрицы Q_{n_l}, которые зависят от элементов матрицы A_{n_l} и значений параметров, выбираемых из условия* $\det Q_{n_l} \neq 0$.

6. Заключение. Хорошо известно [7, 26, 27], что задача приведения системы вида (1) к совокупности подсистем меньшей размерности или к интегрируемому виду представляет собой часто неразрешимую задачу. Для расширения множества систем вида (1), если это возможно, предложен метод введения в преобразование системы множителя в виде параметрической матрицы с определенными условиями, которая позволяет за счет выбора величин ее параметров расширить множество значений хотя бы части параметров настройки исходной системы. На примерах показано, что такая задача решается даже в тех случаях, когда матрица исходной линейной части системы имеет комплексно сопряженные, в том числе кратные, собственные числа.

Литература

1. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 216 с.

2. *Троицкий В. А.* О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования при наличии кратных корней // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 574–577.

3. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 483 с.

4. *Петров В. В., Гордеев А. А.* Нелинейные сервомеханизмы. М.: Машиностроение, 1979. 472 с.

5. *Нелепин Р. А.* Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. Л.: Судостроение, 1967. 447 с.

6. *Нелепин Р. А., Камачкин А. М., Туркин И. И., Шамберов В. Н.* Алгоритмический синтез нелинейных систем управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 240 с.

7. *DeRusso P. M., Roy R. J., Close C. M., Desrochers A. A.* State variables for engineers. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1998. 575 p.

8. *Bohr H.* Zur theorie der fast periodischen funktionen. I. Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen // Acta Math. 1925. Vol. 45. P. 29–127.

9. *Astrom K. J.* Oscillations in systems with relay feedback // Adaptive Control, Filtering and Signal Processing. New York: Springer-Verlag, 1995. P. 1–25.

10. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

11. *Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N.* Algebraical aspects of parametrical decomposition method // 2015 International Conference “Stability and Control Prosesses” in memory of V. I. Zubov (SCP–2015). St. Petersburg: St. Petersburg State University Press, 2015. P. 52–54.

12. *Kamachkin A. M., Shamberov V. N., Chitrov G. M.* Special matrix transformations of essential nonlinear control systems // 2017 International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the memory of V. F. Demyanov (CNSA-2017). St. Petersburg: St. Petersburg State University Press, 2017. P. 1–3.

13. *Камачкин А. М., Хитров Г. М., Шамберов В. Н.* Нормальные формы матриц в задачах декомпозиции и управления многомерных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 417–430.

14. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. Journal Differential Equations. 2014. N 221. P. 1–6.

15. *Евстафьева В. В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42–56.

16. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. Journal Differential Equations. 2016. N 04. P. 1–8.

17. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. Journal Differential Equations. 2016. N 124. P. 1–9.

18. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // International Journal Robust Nonlinear Control. 2017. Vol. 27. N 2. P. 204–211.

19. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. Journal Differential Equations. 2017. N 140. P. 1–10.

20. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // Journal Dynamical Control Systems. 2017. Vol. 23. N 4. P. 825–837.

21. *Евстафьева В. В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.

22. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // International Journal Control. 2020. Vol. 93. N 4. P. 763–770.

23. *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.2010

24. *Евстафьева В. В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.

25. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.

26. *Burns R. S.* Advanced control engineering. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 464 p.

27. *Paraskevopoulos P. N.* Modern control engineering. New York: Marcel Dekker Inc., 2002. 736 p.

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.
Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

Контактная информация:

Камачкин Александр Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.kamachkin@spbu.ru

Потапов Дмитрий Константинович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.potapov@spbu.ru

Евстафьева Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.evstafieva@spbu.ru

Method for the transformation of complex automatic control systems to integrable form

A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Method for the transformation of complex automatic control systems to integrable form. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 196–212. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.209 (In Russian)

The article considers a class of automatic control systems that is described by a multidimensional system of ordinary differential equations. The right hand-side of the system additively contains a linear part and the product of a control matrix by a vector that is the sum of a control vector and an external perturbation vector. The control vector is defined by a nonlinear function dependent on the product of a feedback matrix by a vector of current coordinates. The authors solve the problem of constructing a matrix of a nonsingular transformation, which leads the matrix of the linear part of the system to the Jordan normal form or the first natural normal form. The variables included in this transformation allow us to vary the system settings, which are the parameters of both the control matrix and the feedback matrix, as well as to convert the system to an integrable form. Integrable form is understood as a form in which the system can be integrated in a final form or reduced to a set of subsystems of lower orders. Furthermore, the sum of the subsystem orders is equal to the order of the original system. In the article, particular attention is paid to cases when the matrix of the linear part has complex conjugate eigenvalues, including multiple ones.

Keywords: automatic control system, multidimensional nonlinear dynamic system, nonsingular transformation, Jordan's normal matrix form, first natural normal matrix form, a system's integrable form.

References

1. Lur'e A. I. *Nekotorye nelinejnye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovanija* [*Certain nonlinear tasks of the automatic control theory*]. Moscow, Techn.-theor. lit. Publ., 1951, 216 p. (In Russian)

2. Troitskij V. A. O kanonicheskikh preobrazovanijakh uravnenij teorii avtomaticheskogo regulirovanija pri nalichii kratnykh kornej [About canonical transformations of equations of the automatic control theory in the presence of the multiple roots]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1957, vol. 21, iss. 4, pp. 574–577. (In Russian)

3. Letov A. M. *Ustojchivost' nelinejnykh reguliruemykh sistem.* 2 izd., ispr. i dop. [*Stability of nonlinear control systems.* 2nd ed.]. Moscow, Phys.-math. lit. Publ., 1962, 483 p. (In Russian)

4. Petrov V. V., Gordeev A. A. *Nelinejnye servomekhanizmy* [*Nonlinear servochanisms*]. Moscow, Machinostroenie Publ., 1979, 472 p. (In Russian)

5. Nelepin R. A. *Tochnye analiticheskie metody v teorii nelinejnykh avtomaticheskikh sistem* [*Exact analytical methods in the theory of nonlinear automatic systems*]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1967, 447 p. (In Russian)

6. Nelepin R. A., Kamachkin A. M., Turkin I. I., Shamberov V. N. *Algoritmicheskij sintez nelinejnykh sistem upravleniya* [*Algorithmic synthesis of the nonlinear control systems*]. Leningrad, Leningrad University Press, 1990, 240 p. (In Russian)

7. DeRusso P. M., Roy R. J., Close C. M., Desrochers A. A. *State variables for engineers.* 2nd ed. New York, Wiley-Interscience Publ., 1998, 575 p.

8. Bohr H. Zur theorie der fast periodischen funktionen. I. Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen [On the theory of almost periodic functions. I. Generalization of the theory of Fourier series]. *Acta Math.*, 1925, vol. 45, pp. 29–127.

9. Astrom K. J. Oscillations in systems with relay feedback. *Adaptive Control, Filtering and Signal Processing.* New York, Springer-Verlag Publ., 1995, pp. 1–25.

10. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Teorija kolebanij* [*Theory of oscillators*]. Moscow, Physmatgiz Publ., 1959, 915 p. (In Russian)

11. Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Algebraical aspects of parametrical decomposition method. *2015 International Conference "Stability and Control Prosesses" in memory of V. I. Zubov (SCP–2015).* St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2015, pp. 52–54.

12. Kamachkin A. M., Shamberov V. N., Chitrov G. M. Special matrix transformations of essential nonlinear control systems. *2017 International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of V. F. Demyanov (CNSA–2017).* St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2017, pp. 1–3.

13. Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Normal'nye formy matrits v zadachakh dekompozitsii i upravleniya mnogomernykh sistem [Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimensional systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 417–430. (In Russian)

14. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side. *Electron. Journal Differential Equations*, 2014, no. 221, pp. 1–6.

15. Evstaf'eva V. V. Ob usloviyakh sushchestvovaniya dvukhtochechno-kolebatel'nogo periodicheskogo resheniya v neavtonomnoj relejnoj sisteme s gurvitsevoj matritsej [On existence conditions for a two-point oscillating periodic solution in an non-autonomous relay system with a Hurwitz matrix]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Automat. Remote Control*], 2015, no. 6, pp. 42–56. (In Russian)

16. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity. *Electron. Journal Differential Equations*, 2016, no. 04, pp. 1–8.

17. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side. *Electron. Journal Differential Equations*, 2016, no. 124, pp. 1–9.

18. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence. *International Journal Robust Nonlinear Control*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 204–211.

19. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence. *Electron. Journal Differential Equations*, 2017, no. 140, pp. 1–10.

20. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity. *Journal Dynamical Control Systems*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 825–837.

21. Evstaf'eva V. V. Periodicheskie resheniya sistemy differentsial'nykh uravnenij s gisterezisnoj nelinejnost'yu pri nalichii nulevogo sobstvennogo chisla [Periodic solutions of a system of differential equations with hysteresis nonlinearity in the presence of eigenvalue zero]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* [*Ukrainian Mathematical Journal*], 2018, vol. 70, no. 8, pp. 1085–1096. (In Russian)

22. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *International Journal Control*, 2020, vol. 93, no. 4, pp. 763–770.

23. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Dinamika i sinkhronizatsiya tsiklicheskikh struktur ostsillyatorov s gisterezisnoj obratnoj svyaz'yu [Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.2010 (In Russian)

24. Evstaf'eva V. V. O sushchestvovanii dvukhtochechno-kolebatel'nykh reshenij vozmushchennoj relejnoj sistemy s gisterezisom [On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis]. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2021, vol. 57, no. 2, pp. 169–178. (In Russian)

25. Lankaster P. *Teoriya matrits* [*Theory of matrices*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 280 p. (In Russian)

26. Burns R. S. *Advanced control engineering.* Oxford, Butterworth-Heinemann Publ., 2001, 464 p.

27. Paraskevopoulos P. N. *Modern control engineering.* New York, Marcel Dekker Inc. Publ., 2002, 736 p.

Received: February 12, 2021.
Accepted: April 05, 2021.

Authors' information:

Alexander M. Kamachkin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.kamachkin@spbu.ru

Dmitriy K. Potapov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.potapov@spbu.ru

Victoria V. Yevstafyeva — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.evstafieva@spbu.ru