ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929.4
MSC 34K20

Функционалы Ляпунова — Красовского для однородных систем с несколькими запаздываниями*

И. В. Александрова, А. П. Жабко

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александрова И. В., Жабко А. П.* Функционалы Ляпунова — Красовского для однородных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 183–195. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.208

Предложены явные конструкции функционалов Ляпунова — Красовского для однородных систем с несколькими постоянными запаздываниями и порядком однородности правых частей, строго бо́льшим единицы. В основе этих конструкций лежат функции Ляпунова, построенные по соответствующим системам с нулевыми запаздываниями, которые предполагаются асимптотически устойчивыми. Доказано, что функционалы удовлетворяют условиям теоремы Красовского, а значит, позволяют установить асимптотическую устойчивость нулевого решения при любых значениях запаздываний. Функционалы применяются к оценке области притяжения нулевого решения, а также к построению оценок решений однородных систем.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, однородные системы, асимптотическая устойчивость, функционалы Ляпунова — Красовского, область притяжения.

1. Введение. Теория функционалов Ляпунова — Красовского интенсивно развивается начиная с середины XX в. [1]. Так, для линейных стационарных систем с запаздыванием в статье [2] построены так называемые функционалы полного типа: их производная вдоль решений системы совпадает с заранее заданным отрицательно-определенным функционалом общего вида, а положительная определенность является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости. Алгоритм построения таких функционалов для различных классов линейных систем, в том числе для систем с распределенным запаздыванием и систем нейтрального типа, а также обзор приложений, в которых они применяются, приведен в монографии В. Л. Харитонова [3]. Для нестационарных линейных систем существует огромное множество

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-71-00061).

конструкций функционалов Ляпунова — Красовского, которые приводят к достаточным условиям устойчивости в терминах линейных матричных неравенств (см., например, [4]). Некоторые из таких условий хотя и являются лишь достаточными, но достаточно эффективны на практике и с точки зрения проверки проще «точных» условий, основанных на функционалах полного типа.

В недавних работах ([5, 6], см. также [7]) функционалы полного типа были построены и для систем с запаздыванием, правые части которых представляют собой однородные функции порядка, строго большего единицы. Такие системы обладают интересным свойством: из асимптотической устойчивости соответствующей однородной системы с нулевыми запаздываниями следует асимптотическая устойчивость нулевого решения дифференциально-разностной системы при любых непрерывных и ограниченных запаздываниях [8–10]. Этот результат, полученный с помощью метода функций Ляпунова и теоремы Разумихина, допускает обобщение на некоторые классы систем, правые части которых содержат нестационарные возмущения порядков, меньших или равных порядкам однородности правых частей [8], а также на некоторые классы сложных систем с запаздыванием [9]. При этом построение функционалов Ляпунова — Красовского для однородных систем, с одной стороны, подтверждает результаты, полученные методом Разумихина, а с другой — открывает возможности для решения широкого класса прикладных задач, в которых традиционно применяются функционалы. В частности, необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения для однородных систем с порядками однородности правых частей, строго бо́льшими единицы, сформулированы и доказаны в терминах функционалов полного типа в работе [11]. Обобщения функционалов Ляпунова — Красовского на класс обобщенно-однородных систем с запаздыванием получены в статьях [12, 13]. В [14] приведены некоторые полезные свойства обобщенно-однородных дифференциально-разностных систем.

В настоящей работе получено нетривиальное обобщение конструкций функционалов Ляпунова — Красовского, предложенных в [6], на класс однородных систем с несколькими сосредоточенными запаздываниями, порядок однородности правых частей которых строго больше единицы. Как и ранее, предполагается, что соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой запаздывания положены равными нулю, асимптотически устойчива. Показано, что построенные функционалы удовлетворяют условиям классической теоремы Красовского (см., например, [3, теорема 1.8 на с. 22]), а также могут быть применены к решению задачи об оценке области притяжения нулевого решения и к построению оценок решений однородных систем.

2. Постановка задачи и предварительные сведения. Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений с несколькими сосредоточенными запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h_1), \ldots, x(t-h_m)), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$ — постоянные запаздывания, а начальные функции выбираются из пространства непрерывных функций $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Пусть вектор-функция $f(\mathrm{y}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_m)$, $y_j \in \mathbb{R}^n$, непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по своим аргументам и является положительно однородной функцией порядка $\mu > 1$, т. е.

$$f(cy_0, cy_1, \ldots, cy_m) = c^{\mu} f(y_0, y_1, \ldots, y_m) \quad \forall\, c > 0, \quad \forall\, y_j \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что из однородности функции f следует существование нулевого решения у системы (1). Предположим также, что существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_j}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Системе (1) соответствует следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой все запаздывания положены равными нулю:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t), \ldots, x(t)). \tag{2}$$

Пусть система (2) асимптотически устойчива. Известно [8, 10], что в этом случае нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво при любых значениях запаздываний. В работе [5] для системы вида (1) доказаны необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в терминах функционалов Ляпунова — Красовского. Целью данной работы является построение в явном виде функционалов, пригодных для анализа устойчивости решений системы (1).

Известно [15, 16], что если система (2) асимптотически устойчива, то для нее существует положительно однородная порядка $\gamma \geqslant 2$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T f(y, y, \ldots, y) = -w(y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $w(y)$ — положительно определенная и положительно однородная порядка $\gamma + \mu - 1$ функция. Поэтому существует константа $\mathrm{w} > 0$ такая, что

$$w(y) \geqslant \mathrm{w}\|y\|^{\gamma+\mu-1}.$$

В силу однородности функция $V(y)$ и ее производные первого и второго порядков допускают оценки следующего вида:

$$k_0\|y\|^\gamma \leqslant V(y) \leqslant k_1\|y\|^\gamma, \quad \left\|\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right\| \leqslant k_2\|y\|^{\gamma-1}, \quad \left\|\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2}\right\| \leqslant k_3\|y\|^{\gamma-2}, \tag{3}$$

где $k_j > 0$, $j = \overline{0, 3}$. А в силу однородности функции f существуют значения $p_j > 0$ и $q_{jk} > 0$ такие, что

$$\|f(\mathrm{y})\| \leqslant \sum_{j=0}^{m} p_j\|y_j\|^\mu, \quad \left\|\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_j}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} q_{jk}\|y_k\|^{\mu-1}. \tag{4}$$

3. Построение функционалов Ляпунова — Красовского. На основе конструкций функционалов, предложенных в работе [6] (см. также [7]), построим функционал

$$v(\varphi) = V(\varphi(0)) + \left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T\Bigg|_{y=\varphi(0)} g(\varphi) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} (\mathrm{w}_1^{(j)} + (h_j + \theta)\mathrm{w}_2^{(j)})\|\varphi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta, \tag{5}$$

в котором $\mathrm{w}_1^{(j)}, \mathrm{w}_2^{(j)} > 0$, $j = \overline{1,m}$, таковы, что $\mathrm{w}_0 = \mathrm{w} - \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\mathrm{w}_1^{(j)} + h_j \mathrm{w}_2^{(j)}\right) > 0$, а функционал $g(\varphi)$ имеет вид

$$g(\varphi) = \int\limits_{-h_m}^{0} f(\mathrm{y})\Big|_{\substack{y_j = \varphi(0),\ j = \overline{0, m-1} \\ y_m = \varphi(\theta)}} d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{-h_k}^{0} \left(f(\mathrm{y})\Big|_{\substack{y_j = \varphi(0),\ j = \overline{0, k-1} \\ y_j = \varphi(\theta + h_k - h_j),\ j = \overline{k, m}}} - f(\mathrm{y})\Big|_{\substack{y_j = \varphi(0),\ j = \overline{0, k} \\ y_j = \varphi(\theta + h_k - h_j),\ j = \overline{k+1, m}}} \right) d\theta.$$

Начнем со вспомогательной леммы, которая потребуется при оценке функционала (5) и его производной вдоль решений системы (1).

Лемма 1. *Функционал $g(\varphi)$ допускает оценку*

$$g(\varphi) \leqslant g_0 \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{k=1}^{m} g_k \int\limits_{-h_k}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} d\theta, \tag{6}$$

где

$$g_0 = 2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} h_k p_j + \sum_{k=1}^{m-1} h_k p_k + h_m \sum_{j=0}^{m-1} p_j, \quad g_k = (2k-1) p_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся первым из неравенств (4):

$$g(\varphi) \leqslant \int\limits_{-h_m}^{0} \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j \|\varphi(0)\|^{\mu} + p_m \|\varphi(\theta)\|^{\mu} \right) d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{-h_k}^{0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} p_j \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{j=k}^{m} p_j \|\varphi(\theta + h_k - h_j)\|^{\mu} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k} p_j \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{j=k+1}^{m} p_j \|\varphi(\theta + h_k - h_j)\|^{\mu} \right) d\theta \leqslant$$

$$\leqslant g_0 \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{k=1}^{m} p_k \int\limits_{-h_k}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} d\theta + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^{m} p_j \int\limits_{-h_k}^{0} \|\varphi(\theta + h_k - h_j)\|^{\mu} d\theta.$$

Преобразуем последнюю сумму таким образом:

$$2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^{m} p_j \int\limits_{-h_k}^{0} \|\varphi(\theta + h_k - h_j)\|^{\mu} d\theta \leqslant 2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^{m} p_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(s)\|^{\mu} ds =$$

$$= 2 \sum_{j=2}^{m} \sum_{k=1}^{j-1} p_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(s)\|^{\mu} ds = 2 \sum_{j=1}^{m} (j-1) p_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(s)\|^{\mu} ds.$$

Объединив слагаемые, получим требуемую оценку. □

Лемма 2. *Производная функционала* (5) *вдоль решений системы* (1) *допускает следующую оценку:*

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\sum_{j=0}^{m} \beta_j \|x(t-h_j)\|^{\gamma+\mu-1} - \sum_{j=1}^{m} \beta_{m+j} \int\limits_{-h_j}^{0} \|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta$$

в окрестности $\|x_t\|_h \leqslant H_1$, *где*

$$\beta_0 = \mathrm{w}_0 - p\chi H_1^{\mu-1}, \quad \chi = k_3 \mathrm{w}\tilde{g} + k_2 \mathrm{w}\tilde{\lambda},$$
$$\beta_j = \mathrm{w}_1^{(j)} - p_j \chi H_1^{\mu-1}, \quad \beta_{m+j} = \mathrm{w}_2^{(j)} - p(k_3 g_j + k_2 \lambda_j) H_1^{\mu-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Константа H_1 *здесь выбрана из условия положительности величин* β_j, $j = \overline{0, 2m}$, *а выражения для* p, $\mathrm{w}\tilde{g}$, $\mathrm{w}\tilde{\lambda}$, λ_j, $j = \overline{0, m}$, *введены при доказательстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем последовательно каждое из слагаемых функционала. Для первого слагаемого имеем выражение

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{dV(x(t))}{dt} = \left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T \Bigg|_{y=x(t)} f(x(t), x(t-h_1), \ldots, x(t-h_m)).$$

Далее, производная второго слагаемого равна

$$\frac{dI_2}{dt} = \left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T \Bigg|_{y=x(t)} \frac{dg(x_t)}{dt} + \Lambda_1,$$

$$\Lambda_1 = f^T(x(t), x(t-h_1), \ldots, x(t-h_m)) \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} \Bigg|_{y=x(t)} g(x_t).$$

Запишем функционал $g(\varphi)$ вдоль решений системы (1):

$$g(x_t) = \int\limits_{t-h_m}^{t} f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, m-1} \\ y_m = x(s)}} ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{t-h_k}^{t} \left(f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, k-1} \\ y_j = x(s+h_k-h_j),\ j = \overline{k, m}}} - f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, k} \\ y_j = x(s+h_k-h_j),\ j = \overline{k+1, m}}} \right) ds$$

и вычислим его производную:

$$\frac{dg(x_t)}{dt} = f(x(t), x(t), \ldots, x(t)) - f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, m-1} \\ y_m = x(t-h_m)}} +$$
$$+ \int\limits_{t-h_m}^{t} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l} \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, m-1} \\ y_m = x(s)}} ds\, f(x(t), x(t-h_1), \ldots, x(t-h_m)) -$$
$$- \sum_{k=1}^{m-1} \left(f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, k-1} \\ y_j = x(t-h_j),\ j = \overline{k, m}}} - f(\mathrm{y}) \Bigg|_{\substack{y_j = x(t),\ j = \overline{0, k} \\ y_j = x(t-h_j),\ j = \overline{k+1, m}}} \right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t-h_k}^{t}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j\,=\,x(t),\; j\,=\,\overline{0,k-1}\\ y_j\,=\,x(s+h_k-h_j),\; j\,=\,\overline{k,m}}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=0}^{k}\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j\,=\,x(t),\; j\,=\,\overline{0,k}\\ y_j\,=\,x(s+h_k-h_j),\; j\,=\,\overline{k+1,m}}}\right)ds\, f(x(t),x(t-h_1),\ldots,x(t-h_m))=$$

$$=f(x(t),x(t),\ldots,x(t))-f(x(t),x(t-h_1),\ldots,x(t-h_m))+\Lambda_2,$$

где

$$\Lambda_2=\left(\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t-h_k}^{t}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j\,=\,x(t),\; j\,=\,\overline{0,k-1}\\ y_j\,=\,x(s+h_k-h_j),\; j\,=\,\overline{k,m}}}ds-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t-h_k}^{t}\sum_{l=0}^{k}\frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j\,=\,x(t),\; j\,=\,\overline{0,k}\\ y_j\,=\,x(s+h_k-h_j),\; j\,=\,\overline{k+1,m}}}ds\right)f(x(t),x(t-h_1),\ldots,x(t-h_m)).$$

Наконец, производная третьего слагаемого функционала (5) вдоль решений системы (1) равна

$$\frac{dI_3}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-h_j}^{t}(\mathrm{w}_1^{(j)}+(h_j+s-t)\mathrm{w}_2^{(j)})\|x(s)\|^{\gamma+\mu-1}ds=\sum_{j=1}^{m}\left(\mathrm{w}_1^{(j)}+h_j\mathrm{w}_2^{(j)}\right)\times$$

$$\times\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1}-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{w}_1^{(j)}\|x(t-h_j)\|^{\gamma+\mu-1}-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{w}_2^{(j)}\int\limits_{-h_j}^{0}\|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1}d\theta.$$

Окончательно, собрав все слагаемые вместе, получим, что

$$\frac{dv(x_t)}{dt}=-w(x(t))+\Lambda_1+\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T\Bigg|_{y=x(t)}\Lambda_2+\frac{dI_3}{dt}\leqslant$$

$$\leqslant-\mathrm{w}_0\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1}-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{w}_1^{(j)}\|x(t-h_j)\|^{\gamma+\mu-1}-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{w}_2^{(j)}\int\limits_{-h_j}^{0}\|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1}d\theta+$$

$$+\Lambda_1+\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^T\Bigg|_{y=x(t)}\Lambda_2. \qquad (7)$$

Оценим знаконеопределенные слагаемые в формуле (7). Для слагаемого Λ_1 с учетом оценок (3), (4) и (6) имеем неравенство

$$\Lambda_1\leqslant k_3\|x(t)\|^{\gamma-2}\left(\sum_{j=0}^{m}p_j\|x(t-h_j)\|^{\mu}\right)\left(g_0\|x(t)\|^{\mu}+\sum_{k=1}^{m}g_k\int\limits_{-h_k}^{0}\|x(t+\theta)\|^{\mu}d\theta\right)\leqslant$$

$$\leqslant k_3\left(p\tilde{g}\|x(t)\|^{\gamma+2\mu-2}+\tilde{g}\sum_{j=1}^{m}p_j\|x(t-h_j)\|^{\gamma+2\mu-2}+p\sum_{k=1}^{m}g_k\int\limits_{-h_k}^{0}\|x(t+\theta)\|^{\gamma+2\mu-2}d\theta\right),$$

где $p = \sum\limits_{j=0}^{m} p_j$; $\tilde{g} = g_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} g_k h_k$. Далее, введем константы

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^{m-1} h_k \left(2\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} q_{lj} + \sum_{j=0}^{k-1}(q_{kj} + q_{jk}) + q_{kk} \right) + h_m \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} q_{lj},$$

$$\lambda_1 = q_{01}, \quad \lambda_j = (2j-1)q_{0j} + 2\sum_{l=1}^{j-1}(j-l)q_{lj}, \quad j = \overline{2,m}.$$

Обозначим норму разности матриц, содержащейся в слагаемом Λ_2, через J и оценим ее:

$$J = \left\| \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{-h_k}^{0} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j \,=\, x(t),\ j \,=\, \overline{0,k-1} \\ y_j \,=\, x(t+\theta+h_k-h_j),\ j \,=\, \overline{k,m}}} d\theta - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{-h_k}^{0} \sum_{l=0}^{k} \frac{\partial f(\mathrm{y})}{\partial y_l}\Bigg|_{\substack{y_j \,=\, x(t),\ j \,=\, \overline{0,k} \\ y_j \,=\, x(t+\theta+h_k-h_j),\ j \,=\, \overline{k+1,m}}} d\theta \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{k-1} \int\limits_{-h_k}^{0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} q_{lj}\|x(t)\|^{\mu-1} + \sum_{j=k}^{m} q_{lj}\|x(t+\theta+h_k-h_j)\|^{\mu-1} \right) d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{k} \int\limits_{-h_k}^{0} \left(\sum_{j=0}^{k} q_{lj}\|x(t)\|^{\mu-1} + \sum_{j=k+1}^{m} q_{lj}\|x(t+\theta+h_k-h_j)\|^{\mu-1} \right) d\theta =$$

$$= \lambda_0\|x(t)\|^{\mu-1} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=k}^{m} q_{lj} \int\limits_{-h_k}^{0} \|x(t+\theta+h_k-h_j)\|^{\mu-1} d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=k+1}^{m} q_{lj} \int\limits_{-h_k}^{0} \|x(t+\theta+h_k-h_j)\|^{\mu-1} d\theta.$$

В последних двух суммах воспользуемся оценкой

$$\int\limits_{-h_k}^{0} \|x(t+\theta+h_k-h_j)\|^{\mu-1} d\theta \leqslant \int\limits_{-h_j}^{0} \|x(t+s)\|^{\mu-1} ds$$

и поменяем порядок суммирования. Для этого запишем равенства

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k}^{m}\sum_{l=0}^{k-1} a_{lj} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=0}^{k-1} a_{lj} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{k=l+1}^{j} a_{lj} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{j-1}(j-l)a_{lj},$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\sum_{l=0}^{k} b_{lj} = \sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k} b_{lj} = \sum_{j=2}^{m}\left(\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=l}^{j-1} b_{lj} + \sum_{k=1}^{j-1} b_{0j} \right) =$$

$$= \sum_{j=2}^{m} \left(\sum_{l=1}^{j-1} (j-l) b_{lj} + (j-1) b_{0j} \right). \tag{8}$$

Применив равенства (8) к оценке J, получим неравенство

$$J \leqslant \lambda_0 \|x(t)\|^{\mu-1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|x(t+\theta)\|^{\mu-1} d\theta.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y} \right)^T \Bigg|_{y=x(t)} \Lambda_2 \leqslant J \cdot k_2 \|x(t)\|^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{m} p_k \|x(t-h_k)\|^{\mu} \leqslant$$

$$\leqslant k_2 \left(p\tilde{\lambda} \|x(t)\|^{\gamma+2\mu-2} + \tilde{\lambda} \sum_{j=1}^{m} p_j \|x(t-h_j)\|^{\gamma+2\mu-2} + p \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int\limits_{-h_k}^{0} \|x(t+\theta)\|^{\gamma+2\mu-2} d\theta \right),$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k h_k$. Окончательно, объединив все слагаемые, содержащиеся в производной, получим требуемую оценку. □

Лемма 3. *Функционал* (5) *допускает оценку снизу вида*

$$v(\varphi) \geqslant \alpha_0 \|\varphi(0)\|^{\gamma} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta$$

в окрестности $\|\varphi\|_h \leqslant H_2$. *Здесь*

$$\alpha_0 = k_0 - k_2 \left(g_0 H_2^{\mu-1} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{m} g_j h_j H_2^{\gamma(p-1)-p} \right),$$

$$\alpha_j = \mathrm{w}_1^{(j)} - \frac{k_2(p-1) g_j}{p} H_2^{\frac{\mu p}{p-1} - (\gamma+\mu-1)}, \quad j = \overline{1,m},$$

параметр $p > 1$ *таков, что* $\dfrac{\gamma+\mu-1}{\mu} < \dfrac{p}{p-1} < \gamma$, *а число* $H_2 > 0$ *выбрано исходя из условий* $\alpha_j > 0,\ j = \overline{0,m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для первого и третьего слагаемых функционала (5) имеем оценки

$$I_1 = V(\varphi(0)) \geqslant k_0 \|\varphi(0)\|^{\gamma}, \quad I_3 \geqslant \sum_{j=1}^{m} \mathrm{w}_1^{(j)} \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta.$$

Оценим абсолютную величину второго слагаемого сверху с помощью леммы 1:

$$|I_2| \leqslant k_2 \|\varphi(0)\|^{\gamma-1} \left(g_0 \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{j=1}^{m} g_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} d\theta \right) =$$

$$= k_2 g_0 \|\varphi(0)\|^{\gamma+\mu-1} + k_2 \sum_{j=1}^{m} g_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(0)\|^{\gamma-1} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} d\theta.$$

Воспользуемся неравенством Юнга под знаком каждого из интегралов:

$$\|\varphi(0)\|^{\gamma-1} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} \leqslant \frac{1}{p} \|\varphi(0)\|^{(\gamma-1)p} + \frac{p-1}{p} \|\varphi(\theta)\|^{\frac{\mu p}{p-1}},$$

где $p > 1$. Заметим, что в условиях леммы

$$(\gamma-1)p > \gamma, \quad \frac{\mu p}{p-1} > \gamma + \mu - 1,$$

и параметр p может быть выбран таким образом при любых значениях $\gamma \geqslant 2$ и $\mu > 1$. Тогда получим, что

$$|I_2| \leqslant k_2 g_0 \|\varphi(0)\|^{\gamma+\mu-1} + \frac{k_2}{p} \sum_{j=1}^{m} g_j h_j \|\varphi(0)\|^{(\gamma-1)p} + \frac{k_2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^{m} g_j \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\frac{\mu p}{p-1}} d\theta.$$

Окончательно, пользуясь неравенством $I_2 \geqslant -|I_2|$, находим требуемую оценку. □

Лемма 4. *Функционал* (5) *допускает оценку сверху вида*

$$v(\varphi) \leqslant k_1 \|\varphi(0)\|^{\gamma} + \delta \|\varphi\|_h^{\gamma+\mu-1},$$

где $\delta = k_2 \tilde{g} + \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\mathrm{w}_1^{(j)} + h_j \mathrm{w}_2^{(j)} \right) h_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим функционал (5) сверху:

$$v(\varphi) \leqslant k_1 \|\varphi(0)\|^{\gamma} + k_2 \|\varphi(0)\|^{\gamma-1} \left(g_0 \|\varphi(0)\|^{\mu} + \sum_{k=1}^{m} g_k \int\limits_{-h_k}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\mu} d\theta \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left(\mathrm{w}_1^{(j)} + h_j \mathrm{w}_2^{(j)} \right) \int\limits_{-h_j}^{0} \|\varphi(\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta \leqslant k_1 \|\varphi(0)\|^{\gamma} + \delta \|\varphi\|_h^{\gamma+\mu-1}, \qquad (9)$$

что и требовалось доказать. □

Леммы 2–4 означают, что функционал (5) удовлетворяет условиям классической теоремы Красовского (см., например, [3, теорема 1.8 на с. 22]), а значит, он может быть использован для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если система* (2) *асимптотически устойчива, то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво при любых значениях запаздываний* $h_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, m}$.

Замечание. Теорема 1 для однородных систем с одним запаздыванием доказана в работе [9] с помощью метода функций Ляпунова—Разумихина. В статье [10] упоминается возможность обобщения результата на случай систем с несколькими запаздываниями вида (1). Поэтому цель настоящего исследования заключается не столько в доказательстве теоремы 1, сколько в построении функционалов Ляпунова—Красовского для систем вида (1), которые могут быть применены при решении широкого класса прикладных задач.

4. Оценка области притяжения. Применим функционал (5) к задаче об оценке области притяжения нулевого решения системы (1). Используемый подход является классическим (см., например, работы [17, 18]), при этом применение функционала вида (5) позволяет построить конструктивную оценку.

Теорема 2. *Пусть система* (2) *асимптотически устойчива,* $H = \min\{H_1, H_2\}$, *а* Δ *— положительный корень уравнения*

$$k_1\Delta^\gamma + \delta\Delta^{\gamma+\mu-1} = \alpha_0 H^\gamma. \tag{10}$$

Тогда множество

$$\Omega = \left\{\varphi \in C_{[-h,0]} \,\middle|\, \|\varphi\|_h < \Delta\right\} \subset \mathcal{A} = \left\{\varphi \in C_{[-h,0]} \,\middle|\, x(t,\varphi) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right\}.$$

Другими словами, множество Ω *есть оценка области притяжения* $\mathcal{A}$ *нулевого решения системы* (1).

Поскольку для построения оценки области притяжения используются оценка функционала сверху из леммы 4 и оценка снизу вида $v(\varphi) \geqslant \alpha_0\|\varphi(0)\|^\gamma$, структура которых совпадает со структурой соответствующих оценок для случая одного запаздывания, то доказательство теоремы 2 дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для систем с одним запаздыванием (см. теорему 16 и следствие 17 в работе [11]).

5. Оценки решений. Применим функционал (5) к задаче о построении оценок решений системы (1). Для этого обобщим подход, разработанный в статье [19] для систем с одним запаздыванием.

Пусть $H = \min\{H_1, H_2\}$. Из доказательства теоремы 2 следует, что $\|\varphi\|_h < \Delta$ влечет $\|x(t,\varphi)\| < H$ для всех $t \geqslant 0$. Построим оценки решений, начальные функции которых удовлетворяют условию $\|\varphi\|_h < \Delta$. Применив неравенство Юнга к оценке (9), получим, что функционал (5) допускает оценку сверху вида

$$v(x_t) \leqslant \omega\left(\|x(t)\|^\gamma + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \|x(t+\theta)\|^\gamma d\theta\right), \quad \omega > 0, \tag{11}$$

вдоль таких решений. Кроме того, из леммы 2 следует существование $\beta > 0$ такого, что

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\beta\left(\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta\right). \tag{12}$$

Для того чтобы связать значение самого функционала и его производной вдоль решений системы, удовлетворяющих условию $\|x_t\|_h < H$, $t \geqslant 0$, воспользуемся неравенством

$$\left(\sum_{j=0}^m a_j\right)^l \leqslant (m+1)^{l-1}\sum_{j=0}^m a_j^l, \quad l = \frac{\gamma+\mu-1}{\gamma},$$

и неравенством Гёльдера

$$\left(\int_{-h_j}^0 \|x(t+\theta)\|^\gamma d\theta\right)^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} \leqslant h_j^{\frac{\mu-1}{\gamma}} \int_{-h_j}^0 \|x(t+\theta)\|^{\gamma+\mu-1} d\theta.$$

Окончательно, объединив оценки (11) и (12), находим, что

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\zeta v^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}(x_t),$$

где

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}} L} > 0, \quad L = \Big((m+1)\max\{1, h\}\Big)^{(\mu-1)/\gamma}.$$

Далее, повторяя рассуждения статьи [19], получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть система* (2) *асимптотически устойчива,* $H = \min\{H_1, H_2\}$, *а* Δ *— положительный корень уравнения* (10). *Тогда для решений системы* (1), *начальные функции которых удовлетворяют условию* $\|\varphi\|_h < \Delta$, *справедлива оценка*

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \frac{A\|\varphi\|_h}{\Big(1 + B\|\varphi\|_h^{\mu-1} t\Big)^{\frac{1}{\mu-1}}}, \quad t \geqslant 0.$$

Здесь

$$A = \frac{H}{\Delta}, \quad B = \frac{(\mu-1)\beta}{\gamma\omega L}\left(\frac{\alpha_0}{\omega}\right)^{\frac{\mu-1}{\gamma}}\left(\frac{H}{\Delta}\right)^{\mu-1}.$$

6. Заключение. В работе предложены явные конструкции функционалов Ляпунова — Красовского для однородных систем с несколькими сосредоточенными запаздываниями и порядком однородности правых частей, строго бо́льшим единицы. Построенные функционалы применяются к доказательству асимптотической устойчивости нулевого решения при любых значениях запаздываний, к оценке области притяжения асимптотически устойчивого нулевого решения, а также к построению оценок решений однородных систем.

Литература

1. *Красовский Н. Н.* О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 3. С. 315–327.

2. *Kharitonov V. L., Zhabko A. P.* Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.

3. *Kharitonov V. L.* Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

4. *Niculescu S.-I.* Delay effects on stability: A robust control approach. Heidelberg: Springer, 2001. 383 p.

5. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Жабко И. А.* Оценка области асимптотической устойчивости решений однородных дифференциально-разностных систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 55. № 1. С. 4–7.

6. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Печерский В. С.* Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Труды 8-й Междунар. конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Воронеж: Научная книга, 2015. С. 5–8.

7. *Zhabko A. P., Alexandrova I. V.* Lyapunov direct method for homogeneous time delay systems // Proceedings of 15th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Sinaia, Romania, 2019. Vol. 52. N 18. P. 79–84.

8. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 3. С. 393–403.

9. *Aleksandrov A. Yu., Hu G.-D., Zhabko A. P.* Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. Vol. 59. N 8. P. 2209–2214.

10. *Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P.* Delay-independent stability of homogeneous systems // Applied Mathematics Letters. 2014. Vol. 34. P. 43–50.

11. *Zhabko A. P., Alexandrova I. V.* Complete type functionals for homogeneous time delay systems // Automatica. 2021. Vol. 125. Art. no. 109456. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109456

12. *Efimov D., Aleksandrov A.* Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov — Krasovskii functionals // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020. P. 1–17. https://doi.org/10.1002/rnc.5115

13. *Portilla G., Alexandrova I. V., Mondié S.* Estimates for weighted homogeneous delay systems: A Lyapunov — Krasovskii — Razumikhin approach // American Control Conference (ACC'2021) (accepted for publication).

14. *Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J. P.* Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. Vol. 61. N 1. P. 210–215.

15. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.

16. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19. P. 467–473.

17. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 211 с.

18. *Melchor-Aguilar D., Niculescu S.-I.* Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems // IMA Journal of Mathematical Control Information. 2007. Vol. 24. N 4. P. 523–550.

19. *Portilla G., Alexandrova I. V., Mondié S., Zhabko A. P.* Estimates for solutions of homogeneous time-delay systems: Comparison of Lyapunov — Krasovskii and Lyapunov — Razumikhin techniques // International Journal of Control (submitted for publication).

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2021 г.
Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

Контактная информация:

Александрова Ирина Васильевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; i.v.aleksandrova@spbu.ru

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.zhabko@spbu.ru

Lyapunov — Krasovskii functionals for homogeneous systems with multiple delays*

I. V. Alexandrova, A. P. Zhabko

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Alexandrova I. V., Zhabko A. P. Lyapunov — Krasovskii functionals for homogeneous systems with multiple delays. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 183–195. (In Russian)
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.208

In this article, explicit constructions of Lyapunov — Krasovskii functionals are proposed for homogeneous systems with multiple constant delays and homogeneity degree of the right-hand sides strictly greater than one. The constructions are based on the Lyapunov functions suitable for the analysis of corresponding systems with all delays equal to zero. The letter systems are assumed to be asymptotically stable. It is proved that the proposed functionals satisfy the conditions of the Krasovskii theorem, and hence it allows us to establish the asymptotic stability of the trivial solution for arbitrary values of delays. The functionals are applied to the estimation of the attraction region of the trivial solution.

Keywords: time delay systems, homogeneous systems, asymptotic stability, Lyapunov — Krasovskii functionals, attraction region.

References

1. Krasovskii N. N. O primenenii vtorogo metoda Lyapunova dlya uravnenij s zapazdyvaniyami vremeni [On the second Lyapunov method application to the equations with delay]. *Prikladnaya*

* This work was supported by the Russian Science Foundation (project N 19-71-00061).

matematika i mechanika [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1956, vol. 20, no. 3, pp. 315–327. (In Russian)

2. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 2003, vol. 39, pp. 15–20.

3. Kharitonov V. L. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices.* Basel, Birkhäuser Publ., 2013, 311 p.

4. Niculescu S.-I. *Delay effects on stability: A robust control approach.* Heidelberg, Springer Publ., 2001, 383 p.

5. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P., Zhabko I. A. Ocenka oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti reshenij odnorodnyh differencial'no-raznostnyh sistem [Estimation of the asymptotic stability domains for solutions of homogeneous differential-difference systems]. *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii* [*Control Systems and Information Technologies*], 2014, vol. 55, no. 1, pp. 4–7. (In Russian)

6. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P., Pecherskii V. S. Funkcionaly polnogo tipa dlya nekotoryh klassov odnorodnyh differencial'no-raznostnyh sistem [Complete type functionals for some classes of homogeneous differential-difference systems]. *Proceedings of 8th International Conference "Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technology".* Voronezh, Science Book Publ. House, 2015, pp. 5–8. (In Russian)

7. Zhabko A. P., Alexandrova I. V. Lyapunov direct method for homogeneous time delay systems. *Proceedings of 15th IFAC Workshop on Time Delay Systems.* Sinaia, Romania, 2019, vol. 52, no. 18, pp. 79–84.

8. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob assimptoticheskoy ustoichivosti resheniy nelineinyh system s zapazdyvaniem [On the asymptotic stability of solutions of nonlinear systems with delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 393–403. (In Russian)

9. Aleksandrov A. Yu., Hu G.-D., Zhabko A. P. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2014, vol. 59, no. 8, pp. 2209–2214.

10. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Delay-independent stability of homogeneous systems. *Applied Mathematics Letters*, 2014, vol. 34, pp. 43–50.

11. Zhabko A. P., Alexandrova I. V. Complete type functionals for homogeneous time delay systems. *Automatica*, 2021, vol. 125, art. no. 109456. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109456

12. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov — Krasovskii functionals. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, pp. 1–17. https://doi.org/10.1002/rnc.5115

13. Portilla G., Alexandrova I. V., Mondié S. Estimates for weighted homogeneous delay systems: A Lyapunov — Krasovskii — Razumikhin approach. *American Control Conference (ACC'2021)* (accepted for publication).

14. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J. P. Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 210–215.

15. Zubov V. I. *Ustojchivost' dvizheniya* [*Stability of motion*]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1984, 232 p. (In Russian)

16. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, pp. 467–473.

17. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya* [*Some problems of the stability theory of motion*]. Moscow, Fis.-Mat. Lit. Publ., 1959, 211 p. (In Russian)

18. Melchor-Aguilar D., Niculescu S.-I. Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems. *IMA Journal of Mathematical Control Information*, 2007, vol. 24, no. 4, pp. 523–550.

19. Portilla G., Alexandrova I. V., Mondié S., Zhabko A. P. Estimates for solutions of homogeneous time-delay systems: Comparison of Lyapunov — Krasovskii and Lyapunov — Razumikhin techniques. *International Journal of Control* (submitted for publication).

Received: February 14, 2021.
Accepted: April 05, 2021.

Authors' information:

Irina V. Alexandrova — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; i.v.aleksandrova@spbu.ru

Alexey P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.zhabko@spbu.ru