

ИНФОРМАТИКА

УДК 531, 51-7
MSC 92C10, 70E55

Исследование частотных свойств стандартного линейного тела

В. П. Трегубов, Н. К. Егорова

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Трегубов В. П., Егорова Н. К.* Исследование частотных свойств стандартного линейного тела // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 166–173.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.206>

Известно, что модель Кельвина—Фойгта не описывает релаксацию напряжения, которая наблюдается наряду с упругими свойствами у многих полимеров и биоматериалов. В связи с этим для описания таких материалов используется модель стандартного линейного тела, исследования которого ограничивались в основном изучением его реакции на мгновенно приложенную нагрузку, а также определением времени и характера релаксации напряжения. В то же время частотные свойства стандартного линейного тела не определялись. В этой связи был проведен их анализ, что предоставило возможность описать поведение стандартного линейного тела при вибрационном воздействии. На основе уравнения движения была построена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) и выявлена ее особенность, заключающаяся в том, что возрастание коэффициента демпфирования приводит к уменьшению максимального значения АЧХ лишь до некоторой величины, большей единицы. Дальнейшее увеличение коэффициента демпфирования вызывает рост максимума АЧХ вплоть до бесконечности при частоте, которую тоже следует считать резонансной. Таким образом, АЧХ стандартного линейного тела всегда имеет максимум. Последующее возрастание коэффициента демпфирования приводит к стремлению максимума АЧХ к нулю на бесконечности.

Ключевые слова: стандартное линейное тело, амплитудно-частотная характеристика, параметры модели, единственность значений параметров.

1. Введение. Для описания свойств вязкоупругих материалов часто используется модель Кельвина—Фойгта. Однако она не учитывает релаксацию напряжения, которая наблюдается наряду с упругими свойствами у многих полимеров, а также у биоматериалов, таких, например, как мышцы, сухожилия, кровеносные сосуды, легочная ткань и др. Последнее особенно важно при решении задач биомеханики.

В этих случаях в качестве модели применяется трехкомпонентная комбинация элементов, которая состоит из параллельно соединенных пружины и демпфера, с по-

следовательно прикрепленной к ним пружиной (рис. 1). Такую комбинацию называют стандартным линейным телом или моделью Зенера. Это самая простая модель, которая предсказывает (учитывает, описывает) как упругое сопротивление, так и релаксацию напряжения. Она намного проще по сравнению с другими более общими моделями, такими как обобщенная модель Максвелла и вязкоупругая модель дробного порядка [1].

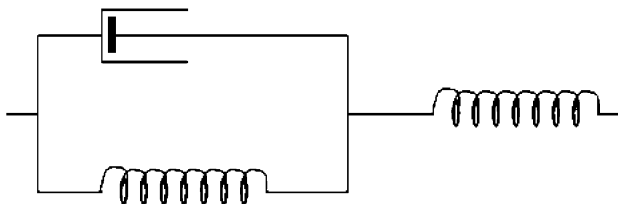


Рис. 1. Модель стандартного линейного тела

Тем не менее модель стандартного линейного тела весьма полезна для анализа вязкоупругого поведения многих биоматериалов, в том числе поликапролактоновых каркасов [2] и гидрогелей [3–6]. В работе [7] трехкомпонентная модель использовалась при моделировании стенки кровеносного сосуда, а в работе [8] были приведены экспериментальные подтверждения того, что поведение материала межпозвоночного диска тоже соответствует этой модели. Отмечалось, что, поскольку такая модель содержит только три параметра, результаты, полученные с ее помощью, легче интерпретировать [9].

Учет упругого сопротивления деформации вместе с релаксацией напряжения нужен и при создании искусственных заменителей живых тканей, в том числе при создании каркасов для регенерации искусственных тканей, а также для замены патологических естественных тканей [10–12]. При разработке материалов для имплантатов необходимо также обеспечить их надлежащими механическими свойствами для поддержки, стабилизации, достаточной гибкости и удовлетворительной функции [13]. Способность точно характеризовать и изменять механические свойства биоматериалов может ускорить их клиническое применение и дать возможность разрабатывать новые биоматериалы, которые можно будет использовать в медицине [14, 15].

Следует упомянуть работу [16], в которой рассматривается применение трехкомпонентной модели для описания процессов, происходящих в суставном хряще во время удара при падении. В [17] эта модель использовалась для определения входного механического импеданса локтевой кости, окруженной мягкой тканью. В [18] была предложена альтернативная форма стандартной линейной модели твердого тела, которая позволяет непосредственно сравнить экспериментальные результаты с теоретическими параметрами. В статье [19] свойства стандартного линейного тела изучались с точки зрения нецелого числа степеней свободы.

В целом экспериментальные и теоретические исследования динамики стандартного линейного тела проводились в основном для оценки его реакции на мгновенно приложенную нагрузку, а также времени и характера релаксации напряжения. В то же время частотные свойства стандартного линейного тела оставались не исследованными. В этой связи и была поставлена задача изучить его поведение при вибрационном воздействии.

2. Исследование амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) стандартного линейного тела. Для записи уравнения движения стандартного линей-

ного тела на неподвижном основании нужно его трехкомпонентную модель (рис. 1) дополнить абсолютно твердым телом с массой, равной массе моделируемого объекта (рис. 2, а). Движение этой системы в отсутствии поля силы тяжести описывается системой двух уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x}_1 - c_1x_1, \\ b\dot{x}_1 + c_1x_1 &= c_2x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где x — перемещение массы m относительно неподвижного основания; c_1 и c_2 — жесткости пружин; b — коэффициент демпфирования; x_1 и x_2 — перемещение массы m за счет деформации каждой из пружин, т. е. $x = x_1 + x_2$.

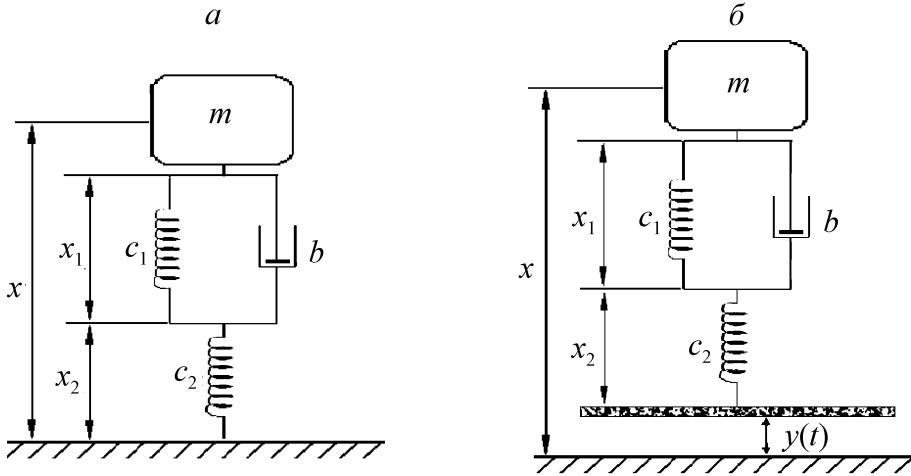


Рис. 2. Стандартное линейное тело

а — на неподвижном основании; б — на основании, подверженном действию вибрации $y(t)$.

Система уравнений (1) сводится к одному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$a\ddot{x} + d\dot{x} + bx + c_1x = 0,$$

в котором

$$a = \frac{mb}{c_2}, \quad d = \frac{m(c_1 + c_2)}{c_2}.$$

Для исследования частотных свойств стандартного линейного тела нужно поместить модель, изображенную на рис. 2, а, на основание, колеблющееся по закону $y(t) = Y \sin \omega t$, как показано на рис. 2, б. Тогда уравнение движения этой системы будет описываться уравнением

$$a\ddot{x} + d\dot{x} + bx + c_1x = b\dot{y} + c_1y, \quad (2)$$

где $x = x_1 + x_2 + y$.

Частное решение уравнения (2) для вынужденных колебаний имеет вид

$$x = D \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (3)$$

здесь

$$D^2 = A^2 + B^2. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах в левой и правой частях уравнения, для определения A и B , зависящих от ω , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}(c_1 - d\omega^2)A - (b\omega - a\omega^3)B &= c_1Y, \\ (b\omega - a\omega^3)A + (c_1 - d\omega^2)B &= b\omega Y.\end{aligned}\tag{5}$$

Решая систему (5) относительно A и B , находим, что

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta},\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_A &= (c_1(c_1 - d\omega^2) + b\omega(b\omega - a\omega^3))Y, \\ \Delta_B &= (b\omega(c_1 - d\omega^2) - c_1(b\omega - a\omega^3))Y, \\ \Delta &= (b\omega - a\omega^3)^2 + (c_1 - d\omega^2)^2.\end{aligned}$$

Подставив (6) в (4), для безразмерной АЧХ рассматриваемой механической системы будем иметь выражение

$$H(\omega) = \frac{D(\omega)}{Y(\omega)} = \sqrt{\frac{b^2\omega^2 + c_1^2}{a^2\omega^6 + (d^2 - 2ab)\omega^4 + (b^2 - 2c_1d)\omega^2 + c_1^2}}.\tag{7}$$

В отсутствие демпфирования, т. е. при $b = 0$, оно примет следующий вид:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{c_1^2}{d^2\omega^4 - 2c_1d\omega^2 + c_1^2}}.$$

Тогда значение резонансной частоты для описываемой системы равно

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{c_1c_2}{m(c_1 + c_2)}}.$$

В то же время можно убедиться, что при наличии трения повышение коэффициента демпфирования приводит к уменьшению максимального значения АЧХ лишь до некоторой величины, большей единицы, при $\omega = \omega^*$. Дальнейшее увеличение коэффициента демпфирования вызывает возрастание максимума АЧХ вплоть до бесконечности при частоте

$$\omega_{\text{res}}^* = \sqrt{\frac{c_2}{m}},$$

которую также следует считать резонансной. Таким образом, АЧХ стандартного линейного тела всегда имеет максимум, который больше единицы. Последующий рост коэффициента демпфирования приводит к стремлению максимума АЧХ к нулю на бесконечности, как показано на рис. 3.

Эта особенность АЧХ стандартного линейного тела важна для многих биологических материалов, у которых коэффициент демпфирования высок настолько, что собственные колебания практически отсутствуют, а амплитуда вынужденных колебаний при частотах выше ω^* может достигать больших значений. То же можно сказать и о материалах — заместителях живых тканей.

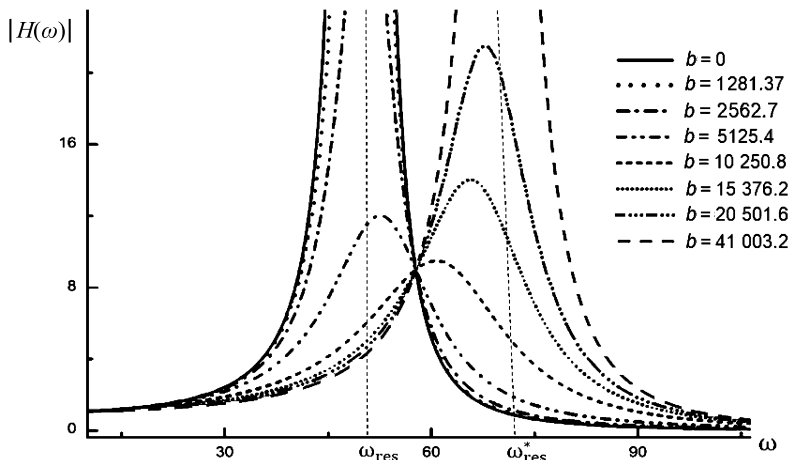


Рис. 3. Изменение АЧХ с возрастанием коэффициента демпфирования b

3. Определение параметров модели стандартного линейного тела. Непосредственное нахождение значений параметров модели стандартного линейного тела невозможно, поскольку моделируемые материалы не содержат в своей структуре элементов модели в виде пружин и демпфера. Косвенное нахождение параметров модели возможно с помощью АЧХ, приведенной в формуле (7). С этой целью нужно экспериментально получить АЧХ моделируемого материала, для чего такой материал следует поместить на вибростенд и произвести измерение амплитуды его колебаний в необходимом диапазоне частот. Затем нужно подобрать значения параметров модели таким образом, чтобы АЧХ модели была как можно ближе к АЧХ самого материала. При этом следует убедиться, что полученный набор значений параметров является единственным.

С данной целью, обозначив в знаменателе формулы (7) коэффициент при ω^4 через f , а при ω^2 через g , можно записать уравнение

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{b^2\omega^2 + c_1^2}{a^2\omega^6 + f\omega^4 + g\omega^2 + c_1^2}}.$$

Далее одним из известных методов поиска, например методом ЛП_т, найдем те значения коэффициентов, при которых эта АЧХ будет максимально близка к экспериментально полученной АЧХ. Тем самым коэффициенты a , f , g , c_1 и b будут определены, а m известно по условию задачи. Тогда, вспоминая, что

$$a = \frac{mb}{c_2},$$

получим уравнение

$$c_2 = \frac{mb}{a}.$$

После этого можно сначала вычислить d :

$$d = \frac{m(c_1 + c_2)}{c_2},$$

а затем f и g :

$$f = d^2 - 2ab, \quad g = b^2 - 2c_1d.$$

В результате можно заключить, что значения всех параметров модели стандартного линейного тела определяются единственным образом.

4. Заключение. В статье проведено изучение частотных свойств стандартного линейного тела. На основании уравнений его движения под действием вибрации построена АЧХ, у которой выделен ряд особенностей. Построен алгоритм определения значений параметров модели стандартного линейного тела, а также показано, что найденный набор значений является единственным.

Литература

1. Xiao R., Sun H., Chen W. An equivalence between generalized maxwell model and fractional zener model // *Mechanics of Materials*. 2016. Vol. 100. P. 148–153.
2. Sethuraman V., Makornkaewkeyoon K., Khalf A., Madhally S. V. Influence of scaffold forming techniques on stress relaxation behavior of polycaprolactone scaffolds // *Journal of Applied Polymer Science*. 2013. Vol. 130. P. 4237–4244.
3. Shazly T. M., Artzi N., Boehning F., Edelman E. R. Viscoelastic adhesive mechanics of aldehyde-mediated soft tissue sealants // *Biomaterials*. 2008. Vol. 29. P. 4584–4591.
4. Feng Z., Seya D., Kitajima T., Kosawada T., Nakamura T., Umez M. Viscoelastic characteristics of contracted collagen gels populated with rat fibroblasts or cardiomyocytes // *Journal of Artificial Organs*. 2010. Vol. 13. P. 139–144.
5. Tirella A., Mattei G., Ahluwalia A. Strain rate viscoelastic analysis of soft and highly hydrated biomaterials // *Journal of Biomedical Materials Research*. 2014. Vol. 102. P. 3352–3360.
6. Capocardo L., Costa J., Giusti S., Buoncompagni L., Meucci S., Corti A., Mattei G., Ahluwalia A. Real-time cellular impedance monitoring and imaging of biological barriers in a dual-flow membrane bioreactor // *Biosensors and Bioelectronics*. 2019. Vol. 140. P. 1–9.
7. Kizilova N. N. Presser wave propagation in liquid field // *Fluid dynamics*. 2006. Vol. 41. N 3. P. 434–446.
8. Orne D., Liu Y. K. A mathematical model of spinal response to impact // *Journal of Biomechanics*. 1971. Vol. 4. N 1. P. 49–71.
9. Braunsman C., Proksch R., Revenko I., Schäffer T. E. Creep compliance mapping by atomic force microscopy // *Polymer*. 2014. Vol. 55. P. 219–225.
10. Petit-Zeman S. Regenerative medicine // *Nature Biotechnology*. 2001. Vol. 19. P. 201–206.
11. O'Brien F. J. Biomaterials & scaffolds for tissue engineering // *Materials Today*. 2011. Vol. 14. P. 88–95. [https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(11\)70058-X](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(11)70058-X)
12. Smith B. D., Grande D. A. The current state of scaffolds for musculoskeletal regenerative applications // *Nature Reviews Rheumatology*. 2015. Vol. 11. P. 213–222.
13. Agarwal R., Garcia A. J. Biomaterial strategies for engineering implants for enhanced osseointegration and bone repair // *Advanced Drug Delivery Reviews*. 2015. Vol. 94. P. 53–62.
14. Deng C. X., Hong X., Stegemann J. P. Ultrasound imaging techniques for spatiotemporal characterization of composition, microstructure, and mechanical properties in tissue engineering // *Tissue Engineering. Pt B. Reviews*. 2015. Vol. 22. P. 311–321.
15. Hong X., Annamalai R. T., Kemerer T. S., Deng C. X., Stegemann J. P. Multimode ultrasound viscoelastography for three-dimensional interrogation of microscale mechanical properties in heterogeneous biomaterials // *Biomaterials*. 2018. Vol. 178. P. 11–22.
16. Argatov I. I. Mathematical modeling of linear viscoelastic impact: Application to drop impact testing of articular cartilage // *Tribology International*. 2013. Vol. 63. P. 213–225.
17. Thompson G. T. In vivo determination of mechanical properties of the human ulna by means of mechanical impedance tests: Experimental results and improved mathematical model // *Medical and Biological Engineering*. 1976. Vol. 14. P. 253–262.
18. Che Yu-Lin. Alternative form of standard linear solid model for characterizing stress relaxation and creep: Including a novel parameter for quantifying the ratio of fluids to solids of a viscoelastic solid // *Frontiers in Materials*. 2020. P. 7–11.
19. Трегубов В. П., Егорова Н. К. Моделирование биомеханических систем с нецелым числом степеней свободы // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 267–276. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.305>

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2020 г.

Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

Контактная информация:

Трегубов Владимир Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.tregubov@spbu.ru

Егорова Надежда Константиновна — аспирант; nadezhda_ego@mail.ru

Investigation of the frequency properties of a standard linear body

V. P. Tregubov, N. K. Egorova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Tregubov V. P., Egorova N. K. Investigation of the frequency properties of a standard linear body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 166–173.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.206> (In Russian)

It is known that the Kelvin–Voigt model does not describe stress relaxation, which is observed along with elastic properties in many polymers and biomaterials. In this regard, the standard linear body model is used to describe the properties of these materials. Studies of its properties were mainly limited to the study of its reaction to an instantaneously applied load, as well as to the determination of the time and nature of stress relaxation. At the same time, the frequency properties of the standard linear body remained unexplored. In this regard, an analysis of its frequency properties was carried out, which made it possible to study its behavior under vibration exposure. On the basis of the equation of motion, the amplitude-frequency response (AFC) was constructed, and its peculiarity was revealed, which consists in the fact that an increase in the damping coefficient leads to a decrease in the maximum value of the AFC only to a certain value greater than one. A further increase in the damping coefficient leads to an increase in the maximum frequency response up to infinity at a frequency that should also be considered resonant. Thus, the frequency response of a standard linear body always has a maximum. The subsequent increase in the damping coefficient leads to the tendency of the maximum frequency response to zero at infinity.

Keywords: standard linear body, frequency response, model parameters, uniqueness of parameter values.

References

1. Xiao R., Sun H., Chen W. An equivalence between generalized maxwell model and fractional zener model. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 100, pp. 148–153.
2. Sethuraman V., Makornkaewkeyoon K., Khalf A., Madihally S. V. Influence of scaffold forming techniques on stress relaxation behavior of polycaprolactone scaffolds. *Journal of Applied Polymer Science*, 2013, vol. 130, pp. 4237–4244.
3. Shazly T. M., Artzi N., Boehning F., Edelman E. R. Viscoelastic adhesive mechanics of aldehyde-mediated soft tissue sealants. *Biomaterials*, 2008, vol. 29, pp. 4584–4591.
4. Feng Z., Seya D., Kitajima T., Kosawada T., Nakamura T., Umezumi M. Viscoelastic characteristics of contracted collagen gels populated with rat fibroblasts or cardiomyocytes. *Journal of Artificial Organs*, 2010, vol. 13, pp. 139–144.
5. Tirella A., Mattei G., Ahluwalia A. Strain rate viscoelastic analysis of soft and highly hydrated biomaterials. *Journal of Biomedical Materials Research*, 2014, vol. 102, pp. 3352–3360.
6. Capocardo L., Costa J., Giusti S., Buoncompagni L., Meucci S., Corti A., Mattei G., Ahluwalia A. Real-time cellular impedance monitoring and imaging of biological barriers in a dual-flow membrane bioreactor. *Biosensors and Bioelectronics*, 2019, vol. 140, pp. 1–9.

7. Kizilova N. N. Presser wave propagation in liquid field. *Fluid dynamics*, 2006, vol. 41, no. 3, pp. 434–446.
8. Orne D., Liu Y. K. A mathematical model of spinal response to impact. *Journal of Biomechanics*, 1971, vol. 4, no. 1, pp. 49–71.
9. Braunsmann C., Proksch R., Revenko I., Schäffer T. E. Creep compliance mapping by atomic force microscopy. *Polymer*, 2014, vol. 55, pp. 219–225.
10. Petit-Zeman S. Regenerative medicine. *Nature Biotechnology*, 2001, vol. 19, pp. 201–206.
11. O'Brien F. J. Biomaterials & scaffolds for tissue engineering. *Materials Today*, 2011, vol. 14, pp. 88–95. [https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(11\)70058-X](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(11)70058-X)
12. Smith B. D., Grande D. A. The current state of scaffolds for musculoskeletal regenerative applications. *Nature Reviews Rheumatology*, 2015, vol. 11, pp. 213–222.
13. Agarwal R., García A. J. Biomaterial strategies for engineering implants for enhanced osseointegration and bone repair. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 2015, vol. 94, pp. 53–62.
14. Deng C. X., Hong X., Stegemann J. P. Ultrasound imaging techniques for spatiotemporal characterization of composition, microstructure, and mechanical properties in tissue engineering. *Tissue Engineering. Pt B, Reviews*, 2015, vol. 22, pp. 311–321.
15. Hong X., Annamalai R. T., Kemerer T. S., Deng C. X., Stegemann J. P. Multimode ultrasound viscoelastography for three-dimensional interrogation of microscale mechanical properties in heterogeneous biomaterials. *Biomaterials*, 2018, vol. 178, pp. 11–22.
16. Argatov I. I. Mathematical modeling of linear viscoelastic impact: Application to drop impact testing of articular cartilage. *Tribology International*, 2013, vol. 63, pp. 213–225.
17. Thompson G. T. In vivo determination of mechanical properties of the human ulna by means of mechanical impedance tests: Experimental results and improved mathematical model. *Medical and Biological Engineering*, 1976, vol. 14, pp. 253–262.
18. Che Yu-Lin. Alternative form of standard linear solid model for characterizing stress relaxation and creep: Including a novel parameter for quantifying the ratio of fluids to solids of a viscoelastic solid. *Frontiers in Materials*, 2020, pp. 7–11.
19. Tregubov V. P., Egorova N. K. Modelirovanie biomekhanicheskikh sistem s necelym chislom stepenej svobody [Modeling of biomechanical systems with a non-integer number of degrees of freedom]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 267–276. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.305> (In Russian)

Received: December 18, 2020.

Accepted: April 05, 2021.

A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

Vladimir P. Tregubov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; v.tregubov@spbu.ru

Nadezhda K. Egorova — Postgraduate Student; nadezhda_ego@mail.ru