УДК (517.97+514.822): 531.51
MSC 49S05; 83C40

О плотности потока импульса гравитационного поля

О. И. Дривотин

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Дривотин О. И.* О плотности потока импульса гравитационного поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 137–147.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204

Импульс рассматривается на основе подхода, широко используемого в вариационном исчислении и теории оптимального управления, в рамках которого исследуется вариация некоторого целевого функционала. В физической теории таким функционалом является действие. При этом вариация действия при сдвиге вдоль некоторого векторного поля может быть выражена в виде поверхностного интеграла некоторой дифференциальной формы третьей степени, через которую и определяется плотность потока импульса. В работе получено уравнение баланса импульса, показывающее, что импульс поля переходит в импульс массы. Рассмотрен пример, иллюстрирующий структуру потока импульса для распределения массы в виде однородного тонкого слоя.

Ключевые слова: вариация действия гравитационного поля, плотность потока импульса гравитационного поля, уравнения баланса импульса, тонкий слой с равномерным распределением массы.

1. Введение. В задачах вариационного исчисления и оптимального управления импульсы широко используются и представляют собой линейные формы, выражающие вариации функционалов через приращения искомых величин [1, 2]. В настоящей работе такой подход применяется для вариационной задачи, где функционалом является действие гравитационного поля. Показано, что вариация рассматриваемого функционала может быть сведена к поверхностному интегралу некоторой дифференциальной формы третьей степени. Впервые эта форма была введена в работе [3]. Записано уравнение баланса импульса и введен вектор, который может считаться вектором плотности потока импульса. При этом плотность потока импульса всегда ассоциируется с некоторым векторным полем. В частности, если рассматриваемое векторное поле образовано касательными векторами к координатным линиям временной координаты, то данный вектор представляет собой вектор плотности потока энергии.

В качестве простейшего примера приведен тонкий слой с равномерным распределением плотности массы, для гравитационного поля которого найдены потоки импульса.

Плотность распределения массы рассматривается на основе ковариантного подхода, разработанного в работах [4–6].

Задача построения тензорного аппарата для описания потока импульса гравитационного поля представляет большой интерес, в частности, в связи с экспериментальным обнаружением гравитационных волн [7]. В работе [8] для характеристики плотности потока энергии и импульса использован так называемый псевдотензор энергии-импульса. Но предложенный в этой работе псевдотензор не является тензором, и таким образом, его применение в рамках современной теории пространства-времени как нековариантного объекта некорректно с математической точки зрения. Насколько нам известно, ковариантный анализ плотностей потоков импульса ранее не проводился. Отсутствие в физической теории ковариантного объекта, описывающего потоки энергии и импульса гравитационного поля, отмечено, например, в работе [9].

2. Вариация действия для гравитационного поля. Пусть D — некоторая область в четырехмерном пространстве-времени. Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое некоторым распределением массы в области D. Гравитационное поле описывается метрическим тензором g, имеющим компоненты g_{ik}, $i, k = \overline{0, 3}$.

Запишем действие для изучаемой системы в виде суммы двух членов, первый из которых есть действие собственно гравитационного поля, а второй — действие, характеризующее взаимодействие гравитационного поля и массы:

$$S = S_g + S_m. \tag{1}$$

Действие собственно поля представляется известным классическим выражением [3, 8]

$$S_g = -\alpha \int_D \overline{R}\Omega, \tag{2}$$

а выражение для S_m будет записано далее. Здесь

$$\alpha = \frac{c^3}{16\pi G},$$

G — гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме, $\overline{R}$ — скалярная кривизна:

$$\overline{R} = g^{ij} R_{ij}. \tag{3}$$

При записи (3) и всех остальных формул пользуемся правилом суммирования Эйнштейна, согласно которому по всем совпадающим верхним и нижним индексам производится суммирование. Далее, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора, определяемые соотношением

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \tag{4}$$

в котором δ^i_k — символы Кронекера; R_{ij} — компоненты тензора Риччи R, равные $R_{ij} = \partial\Gamma^k_{ij}/\partial x^k - \partial\Gamma^k_{ik}/\partial x^j + \Gamma^k_{mk}\Gamma^m_{ij} - \Gamma^k_{mj}\Gamma^m_{ik}$; Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля 2-го рода; $\Omega = \sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ — четырехмерная форма объема; g — определитель матрицы компонент метрического тензора; x^i — координаты в области D.

Варьируя выражение (1) и применяя принцип стационарного действия, можно получить уравнение гравитационного поля. В рассматриваемом случае принцип стационарного действия формулируется следующим образом. Пусть заданы распределение массы в области D и метрический тензор g_{ik} на границе области ∂D. Тогда гравитационное поле должно быть таким, чтобы вариация действия при произвольной допустимой вариации метрического тензора внутри области была бы равна нулю.

Рассмотрим сначала вариацию S_g. При варьировании метрического тензора вариации его ковариантных и контравариантных компонент связаны линейным образом в соответствии с равенством (4):

$$\delta g_{ik} g^{kl} + g_{im} \delta g^{ml} = 0. \tag{5}$$

Будем варьировать контравариантные компоненты. При этом

$$\delta S_g = -\alpha \int\limits_D (\delta g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} + g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} +$$

$$+ g^{ik} R_{ik} \delta \sqrt{-g}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{6}$$

Поскольку $\delta g = \Delta_{ik} \delta g^{ik}$, где $\Delta_{ik} = g g^{ik}$ — алгебраическое дополнение элемента матрицы контравариантных компонент метрического тензора, имеем равенство

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}.$$

Объединяя в (6) первый и третий члены в подынтегральном выражении, запишем вариацию S в виде суммы двух членов:

$$\delta S_g = -\alpha \int\limits_D \left(R_{ik} - \frac{1}{2} \overline{R} g_{ik} \right) \delta g^{ik} \Omega - \alpha \int\limits_D g^{ik} \delta R_{ik} \Omega. \tag{7}$$

Покажем, что второй член в (7) можно выразить в виде некоторого интеграла по поверхности ∂D, которую считаем достаточно гладкой. Имеем равенство

$$\delta R_{ik} = \delta \Big(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km} \Big).$$

Хотя символы Кристоффеля Γ^k_{ij} не являются тензорами, их вариации $\delta \Gamma^k_{ij}$ представляют собой тензоры, что можно увидеть, анализируя закон преобразования вариаций символов Кристоффеля при переходе от одних координат к другим. Ковариантную производную вариации символа Кристоффеля по координате представим следующим образом:

$$\big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;m} = \frac{\partial \delta \Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} + \Gamma^l_{mn} \delta \Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{mi} \delta \Gamma^l_{nk} - \Gamma^n_{mk} \delta \Gamma^l_{ni}.$$

Отсюда имеем выражения

$$\big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} = \frac{\partial \delta \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ln} \delta \Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{li} \delta \Gamma^l_{nk} - \Gamma^n_{lk} \delta \Gamma^l_{ni},$$

$$\big(\delta \Gamma^l_{il}\big)_{;k} = \frac{\partial \delta \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{kn} \delta \Gamma^n_{il} - \Gamma^n_{ki} \delta \Gamma^l_{nl} - \Gamma^n_{kl} \delta \Gamma^l_{ni}.$$

Разность между ними равна

$$\big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} - \big(\delta \Gamma^l_{il}\big)_{;k} = \frac{\partial \delta \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \delta \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ln} \delta \Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{li} \delta \Gamma^l_{nk} -$$

$$- \Gamma^n_{lk} \delta \Gamma^l_{ni} - \Gamma^l_{kn} \delta \Gamma^n_{il} + \Gamma^n_{ki} \delta \Gamma^l_{nl} + \Gamma^n_{kl} \delta \Gamma^l_{ni} =$$

$$= \big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} - \big(\delta \Gamma^l_{il}\big)_{;k} + \delta \big(\Gamma^n_{ik} \Gamma^l_{ln}\big) - \delta \big(\Gamma^n_{li} \Gamma^l_{nk}\big)$$

и совпадает с δR_{ik}. Тогда получим, что

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} - g^{ik} \big(\delta \Gamma^l_{il}\big)_{;k} = g^{ik} \big(\delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} - g^{il} \big(\delta \Gamma^m_{im}\big)_{;k} =$$

$$= \big(g^{ik} \delta \Gamma^l_{ik}\big)_{;l} - \big(g^{il} \delta \Gamma^m_{im}\big)_{;k} = \mathcal{W}^l_{;l}.$$

Здесь $\mathcal{W}^l = -g^{ik} \delta \Gamma^l_{ik} + g^{il} \delta \Gamma^m_{im}$.

Рассмотрим дифференциальную форму третьей степени ${}^*\mathcal{W}$, где * обозначает оператор дуализации (Ходжа) [3], действующий по такому правилу:

$$({}^*\mathcal{W})_{ijk} = \Omega_{lijk}\mathcal{W}^l.$$

При этом, как нетрудно убедиться,

$$\mathcal{W}^l = \frac{1}{3!}\Omega^{ijkl}({}^*\mathcal{W})_{ijk},$$

где $\Omega^{ijkl} = 1/\Omega_{ijkl}$ — контравариантные компоненты формы объема. Вычисляя ковариантную производную вектора W, находим, что

$$(\mathcal{W}^l)_{;l} = -(\Omega^{ijkl}({}^*\mathcal{W})_{ijk})_{;l} = -\Omega^{ijkl}({}^*\mathcal{W}_{ijk})_{;l} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{ijkl}({}^*\mathcal{W}_{ijk})_{;l} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(d\,{}^*\mathcal{W})_{0123}.$$

Отсюда вытекает, что $(\mathcal{W}^l)_{;l}\Omega = d\,{}^*\mathcal{W}$. Таким образом,

$$\int\limits_D (\mathcal{W}^l)_{;l}\Omega = \int\limits_D d\,{}^*\mathcal{W} = \int\limits_{\partial D} {}^*\mathcal{W}.$$

Действие точечной частицы массы m в гравитационном поле, движущейся по траектории $x(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_A, \lambda_B]$, равно [3]

$$S_1 = -mc\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{g_{ik}u^i_{(\lambda)}u^k_{(\lambda)}}\, d\lambda. \tag{8}$$

Здесь $u_{(\lambda)} = dx/d\lambda$. Поэтому интеграл не зависит от параметризации. Считаем, что $d\lambda/ds > 0$, где s — собственное время частицы, $\lambda_A < \lambda_B$.

Точечная частица характеризуется вырожденным распределением тока массы, носитель которого совпадает с ее траекторией. Будем рассматривать распределение массы, описываемое дифференциальной формой третьей, т. е. максимально возможной, степени. При этом под плотностью тока массы понимаем такую дифференциальную форму третьей степени J, интегрирование которой по некоторой достаточно гладкой ориентированной поверхности V дает массу, проходящую через эту поверхность в направлении ее ориентации:

$$m = \int\limits_V J. \tag{9}$$

Кроме того, будем считать, что в каждой точке некоторой подобласти D области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле u, определяющее скорость движения массы в рассматриваемой точке. Интегральные кривые этого поля можно считать мировыми линиями, вдоль которых движется масса.

Также примем, что в D можно построить такую пространственно-подобную поверхность V, которая однократно пересекает все интегральные кривые.

Для вычисления массы по формуле (9) разбиваем поверхность, через которую проходит масса, на ячейки, суммируем по всем ячейкам и производим предельный переход, уменьшая ячейки. Массу в малой ячейке можно представить как некоторую частицу, которой соответствует некоторая интегральная кривая, проходящая через эту ячейку, для которой действие дается выражением (8). Чтобы получить действие для распределения, описываемого формой J, просуммируем вместо массы для каждой ячейки действие для частицы, представляемой данной ячейкой. А тогда действие для рассматриваемого распределения принимает вид [3]

$$S_m = -c \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{g_{ik} u^i_{(\lambda)} u^k_{(\lambda)}}\, d\lambda \right) J, \tag{10}$$

где V — некоторая поверхность, пересекающая по одному разу все траектории, а $A = x(\lambda_A)$ и $B = x(\lambda_B)$ — точки пересечения траектории с границей области D.

Заметим, что так как при движении не происходит рождения и уничтожения массы, $\mathcal{L}_{u_\lambda} J = 0$, где $\mathcal{L}_{u_\lambda}$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля u_λ. Это означает, что при интегрировании по любой поверхности, пересекающей однократно все траектории, интеграл (10) имеет одно и то же значение.

Вариация действия S_m при изменении гравитационного поля, в котором движется частица, равна

$$\delta S_m = -\frac{c}{2} \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} \frac{u^i_{(\lambda)} u^k_{(\lambda)} \delta g_{ik}}{\sqrt{g_{ik} u^i_{(\lambda)} u^k_{(\lambda)}}}\, d\lambda \right) J.$$

Учитывая, что $\sqrt{g_{ik} u^i_{(\lambda)} u^k_{(\lambda)}} = ds/d\lambda$, имеем выражение

$$\delta S_m = -\frac{c}{2} \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} u^i \frac{dx^k}{d\lambda} \delta g_{ik}\, d\lambda \right) J =$$

$$= -\frac{c}{2} \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} u^i \frac{dx^k}{ds} \delta g_{ik}\, d\lambda \right) \sum_{\substack{m,n,p=0 \\ m<n<p}}^{3} J_{mnp}\, dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p =$$

$$= -\frac{c}{2} \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{\lambda_A}^{\lambda_B} u^i \frac{dx^k}{d\lambda} \delta g_{ik}\, d\lambda \right) \sqrt{-g} j^l \sum_{\substack{m,n,p=0 \\ m<n<p}}^{3} \varepsilon_{lmnp}\, dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p.$$

Здесь $u = dx/ds$, j — вектор, определяемый из соотношения

$$J_{mnp} = \Omega_{lmnp} j^l = \sqrt{-g} \varepsilon_{lmnp} j^l,$$

который будем называть вектором плотности тока массы, а ε_{lmnp} — символы Леви—Чивита.

При интегрировании вдоль траектории в качестве параметра λ можно взять координату x^l, которая вместе с координатами на поверхности V образует систему координат в области D. Тогда

$$\delta S_m = -\frac{c}{2} \int\limits_{V \cap D} \left(\int\limits_{x^l_A}^{x^l_B} u^i \delta g_{il}\, dx^l \right) \sqrt{-g} j^l \sum_{\substack{m,n,p=0 \\ m<n<p}}^{3} \varepsilon_{lmnp}\, dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p.$$

Поскольку $\mathcal{L}_{u_\lambda} J = 0$, $\sqrt{-g} j^l$ можно занести во внутренний интеграл. Пусть ориентация поверхности задается вектором u. Отсюда имеем, что

$$\delta S_m = -\frac{c}{2} \int\limits_D (j_m)^l u^i \delta g_{il} \sqrt{-g} \varepsilon_{lmnp} dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p.$$

Учитывая соотношение (5), получим, что

$$\delta S_m = \frac{c}{2} \int\limits_D \hat{j}_l \hat{u}_i \delta g^{il} \Omega = \frac{1}{2c} \int\limits_D T_{il} \delta g^{il} \Omega,$$

где $T_{il} = c^2 \hat{j}_l \hat{u}_i$ — компоненты тензора T, представляющего собой вариационную производную действия массы по метрике, а $\hat{u}$ и $\hat{j}$ — ковариантные векторы, соответствующие векторам u и j : $\hat{j}_l = g_{il} j^i$, $\hat{u}_i = g_{ik} u^k$.

Объединяя все члены, запишем вариацию действия в виде

$$\delta S = \int\limits_D \left[-\alpha \left(R_{ik} - \frac{1}{2} \overline{R} g_{ik} \right) + \frac{1}{2c} T_{ik} \right] \delta g^{ik} \Omega + \alpha \int\limits_{\partial D} {}^* \mathcal{W}. \tag{11}$$

При заданном условии $\delta g_{ik} = 0$ на границе области D, второй интеграл в (11) равен нулю. А тогда для стационарности действия необходимо обращение в нуль подынтегрального выражения в первом интеграле в (11):

$$R - \frac{1}{2} \overline{R} g = \frac{8\pi G}{c^4} T. \tag{12}$$

Уравнение (12) известно как уравнение Эйнштейна.

3. О законах сохранения для гравитационного поля. Пусть носителем распределения массы является некоторая область D, $D \subset G$, и заданы координаты, которые назовем исходными.

Считаем, что можно выбрать такое векторное поле $v^i = dx^i / d\mu$, вдоль которого перенос Ли интегральных кривых векторного поля u оставляет эти кривые стационарными. Такое поле нетрудно получить при условии достаточной гладкости поля u, если перенести, например, точки пересечения интегральных кривых с поверхностью V, провести стационарные кривые, проходящие через эти точки, а затем взять векторы смещения точек построенных кривых относительно соответствующих точек исходных кривых.

Произведем перенос Ли поверхности V и заданного на ней тензора J вдоль данного поля на приращение параметра $\delta\mu$. При этом перенесенные интегральные кривые, проходящие через точки $L_v x \in L_v V$, являются стационарными по построению.

Рассмотрим вариацию действия S_m при описываемом переносе. Учтем, что вариация действия отдельной частицы S_1 (8) при изменении траектории при условии, что траектория остается стационарной:

$$\delta S_1 = (dS, v)|_A^B \delta\mu = -mc(\hat{u}, v)|_A^B \delta\mu,$$

поскольку импульс частицы как дифференциал действия [8] при рассматриваемом условии $p = dS_1 = -mc\hat{u}$.

Тогда изменение действия для массы, проходящей через некоторую трехмерную ячейку на поверхности V, определяемую векторами $\delta x_{(1)}$, $\delta x_{(2)}$, $\delta x_{(3)}$, задающими ее ребра, можно представить в виде

$$\delta S_{\delta x_{(1)},\delta x_{(2)},\delta x_{(3)}} = (p,v)|_A^B \delta\mu J(\delta x_{(1)},\delta x_{(2)},\delta x_{(3)})$$

с точностью до величин более высокого порядка малости по $\delta x_{(k)}$, $k = 1,2,3$. Суммируя по ячейкам и переходя к пределу, получим выражение

$$\delta S_m = \int\limits_V (p,v)|_A^B J. \tag{13}$$

Если v есть базисное векторное поле некоторой координаты, то (13) можно рассматривать как изменение соответствующей компоненты импульса для всего распределения массы в целом при переходе от поверхности, на которой расположены начальные точки траекторий, к поверхности, где лежат конечные точки траекторий.

Вариацию S_g при описываемом переносе можно записать, согласно выражению (2), следующим образом:

$$\delta S_g = -\alpha \int\limits_D \mathcal{L}_v(\overline{R}\Omega). \tag{14}$$

Вместе с тем при интегрировании по перенесенным областям в выражениях (2), (4) можно взять в качестве координат точек координаты их прообразов. Соответствующие компоненты скоростей и формы плотности потока массы при переносе не меняются. Интегралы меняются лишь за счет изменения компонент метрического тензора, и вариацию функционала можно представить в виде (11).

Считая также, что распределение массы переносится вместе с гравитационным полем, которое им создается, т. е. уравнения гравитационного поля продолжают выполняться, получим, что в (11) отличен от нуля только поверхностный интеграл. Тогда, учитывая, что в соответствии с (12) $\overline{R} = -\overline{T}/(2\alpha c)$, где $\overline{T} = g^{ij}T_{ij} = g_{ij}T^{ij}$, находим, что

$$\int\limits_V (p,v)|_A^B J + \frac{1}{2c}\int\limits_D \mathcal{L}_v(\overline{T}\Omega) = \int\limits_{\partial D} {}^*W, \tag{15}$$

где

$$W^l_{(v)} = \alpha(-g^{ik}\mathcal{L}_v\Gamma^l_{ik} + g^{il}\mathcal{L}_v\Gamma^m_{im}).$$

Уравнение (15) можно считать уравнением баланса импульса, а вектор W — вектором плотности потока импульса. При этом импульс, втекающий в область D, частично уходит на изменение импульса массы и частично передается гравитационному полю.

4. Пример. Однородный слой в однородном гравитационном поле. Рассмотрим слабое однородное гравитационное поле, описываемое метрическим тензором

$$\|g_{ik}\| = \mathrm{diag}(1 + 2a(x - x_0), -1, -1, -1), \quad x > x_0, \tag{16}$$

в координатах $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Под слабым полем понимаем поле с координатами, в которых матрица компонент метрического тензора мало отличается от матрицы $\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. В рассматриваемом случае это означает, что $a(x - x_0) \ll 1$.

Нетрудно убедиться, что тензор (16) удовлетворяет уравнению (12) с точностью до членов первого порядка малости по $a(x - x_0)$. Такое поле может создаваться покоящейся плоскостью с равномерным распределением массы, ортогональной оси x и расположенной при $x = x_0$. Из уравнения динамики легко получить, что ускорение движущейся в таком поле массы имеет компоненту вдоль оси x, равную $w = -ac^2$.

Пусть $x_0 < 0$. Рассмотрим тонкий слой массы, ортогональный оси x, находящийся в данном поле при $x = 0$ и создающий слабое поле, метрический тензор для которого запишем в виде

$$\|g_{ik}\| = \begin{cases} \operatorname{diag}(1 - 2bx, -1, -1, -1), & x < -d, \\ \operatorname{diag}(1 + 2bx, -1, -1, -1), & x > d. \end{cases}$$

Здесь $2d$ — толщина слоя. Постоянная b определяется поверхностной плотностью массы $\sigma\colon b = 2\pi G\sigma/c^2$.

Нетрудно понять, что поле, являющееся результатом наложения внешнего поля (16) и собственного поля рассматриваемого слоя, можно охарактеризовать метрическим тензором

$$\|g_{ik}\| = \begin{cases} \operatorname{diag}(1 - 2(-a + b)x, -1, -1, -1), & x < -d, \\ \operatorname{diag}(1 + 2(a + b)x, -1, -1, -1), & d > 0. \end{cases}$$

При этом отличные от нуля символы Кристоффеля 2-го рода равны

$$\Gamma^x_{00} = \Gamma^0_{0x} = \begin{cases} -2(a - b)^2 x, & x < -d, \\ -2(a + b)^2 x, & x > d. \end{cases}$$

Вычисляя компоненты вектора плотности потока x-компоненты импульса $W_{(x)}$ $(v = e_{(x)})$, получим $W^0_{(x)} = 0$,

$$W^0_{(x)} = \begin{cases} 2(a - b)^2, & x < -d, \\ 2(a + b)^2, & x > d. \end{cases}$$

Удерживая при вычислении только главные члены, имеем выражение

$$^*W_{(x)} = \begin{cases} -2(a - b)^2 dx^0 \wedge dy \wedge dz, & x < -d, \\ -2(a + b)^2 dx^0 \wedge dy \wedge dz, & x > d. \end{cases}$$

Вычислим поток импульса Φ_l, соответствующий вектору $W_{(x)}$, в направлении $-e_{(x)}$ через ячейку, находящуюся при некотором $x < -d$ и образованную векторами смещения $e_{(x_0)}c\delta t$, $e_{(y)}\delta y$, $e_{(z)}\delta z$, где $e_{(x_0)}$, $e_{(x)}$, $e_{(y)}$, $e_{(z)}$ — базисные векторы координат x^0, x, y, z. Если задать ориентацию элемента трехмерной поверхности, представляющего собой рассматриваемую ячейку, вектором $-e_{(x)}$, то искомый поток будет равен $^*W(e_{(x_0)}, e_{(x)}, e_{(y)})$, поскольку векторы $e_{(x_0)}$, $e_{(x)}$, $e_{(y)}$ образуют на этой поверхности правоориентированный набор. Итак, имеем равенство

$$\Phi_l = {}^*W(e_{(x_0)}c\delta t, e_{(y)}\delta y, e_{(z)}c\delta z) = -2(a - b)^2 c\delta t\delta y\delta z.$$

Вычислим теперь поток импульса Φ_r в направлении $e_{(x)}$ через ячейку, находящуюся при некотором $x > d$, образованную такими же векторами смещения, как и ранее. Векторы $e_{(x_0)}$, $e_{(x)}$, $e_{(y)}$ образуют на соответствующей ориентированной поверхности левоориентированный набор. Тогда

$$\Phi_r = -{}^*W(e_{(x_0)}c\delta t, e_{(y)}\delta y, e_{(z)}\delta z) = 2(a-b)^2 c\delta t\delta y\delta z.$$

Суммарный поток, вытекающий из изучаемой ячейки за время δt, равен

$$\Phi = \Phi_l + \Phi_r = 8abc\delta t\delta y\delta z = -\sigma w\delta t\delta y\delta z = -\delta m w\delta t.$$

Здесь δm — масса ячейки.

Предположим, что описываемый слой неподвижен. Тогда его импульс не меняется и первый член в левой части уравнения (15) равен нулю. Вычислим теперь второй член. Имеем

$$\overline{T}\Omega = g_{00}c^2u^0j^0\sqrt{-g}dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz = (1+2ax)c^2 J_{xyz}dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Интегрируя по ячейке, образованной векторами смещения $c\delta te_{(0)}$, $\delta xe_{(x)}$, $c\delta ye_{(y)}$, $c\delta ze_{(z)}$, получаем

$$\frac{1}{2c}\int \mathcal{L}_v(\overline{T}\Omega) = \mathcal{L}_v\frac{1}{2}(1+2ax)c^2\delta m\delta t = -w\delta m\delta t$$

с точностью до членов более высокого порядка малости по δx и с учетом того, что внутри слоя g_{00} меняется гладко. Таким образом, в этом случае уравнение баланса (15) выполняется.

Если же рассматриваемый слой ускоряется в приложенном внешнем поле, то второй член в левой части уравнения (15) обращается в нуль, поскольку его можно вычислять в пространственно-временных координатах ускоренной системы отсчета [10], ассоциированной с конгруэнцией интегральных кривых векторного поля u, которые можно характеризовать как мировые линии наблюдателей, формирующих систему отсчета. В этой системе отсчета компоненты метрического тензора не зависят от x, и $\mathcal{L}_v(\overline{T}\Omega) = 0$. Первый же член в таком случае равен изменению импульса рассматриваемой ячейки слоя. Тогда уравнение (15) означает, что изменение импульса массы ячейки равно потоку импульса гравитационного поля, втекающего в данную ячейку.

5. Заключение. В настоящей работе на основе вариационных методов разработан подход, позволяющий описывать плотности потоков импульса гравитационного поля. При этом импульс рассматривается так же, как в вариационном исчислении и теории оптимального управления, а именно, как вариационная производная функционала действия. В представленном подходе импульс всегда ассоциируется с некоторым векторным полем. Введен тензор, интегрируя который по некоторой замкнутой поверхности можно выразить вариацию действия гравитационного поля внутри этой поверхности. Такой тензор является фактически вариационной производной действия при вариации области.

Рассматривается распределение массы, движение которой происходит с определенной скоростью в каждой точке пространства-времени (пылевидная материя). На основе анализа вариации действия при сдвиге вдоль некоторого векторного поля получено уравнение, содержащее объемный и поверхностные интегралы. Его можно интерпретировать как уравнения баланса импульса массы и гравитационного поля, поскольку одним из членов, дающих вклад в баланс со стороны массы, является изменение импульса этой массы. Потому упомянутый тензор, который интегрируется по поверхности, можно назвать плотностью потока импульса гравитационного поля.

В качестве примера описан однородный слой массы во внешнем однородном гравитационном поле, для которого уравнение баланса импульса выполняется, что можно рассматривать как подтверждение представленного подхода.

Литература

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. *Дривотин О. И.* О численном решении задачи оптимального управления на основе метода, использующего вторую вариацию траектории // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 2. С. 283–295. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.211
3. *Дривотин О. И.* Математические основы теории поля. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 168 с.
4. *Drivotin O. I.* Covariant formulation of the Vlasov equation // Proceedings of International Particle Accelerators Conference (IPAC'2011). San Sebastian: Kursaal, 2011. P. 2277–2279.
5. *Drivotin O. I.* Degenerate solutions of the Vlasov equation // Proceedings of Russian Accelerator Conference (RuPAC'2012). St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2012. P. 376–378.
6. *Дривотин О. И.* Ковариантное описание распределений в фазовом пространстве // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 39–52. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304
7. *Abbot B. P., Abbot R., Abbot T. D.* et al. LIGO scientific collaboration and Virgo collaboration // Physical Review Letters. 2016. Vol. 116. Iss. 6. P. 061102.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
9. *Carrol S.* Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. San Fransisco: Addison Wesley, 2004. 513 p.
10. *Drivotin O. I.* Rigorous definition of the reference frame // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 4. С. 25–36.

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2020 г.
Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Дривотин Олег Игоревич — д-р. физ.-мат. наук, проф.; o.drivotin@spbu.ru

On momentum flow density of the gravitational field

O. I. Drivotin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Drivotin O. I. On momentum flow density of the gravitational field. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 137–147. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.204 (In Russian)

Momentum is considered on the basis of the approach widely used in the calculus of variations and in the optimal control theory, where variation of a cost functional is investigated. In physical theory, it is the action functional. Action variation under Lie dragging can be expressed as a surface integral of some differential form. The momentum density flow is defined using this form. In this work, the momentum balance equation is obtained. This equation shows that the momentum field transforms into a momentum of a mass. Examples showing the momentum flow structure for a mass distribution representing a uniform thin layer are provided.

Keywords: action variation of the gravitational field, momentum flow density of the gravitational field, momentum balance equation, thin layer with uniform mass distribution.

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh protsessov* [*Mathematical theory of optimal processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 392 p. (In Russian)

2. Drivotin O. I. O chislennom reshenii zadachi optimal'nogo upravleniya na osnove metoda, ispol'zuyushchego vtoruyu variatsiyu trayektorii [On numerical solution of the optimal control problem based on a method using the second variation of a trajectory]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 2, pp. 283–295. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.211 (In Russian)

3. Drivotin O. I. *Matematicheskiye osnovy teorii polya* [*Mathematical foundations of the field theory*]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2010, 168 p. (In Russian)

4. Drivotin O. I. Covariant formulation of the Vlasov equation. *Proceedings of International Particle Accelerators Conference (IPAC'2011)*. San Sebastian, Kursaal Publ., 2011, pp. 2277–2279.

5. Drivotin O.I. Degenerate solutions of the Vlasov equation. *Proceedings of Russian Accelerators Conference (RuPAC'2012)*. St. Petersburg, St. Petersburg State University Publ., 2012, pp. 376–378.

6. Drivotin O. I. Kovariantnoe opisanie raspredeleniy v fazovom prostranstve [Covariant description of phase space distributions]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2016, vol. 12, iss. 3, pp. 39–52. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304 (In Russian)

7. Abbot B. P., Abbot R., Abbot T. D. et al. LIGO scientific collaboration and Virgo collaboration. *Physical Review Letters*, 2016, vol. 116, iss. 6, p. 061102.

8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoriya polya* [*The field theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 504 p. (In Russian)

9. Carrol S. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity.* San Fransisco, Addison Wesley Publ., 2004, 513 p.

10. Drivotin O. I. Rigorous definition of the reference frame. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2014, iss. 4, pp. 25–36.

Received: April 11, 2020.
Accepted: April 05, 2021.

A u t h o r ' s i n f o r m a t i o n:

Oleg I. Drivotin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; o.drivotin@spbu.ru