

## Изгиб ребристой пластины при сложном нагружении

Д. П. Голоскоков<sup>1</sup>, А. В. Матросов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Российская Федерация, 193232,

Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Изгиб ребристой пластины при сложном нагружении // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 120–130.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.202>

Рассматривается задача изгиба прямоугольной пластины, подкрепленной перекрестной системой ребер жесткости. На пластину, кроме поперечной нагрузки, действуют передаваемые через ребра силы в ее плоскости. Получено аналитическое решение граничной задачи для разрешающего дифференциального уравнения относительно нормального прогиба пластины, которое описывает деформацию прямоугольной пластины, подкрепленной ребрами жесткости. Решение представлено в виде рядов по комбинациям регулярных и специальных разрывных функций, которые быстро сходятся, и приводит к простому вычислительному алгоритму. Влияние ребер учитывается в уравнении в виде дополнительных слагаемых, содержащих множители с дельта-функцией. Такой подход дает возможность освободиться от ряда предположений, касающихся взаимодействия пластины с подкрепляющими ее элементами. Использование аппарата обобщенных функций при моделировании объектов указанного типа упрощает граничные условия (отсутствуют условия сопряжения различных элементов конструкции), но при этом усложняются дифференциальные уравнения: задача сводится к так называемым частично вырожденным уравнениям. Разработка аналитических методов, позволяющих получать точные решения дифференциальных уравнений такого типа, и внедрение их в расчетную практику являются одной из актуальных задач механики объектов с нарушенной регулярностью.

*Ключевые слова:* пластина, ребра жесткости, математическая модель, численно-аналитические методы, специальные разрывные функции, функция Дирака, функция Хэвисайда, ряды Фурье, ортогональные ряды.

**1. Введение.** Настоящая работа посвящена развитию численно-аналитического метода расчета упругой тонкостенной конструкции нерегулярной структуры — сложной составной конструкции, состоящей из обшивки (тонкой пластины) и стержневой системы (ребер жесткости). Особенность конструкции состоит в том, что ребра жесткости являются не вспомогательными, а основными несущими элементами наряду с обшивкой (пластиной): они имеют значительную жесткость и соответствующие размеры.

В расчетах подобных конструкций изначально использовался способ расчленения их на отдельные элементы с плавно меняющейся геометрией и жесткостью, с последующей «склеивкой» решений для этих элементов. Такой подход приводит к громоздкому, а иногда и трудно реализуемому алгоритму, применение которого зачастую

затруднено неустойчивостью счета, связанной с различной изменяемостью искомых функций.

Современные ЭВМ дают возможность широкого внедрения численных методов определения напряжений и деформаций в элементах конструкций сложной формы. Среди таких методов наибольшее практическое значение имеет метод конечных элементов (МКЭ).

С позиций МКЭ конструкция представляет собой композицию различных конечных элементов: оболочек нулевой кривизны (пластинок), моделирующих обшивку и стенки ребер жесткости — ригелей и диафрагм; дискретных стержневых элементов, имеющих продольную, крутильную и изгибную жесткости и моделирующих пояса ригелей; диафрагм и т. п. Взаимодействие конструкции с опорами моделируется введением специальной системы связей.

Продолжаются исследования сложной составной конструкции, состоящей из пластины-обшивки и стержневой системы — ребер жесткости. В работах [1, 2] получены аналитические решения краевых задач для уравнений деформирования прямоугольной пластины, подкрепленной ребрами жесткости. Расчетные модели конструкций реализованы в аналитических решениях, которые строятся с помощью методов Канторовича и Стеклова—Лиувилля—Фубини. Решение представлено как ряды по комбинациям регулярных и специальных разрывных функций, которые быстро сходятся, и приводит к простому вычислительному алгоритму. В статье [3] на основе генетического алгоритма и теории сдвиговых деформаций первого порядка предложен метод оптимизации положения ребер жесткой пластины, опирающейся на упругое основание. В работе [4] функция прогиба ребристой прямоугольной пластины определяется методом Канторовича—Власова в виде отрезка ряда  $\sum_{i=1}^n W_i(y) X_i(x)$  с функциями  $X_i(x)$ , удовлетворяющими заданным кинематическим граничным условиям, а функции  $W_i(y)$  находятся как решения дифференциальных уравнений четвертого порядка. В первом приближении предлагается одночленная аппроксимация с использованием специальной балочной функции  $X_1(x)$ , определяемой методом начальных параметров. В [5] рассматривается метод решения проблемы свободных колебаний косоребристых пластин. В работе [6], применительно к бетону или композитным железобетонным конструкциям, разработана модель для анализа пластин, усиленных параллельными балками, включая эффекты ползучести и усадки. Экспериментальным исследованиям характеристик изгиба предварительно напряженных ребристых плит посвящена статья [7]. В работе [8] предлагается метод наименьших квадратов для анализа изгиба прямоугольных ребристых пластин. Ребристая пластина прямоугольной формы рассматривается как составная конструкция пластина—ребра. Используется условие совместности перемещений пластины и ребер. Эффект деформации сдвига в пластинах, усиленных параллельными балками, анализируется в [9]. Анализ пластин, усиленных параллельными балками, проводится и в работе [10]. Модель для анализа пластин, армированных балками, учитывающая результирующие плоские силы и деформации пластины, а также осевые силы и деформации балок из-за комбинированной реакции системы, исследуется в [11]. В работах [12–14] представлено сравнение двух аналитических подходов к анализу деформирования пластин — метода аналитической декомпозиции и метода дельта-функций.

**2. Постановка задачи и ее решение.** Рассматривается прямоугольная пластина ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ), подкрепленная ребрами, расположенными параллельно осям  $x$  и  $y$  по линиям  $x = x_j, j = 1, 2, \dots, K_2$ , и  $y = y_i, i = 1, 2, \dots, K_1$ . Если пластина нагружена поперечной нагрузкой  $q(x, y)$  и в условиях задачи имеются еще

и силы, действующие в срединной плоскости пластины, то последние могут оказать значительное влияние на изгиб пластины, и потому при выводе основных разрешающих уравнений их необходимо принимать в расчет. Не останавливаясь на подробностях вывода соответствующих уравнений (особенности можно проследить, например, в [15–17]), отметим, что задача сводится к основному разрешающему уравнению относительно нормального прогиба  $w$ :

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} + \frac{T_1^*}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{T_2^*}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2S}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} -$$

$$- \sum_{i=1}^{K_1} \lambda_{1i} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta(y - y_i) - \sum_{j=1}^{K_2} \lambda_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - x_j),$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина пластины;  $\lambda_{1i} = \frac{E_{1i} J_{1i}}{D}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K_1$ ;  $\lambda_{2j} = \frac{E_{2j} J_{2j}}{D}$ ,  $j = 1, 2, \dots, K_2$ ;  $E_{1i} J_{1i}$ ,  $E_{2j} J_{2j}$  — изгибные жесткости ребер (произведение модуля упругости Юнга на момент инерции поперечного сечения ребра), расположенных в первом и втором направлениях;  $T_1^*$ ,  $T_2^*$ ,  $S$  — заданные силы, действующие в плоскости пластины;  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Пусть на пластину в ее плоскости действуют сжимающие или растягивающие силы  $P_{1i}$ ,  $P_{2j}$ , которые передаются через ребра жесткости в обоих направлениях. Соответствующие погонные усилия, действующие по кромкам  $y = 0, b$  и  $x = 0, a$  будут выражаться формулами

$$T_2^* = \sum_{j=1}^{K_2} P_{2j} \delta(x - x_j), \quad T_1^* = \sum_{i=1}^{K_1} P_{1i} \delta(y - y_i).$$

Уравнение изгиба с учетом этих сил имеет вид

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} - \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{P_{1i}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta(y - y_i) -$$

$$- \sum_{j=1}^{K_2} \left[ \lambda_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{P_{2j}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta(x - x_j). \quad (1)$$

Граничные условия могут быть любые. Если, например, кромки  $x = 0, a$  свободны, то получаем уравнения

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = g(y),$$

$$\left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = 0,$$

а когда кромки  $y = 0, b$  шарнирно оперты, то при  $y = 0, b$  имеем, что

$$-D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x), \quad w = 0.$$

Здесь функции  $f(x)$  и  $g(x)$  зависят от способа передачи усилий через ребра жесткости. Если эти усилия передаются через срединную плоскость пластины-обшивки, то  $f(x) = g(x) = 0$ . Если же, например, указанные силы передаются через центры тяжести поперечных сечений ребер жесткости, то изгибающие моменты от «внецентренного» растяжения или сжатия необходимо учесть в краевых условиях для пластины. В последнем случае функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определяются по формулам

$$f(x) = \sum_{j=1}^{K_2} P_{2j} e_{2j} \delta(x - x_j), \quad g(y) = \sum_{i=1}^{K_1} P_{1i} e_{1i} \delta(y - y_i)$$

и учитывают моменты, действующие на торцах ребер жесткости, возникающие из-за эксцентричного приложения сил  $P_{1i}$  и  $P_{2j}$  ( $e_{1i}$  и  $e_{2j}$  — эксцентриситеты сил  $P_{1i}$  и  $P_{2j}$ ). Возможны и другие случаи передачи усилий, когда моменты необходимо учитывать как в граничных условиях, так и в расчете ребер жесткости.

Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{kn} Z_{\beta_n k}(x) \sin(\beta_n y) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 D_{km} Z_{\alpha_m k}(y) \sin(\alpha_m x) - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \alpha_m^4 + \frac{P_{1i}}{D} \alpha_m^2 \right] w_{my}(y_i) \Psi_{i\alpha_m}^*(y) \sin(\alpha_m x) - \\ & - \sum_{j=1}^{K_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda_{2j} \beta_n^4 + \frac{P_{2j}}{D} \beta_n^2 \right] w_{nx}(x_j) \Psi_{j\beta_n}^*(x) \sin(\beta_n y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy,$$

$\{Z_{\alpha_m k}(y)\}, \{Z_{\beta_n k}(x)\}$  — соответствующие фундаментальные системы решений однородных уравнений  $\nabla_{\alpha_m}^4 Z_{\alpha_m k} = 0, \nabla_{\beta_n}^4 Z_{\beta_n k} = 0$ , где  $\nabla_{\alpha_m}^4, \nabla_{\beta_n}^4$  — дифференциальные операторы

$$\nabla_{\alpha_m}^4 = \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha_m^2 \right)^2, \quad \nabla_{\beta_n}^4 = \left( \frac{d^2}{dx^2} - \beta_n^2 \right)^2,$$

функции  $\Psi_{i\alpha_m}^*(y), \Psi_{j\beta_n}^*(x)$  вычисляются по формулам

$$\Psi_{j\beta_n}^*(x) = \Delta_{\beta_n}(x - x_j) \theta(x - x_j), \quad \Psi_{i\alpha_m}^*(y) = \Delta_{\alpha_m}(y - y_i) \theta(y - y_i),$$

$$\Delta_{\beta_n}(x - x_j) = \frac{1}{2\beta_n^3} \{ \beta_n(x - x_j) \operatorname{ch} \beta_n(x - x_j) - \operatorname{sh} \beta_n(x - x_j) \},$$

$$\Delta_{\alpha_m}(y - y_i) = \frac{1}{2\alpha_m^3} \{ \alpha_m(y - y_i) \operatorname{ch} \alpha_m(y - y_i) - \operatorname{sh} \alpha_m(y - y_i) \},$$

в которых  $\theta$  — функция единичного скачка Хэвисайда.

В решение (2) входят неизвестные числовые коэффициенты:  $C_{kn}, D_{km}$  — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, и значения  $w_{my}(y_i), w_{nx}(x_j)$ . Для нахождения указанных числовых коэффициентов вычислим коэффициенты Фурье решения (2):

$$\begin{aligned}
 w_{nx}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin(\alpha_m x)}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} - \sum_{k=1}^4 C_{kn} Z_{\beta_n k}(x) - \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 D_{km} \bar{Z}_{\alpha_m k}^{\beta_n} \sin(\alpha_m x) - \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \alpha_m^4 + \frac{P_{1i}}{D} \alpha_m^2 \right] w_{my}(y_i) \bar{\Psi}_{i\alpha_m}^{*\beta_n} \sin(\alpha_m x) - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{K_2} \left[ \lambda_{2j} \beta_n^4 + \frac{P_{2j}}{D} \beta_n^2 \right] w_{nx}(x_j) \Psi_{j\beta_n}^*(x), \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{my}(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin(\beta_n y)}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{kn} \bar{Z}_{\beta_n k}^{\alpha_m} \sin(\beta_n y) - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^4 D_{km} Z_{\alpha_m k}(y) - \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \alpha_m^4 + \frac{P_{1i}}{D} \alpha_m^2 \right] w_{my}(y_i) \Psi_{i\alpha_m}^*(y) - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{K_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda_{2j} \beta_n^4 + \frac{P_{2j}}{D} \beta_n^2 \right] w_{nx}(x_j) \bar{\Psi}_{j\beta_n}^{*\alpha_m} \sin(\beta_n y). \tag{4}
 \end{aligned}$$

Полагая в (3), что  $x = x_p, p = 1, 2, \dots, K_2$ , а в (4) — что  $y = y_q, q = 1, 2, \dots, K_1$ , получим две группы уравнений

$$\begin{aligned}
 w_{nx}(x_p) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin(\alpha_m x_p)}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} - \sum_{k=1}^4 C_{kn} Z_{\beta_n k}(x_p) - \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 D_{km} \bar{Z}_{\alpha_m k}^{\beta_n} \sin(\alpha_m x_p) - \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \alpha_m^4 + \frac{P_{1i}}{D} \alpha_m^2 \right] w_{my}(y_i) \bar{\Psi}_{i\alpha_m}^{*\beta_n} \sin(\alpha_m x_p) - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{K_2} \left[ \lambda_{2j} \beta_n^4 + \frac{P_{2j}}{D} \beta_n^2 \right] w_{nx}(x_j) \Psi_{j\beta_n}^*(x_p), \tag{5} \\
 w_{my}(y_q) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin(\beta_n y_q)}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{kn} \bar{Z}_{\beta_n k}^{\alpha_m} \sin(\beta_n y_q) - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^4 D_{km} Z_{\alpha_m k}(y_q) - \sum_{i=1}^{K_1} \left[ \lambda_{1i} \alpha_m^4 + \frac{P_{1i}}{D} \alpha_m^2 \right] w_{my}(y_i) \Psi_{i\alpha_m}^*(y_q) -
 \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^{K_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda_{2j} \beta_n^4 - \frac{P_{2j}}{D} \beta_n^2 \right] w_{nx}(x_j) \bar{\Psi}_{j\beta_n}^{*\alpha_m} \sin(\beta_n y), \quad (6)$$

где введены обозначения коэффициентов Фурье

$$\bar{Z}_{\alpha_m k}^{\beta_n} = \frac{2}{b} \int_0^b Z_{\alpha_m k}(y) \sin(\beta_n y) dy, \quad \bar{Z}_{\beta_n k}^{\alpha_m} = \frac{2}{a} \int_0^a Z_{\beta_n k}(x) \sin(\alpha_m x) dx,$$

$$\bar{\Psi}_{i\alpha_m}^{*\beta_n} = \frac{2}{b} \int_0^b \Psi_{i\alpha_m}^*(y) \sin(\beta_n y) dy, \quad \bar{\Psi}_{j\beta_n}^{*\alpha_m} = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi_{j\beta_n}^*(x) \sin(\alpha_m x) dx.$$

К (5) и (6) необходимо добавить уравнения, полученные из граничных условий. Явно выписывать последние не будем. Таким образом, решение задачи определяется функцией (2), в которой числовые коэффициенты находятся как решения линейной алгебраической системы уравнений, получаемой по стандартному алгоритму.

**3. Пример.** Рассмотрим следующую задачу. Пусть прямоугольная пластина  $0 \leq x \leq 6$ ,  $0 \leq y \leq 4$  нагружена поперечной нагрузкой  $q(x, y) = p_0 = 40 \text{ кН/м}^2$  и подкреплена ребрами, расположенными параллельно осям  $x$  и  $y$  по линиям  $x_1 = 1.5 \text{ м}$ ,  $x_2 = 3 \text{ м}$ ,  $x_3 = 4.5 \text{ м}$ ;  $y_1 = 4/3 \text{ м}$ ,  $y_2 = 8/3 \text{ м}$ . Обшивка пластины имеет постоянную толщину  $h = 0.012$ . Ребра жесткости: горизонтальные ригели — тавры: высота стенки —  $0.8 \text{ м}$ , толщина стенки —  $0.02 \text{ м}$ , ширина полки —  $0.35 \text{ м}$ , толщина полки —  $0.04 \text{ м}$ ; вертикальные стойки — тавры: высота стенки —  $0.6 \text{ м}$ , толщина стенки —  $0.02 \text{ м}$ , ширина полки —  $0.35 \text{ м}$ , толщина полки —  $0.03 \text{ м}$ . Для определенности будем считать, что пластина шарнирно оперта по контуру. На пластину, кроме поперечной нагрузки  $q(x, y)$ , действуют растягивающие усилия  $P = 30 \text{ кН}$  по кромкам в плоскости пластины, которые передаются через ребра параллельно оси  $0y$  (рис. 1).

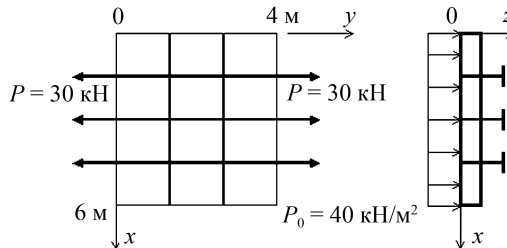


Рис. 1. Расчетная схема

На рис. 2 приведены результаты расчета при удержании в рядах 17 слагаемых по каждой переменной ( $M = N = 17$ ). На рис. 2, б показан совмещенный график прогиба в ребре при  $x = 1.5 \text{ м}$ : пунктирная линия — прогиб, вычисленный по общей формуле типа (2); сплошная — прогиб, рассчитанный следующим образом:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nx}(x) \sin(\beta_n y), \quad (7)$$

где  $w_{nx}(x)$  определяется по формуле типа (3).

Как видно из рис. 2, сходимость рядов типа (2) на линиях расположения ребер жесткости плохая. Ряды типа (7) позволяют определить напряженно-деформированное состояние (НДС) в ребре при сравнительно небольшом количестве удерживаемых членов — сходимость такая же хорошая, как и вдали от сингулярных линий.

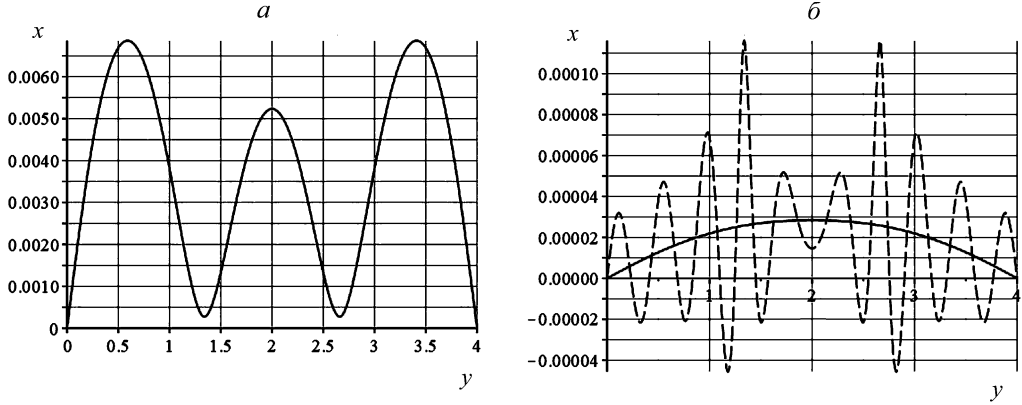


Рис. 2. Прогиб в пластине-обшивке при  $x = 2$  м (а) и в ребре при  $x = 1.5$  м (б)

На рис. 3 показаны совмещенные графики прогибов в пластине-обшивке при  $x = 2$  м и в ребре при  $x = 1.5$  м. На нем силы сжимающие ( $P = -30$  кН) показаны звездочками; силы отсутствуют ( $P = 0$  кН), только поперечная нагрузка — даны крестиками; силы растягивающие ( $P = +30$  кН) отмечены кружочками. Как и следовало ожидать, растягивающие силы уменьшают прогиб, а сжимающие увеличивают. На рис. 3, б линия, отмеченная кружочками, соответствует растягивающим силам ( $P = +30$  кН); пунктирная линия — только поперечной нагрузке, силы отсутствуют ( $P = 0$  кН); линия, отмеченная ромбиками, соответствует сжимающим силам ( $P = -30$  кН).

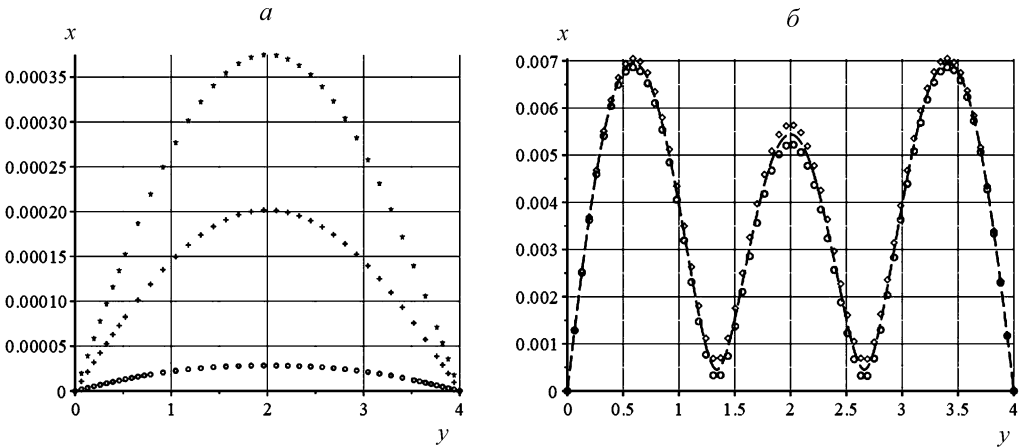


Рис. 3. Прогибы в ребре при  $x = 1.5$  м (а) и в пластине-обшивке при  $x = 2$  м (б)

На рис. 4 показан совмещенный график прогиба в ребре при  $x = 1.5$  м: сплошная линия — прогиб, вычисленный по общей формуле типа (2); по точкам — прогиб,

определенный по формуле типа (7). На пластину, кроме поперечной нагрузки  $q(x, y) = p_0 = 40 \text{ кН/м}^2$ , действуют сжимающие усилия  $P = -30 \text{ кН}$ . Расчет выполнялся с 80 значащими цифрами и удержанием в рядах 45 членов по обоим переменным.

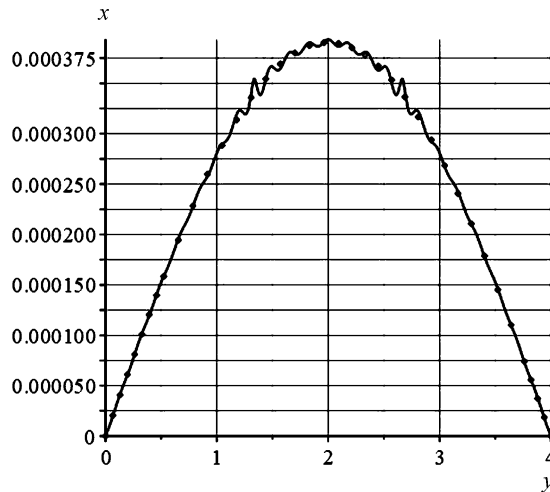


Рис. 4. Сравнение прогибов в ребре при  $x = 1.5 \text{ м}$

Для расчета напряженного состояния непосредственно в ребре предлагается использовать решение задачи в форме одинарного ряда вида (7), коэффициенты Фурье которого определяются по формулам (3).

**4. Заключение.** Результаты расчетов ребристых пластин показывают достаточно хорошую сходимость рядов в полученных решениях. Однако следует отметить, что сходимость рядов ухудшается на линиях расположения ребер жесткости. Таким образом, для расчета НДС непосредственно в ребре следует удерживать значительное количество членов в рядах. Ухудшение сходимости полученных рядов непосредственно связано с жесткостью ребер: чем больше жесткость ребра, тем большее число членов следует удерживать в рядах для получения приемлемого результата. При малых жесткостях ребер ряды хорошо сходятся во всей области, в том числе и на линиях расположения ребер. С увеличением числа удерживаемых членов в рядах проявляется еще одна особенность рассматриваемых задач — вычислительная неустойчивость, которая также непосредственно связана с жесткостью ребер. Это приводит к тому, что расчет НДС в ребре оказывается совершенно невозможен на основе общих формул. Предложена формула в виде одинарного ряда для вычисления НДС в ребрах жесткости, обладающая хорошей сходимостью на сингулярных линиях, как и общая формула вне этих линий.

## Литература

1. Goloskokov D. P. Calculation of the ribbed plate in the mixed form “deflection-function of efforts” // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP-2015). Proceedings. St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2015. P. 386–388. N 7342170.
2. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Analysis of elastic systems with discontinuous parameters // 2017 International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the memory of V. F. Demyanov (CNSA-2017). Proceedings. St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2017. N 7973959.



3. Qin X., Liu S., Shen Y., Peng L. Rib meshless optimization of stiffened plates resting on elastic foundation based on genetic algorithm // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2020. Vol. 52. Iss. 1. P. 93–110.

4. Konev S. V., Fainshtein A. S., Tefteliev I. E. Application of Kantorovich — Vlasov method for shaped plate bending problem // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE–2019). Sochi, Russian Federation. March 25–29, 2019. P. 91–100.

5. Qin X., Liu S. S., Peng L. X. Bending analysis of skew ribbed plates with a meshfree method // IOP Conference. Series Materials Science and Engineering. Vol. 531. Iss. 1. 2nd International Conference on Modeling in Mechanics and Materials. Suzhou, China. March 29–31, 2019.

6. Sapountzakis E. J. An improved model for the analysis of plates stiffened by parallel beams including creep and shrinkage effects: Application to concrete or to composite steel-concrete structures // International Journal on Engineering Applications. 2018. Vol. 6. Iss. 2. P. 57–70.

7. Meng X., Sha L., Tong L., Yang X. Experimental research on flexural performance of prestressed ribbed slab and composite slab // Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science). 2017. Vol. 33. Iss. 1. P. 77–85.

8. Peng L. X. Bending analysis of rectangular ribbed plates by the moving-least square meshfree method // Chinese Journal of Computational Mechanics. 2012. Vol. 29. Iss. 2. P. 210–216.

9. Sapountzakis E. J., Mocos V. G. Shear deformation effect in plates stiffened by parallel beams // Archive of Applied Mechanics. 2009. Vol. 79. Iss. 10. P. 893–915.

10. Sapountzakis E. J., Mocos V. G. Analysis of plates stiffened by parallel beams // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2007. Vol. 70. Iss. 10. P. 1209–1240.

11. Sapountzakis E. J., Katsikadelis J. T. A new model for slab and beam structures — comparison with other models // Computers and Structures. 2002. Vol. 80. Iss. 5–6. P. 459–470.

12. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP–2015). Proceedings. St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2015. P. 382–385. N 7342169.

13. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // AIP Conference Proceedings. St. Petersburg, 1959. P. 2018. N 070012.

14. Matrosov A. V., Goloskokov D. P. Analysis of elastic systems with nonsmooth boundaries // 2017 International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the memory of V. F. Demyanov (CNSA–2017). Proceedings. St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2017. N 7973987.

15. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / пер. с англ.; под ред. Э. И. Григолоука. М.: Наука, 1982. 568 с. (*Donnell L. G. Beams, plates and shells.*)

16. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / пер. с англ. М.: Наука, 1966. 636 с.

17. Голоскоков Д. П. Численно-аналитические методы расчета упругих тонкостенных конструкций нерегулярной структуры. СПб.: СПбГУВК, 2006. 258 с.

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

Статья принята к печати 5 апреля 2021 г.

Контактная информация:

Голоскоков Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, проф.; dpg1954@mail.ru

Матросов Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; avmatrosov@mail.ru

## Bending of a ribbed plate under complex loading

D. P. Goloskokov<sup>1</sup>, A. V. Matrosov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> The Bonch-Bruевич St. Petersburg State University of Telecommunication, 22, pr. Bol'shevnikov, St. Petersburg, 193232, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of a ribbed plate under complex loading. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 120–130. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.202> (In Russian)

The article considers the problem of a rectangular plate, supported by a cross system of stiffening ribs, bending. In addition to the transverse load, the plate is subjected to forces in its plane, transmitted through the ribs. An analytical solution to the boundary value problem for the resolving differential equation with respect to the normal deflection of the plate, describing the deformation of a rectangular plate supported by stiffeners, is obtained. The solution is presented in the form of series in combinations of regular and special discontinuous functions, which converge quickly and lead to a simple computational algorithm. The influence of the ribs is taken into account in the equation in the form of additional terms containing factors with a delta function. This approach allows us to get rid of a number of assumptions regarding the interaction of the plate with its reinforcing elements. The use of the apparatus of generalized functions when modeling objects of this type simplifies the boundary conditions (there are no conditions for conjugation of various structural elements), but at the same time the differential equations become more complicated. The problem is reduced to the so-called partially degenerate equations. Development of analytical methods that allow obtaining exact solutions of differential equations of this type, and their introduction into computational practice, is one of the urgent tasks of the mechanics of objects with disturbed regularity.

*Keywords:* plate, stiffeners, mathematical model, numerical-analytical methods, special discontinuous functions, Dirac function, Heaviside function, Fourier series, orthogonal series.

## References

1. Goloskokov D. P. Calculation of the ribbed plate in the mixed form “deflection-function of efforts”. *2015 International Conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP–2015). Proceedings*. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2015, pp. 386–388, no. 7342170.
2. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Analysis of elastic systems with discontinuous parameters. *2017 International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the memory of V. F. Dem'yanov (CNSA–2017). Proceedings*. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2017, no. 7973959.
3. Qin X., Liu S., Shen Y., Peng L. Rib meshless optimization of stiffened plates resting on elastic foundation based on genetic algorithm. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, vol. 52, iss. 1, pp. 93–110.
4. Konev S. V., Fainshtein A. S., Teftelev I. E. Application of Kantorovich—Vlasov method for shaped plate bending problem. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE–2019)*, Sochi, Russian Federation, March 25–29, 2019. Sochi, 2020, pp. 91–100.
5. Qin X., Liu S. S., Peng L. X. Bending analysis of skew ribbed plates with a meshfree method. *IOP Conference. Series Materials Science and Engineering*, vol. 531, iss. 1. *2nd International Conference on Modeling in Mechanics and Materials*. Suzhou, China, March 29–31, 2019.
6. Sapountzakis E. J. An improved model for the analysis of plates stiffened by parallel beams including creep and shrinkage effects: Application to concrete or to composite steel-concrete structures. *International Journal on Engineering Applications*, 2018, vol. 6, iss. 2, pp. 57–70.
7. Meng X., Sha L., Tong L., Yang X. Experimental research on flexural performance of prestressed ribbed slab and composite slab. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, 2017, vol. 33, iss. 1, pp. 77–85.
8. Peng L. X. Bending analysis of rectangular ribbed plates by the moving-least square meshfree method. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, vol. 29, iss. 2, pp. 210–216.
9. Sapountzakis E. J., Mokos V. G. Shear deformation effect in plates stiffened by parallel beams. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, vol. 79, iss. 10, pp. 893–915.
10. Sapountzakis E. J., Mokos V. G. Analysis of plates stiffened by parallel beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, vol. 70, iss. 10, pp. 1209–1240.
11. Sapountzakis E. J., Katsikadelis J. T. A new model for slab and beam structures — comparison with other models. *Computers and Structures*, 2002, vol. 80, iss. 5–6, pp. 459–470.
12. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *2015 International Conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP–2015). Proceedings*. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2015, pp. 382–385, no. 7342169.

13. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. St. Petersburg, 1959, p. 2018, no. 070012.

14. Matrosov A. V., Goloskokov D. P. Analysis of elastic systems with nonsmooth boundaries. *2017 International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of V. F. Demyanov (CNSA-2017). Proceedings*. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 2017, no. 7973987.

15. Donnel L. G. *Beams, plates and shells*. New York, McGraw-Hill Press, 1976, 453 p. (Rus. ed.: Donnel L. G. *Balki, plastiny i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1982, 568 p.)

16. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki [Plates and shells]*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p. (In Russian)

17. Goloskokov D. P. *Chislennyye i analiticheskiye metody rascheta uprugih tonkostennykh konstruktsiy neregularnoy struktury [Numerical and analytical methods of calculation for elastic thinness-walling constructions for non-regular structure]*. St. Petersburg, SPbGUVK Publ., 2006, 258 p. (In Russian)

Received: February 04, 2021.

Accepted: April 05, 2021.

#### Authors' information:

*Dmitry P. Goloskokov* — Dr. Sci. in Engineering, Professor; dpg1954d@mail.ru

*Alexander V. Matrosov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; avmatrosovd@mail.ru