Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

Несколько задач по теории меры для начинающих

методические указания

М. Г. Голузина, О. Л. Семенова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

Данное пособие содержит несколько задач по теории меры от самого начального уровня сложности до уровня "несколько выше самого начального". Для большинства задач приведены ответы, для некоторых задач предлагается решение (остальные задачи решаются с помощью похожих идей). Необходимые для понимания и решения задач определения и теоремы можно найти в учебнике [2]. Большой набор других задач о мере есть в книге [3]. Более обширное изложение теории меры имеется в учебниках [4] и [1].

Обозначения

M — множество, $\varnothing$ — пустое множество, $2^M = \{Y \mid Y \subseteq M\}$ — множество всех подмножеств множества M.

$x_0 + E = \{x_0 + x \mid x \in E\}$ — сдвиг на $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества M.

$\mathcal{P}_я$ — полукольцо ячеек. Ячейка — полуоткрытый отрезок $[a, b)$.

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества M.

Если $E \subseteq 2^M$, то $\mathcal{B}(E)$ — σ-алгебра, порожденная E.

$\mathcal{B}_n$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{A}_n$ — лебеговская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

μ — мера на полукольце $\mathcal{P}$.

$(M, \mathcal{P}, \mu)$ — пространство с мерой.

μ^* — внешняя мера, порожденная мерой μ.

λ_n — мера Лебега на $\mathcal{A}_n$.

μ_g — мера Лебега-Стилтьеса, заданная возрастающей и непрерывной слева на $\mathbb{R}$ функцией g, на $\mathcal{A}_g$ — сигма-алгебре, определяемой теоремой о продолжении меры с полукольца $\mathcal{P}_я$.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$ — характеристическая функция множества $A \subseteq M$.

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0, & \text{если } a \notin A \end{cases} = \chi_A(a), \quad \text{для} \quad A \subseteq M,\ a \in M$$ — δ-мера Дирака на 2^M.

$\mu \times \nu$ — произведение мер μ и ν.

Задачи

$\boxed{\mathbf{1}}$ Проверить тождества для $A, B, A_i \subseteq M$:

1) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$,
2) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$,
3) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$,
4) $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$,
5) $\chi_{(\bigcup\limits_i A_i)} = \max\limits_i \chi_{A_i}$,
6) $\chi_{(\bigcap\limits_i A_i)} = \min\limits_i \chi_{A_i}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решить уравнения, т.е., для $A, B \subseteq M$ найти все $X \subseteq M$, удовлетворяющие заданным равенствам:

1) $X \cap A = X \cup B$, 2) $X \cap A = X \cap B$, 3) $X \cup A = X \cup B$, 4) $X \setminus A = X \cap B$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Для $A, B, C \subseteq M$ проверить тождества:
1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
3) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$,
4) $(A \triangle B) \triangle C = \{x \in M \mid \chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_C(x) \in \{1, 3\}\}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1) Пусть $B = (X \setminus A) \cup (A \setminus X)$. Используя тождество $A = (X \cap A) \cup (A \setminus X)$, представить множества $(X \setminus A)$ и $(A \setminus X)$ как результат операций над A и B.

2) Решить уравнение $X \triangle A = B$ (т.е. найти все множества X, удовлетворяющие данному равенству при заданных A и B).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Набор $\mathcal{P}$ попарно-дизъюнктных подмножеств множества M, содержащий пустое множество, является полукольцом. Если к $\mathcal{P}$ присоединить одно множество C вида $C = \cup_{k=1}^{K} A_k$, $A_k \in \mathcal{P}$, то полученная совокупность $\mathcal{P} \cup C$ также является полукольцом.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Для двух полуколец $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ подмножеств множества M образуем новые наборы множеств:

$$1)\mathcal{P} \text{„}\cup\text{“}\ \mathcal{Q} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{P},\ B \in \mathcal{Q}\},$$
$$2)\mathcal{P} \text{„}\cap\text{“}\ \mathcal{Q} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{P},\ B \in \mathcal{Q}\},$$
$$3)\mathcal{P} \text{„}\setminus\text{“}\ \mathcal{Q} = \{A \setminus B \mid A \in \mathcal{P},\ B \in \mathcal{Q}\}.$$

Верно ли, что эти наборы множеств являются полукольцами (для любых $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, или для некоторых $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$) ?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Для отображения $g : X \to Y$ и набора множеств $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ определим образ этого набора под действием g:

$$g(\mathcal{E}) = \{g(E) \mid E \in \mathcal{E}\},$$

где $g(E) = \{g(x) \mid x \in E\}$.

Для $\mathcal{F} \subseteq 2^Y$ определим прообраз этого набора под действием g:

$$g^{-1}(\mathcal{F}) = \{g^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{F}\},$$

где $g^{-1}(F) = \{x \mid g(x) \in F\}$.

1) Является ли полукольцом прообраз полукольца?

2) Является ли полукольцом образ полукольца? Проверить, что в общем случае ответ отрицательный. При каких свойствах отображения g образ любого полукольца есть полукольцо?

3) Решить задачу аналогичную 2) для σ-алгебры.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\mathcal{E} = \{\{2\}, \{2, 4\}\}$ построить σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Задано пространство с мерой $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
1) Доказать, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, если $\mu(A \cap B) < +\infty$.
2) При каких условиях верно равенство $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Пусть $(M, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A, B \in \mathcal{A}$, и для любого $C \in \mathcal{A}$ верно равенство $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$. Вычислить $\mu(A \triangle B)$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Пусть $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{[m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z},\ m < n\}$, $\mu([m, n)) = n - m$.
1) Вычислить $\mu^*[0, \pi)$ и $\mu^*(\mathbb{N})$;
2) Отображение $\Psi(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ позволяет рекуррентно определить последовательности полуколец и мер (номер меры совпадает с номером полукольца, на котором она задана): $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$, $\mu_0 = \mu$ и $\mathcal{P}_k = \Psi(\mathcal{P}_{k-1})$, $\mu_k(\Psi(P)) = \Psi(\mu_{k-1}(P))$ для $k \in \mathbb{N}$.

2.а) Проверить, что для любого натурального k верно $\mathcal{P}_k \supseteq \mathcal{P}_{k-1}$ и мера μ_k есть продолжение меры μ_{k-1};

2.б) Проверить, что система множеств $\mathcal{P}_\infty = \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k$ является полукольцом, а мерой является функция μ_∞, определенная на $\mathcal{P}_\infty$ как $\mu_\infty(P) = \mu_k(P)$, если $P \in \mathcal{P}_k$.

2.в) найти $\mu_k{}^*([0, \pi))$ для $k \in \mathbb{N}$ и $k = \infty$;

2.г) Найти $\mathcal{B}(\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k)$. Совпадает ли μ_∞ с одномерной мерой Лебега?

$\boxed{\mathbf{12}}$ Пусть $\mu = \sum_{r \in \mathbb{Q}} |r| \delta_r$.
1) Проверить, что μ есть мера на $2^{\mathbb{R}}$.
2) Существует ли интервал (a, b) такой, что $\mu(a, b) < \infty$?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Пусть $(M, \mathcal{P}, \mu)$ — пространство с мерой.
1) Множество $A \subseteq M$ называется *хорошо разбивающим* (для μ^*), если

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A)$$

для любого $E \subseteq M$.

Верно ли, что

$$\mu^*(A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(A \setminus E)$$

для любого $E \subseteq M$?
2) Пусть $C, E \subseteq M$ и $C \cap E$ — хорошо разбивающее множество. Доказать, что

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C).$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Получить одноточечное множество $\{a\}$, где $a \in \mathbb{R}$, с помощью операций над ячейками, разрешенных в σ-алгебре.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Пусть $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Доказать, равносильность равенств $\mu_g(E) = 0$ и $\lambda_1(E) = 0$ (свойство взаимной абсолютной непрерывности мер μ_g и λ_1).

$\boxed{\mathbf{16}}$ Для $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - 8, \text{ если } x \le 1, \\ \operatorname{arctg} x, \text{ если } x > 1, \end{cases}$ найти:
1) $\mu_g(\mathbb{N})$ и $\mu_g((-\infty, 1])$; 2) множество значений $\mu_g(\mathcal{A}_g)$;
3) $\max\{\mu_g(E) \mid E \in \mathcal{A}_g,\ \lambda_1(E) = 1\}$; 4) $\inf\{\mu_g(E) \mid E \in \mathcal{A}_g,\ \lambda_1(E) = 1\}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Пусть $E \in \mathcal{A}_2$, и $B(0, t)$ — открытый круг с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $t > 0$. Доказать непрерывность функции $h(t) = \lambda_2(E \cap B(0, t))$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Найти множество $E \in \mathcal{A}_1$, реализующее
1) $\max \lambda_1(E)$ при условиях $E \subset [0, 5]$, и $\forall\, x, y \in E\ \ |x - y| \ne 1$;

2) $\max \lambda_1(E)$ при условиях $E \subset [0,4]$, и $\forall\ x, y \in E \quad |x-y| \neq 1$;
3) $\min \lambda_1(E)$ среди максимальных по включению $E \subset [0,5]$, таких что $\forall\ x, y \in E$ $|x-y| \neq 1$ (множество E, $E \in \mathcal{E} \subseteq 2^M$ называется *максимальным по включению* (в $\mathcal{E}$), если для $F \in \mathcal{E}$ свойство $F \supseteq E$ означает $F = E$).

19 Пусть $g(x) = x^3$, $E \in \mathcal{A}_g$, $E \subset [-3,3]$, и $\forall\ x, y \in E \quad |x-y| \neq 1$. Дать точную оценку сверху q величины $\mu_g(E)$.

20 Пусть $E \in \mathcal{A}_2$, $E \subset [0,5] \times [0,5]$. Найти $\max \lambda_2(E)$, если

$$E \cap \big((1,-1) + E\big) = \varnothing.$$

21 Пусть $M \in \mathcal{A}_2$, $\lambda_2(M) = 10, \quad A, B, C \subseteq M, \ \ A, B, C \in \mathcal{A}_2$. Найти точные оценки снизу (p) и сверху (q) суммы мер этих множеств:

$$p \leq \lambda_2(A) + \lambda_2(B) + \lambda_2(C) \leq q$$

и предъявить множества, для которых реализуются равенства, при следующих условиях:
1) $\lambda_2(A \cap B) = 4$ и $\lambda_2(A \cap B \cap C) = 1$;
2) $\lambda_2(A \cup B) = 4$ и $\lambda_2(A \cap B \cap C) = 1$;
3) $\lambda_2(A \cup B) = 4$ и $\lambda_2((C \setminus A) \cup B) = 7$;
4) $\lambda_2(A \setminus B) = 2$ и $\lambda_2(C \setminus (A \cup B)) = 6$.

22 Пусть $(M, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $T : M \to W$ — биекция. Тогда $\{T(A) \ \mid \ A \in \mathcal{A}\}$ является σ-алгеброй в 2^W, и $\nu(T(A)) = \mu(A)$ (иначе говоря, $\nu(B) = \mu(T^{-1}B))$ есть мера на новой σ-алгебре.

Пространство с мерой $([0,2\pi), \widetilde{\mathcal{A}}_1, \mu)$, где $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \{[0,\pi) \cap A \mid A \in \mathcal{A}_1\}$ и отображение $T(t) = (\cos t, \sin t)$ определяет меру на $W = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. При этом отображении ячейкам $[a,b) \subseteq [0,2\pi)$ соответствуют дуги на W. Возникает пространство с мерой $(W, T(\widetilde{\mathcal{A}}_1), \nu)$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ построить множество $E \subset W$, для которого: 1) $\nu(E) \leq \varepsilon$ и 2) любой многоугольник с вершинами на окружности W можно повернуть так, что все вершины будут лежать в E:

$$\forall\ \{p_k\}_{k=1}^K \subset W \quad \exists \quad q \in [0,2\pi) \text{ такое, что}$$
$$\text{если } p_k = (\cos t_k, \sin t_k), \text{ то } (\cos(t_k + q), \sin(t_k + q)) \in E \text{ при } k \in [1,K] \cap \mathbb{N}.$$

23 Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерами, $\eta = \mu \times \nu$, $A, B \in \mathcal{A}$ и $C, D \in \mathcal{B}$. Выразить через значения мер μ и ν:
1) $\eta\big((A \times C) \cap (B \times D)\big)$, $\quad$ 2) $\eta\big((A \times C) \cup (B \times D)\big)$, в случае конечных значений мер всех сомножителей.

24 Пусть δ_0 и $\delta_{(0,0)}$ это, соответственно, δ-меры Дирака на прямой и на плоскости (проверьте, что $\delta_{(0,0)} = \delta_0 \times \delta_0$). Найти
1) $\mu(B)$, где B — замкнутый круг радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$ для $\mu = \delta_0 \times \delta_0$ и $\mu = \lambda_1 \times \delta_0$;

2) $\mu(R)$, где R — кольцо с центром в точке $(0,0)$ и радиусами 2 и 4 для $\mu=\delta_0\times\delta_0$ и $\mu=\lambda_1\times\delta_0$;
3) $\mu(\Delta)$, где Δ — треугольник, ограниченный прямой $x+y=1$ и осями координат, $\mu=\mu_g\times\mu_h$, $\quad g(t)=t^3$, $h(t)=\operatorname{arctg} t$.

В пространстве с мерой $(M,\mathcal{A},\mu)$ на множестве $E\in\mathcal{A}$ задана последовательность функций $f_k: E\to\mathbb{R}$ и функция $F: E\to\mathbb{R}$. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к F по мере μ на E*, если $\forall\ \sigma>0$

$$\mu\{\ x\in E \quad : \quad |\,f_k(x)-F(x)\,|>\sigma\} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

(обозначается $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mu} F \quad (E)$).

Если $A\neq\varnothing$, $A\subseteq E$ и $\mu A=0$, то на множестве A значения функции F можно изменить, а сходимость по мере сохранится по отношению к новой функции, т.е. предел по мере не является единственным.

Если $E_0\subseteq E$, $E_0\in\mathcal{A}$ и $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mu} F\ (E)$, то $f_k\big|_{E_0} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mu} F\big|_{E_0}\ (E_0)$. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к F, то она сходится и по мере. Эти два свойства иногда помогают отыскать предельную функцию.

25 Пусть $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1}, \text{ если } x>0,\\ -1, \text{ если } x\le 0.\end{cases}$
Будет ли последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на $\mathbb{R}$ по мерам μ_g и λ_1, если
1) $f_k(x)=e^{-kx}$; 2) $f_k(x)=\sin\frac{x}{k}$; 3) $f_k(x)=x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}$;
4) $f_k(x)=\frac{kx^2}{k+x^2}$; 5) $f_k(x)=e^{-\frac{1}{k}(x-k)^2}$?

Ответы

2 1) $B\subseteq X\subseteq A$; 2) $X\cap(A\triangle B)=\varnothing$; 3) $X\supseteq A\triangle B$; 4) $X\subseteq A\triangle B$.

3 Все равенства верные.

4 1) $X\setminus A=B\setminus A$, $\quad A\setminus X=B\cap A$; 2) $X=A\triangle B$.

6 1) Для некоторых $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — да, для некоторых — нет: для $\mathcal{P}_1=\{[0,1],\varnothing\}$ и $\mathcal{Q}_1=\{[2,4],\varnothing\}$ — является полукольцом, для $\mathcal{P}_2=\{[0,2],\varnothing\}$ и $\mathcal{Q}_2=\{[0,1],\varnothing\}$ — нет; 2) является полукольцом; 3) для некоторых $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — да, для некоторых — нет. Для $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{Q}_1$ — да, для $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{Q}_2$— нет.

7 1) является; 2) g есть инъекция либо константа;

3) g есть биекция — в случае, если Y состоит более чем из одной точки, либо константа — если Y одноточечно.

8 $\mathcal{B}(E)=\{\varnothing,\{2\},\{2,4\},\{1,3,5\},\{1,3,4,5\},\{4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$.

9 2) $\mu(B)<+\infty$ и $\mu(B\setminus A)=0$.

10 $\mu(A\triangle B)=0$.

11 1) $\mu^*[0,\pi)=4$ и $\mu^*(\mathbb{N})=+\infty$;

2.в) $\mu_k{}^*([0,\pi)) = \frac{p+1}{2^k}$, если $\pi \in \left[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$, $p \in \mathbb{N}$; $\quad \mu_\infty([0,\pi)) = \pi$.
2.г) σ-алгебра борелевских множеств. μ_∞ — сужение λ_1 на $\mathcal{P}_\infty$.

12 2) нет.

13 1) Нет. $M{=}\{1,2,3\}$, $\mathcal{P}{=}\{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}\}$; $\mu\{1,2\}{=}1$, $\mu\{3\}{=}1$; $A{=}\{1,2\}$, $E{=}\{2,3\}$.

14 $\{a\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a, a+\frac{1}{k})$.

16 1) 8; $\mu_g((-\infty,1]) = \frac{3\pi}{4} + 8$. 2) $[0,\pi] \cup [8, 8{+}\pi]$. 3) $8 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 4) 0.

18 1) $[0,1) \cup [2,3) \cup [4,5)$; 2) $[0,1) \cup [2,3)$; 2) $[0,1) \cup [3.5, 4.5)$.

19 $39\frac{3}{4}$. **20** 15.

21 1) $p = 9, q = 21$; 2) $p = 6, q = 15$; 3) $p = 7, q = 15$; 4) $p = 8, q = 16$.

22 E — открытое, всюду плотное с мерой $\nu E < \varepsilon$.

23 1) $\mu(A \cap B) \cdot \nu(C \cap D)$; 2) $\mu(A)\nu(C) + \mu(B)\nu(D) - \mu(A \cap B)\nu(C \cap D)$.

24 1) $(\lambda_1 \times \delta_0)(B) = 2$, $(\delta_0 \times \delta_0)(B) = 1$; 2) $(\lambda_1 \times \delta_0)(R) = 4$, $(\delta_0 \times \delta_0)(R) = 0$;

3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2 - 1}{2}$.

25 1) Сходится по μ_g и λ_1; 2)–5) есть сходимость по μ_g и нет сходимости по λ_1.

Решения некоторых задач

1 Проверить равенство $\chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.
$\chi_{A\setminus B}(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x \in A \setminus B \;\Leftrightarrow\; x \in A$ и $x \notin B \;\Leftrightarrow\; \chi_A(x) = 1$ и $\chi_B(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \chi_A(1 - \chi_B)) = 1$.

2 3) Решить уравнение $X \cup A = X \cup B$. Если это равенство верно, то $A \subseteq X \cup B \;\Rightarrow A \setminus B \subseteq (X \cup B) \setminus B = X \setminus B \subseteq X$, т.е. $A \setminus B \subseteq X$. Аналогично, $B \setminus A \subseteq X$, откуда $A \triangle B \subseteq X$. Проверим, что это соотношение и есть ответ. Если $A \triangle B \subseteq X$, то X — решение, т.к. из тождества $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ вытекает $X \cup A = \big(X \cup (A \setminus B)\big) \cup (A \cap B) = X \cup (A \cap B)$. Аналогично, $X \cup B = X \cup (A \cap B)$, и равенство верно.

3 3) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$?
Обозначим левую часть через Λ, правую — через Π.

Проверим включение $\Lambda \subseteq \Pi$. $x \in (A \setminus B) \cup C \;\Rightarrow\; x \in (A \setminus B)$ или $x \in C$. 1-й случай: $x \in (A \setminus B) \;\Rightarrow\; x \in A$ и $x \notin B$. Тогда $x \in (A \cup C)$ и $x \notin (B \setminus C) \Rightarrow x \in (A \cup C) \setminus (B \setminus C) = \Pi$. 2-й случай: $x \in C \;\Rightarrow\; x \in (A \cup C)$ и $x \notin (B \setminus C)$, т.е. $x \in (A \cup C) \setminus (B \setminus C) = \Pi$. Включение $\Lambda \subseteq \Pi$ доказано.

Проверим обратное включение $\Pi \subseteq \Lambda$. $y \in \Pi = (A \cup C) \setminus (B \setminus C) \ \Rightarrow\ y \in (A \cup C)$ и $y \notin (B \setminus C)$. 1-й случай: $y \in C \subseteq \Lambda$, т.к. $y \notin (B \setminus C)$. 2-й случай: $y \notin C \ \Rightarrow\ y \in A$ и $y \notin (B \setminus C)$. Т.к. $y \notin C$, то $y \notin B$, значит $y \in A \setminus B \subseteq \Lambda$. Включение $\Pi \subseteq \Lambda$ доказано.

$\boxed{4}$ 2) Применить результат пункта 1). Тогда $X \triangle A = (X \setminus A) \cup (A \setminus X) = (B \setminus A) \cup (B \cap A) = B$.

$\boxed{7}$ 2) Ясно, что постоянное отображение любую систему подмножеств множества X, содержащую пустое множество, переводит в полукольцо $\{\varnothing, g(X)\}$. В силу пункта 1) всякое инъективное отображение также переводит полукольцо в полукольцо (т.к. образ $g(\mathcal{P})$ полукольца $\mathcal{P}$ в этом случае одновременно является прообразом полукольца $\mathcal{P}$ при отображении h обратном к отображению g, рассматриваемом как отображение из X на $g(X)$).

Если отображение g не является инъекцией, то существуют $x_1 \neq x_2 \in X$, для которых $g(x_1) = g(x_2)$. В этом случае образ системы $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{x_1\}, X \setminus \{x_1\}, X\}$ под действием g, т.е. набор $\{\varnothing, \{g(x_1)\}, g(X)\}$ не является полукольцом, значит и σ-алгеброй, в случае, когда g не является константой. В то же время сама система $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй, а значит, и полукольцом.

3) Ясно, что всякое отображение переводящее σ-алгебру в σ-алгебру, является сюръекцией. Как показывает пример из решения 2), если Y состоит более чем одной точки, то такое отображение является инъекцией. В случае одноточечного множества Y единственное (постоянное) отображение из X в Y обладает требуемым свойством при любом X.

$\boxed{15}$ По теореме Лагранжа $\mu_g([a,b)) = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{b-a}{1+c^2}$ для некоторого $c \in (a,b)$, откуда вытекает двусторонняя оценка для $\mu_g([a,b))$:

$$\frac{b-a}{1+(|a|+|b|)^2} \leq \mu_g([a,b)) \leq b-a = \lambda_1([a,b)).$$

Если E ограничено, $E \subseteq [-T,T]$ $(T \in \mathbb{R})$, то заменим в формуле

$$\mu_g E = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g[a_k,b_k) \quad : \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k,b_k) \right\}$$

ячейки $[a_k,b_k)$ на новые меньшие $[\max\{a_k,-T\}, \min\{b_k,T\}) = [\tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \subseteq [a_k,b_k)$. Новые ячейки образуют покрытие с меньшей суммой мер или совпадающей со старой. При этом $\frac{1}{1+T^2}\lambda_1(E) \leq \mu_g(E) \leq \lambda_1(E)$. Утверждение о равносильности условий $\lambda_1(E)=0$ и $\mu_g(E)=0$ доказано для ограниченных множеств.

В неограниченном случае полагая $E_m = E \cap [-m,m]$, получаем $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$. Тогда

$$\mu_g E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ m \ \ \mu_g E_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ m \ \ \lambda_1 E_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 E = 0.$$

$\boxed{18}$ 1) Требуется найти $\max \lambda_1 E$, если $E \subset [0,5]$, и $\forall\ x,y \in E \quad |x-y| \neq 1$. Из второго условия получается $E \cap (1+E) = \varnothing$, а из первого вытекает $E \cup (1+E) \subseteq [0,6]$. Стало быть, $\lambda_1(E) + \lambda_1(1+E) \leq 6$. Но $\lambda_1(E) = \lambda_1(1+E)$, т.е. $\lambda_1(E) \leq 3$. В то же время для $E = [0,1) \cup [2,3) \cup [4,5)$ имеем $\lambda_1(E) = 3$.

2) Пусть $E \subseteq [0,4]$ и для $\forall\, x, y \in E \quad |x-y| \neq 1$. Оценим $\lambda_1 E$.

$$\lambda_1 E = \lambda_1(E \cap [0,1)) + \lambda_1(E \cap [1,2)) + \lambda_1(E \cap [2,3)) + \lambda_1(E \cap [3,4)) + \lambda_1(E \cap \{4\}) =$$
$$= \lambda_1\big(E \cap [0,1)\big) + \lambda_1\big(-1 + E \cap [1,2)\big) + \lambda_1\big(E \cap [2,3)\big) + \lambda_1\big(-1 + E \cap [3,4)\big) =$$
$$= \lambda_1\Big(\big(E \cap [0,1)\,\big) \cup \big(-1 + E \cap [1,2)\,\big)\Big) + \lambda_1\Big(\big(E \cap [2,3)\,\big) \cup \big(-1 + E \cap [3,4)\,\big)\Big) \leq$$
$$\leq 1 + 1 = 2.$$

При $E = [0,1) \cap [2,3)$ получим меру 2.

$\boxed{\mathbf{21}}$ 3) Пусть $M \in \mathcal{A}_2$, $\lambda_2(M) = 10$, $\quad A, B, C \subseteq M$, $A, B, C \in \mathcal{A}_2$, $\lambda_2(A \cup B) = 4$, $\lambda_2((C \setminus A) \cup B) = 7$. Нужны точные оценки p и q суммы мер

$$p \leq \lambda_2(A) + \lambda_2(B) + \lambda_2(C) \leq q.$$

Оценка снизу:

$$\lambda_2(A) + \lambda_2(B) + \lambda_2(C) \geq \lambda_2(C \cup B) \geq \lambda_2((C \setminus A) \cup B) = 7.$$

Т.о. $p \geq 7$. Неравенства превращаются в равенства, если $\lambda_2 A = 0$ и $\lambda_2(C \cap B) = 0$, что верно в случае $A = \varnothing$, $\lambda_2 B = 4$, $C \cap B = \varnothing$ и $\lambda_2 C = 3$ (из утверждения задачи **17** такие B и C найдутся). Т.е. $p = 7$.

Оценка сверху. Преобразуем

$$(C \setminus A) \cup B = \big(C \setminus (A \cap C)\big) \cup B = (C \cup B) \setminus \big((A \cap C) \setminus B\big) = (C \cup B) \setminus \big((A \setminus B) \cap C\big) = D,$$

$\lambda_2(D) = 7$ (мы использовали задачу **3**).

$$\lambda_2(A) + \lambda_2(B) + \lambda_2(C) = \lambda_2(A) + \lambda_2(C \cup B) + \lambda_2(C \cap B) =$$
$$= \lambda_2(A) + \lambda_2(D) + \lambda_2\Big((C \cup B) \cap \big((A \setminus B) \cap C\big)\Big) + \lambda_2(B \cap C) =$$
$$= \lambda_2(A) + 7 + \lambda_2\big(C \cap (A \setminus B)\big) + \lambda_2(B \cap C) \ \leq$$
$$\leq \lambda_2(A \cup B) + 7 + \lambda_2(A \setminus B) + \lambda_2(B) = 7 + 2\lambda_2(A \cup B) = 7 + 8 = 15,$$

единственное неравенство в этой цепочке вытекает из включений $C \cap (A \setminus B) \subseteq A \setminus B$ и $B \cap C \subseteq B$, то есть $\lambda_2\big(C \cap (A \setminus B)\big)$ и $\lambda_2(B \cap C)$ выражают меры непересекающихся подмножеств множества $A \cup B$. Итак, $q \leq 15$. Неравенство превращается в равенство, если $B \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq C$, $B \subseteq C$, т.е. $A \subseteq B \subseteq C$. Для $A = B$ и $C \supseteq A$ таких, что $\lambda_2 A = 4$, $\lambda_2 C = 7$ интересующая сумма мер равна 15.

$\boxed{\mathbf{24}}$ 1) B — замкнутый круг радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$, найдем $\mu(B)$ для $\mu = \lambda_1 \times \delta_0$. Заметим, что $\mu\big(B \setminus ([0,2] \times \{0\})\big) = 0$, ибо $B \setminus ([0,2] \times \{0\}) \subseteq [0,2] \times ([-1,1] \setminus \{0\})$, а последнее — множество нулевой меры, т.к. $(\lambda_1 \times \delta_0)\big([0,2] \times ([-1,1] \setminus \{0\})\big) = \lambda_1([0,2]) \cdot \delta_0([-1,1] \setminus \{0\}) = 2 \cdot 0 = 0$. Т.о. $\mu(B) = \mu([0,2] \times \{0\}) = 2 \cdot 1 = 2$.

Список литературы

[1] Богачев В. И. *Основы теории меры. Том 1*// Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003.

[2] Виноградов О. Л. *Математический анализ*// СПб.: БХВ-Петербрг, 2017.

[3] Макаров Б. М., Флоринская Л. В. *Теория меры и интеграла, Вып.1 "Мера. Измеримые функции"*// Л.: ЛГУ, 1974.

[4] Макаров Б. М., Подкорытов А. Н. *Лекции по вещественному анализу*// СПб.: БХВ-Петербрг, 2011.

Содержание