

Учебные и контрольные задания по математике

Математический анализ



2 издание, исправленное и дополненное



ОЦЭиМ
Санкт-Петербург
2006

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Учебные и контрольные задания по математике

Математический анализ

2 издание, исправленное и дополненное



ОЦЭиМ
Санкт-Петербург
2006

ББК 22.161 я73
В67

Ответственный за выпуск: декан спец. экономического ф-та СПбГУ
проф. И.П. Бойко

Рецензент: проф. мат.-мех. ф-та СПбГУ Ю.В. Чуриш

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета экономического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

**Волков В.А., Ижболдин О.Т., Малолеткин Г.Н., Семенов А.А.,
В67 Фесенко И.Б., Халин В.Г., Черняев П.К.**

Учебные и контрольные задания по математике. Математический анализ.
Учебное пособие. 2 изд., испр. и доп. – СПб.: ОЦЭиМ, 2006. – 102 стр.

ISBN 5-356-00014-6

Настоящее издание представляет собой первую часть пособия, адресовано в первую очередь студентам-экономистам. Кроме задач для аудиторных и самостоятельных занятий, в пособии приведено по 30 вариантов контрольных работ по каждой теме.

Предназначено для студентов социально-экономических специальностей, а также преподавателей университетов.

Без объявл.

ББК 22.161 я73

ISBN 5-356-00014-6

© В.А. Волков и др., 2006
© ОЦЭиМ, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАНИЯ.....	5
ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА.....	—
§ 1. Понятие множества, подмножества, вложения.....	—
§ 2. Операции над множествами.....	6
§ 3. Эквивалентность множеств.....	7
Контрольное задание №1.....	8
ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ.....	9
§ 1. Первоначальные понятия о функциях.....	—
Контрольное задание №2.....	10
§ 2. Пределы функций. Бесконечно малые.....	12
Контрольное задание №3.....	14
§ 3. Непрерывные функции. Точки разрыва функций.....	22
Контрольное задание №4.....	23
ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.....	29
§ 1. Производная и дифференциал.....	30
Контрольное задание №5.....	32
Контрольное задание №6.....	35
Контрольное задание №7.....	36
§ 2. Приложения производной.....	—
Контрольное задание №8.....	39
Контрольное задание №9.....	41
ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	43
§ 1. Вычисление интегралов и исследование их свойств.....	44
Контрольное задание №10.....	49
Контрольное задание №11.....	53
Контрольное задание №12.....	58
Контрольное задание №13.....	62
ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.....	63
§ 1. Числовые ряды.....	—
Контрольное задание № 14.....	64
§ 2. Степенные ряды.....	69
Контрольное задание №15.....	70
Контрольное задание №16.....	—
ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	72
§ 1. Основные понятия.....	—
Контрольное задание №17.....	73
§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций.....	75
Контрольное задание №18.....	76

§ 3. Экстремумы функций.....	80
Контрольное задание №19.....	—
ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ.....	84
ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА.....	—
ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ.....	85
ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.....	86
ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	92
ГЛАВА 5 ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.....	95
ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	96

ЗАДАНИЯ

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА

§1. Понятие множества, подмножества, вложения

1. Найти все подмножества множества $\{1, A, Z\}$. Какие из подмножеств являются собственными?
2. Пусть $A = \{\{1, 2\}, 3\}$. Сколько элементов в множестве A ?
Найти все подмножества множества A .
3. Пусть $A = \{1, 7, \{5\}\}$. Какие утверждения верны:
 $1 \in A$, $1 \subset A$, $5 \in A$, $5 \subset A$, $\{7\} \in A$, $\{7\} \subset A$, $\{5\} \in A$, $\{5\} \subset A$?
4. Доказать, что если
 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, то $A = B$.
5. Верно ли, что $\emptyset = \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$?
6. Изобразить на числовой прямой следующие множества:
 $\{1, 2\}$, $(3, 4)$, $[5, 7]$.
7. Пусть A, B, C — три множества. Верно ли, что:
 - a) $A \subset A$;
 - b) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
 - c) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;
 - d) если $A = B$, то $A \subset B$ и $B \subset A$.
8. Доказать, что для любого множества A из универсального множества J имеют место следующие соотношения:
 - a) $\emptyset \subset A \subset J$;
 - b) если $A \subset \emptyset$, то $A = \emptyset$;
 - c) если $J \subset A$, то $J = A$.
9. Пусть $X = \{\{1, 2\}, 1, \{7\}, 2\}$.
Найти такие множества A, B, C , что:
 - a) $A \in X$, $A \not\subset X$;
 - b) $B \not\in X$, $B \subset X$;
 - c) $C \in X$, $C \subset X$.
10. Доказать, что число подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n .

§ 2. Операции над множествами

1. Пусть $A = \{1, 2, 7\}$, $B = \{1, 5, 7\}$.

Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Пусть A — множество студентов в одной из групп факультета, B — множество отличников на факультете. Какие множества студентов описывают множества $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

3. Пусть A , B и C — следующие подмножества плоскости:

$A = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ — круг единичного радиуса с центром в начале координат,

$B = \{(x; y) \mid x \geq 0\}$, $C = \{(x; y) \mid y \geq 0\}$.

Изобразить на плоскости множества $A \cap B \cap C$, $A \cap (B \cup C)$ и $(A \setminus B) \cap C$.

4. Доказать тождества:

$A \cup \emptyset = A$, $A \cup J = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap J = A$, $A \cup A' = J$,
 $A \cap A' = \emptyset$, $(A')' = A$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $A \setminus B = A \cap B'$.

5. Доказать, что если $A = B'$, то $A' = B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = J$.

6. Доказать, что если $A \cup B = A \cap B$, то $A = B$.

7. Доказать тождество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

8. Даны множества A , B и C . С помощью операций объединения, пересечения и разности записать множества, состоящие из элементов, принадлежащих:

а) всем трем множествам;

б) хотя бы одному из множеств;

в) ровно одному из множеств A , B и C ;

г) по крайней мере двум из этих множеств.

9. Множество M состоит из m элементов, множество N состоит из n элементов, а их объединение $M \cup N$ содержит k элементов. Сколько элементов содержит их пересечение $M \cap N$?

10. Дана последовательность множеств $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$,

$A_3 = [0, \frac{1}{3}]$, ..., $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, ... Найти $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

§3. Эквивалентность множеств

1. Установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B :
 - a) $A = \{5, 3, 7\}$, $B = \{7, x, y\}$;
 - b) A — множество нечетных чисел,
 B — множество натуральных чисел;
 - c) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2,]$;
 - d) $A = (-\infty, +\infty)$, $B = (-1, 1)$;
 - e) A — множество натуральных,
а B — множество целых чисел.
2. Верны ли следующие утверждения:
 - a) если $A \sim B$, то $A = B$;
 - b) если $A = B$, то $A \sim B$.
3. Верно ли, что множество $\{1, 2, 3, 4\}$ является счетным?
4. Доказать, что множество целых чисел, делящихся на 10, счетно.
5. Доказать, что множество точек плоскости с целыми координатами счетно.
6. Доказать, что объединение двух счетных множеств счетно.
7. Доказать, что если $A \cap B$ счетно, то либо A , либо B счетны.
8. Приведите пример таких трех бесконечных множеств A, B, C , что никакие два из них не эквивалентны.
9. Пусть A — круг радиуса 1, B — круг радиуса 2. Эквивалентны ли множества A и B ?
10. Доказать, что если все множества $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ счетны, то счетно и их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Контрольное задание №1.

Доказать, что:

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
5. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.
6. $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. $(A \cap B) \cup (C \cap E) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup E) \cap (B \cup E)$.
9. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$.
10. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
11. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
12. $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$.
13. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
14. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B')$.
15. $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$.
16. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
17. $(A \setminus B)' = A' \cup (A \cap B)$.
18. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
19. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
20. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$.
21. $(A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B) = A \cup B$.
22. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$.
23. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

24. $(A \cup B)' \setminus C' = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
 25. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
 26. $(A \cup B)' \setminus C = A' \cap B' \cap C'$.
 27. $C' \setminus (A \cup B)' = (A \cup B) \setminus C$.
 28. $C \setminus (A \cap B)' = A \cap B \cap C$.
 29. $(A \cap B) \setminus C' = A \cap B \cap C$.
 30. $A \cup B \cup (A' \cup B') = J$.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ

§ 1. Первоначальные понятия о функциях

1. Найти область определения следующих функций:

- a) $f(x) = \frac{1}{4}x - x^3$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$;
 c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; d) $f(x) = \sqrt{\sin x}$;
 e) $f(x) = \arcsin \frac{2}{x-3}$; f) $f(x) = \log_{\cos x} x$;
 g) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$; h) $f(x) = \arccos \frac{3}{x+1}$.

2. Выяснить, являются ли следующие функции четными или нечетными:

- a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; b) $f(x) = \log_2 x$;
 c) $f(x) = 2^{1/x}$; d) $f(x) = \sin^2 x$;
 e) $f(x) = \sin \frac{1}{x} + x$; f) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$;
 g) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$; h) $f(x) = \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x$.

3. Выяснить, являются ли следующие функции периодическими, и в случае положительного ответа указать их наименьший положительный период:

- a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; b) $f(x) = 10^x$;
 c) $f(x) = \cos 2x$; d) $f(x) = \ln \cos x$;
 e) $f(x) = \ln x$; f) $f(x) = \arcsin x$;
 g) $f(x) = \sin 2x \sin 3x$.

Контрольное задание №2.

Найти область определения и исследовать на четность, нечетность и периодичность следующие функции:

1. $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$, $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$, $y = \cos^2 x + \sin x$.
2. $y = \log_x \frac{4-x^2}{x}$, $y = \sin 2x$, $y = \sqrt{x}$.
3. $y = \log_x (x-2)^2$, $y = \cos (2x + \pi/3)$, $y = 5^{2x+1}$.
4. $y = \sqrt{x^3 - x}$, $y = 2^{\lg|x|}$, $y = \sin(x+2)$.
5. $y = 2^{\sqrt{x}}$, $y = 10^{\cos x}$, $y = \cos 2x + \operatorname{tg} x$.
6. $y = \lg(1-x)$, $y = \sin \lg x$, $y = 3^{x^2}$.
7. $y = \sqrt{2^x - 1}$, $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $y = \sin 2x + \operatorname{tg} x$.
8. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$, $y = \frac{9^x + 1}{3^x}$, $y = 2 \operatorname{tg} x - 3$.
9. $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $y = \lg(x^2 - x)$, $y = \sin(2x - 3)$.
10. $y = \lg(1 - x^3)$, $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$, $y = \cos x \cos 2x$.
11. $y = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2^x - 3}$, $y = \sin^2 x + \lg x$, $y = \sqrt[3]{x}$.
12. $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$, $y = \operatorname{ctg} x - 1$, $y = \frac{1}{x+2}$.
13. $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$, $y = \sqrt{\sin 2x}$, $y = \operatorname{ctg} x - \cos x$.

$$14. y = \frac{1}{\lg(x+1)}, \quad y = \sin x + \sin 2x, \quad y = x\sqrt{x}.$$

$$15. y = \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad y = x^2 - 2x - 4, \quad y = \sin\left(\frac{x + \pi}{2}\right).$$

$$16. y = \sqrt{\frac{x-2}{x}}, \quad y = \lg \operatorname{tg} x, \quad y = \cos x + \cos 2x.$$

$$17. y = \lg(2^x - 1), \quad y = \cos x - \lg x, \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$18. y = \sin\left(\frac{x}{1+x}\right), \quad y = 2^{\cos x}, \quad y = \frac{1}{\lg(3-x)}.$$

$$19. y = \log_x(x-1), \quad y = x^2 + x - 5, \quad y = 2^{\operatorname{tg} x}.$$

$$20. y = \sqrt{2 \sin x + 1}, \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad y = \lg_{\sin x} 2.$$

$$21. y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad y = \cos x \sin x, \quad y = \frac{1}{2^x + 2^{-x}}.$$

$$22. y = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}, \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad y = \lg_{\cos x} 3.$$

$$23. y = \lg(1 - \sqrt{x}), \quad y = \frac{2x^4 + 3x^2 - 1}{\cos x}, \quad y = \sin 2x + \operatorname{ctg} x.$$

$$24. y = \log_{x^2}(x-2), \quad y = x^3 - 2x + 1, \quad y = \operatorname{tg} 2^x.$$

$$25. y = \frac{1}{\sqrt{2^x - 1}}, \quad y = \sin \operatorname{tg} x, \quad y = 3^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$26. y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}, \quad y = \cos x^3 + \sin x, \quad y = \frac{1}{\lg|x|}.$$

$$27. y = \lg(x^2 - x), \quad y = \cos \operatorname{tg} x, \quad y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}.$$

$$28. y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}, \quad y = 2^{\sin x}, \quad y = \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right).$$

$$29. y = \log_x 2 + \log_2(1-x), \quad y = x + \sin x, \quad y = 3 \operatorname{ctg} x - 2.$$

$$30. y = \frac{x}{\sqrt{-x^2 - x + 2}}, \quad y = 2^{-x \ln x}, \quad y = \sin x \cos 3x.$$

§ 2. Пределы функций. Бесконечно малые

1. Вычислить пределы, пользуясь их основными свойствами:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{1}{x}\right)$; d) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x + x^2}$;
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \cos x}{\arccos \sin x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cos x}$.

2. Раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$;
b) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 1}{\sin^2 x - \sin x - 2}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$;
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x - x^2}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$;
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x^2 - x}$;
j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}{x}$.

3. Раскрыть неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{100x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt[4]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 - \sqrt{x + 2}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 1}{5 \cdot 2^x - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} 2x}$.

4. Раскрыть неопределенности вида $\infty - \infty$:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$;
b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{4(x-2)}\right)$;

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right); \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x}{x} - \frac{3^x}{x} \right).$$

5. Раскрыть неопределенности вида 1^∞ :

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

6. Раскрыть неопределенности вида $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x+1) - \ln x);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + x)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

7. Найти порядок бесконечно малой функции $f(x)$ относительно бесконечно малой функции $g(x)$ при $x \rightarrow 0$:

$$a) f(x) = 2\sqrt{\sin x}, \quad g(x) = x;$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad g(x) = x;$$

$$c) f(x) = \operatorname{tg} x + x^2, \quad g(x) = \sqrt{x};$$

$$d) f(x) = \sin 5x + \sin x^2, \quad g(x) = \operatorname{tg} x.$$

8. Пользуясь свойствами бесконечно малых, вычислить пределы

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2^{1/x} - 1 \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{arctg} x \sqrt{x^5 + x^2})}{(1 + \arcsin x^2)^{3/4} - 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin^2 x - \sin 4x}{3^x + 4^x - 2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

9. Вычислить пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt{3+x^2} - 2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}};$$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^7 - (1+x)^{7/2}}{x}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{(1+x)^{3/5} - 1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 4^x}{3^x - 4^x}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x-x^3} + \sqrt[3]{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{1-x} + 1}$;
- g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2-1)(x^4+2)}{(x^3-2)(x^5+1)}$;
- h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} + 2 \cdot 3^x + 1}{4 \cdot 3^x - 1}$; i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$;
- j) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \right)$;
- k) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right)$; l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+1}$;
- m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \right)^x$; n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} \ln \left(\frac{1-x}{1+2x} \right)$;
- o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\lg(x+2) - \lg(x+1))$;
- p) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{x}}$; q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right)^{\sqrt{x}}$;
- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 2x + x^3}$;
- s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sqrt{x}} \left(2^{\sin x} + 2^{2x} - 2 \right)$;
- t) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\arcsin \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{1}{x}} - 1 \right)$.

Контрольное задание №3.

Вычислить пределы:

1. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \right)$;

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{x^2};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 3^x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\sin \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$2. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 4};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \arcsin x^2)}{(1 + \sin x)^{3/2} - 1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(3^{\frac{1}{x^2+x}} - 1 \right);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{2}{x^2 - 2x - 3} \right).$$

$$3. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 20}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x-3};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2^{1/x} - 3^{1/x} \right);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x}.$$

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\pi - 4x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 1}{5 \cdot 3^x + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +0} x |\operatorname{ctg} x|;$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 2 \sin x)}{x - x^2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\arcsin \sqrt[5]{x}}.$$

$$5. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x + \sin x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -0} x |\operatorname{ctg} x|;$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt[3]{\sin x}}{x - \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}.$$

$$6. a) \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}}{x + \sqrt{x}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x-1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \arcsin 2x}{\operatorname{tg} 2x \arcsin x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 4^{1/x}).$$

$$7. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 4} - 2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{\cos 4x - \cos x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{x+1} + 2}{3 \cdot 7^x + 1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin^3(\sqrt[3]{x}) \right)^{1/x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2^{\sin \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$8. a) \lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^3 + x} - \sqrt{x^3 - 1} \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-2}{x+2};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{tg} x}{|x|};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{tg}(2x + \sqrt{x})}{(x+1)^3 - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{\ln(1+x^2)}.$$

$$9. a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - 4x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{3}{x^2 + 5x - 14} \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} x)^{1/x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\operatorname{tg} x}{|x|};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(x^2 + \operatorname{tg} x)};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1).$$

$$10. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x+2} + 3}{1 - 5^x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{1+x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arcsin} 2x}{\sin x^3 + 2x^2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

$$11. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9}{3^{2x} - 9};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x + x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3}{x^2 - x - 2} \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2x^2 + x}{\sin(1+x)};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x^2}{\operatorname{arcsin} x \operatorname{tg} x^2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(5^{\sin \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$12. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - x^5}{1 - x^3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{1-x^3}}{\sqrt[4]{x^2 - x^7} + x} \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{1 - 2 \frac{1}{x-2}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x^2}{\operatorname{tg} x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3^{\frac{1}{x^2+x}} - 1 \right).$$

$$13. a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{3 - \sqrt{x+4}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x + \sin x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{2^{2x+1} + 2^x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x-1}}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}} - 1).$$

$$14. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 2x^2 - 3x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin \sqrt{x}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{ctg} (x + \frac{\pi}{2})};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} - 1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \operatorname{tg} x)}{\ln(1 + 2 \operatorname{tg} x)};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x(5^{1/x} - 6^{1/x}).$$

$$15. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x - x} - x}{x - 3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x - x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2})};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right)^{x+1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{-1 + 4^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 2x - \sin x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{1/x^2} + 3^{1/x^2} - 2)(x^2 + x).$$

$$16. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 4x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - x\sqrt{3});$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln \frac{1 - 2x}{1 + x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^5 - 1}{(1 + \operatorname{tg} x)^7 - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(6^{\sin \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$17. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{\cos 4x - \cos x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+3) - \ln(x-1));$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \operatorname{tg} x^2}{\arcsin x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right).$$

$$18. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 8};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x - 4x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2^x + 1}{3^{x+1} - 2^x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x}} \right)^{\sqrt{x}};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+x^2} \ln(1+2 \operatorname{arctg} x).$$

$$19. a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x^2-x}}{\sqrt[2]{x^3-2} + \sqrt[3]{x^4+x^2}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5} \right)^{7x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2 \operatorname{tg} x)}{\ln(1-3 \sin x)};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}} - 1 \right).$$

$$20. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+3) - \ln x); \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x);$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x^2 - 1|}{\sin(x-1)};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin 2x)^3 - 1}{(1 - 3x)^4 - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right).$$

$$21. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{1+x}}{\sin(x-3)};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sin x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{1}{2 \sin x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)(x^4 + 4)}{x^6 - 4x^2 + 2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$22. a) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x - x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x(x-2)} - x;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x^2}{\sin x - \sin 3x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x^2 - 1|}{\sin(x-1)};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arctg} x \operatorname{arcsin} 7x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x) \operatorname{arcsin} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$23. a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{10-x}-3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x^2-1} + \sqrt[3]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3+x^6}-x^2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-1} \right)^{2x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi+0} 2^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{arcsin} x^2)}{(1 + 2x)^7 - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) \operatorname{arcsin} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

$$24. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}-x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos 2x - 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 3^x + 2^x}{5^{x+1} + 3^{x+1} - 2^x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right)^{\sqrt{x}};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \frac{1}{2^{\cos x}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \operatorname{tg} 2x)^{1/3} - 1}{(1+x)^3 - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \operatorname{arcsin} \frac{1}{x^2 + x} \right).$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3};$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{1+x)^3 - 1};$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$\text{ d) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{2x-\pi}};$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} 2^{\frac{1}{\cos x}};$$

$$\text{ f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin 3x)}{\arcsin(\operatorname{tg} 2x)};$$

$$\text{ g) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}(x-\pi)}.$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 5x + 1});$$

$$\text{ d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x};$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 3^{\operatorname{ctg} x}};$$

$$\text{ f) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(1 - \sin \sqrt{x}); \quad \text{ g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} - 1};$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x)}{\lg x};$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{3}{x^2 - 9} \right);$$

$$\text{ d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+3} \right)^{x-2};$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 3^{\operatorname{ctg} x}};$$

$$\text{ f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^8 - 1}{(1 + 2 \sin x)^6 - 1};$$

$$\text{ g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \lg \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x + \sqrt{x}} \right).$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2}{1 - \sqrt{x}};$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - 1};$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin 2x};$$

$$\text{ d) } \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} 5^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(2x-3)(3x-4)}{(x-2)(2x+1)^2(3x-4)};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} \ln(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{x});$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$29. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x + x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\operatorname{tg} x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +0} 5^{\frac{1}{1 - \cos x}};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin 5x}{\sin(\operatorname{tg} x^3)};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(1 + x)}{x^2 - x - 2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^5 - 1}}{2x^2 - \sqrt[3]{x^7 + x^6}}.$$

$$30. a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x + x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x - 1} \right)^{3x+2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi/4-0} \frac{1}{1 + e^{\operatorname{tg} 2x}};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x \sin x)^7 - (1 + x^2)^9}{(1 + \operatorname{tg} x^2)^5 - 1}.$$

§3. Непрерывные функции. Точки разрыва функций

Исследовать на непрерывность, то есть найти область непрерывности и вид точек разрыва, и построить графики функций $f(x)$.

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0 \\ \ln x, & \text{если } 0 < x \leq e \\ 0, & \text{если } x > e \end{cases}$$

$$3. f(x) = e^{1/x}$$

$$4. f(x) = \operatorname{tg}(2x - \pi)$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}, & \text{если } x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{если } x = -1 \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

Контрольное задание №4.

Исследовать на непрерывность, то есть найти область непрерывности и вид точек разрыва, и построить графики функций $f(x)$.

$$1. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{если } x < -1, \\ -x^2 + 4, & \text{если } -1 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 2^{-1/x}.$$

$$2. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1}, & \text{если } x < 0, \\ 2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ x-3, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$3. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ -x+2, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ x-\pi, & \text{если } x \geq \pi; \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & \text{если } x < 0, \\ 0 & , \text{если } x = 0, \\ \ln x & , \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & \text{если } x \leq 1, \\ \sin(x - 1), & \text{если } 1 < x < \pi + 1, \\ 2x - \pi & , \text{если } x \geq \pi + 1; \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & \text{если } x < -3, \\ x & , \text{если } -3 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x} & , \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < 0, \\ 1 & , \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x+1} & , \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 1, \\ \ln x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 1 - 2^{-1/x}.$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 4 & , \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 5 & , \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \leq \pi, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если } \pi < x < 2\pi, \\ x + 1, & \text{если } x \geq 2\pi; \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1, \\ 3^x, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ x + 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x - 5, & \text{если } x < 2, \\ 2x - 1, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ -x + 3, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x}{x+1}, & \text{если } 0 < x < 3, \\ x - 1, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < 0, \\ 3^{-x}, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \ln(-x + 10), & \text{если } x < 0, \\ 2x + 3, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{если } x < -1, \\ \frac{1}{x+2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}(9x+2) - 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$13. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ \cos x, & \text{если } x \geq \pi; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 3^{-\frac{1}{x+1}}.$$

$$14. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \log_2(-2x), & \text{если } x < 0, \\ x^2 + 2x + 1, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 1 - e^{1 - \frac{1}{x}}.$$

$$15. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 \leq x < 4, \\ \sqrt{x-3}, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-3}(9x+2) - 1, & \text{если } x < 3, \\ -x^2 - 2x - 1, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ \sin 2x + 1, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < -1, \\ \arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{если } x < 2, \\ x^2 + 2x - 3, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & \text{если } x < -1, \\ \arccos x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 2^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$19. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - x - 6|}{x^2 - x - 6}, & \text{если } x \neq -2, x \neq 3, \\ 2, & \text{если } x = 3, \\ -3, & \text{если } x = -2; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < -2, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ x^2 - 1, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{если } x < \pi, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{если } x \geq \pi; \end{cases}$$

$$21. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x < -1, \\ x + \frac{\pi}{4}, & \text{если } x \geq -1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < 0, \\ \sin 2x - 1, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{если } x < -2, \\ x, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 2^{x+1}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ 2x - 3, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \left| 2^{-\frac{1}{x}} \right|.$$

$$24. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{если } 0 \leq x < 2,5, \\ 2x - 3, & \text{если } x \geq 2,5; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \lg(-x + 1), & \text{если } x < 1, \\ x - 2, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & \text{если } x < 1, \\ x^2 + 3x + 3, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & \text{если } x < 0, \\ 2x + 2, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \left| 3^{-\frac{1}{x}} \right|.$$

$$27. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{arccos} x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 2 \left| \frac{1}{x} \right|.$$

$$28. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{arcsin} x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,5, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{если } x > 0,5; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 3^{-\left| \frac{1}{x} \right|}.$$

$$29. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{если } x < -1, \\ \operatorname{arccos} x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 + x^2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \ln |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$30. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = 2^{|x|}.$$

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Основные правила дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (cu)' = cu', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

где c — постоянная, u и v — функции.

Если φ — сложная функция, $\varphi(x) = u(v(x))$,

то $\varphi'_x = u'_v v'_x$, или $(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x)$.

Производные основных элементарных функций

$$c' = 0;$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u';$$

$$(e^u)' = e^u u';$$

$$(a^u)' = a^u \ln a u';$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u';$$

$$(\sin u)' = \cos u u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u';$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u';$$

§ 1. Производная и дифференциал

1. Вычислить производные следующих функций:

a) $y = 5x^3 - 7x^2 + 10,$

b) $y = 3\sqrt[4]{x},$

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2},$

d) $y = \frac{\sqrt{x} + 3}{3x^2},$

e) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1,$

f) $y = (x^2 + x - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right),$

g) $y = 3 \cdot 5^x,$

h) $y = 1 + x + \ln x,$

i) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1},$

j) $y = \frac{\ln x + x}{\ln x},$

k) $y = e^x \ln x,$

l) $y = \frac{1 + (3x + 1) \lg x}{1 + \lg x},$

m) $y = 5x^2 \sin x,$

n) $y = 3 \operatorname{tg} x + x + 1,$

o) $y = \frac{\cos x + 1}{2 \sin x},$

p) $y = \ln x + (e^x + 1) \operatorname{ctg} x,$

q) $y = x \arcsin x,$

r) $y = 5 \arcsin x - 3 \arccos x,$

s) $y = e^x \operatorname{arctg} x,$

t) $y = \frac{\operatorname{arctg} x + 1}{x}.$

2. Вычислить производные следующих функций:

a) $y = (x^2 - 5x + 8)^6,$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^4},$

c) $y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2},$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}},$

e) $y = 3\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right),$

f) $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 2}),$

g) $y = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x},$

h) $y = \ln \sqrt{\frac{1 - 4x}{1 + 4x}},$

i) $y = \sqrt{e^x} \ln x^2,$

j) $y = \sqrt{\cos 2x},$

$$\text{k) } y = \frac{1}{\text{ctg}^2 2x},$$

$$\text{l) } y = e^{\sin \ln(x+1)},$$

$$\text{m) } y = (2x + \text{tg}(3x + 1))^2, \quad \text{n) } y = \text{arctg} \sqrt{x+1},$$

$$\text{o) } y = 2 \arcsin 3x + 3 \arccos x, \quad \text{p) } y = x(\arcsin x + \arccos x),$$

$$\text{q) } y = \frac{\arccos x}{\arcsin x},$$

$$\text{r) } y = \frac{x^2}{e^{1-x}},$$

$$\text{s) } y = x^{-x},$$

$$\text{t) } y = (\sin x)^{\text{tg} x+1}.$$

3. Вычислить значение производной в точке x_0 для следующих функций:

$$\text{a) } y = \frac{1}{1 + \sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{b) } y = \sin x - \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{c) } y = \text{tg} 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{d) } y = \arcsin x - \arccos x, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{e) } y = \text{arctg} x, \quad x_0 = -\frac{1}{3}, \quad \text{f) } y = \ln \sqrt{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{g) } y = e^{-2x}, \quad x_0 = \ln 2, \quad \text{h) } y = \sqrt{3+x^2}, \quad x_0 = 1,$$

$$\text{i) } y = \frac{1}{(x^2 - 2)^4}, \quad x_0 = \sqrt{3}, \quad \text{j) } y = (x^3 - 2)^2, \quad x_0 = 1,$$

$$\text{k) } y = \sqrt{x^2 - x - 1}, \quad x_0 = 2, \quad \text{l) } y = \frac{(x^3 + 1)^2}{(x^3 - 1)^2}, \quad x_0 = \sqrt[3]{2}.$$

4. Вычислить производные указанных порядков для следующих функций:

$$\text{a) } y = \ln \cos x, \quad y''',$$

$$\text{b) } y = \ln \text{ctg} x, \quad y''',$$

$$\text{c) } y = e^{-x^2}, \quad y''',$$

$$\text{d) } y = e^{5x}, \quad y^v,$$

$$\text{e) } y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y''',$$

$$\text{f) } y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}, \quad y'',$$

$$\text{g) } y = \frac{e^x}{x+1}, \quad y'',$$

$$\text{h) } y = \frac{1}{\cos x}, \quad y''',$$

$$\text{i) } y = \text{tg} x, \quad y''',$$

$$\text{j) } y = \sin 5x, \quad y''',$$

$$\text{k) } y = \text{arctg} \sqrt{x}, \quad y'',$$

$$\text{l) } y = x^2 \ln x, \quad y''',$$

$$m) y = \frac{1}{x-1}, y^{IV},$$

$$n) y = \operatorname{tg}^2 x, y''',$$

$$o) y = x^2 e^{-x}, y^{IV}.$$

5. Вычислить дифференциалы следующих функций:

$$a) y = 3\sqrt[3]{x},$$

$$b) y = (x^3 - 1)^2,$$

$$c) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1},$$

$$d) y = e^{x^2},$$

$$e) y = \ln(\sqrt{x} + 1),$$

$$f) y = \cos(3x + 1),$$

$$g) y = \ln \operatorname{tg} 4x,$$

$$h) y = \arcsin \sqrt{3x},$$

$$i) y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$j) y = \frac{e^x}{x+1}.$$

Контрольное задание №5.

Вычислить производные следующих функций:

$$1. y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3, \quad y = \ln(2x^3 - 3), \quad y = \operatorname{tg} 2x \sin^3(1 - x), \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = x^{x+1}.$$

$$2. y = \frac{(x^4 + 1)^3}{(x^3 + 1)^2}, \quad y = 3^{\ln(1-x)}, \quad y = \sqrt{\sin(3x - 1)}, \\ y = \arccos \sqrt{x}, \quad y = (x + 1)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$3. y = \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}, \quad y = (1 - \ln(2x + 1))x, \quad y = \operatorname{tg}^2(3x - 1), \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}, \quad y = \sin(2x + 1)^{1-x^2}.$$

$$4. y = \frac{(1 + 2x)^2}{\sqrt{1 - 2x}}, \quad y = e^{(1-x^2)^3}, \quad y = \sin^3(5x - 2), \\ y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}, \quad y = (\operatorname{tg} 11x)^{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$5. y = x\sqrt{x^2-1}, \quad y = \ln \sqrt{x^2-4}, \quad y = \operatorname{ctg}(2x+1) \sin^2 5x, \\ y = \arccos \frac{1}{x}, \quad y = (x^2-1)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$6. y = (x^4 - 12x^2 - 4x + 1)^3, \quad y = \ln \sqrt[4]{x^4 + 1}, \quad y = \operatorname{ctg}^2(7x - 1), \\ y = \arccos 4x, \quad y = x^{-2x+1}.$$

$$7. y = (1 - x^3 + x^4)^3, \quad y = (e + 1)^{2x+1}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{1}{x^3},$$

$$y = \arccos(1 - x), \quad y = (x + 1)^{\ln(x-1)}.$$

$$8. y = \frac{(x^2 + 1)^4}{(x^2 - 1)^3}, \quad y = \ln^3(3x + 1), \quad y = (1 + \operatorname{ctg}^3 2x)^{-1},$$

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x}, \quad y = \sin(4x - 1)^{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$9. y = \sqrt{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}}, \quad y = 5^{-x^3}, \quad y = \operatorname{arctg} 2x^2,$$

$$y = \sin(2 \operatorname{tg}(x^3 - 1)), \quad y = (\sqrt{x} + 1)^{x-x^2}.$$

$$10. y = \sqrt[4]{2x^3 + 3x + 1}, \quad y = \ln(3x^2 + x + 1), \quad y = \frac{1 - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x},$$

$$y = \frac{1}{\arccos(1 - x)}, \quad y = (x^2 - 1)^{\sin x}.$$

$$11. y = x^2 \sqrt{2x - 1}, \quad y = 2^{\sqrt{x+1}}, \quad y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1},$$

$$y = \arcsin(x^2 - 1), \quad y = x^{-1+x^2}.$$

$$12. y = \frac{(1 - 2x)^4}{(x^2 + 1)^3}, \quad y = \ln^3(2x + 1), \quad y = \frac{1 - \sin^2 2x}{\sin 2x},$$

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad y = (x + 1)^{e^x+1}.$$

$$13. y = (x^4 - 1)^6, \quad y = \ln^2(x^2 - 1), \quad y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x + 1},$$

$$y = \arccos(1 - x^2), \quad y = \sin(5x - 1)^{1+2x}.$$

$$14. y = \frac{x}{(1 - x^3)^5}, \quad y = 3\sqrt{1-x^2}, \quad y = \frac{1 - \sin 5x}{1 + \sin 5x},$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad y = (\sin 2x)^{1-x^2}.$$

$$15. y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}, \quad y = 4^{-x^2+2x-1}, \quad y = \frac{\operatorname{tg}(1-x)}{1 + \sin(1-x)},$$

$$y = \arcsin(2x + 1), \quad y = (x^2 + 2x - 1)^{\ln(x+1)}.$$

16. $y = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$, $y = \ln \frac{2}{2+x}$, $y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$,
 $y = \operatorname{arctg}(1-x^2)$, $y = x\sqrt{x}$.
17. $y = (x^2+1)\sqrt{x^2-1}$, $y = \ln \sqrt{\frac{1+3x}{1-3x}}$, $y = \operatorname{tg}(e^{2x}+1)$,
 $y = \operatorname{arctg}(4x-1)$, $y = (x+1)^{\sqrt[3]{x-1}}$.
18. $y = \frac{x^5}{(x^2+1)^3}$, $y = e^{\operatorname{tg}(1-x^2)}$, $y = \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{2x}}$,
 $y = \arccos(2x-1)$, $y = \sin(5x-1)^{\ln(x+1)}$.
19. $y = (2x^3-3x+1)^4$, $y = 3^{2x-x^2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{\ln 2x}}$,
 $y = \operatorname{arctg} 5x$, $y = (x^2-2x-1)^{\sqrt{x+1}}$.
20. $y = \frac{x}{(1-x^4)^3}$, $y = \log_2(1+x-x^3)$, $y = \frac{1-\sin 3x}{1+\cos 3x}$,
 $y = \arccos(1-x^2)$, $y = \operatorname{tg}^{\sin(2x+1)}(x-1)$.
21. $y = \frac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$, $y = e^{-x^2}$, $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,
 $y = (1-\cos 2x) \sin 2x$, $y = x^{\ln(x+1)}$.
22. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $y = \ln(x-\sqrt{1+x^2})$, $y = \cos \frac{2}{x^3}$,
 $y = \operatorname{arctg}(2x-5)$, $y = (x+1)^{2x^2-1}$.
23. $y = \sqrt{(1-2x)^5}$, $y = \ln \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, $y = e^{2\operatorname{tg}(3x+1)}$,
 $y = \arcsin \frac{1}{x^2}$, $y = (\cos(2x-1))^{1-x^2}$.
24. $y = \frac{(2x-1)^4}{(2x+1)^3}$, $y = 2^{\sqrt{x-1}}$, $y = \frac{\cos 3x+1}{\cos 3x-1}$,
 $y = \arcsin \sqrt{x}$, $y = (1+2x^2)^{\ln(5x+1)}$.
25. $y = \frac{x}{(1-x^2+3x^3)^2}$, $y = \ln \sqrt{2x-1}$, $y = \frac{1}{\cos^2(2x+1)}$,
 $y = \operatorname{arctg}(1-2x)$, $y = (1-x^2)^{\cos(3x+1)}$.

$$26. y = \frac{(x^3 + 1)^2}{x^6}, \quad y = e^{2x} \ln(2x + 1), \quad y = \frac{1}{\sqrt{\sin 3x}},$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}, \quad y = (x + 1)^{\operatorname{tg}(2x+1)}.$$

$$27. y = \sqrt[3]{1 - x^3}, \quad y = \sqrt{e^{2x+1}}, \quad y = \operatorname{tg}(2 \ln(x + 1)),$$

$$y = \arccos \frac{1}{x^2}, \quad y = (x + 1)^{(x+1)^2}.$$

$$28. y = \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y = \ln \sqrt{x} \ln x^2, \quad y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 3x},$$

$$y = \arcsin(1 - 5x), \quad y = (1 - 4x^2)^{(x+1)^3}.$$

$$29. y = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}, \quad y = e^{-2\sqrt{x}}, \quad y = \frac{\cos 2x - 1}{\ln 2x},$$

$$y = \operatorname{arctg} 3x^2, \quad y = (1 - 3x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

$$30. y = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x}, \quad y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad y = \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{x},$$

$$y = \arccos(1 - x^2), \quad y = (x^2 - x + 1)^{\sqrt{x+1}}.$$

Контрольное задание №6.

Вычислить значение производной в точке x_0 следующих функций:

$$1. y = \ln(1 - x^2), x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$2. y = \cos x^2, x_0 = \pi.$$

$$3. y = (ax + b) \cos x^2, x_0 = 0.$$

$$4. y = \log_2(x^2 - 1), x_0 = \sqrt{3}.$$

$$5. y = e^{-x} \sin x, x_0 = 0.$$

$$6. y = \frac{x^2}{\ln x}, x_0 = e.$$

$$7. y = x \sin(1 - x), x_0 = 1.$$

$$8. y = \cos^3 3x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$9. y = \operatorname{ctg} 3x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$10. y = \ln^2 x^2, x_0 = e.$$

$$11. y = \frac{x-1}{x+1}, x_0 = 1.$$

$$12. y = \operatorname{tg} 2x, x_0 = \pi.$$

$$13. y = \sqrt{x^2 - x - 1}, x_0 = -1.$$

$$14. y = \ln(3x - 1), x_0 = 1.$$

$$15. y = x \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$16. y = (1 + ax^b)(1 + bx^a), x_0 = 1.$$

$$17. y = e^{-3x}, x_0 = 1.$$

$$18. y = \cos \ln x, x_0 = e.$$

19. $y = \ln(2 - e^x)$, $x_0 = 0$. 20. $y = (2 - x^2)^2 \cos x$, $x_0 = 0$.
 21. $y = (1 + \sin x)^4$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. 22. $y = \log_3 x \ln 2x$, $x_0 = 1$.
 23. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x_0 = 0$. 24. $y = x^2 \cos(1 - x)$, $x_0 = 1$.
 25. $y = \ln x \sin(e - x)$, $x_0 = e$. 26. $y = \operatorname{arctg} 3x$, $x_0 = 0$.
 27. $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$. 28. $y = \sin^3 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
 29. $y = 2 \sin^3 x^2$, $x_0 = 1$. 30. $y = \sin \ln x$, $x_0 = e$.

Контрольное задание №7.

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

1. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, y''' . 2. $y = e^{\sqrt{x}}$, y''' .
 3. $y = x^2 \ln x$, y''' . 4. $y = (x - \sin x)^2$, y''' .
 5. $y = \operatorname{arctg}^2 x$, y'' . 6. $y = \arcsin x$, y'' .
 7. $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$, y'' . 8. $y = e^{x^2}$, y''' .
 9. $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$, y'' . 10. $y = \sin 2x$, y^{IV} .
 11. $y = \cos 3x$, y^{IV} . 12. $y = \operatorname{ctg} x$, y''' .
 13. $y = a^x$, y'' . 14. $y = a(x - \sin x)$, y''' .
 15. $y = a \sin 4x$, y''' . 16. $y = 2(1 - \cos x)$, y''' .
 17. $y = \ln x$, y^{IV} . 18. $y = a \cos 3x$, y''' .
 19. $y = \operatorname{ctg} 2x$, y''' . 20. $y = x \ln x$, y''' .
 21. $y = 2e^{\sqrt{x}}$, y''' . 22. $y = (\arcsin x)^2$, y'' .
 23. $y = \ln \sqrt{1+x^2}$, y'' . 24. $y = \sin^2 x$, y''' .
 25. $y = \cos^2 x$, y''' . 26. $y = a \sin 3x$, y''' .
 27. $y = \operatorname{tg} 2x$, y''' . 28. $y = e^{-\sqrt{x}}$, y'' .
 29. $y = \ln \sin x$, y''' . 30. $y = \ln \operatorname{tg} x$, y'' .

§ 2. Приложения производной

1. Исследовать функции и построить их графики:

a) $y = x^3 - 3x^2$, b) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$,

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & y = (x^2 - 1)^3, \\ \text{e)} & y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \\ \text{g)} & y = \frac{e^x}{x - 1}, \\ \text{i)} & y = e^{\lg x}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{d)} & y = x^2(x - 2)^2, \\ \text{f)} & y = x\sqrt{x + 1}, \\ \text{h)} & y = \ln \sin x, \\ \text{j)} & y = \frac{1}{\cos x}. \end{array}$$

2. Найти положительное число, которое, будучи сложено с обратным, дает наименьшую сумму.
3. Изгородью длины l огородить прямоугольный участок наибольшей площади, примыкающий одной стороной к данной стене.
4. Из круглого листа бумаги радиуса R вырезать такой сектор, чтобы при его сворачивании получилась воронка наибольшей вместимости.
5. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом, периметр окна равен P . Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?
6. Проволоку, имеющую длину l , предполагают разрезать на две части, из которых одну сгибают в окружность, а другую — в квадрат. При какой длине каждой из частей сумма площадей круга и квадрата окажется наибольшей?
7. Консервная банка имеет форму цилиндра объема V . Каковы должны быть ее высота и диаметр основания, чтобы на изготовление банки пошло наименьшее количество жести?
8. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если скорость гонца на суше равна 5 км/час, а на воде — 4 км/час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?
9. Три пункта A , B и C расположены не на одной прямой, причем $\angle ABC = 60^\circ$. Из точки A выезжает автомобиль, а одновременно из точки B — поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/час, поезд — по направлению к C

со скоростью 50 км/час . В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если расстояние от пункта A до пункта B равно 200 км ?

10. От канала шириной 2 м под прямым углом к нему отходит канал шириной 4 м , причем стенки каналов прямолинейны. Найти наибольшую длину бревна, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.
11. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B , на $a \text{ км}$, считая по кратчайшему расстоянию. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза одной тонны груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p руб, по железной дороге — q руб, причем $p > q$, и город B расположен в $b \text{ км}$ севернее завода A ?
12. Известно, что 10 тракторов могут вспахать поле за 12 рабочих дней, при этом каждому трактористу выплачивается по 240 рублей за один день работы, 200 рублей за прогон каждого трактора к полю и обратно (в течение периода работы тракторы остаются на поле) и ремонтной бригаде — 1500 рублей в день. При каком количестве тракторов оплата работы будет наименьшей?
13. Из прямоугольного листа картона размером 10×16 надо изготовить открытую коробку, вырезав в углах листа квадраты и загнув края полученной фигуры. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы получилась коробка наибольшей вместимости?
14. Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на оси OX , а две другие — на параболе $y = 12 - x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.
15. Компания занимается перевозкой пассажиров морским судном между двумя портами, удаленными друг от друга на 6250 км . Судно курсирует с постоянной скоростью. Известно, что за каждый час пребывания судна в пути требуется

3000 долларов на обслуживание пассажиров, а общие затраты на топливо равны V^3 долларов, где V км/час — скорость движения судна. С какой скоростью капитан должен вести судно, чтобы затраты компании на перевозку пассажиров были минимальными? Каковы эти затраты?

16. Компания занимается перевозкой пассажиров морским судном между двумя портами, удаленными друг от друга на 1000 км, получая за одну перевозку 1500 долларов. Из них компания обязана выплачивать 9 долларов страховки за каждый час пребывания судна в пути и вознаграждение команде в $10v$ долларов, где v — скорость движения судна (судно курсирует с постоянной скоростью). С какой скоростью капитан должен вести судно, чтобы прибыль компании была максимальной? Какова эта прибыль?

Контрольное задание №8.

Исследовать функции и построить их графики:

$$1. y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}, \quad y = 3x^3 - 2x^2, \quad y = e^{\sin x + \cos x}.$$

$$2. y = x^3 - 3x^2, \quad y = \frac{1}{3x^2 - 1}, \quad y = \ln(\sin x + \cos x).$$

$$3. y = (x-1)^2(x+2), \quad y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}, \quad y = e^{\sqrt{2} \sin x}.$$

$$4. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}, \quad y = 2x^4 - 3x^2, \quad y = \ln(\sqrt{2} \sin x).$$

$$5. y = \frac{x^4 - 3}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad y = e^{\sin x - \cos x}.$$

$$6. y = \frac{x^4 + 3}{x}, \quad y = x^3 - x^2, \quad y = e^{-\sqrt{2} \cos x}.$$

$$7. y = x^2 + \frac{2}{x}, \quad y = x - \ln x, \quad y = e^{-\sin x - \cos x}.$$

$$8. y = \frac{1}{x^2 + 3}, \quad y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1}, \quad y = \ln(-\sqrt{2} \cos x).$$

9. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$, $y = \sqrt[3]{x^2}(5 - x)$, $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.
10. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$, $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 12$, $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.
11. $y = x\sqrt{x + 3}$, $y = \frac{1}{x^3 - 2x + 3}$, $y = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.
12. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$, $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $y = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.
13. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$, $y = \frac{x^2}{x + 1}$, $y = \sqrt[3]{\sin x}$.
14. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$, $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$, $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$.
15. $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y = \frac{x + 1}{x - 1}$, $y = \ln(\sin x - \cos x)$.
16. $y = xe^{-x}$, $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $y = \ln(\sqrt{2}\sin x)$.
17. $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$, $y = \frac{x}{\ln x}$, $y = e^{\cos x - \sin x}$.
18. $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{4x^2 + x + 4}{x - 1}$, $y = \ln(\cos x - \sin x)$.
19. $y = \frac{x^2}{x + 1}$, $y = x \ln x$, $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$.
20. $y = \frac{x^2}{x - 1}$, $y = x^2 \ln x$, $y = \sqrt[3]{\cos x}$.
21. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$, $y = \frac{\ln x}{x}$, $y = \sqrt{\cos x}$.
22. $y = \frac{2x^2 - x + 2}{x - 1}$, $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, $y = \ln(\sqrt{2}\cos x)$.
23. $y = (x - 2)^{5/3}$, $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $y = \sqrt{\sin x}$.
24. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$, $y = x^2 + \frac{2}{x^2}$, $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}$.

$$25. y = \frac{x^2}{4-x^2}, \quad y = \ln x - x, \quad y = -\frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

$$26. y = \frac{x^2-4}{x}, \quad y = x^2 - x^3, \quad y = \ln(\sin x - \cos x).$$

$$27. y = \sqrt[3]{x^3-1}, \quad y = -\ln x - x, \quad y = \frac{1}{\cos x - \sin x}.$$

$$28. y = xe^x, \quad y = \frac{1}{2x^2-1}, \quad y = e^{\operatorname{tg} x}.$$

$$29. y = \frac{1}{x^2+2}, \quad y = -\frac{x}{\ln x}, \quad y = e^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$30. y = \frac{x}{x^2-9}, \quad y = \frac{e^x}{x}, \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Контрольное задание №9.

Исследовать функции и построить их графики:

$$1. y = \frac{4-x^3}{x^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x+4)(x+1)^2}, \quad y = e^{\sqrt{2}\sin x}.$$

$$2. y = \frac{1}{x^2-2x}, \quad y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-5)^2}, \quad y = \operatorname{arctg} \cos x.$$

$$3. y = \frac{-16x}{x^2+4}, \quad y = \sqrt[3]{(x+2)(x+8)^2}, \quad y = \ln(\sin x - \cos x).$$

$$4. y = \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2, \quad y = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x+4)^2}, \quad y = \sqrt[3]{-\sin x}.$$

$$5. y = \frac{3-3x^2}{x^2+3}, \quad y = \sqrt[3]{(4-x)(x^2-8x+13)}, \quad y = e^{\sin x + \cos x}.$$

$$6. y = \frac{32+8x-4x^2}{x^2-2x+13}, \quad y = \sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}, \quad y = \frac{1}{\cos x - \sin x}.$$

$$7. y = \frac{4+x^3}{x^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}, \quad y = \ln(-\sqrt{2}\sin x).$$

$$8. y = \frac{4}{3-2x-x^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x+4)(x-2)^2}, \quad y = \sqrt{-\sin x}.$$

$$9. y = \frac{24x}{9+x^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}, \quad y = e^{\sin x - \cos x}.$$

10. $y = -\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$, $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$, $y = -\operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$
11. $y = \frac{24 - 6x^2}{x^2 + 12}$, $y = \sqrt[3]{(5-x)(x^2 - 10x + 22)}$, $y = \ln(\sin x + \cos x)$.
12. $y = \frac{8 + 2x - x^2}{x^2 - 2x + 4}$, $y = \sqrt[3]{(x-3)^2(x-7)^2}$, $y = \sqrt[3]{\cos x}$.
13. $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$, $y = \sqrt[3]{(x-8)(x-2)^2}$, $y = e^{\sqrt{2} \cos x}$.
14. $y = \frac{4}{x^2 + 4x}$, $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $y = \frac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$.
15. $y = \frac{-16x}{x^2 + 16}$, $y = \sqrt[3]{(6-x)(x^2 - 12x + 33)}$, $y = \ln(\sqrt{2} \sin x)$.
16. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, $y = \sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$, $y = \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}}$.
17. $y = \frac{9 - x^2}{x^2 + 3}$, $y = \sqrt[3]{(x+1)^2(x+3)^2}$, $y = e^{-\cos x - \sin x}$.
18. $y = -\frac{3x^2 + 12x}{x^2 + 4x + 7}$, $y = \sqrt[3]{(x-2)(x+4)^2}$, $y = -\operatorname{arctg} \sin x$.
19. $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$, $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $y = \ln(-\sin x + \cos x)$.
20. $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$, $y = -\sqrt[3]{(x+4)(x^2 + 8x + 13)}$, $y = e^{\cos x - \sin x}$.
21. $y = \frac{8(x+1)}{(x+3)^2}$, $y = \sqrt[3]{(x-4)(x-1)^2}$, $y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$.
22. $y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2$, $y = \sqrt[3]{(x+2)^2(x+6)^2}$, $y = \frac{-1}{\sin x + \cos x}$.
23. $y = \frac{36 - 4x^2}{x^2 + 12}$, $y = \sqrt[3]{(x+8)(x+2)^2}$, $y = \ln(\sqrt{2} \cos x)$.
24. $y = -\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 2x + 4}$, $y = \sqrt[3]{(x-3)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $y = \sqrt{-\cos x}$.

$$25. y = \frac{32 - x^3}{x^2}, \quad y = -\sqrt[3]{(x+5)(x^2+10x+22)}, \quad y = e^{-\sqrt{2} \cos x}.$$

$$26. y = \frac{4}{4x - x^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x+1)(x+4)^2}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}.$$

$$27. y = \frac{4(x+1)}{(x+2)^2}, \quad y = \sqrt[3]{(x+3)^2(x+5)^2}, \quad y = \ln(-\sin x - \cos x).$$

$$28. y = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2, \quad y = \sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}.$$

$$29. y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 3}, \quad y = \sqrt[3]{(x-3)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}, \quad y = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$30. y = \frac{18 - 12x - 6x^2}{x^2 + 2x + 13}, \quad y = \sqrt[3]{(x+6)(x^2+12x+33)}, \quad y = e^{-\sqrt{2} \sin x}.$$

ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основные правила интегрирования

$$\int (u(x) \pm v(x)) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$$

$$\int cu(x) dx = c \int u(x) dx, \quad \left(\int u(x) dx \right)' = u(x),$$

где c — постоянная, u и v — функции аргумента x .

$$\text{Если } x = \varphi(t), \text{ то } \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t = \varphi^{-1}(x)}$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Интегралы основных элементарных функций

$$\int dx = x + C; \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

В этих формулах C — произвольная постоянная.

§ 1. Вычисление интегралов и исследование их свойств

1. Вычислить неопределенные интегралы:

a) $\int (2x^2 - 5x + 6) dx;$

b) $\int (x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x^4) dx;$

c) $\int \frac{1 - 2x^2 + x^3}{\sqrt[3]{x}} dx;$

d) $\int \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{x^5} dx;$

e) $\int \frac{4x^3 - 3x + 1}{2x + 1} dx;$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx;$

i) $\int 3^{x+1} dx;$

k) $\int 2 \cos(4x + 1) dx;$

m) $\int \frac{\cos(1 - x)}{\sin^2(1 - x)} dx;$

o) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx;$

q) $\int \sqrt{4x^2 + 1} dx;$

s) $\int \sqrt{4 - x^2} dx;$

u) $\int \operatorname{arctg} x dx;$

w) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx;$

y) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx;$

f) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx;$

h) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx;$

j) $\int e^{-x^2} x dx;$

l) $\int \sin^5(x + 3) \cos(x + 3) dx;$

n) $\int \frac{1}{(x + 1) \ln^2(x + 1)} dx;$

p) $\int \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} dx;$

r) $\int x \sin x dx;$

t) $\int x e^{-x} dx;$

v) $\int e^x \sin x dx;$

x) $\int \frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 8} dx;$

z) $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

a) $\int_1^2 (2x^2 - 5x + 6) dx,$

b) $\int_1^e \frac{x^2 - 1}{x} dx,$

c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx,$

d) $\int_{e-1}^{e+1} \frac{1}{x^2 - 1} dx,$

- e) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx,$
- f) $\int_1^2 3^{x+1} dx,$
- g) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} e^{-x^2} x dx,$
- h) $\int_{\pi/12}^{\pi/4} 2 \cos 4x dx,$
- i) $\int_{e-1}^{e^2-1} \frac{2}{(x+1) \ln(x+1)} dx,$
- j) $\int_1^2 \frac{5}{\sqrt{5x-1}} dx,$
- k) $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 2x} dx,$
- l) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 - \sin x} dx,$
- m) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x dx,$
- n) $\int_{3/4}^{3\sqrt{3}/4} \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx,$
- o) $\int_0^{4/3} \frac{1}{16+9x^2} dx,$
- p) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx,$
- q) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx,$
- r) $\int_0^1 x e^{-x} dx,$
- s) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx,$
- t) $\int_1^2 \ln^2 x dx,$
- u) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx,$
- v) $\int_0^{\pi/2} 2e^x \sin x dx,$
- w) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$

3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$a) \int_0^1 \frac{1 - 2x^2 + x^3}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$b) \int_0^1 \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{x^5} dx,$$

$$c) \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx,$$

$$d) \int_2^3 \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx,$$

$$e) \int_{-\infty}^{-1} 5^{x+1} dx,$$

$$f) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$$

$$g) \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

$$h) \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx,$$

$$j) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx,$$

$$k) \int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

$$l) \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} 2x dx,$$

$$m) \int_0^2 \frac{x^3}{(x^4 - 1)^3} dx,$$

$$n) \int_0^1 \frac{1}{(5 - x)\sqrt{1 - x}} dx,$$

$$o) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx,$$

$$p) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx,$$

$$q) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx,$$

$$r) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} dx,$$

$$s) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} dx,$$

$$t) \int_0^1 \ln^2 x dx.$$

4. Исследовать интегралы на сходимость и вычислить те, которые сходятся:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx,$

b) $\int_0^2 \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx,$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

d) $\int_0^{-\infty} x e^x dx,$

e) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2} dx,$

f) $\int_{-2}^0 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx,$

g) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$

h) $\int_0^{+\infty} x \cos x dx,$

i) $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{x^2} dx,$

j) $\int_{-1}^{+\infty} x e^{-x} dx.$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной

a) прямыми $y = 2x + 3$, $x = -1$, $x = 2$ и $y = 0$;

b) прямыми $y = x + 2$, $y = -3x + 6$ и $y = 0$;

c) прямыми $y = -2x + 1$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 2$;

d) прямыми $y = 2x$, $2y = x$ и $x + y = 6$;

e) параболой $y = x^2$ и прямой $y + x = 2$;

f) параболой $y^2 = 9x$ и прямыми $y = 0$, $x = 4$;

g) параболой $y = -x^2 + x + 6$ и прямой $y + 2x = 2$;

h) параболой $y = x^2$ и $y = \frac{x^2}{2} + 2$;

i) параболой $y = x^2 - x - 2$

и прямыми $3y + 2x = 8$, $y = x + 1$, (наибольшую из семи возможных)

j) кубической параболой $y = -x^3$

и прямыми $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$;

k) кубической параболой $y = (x - 1)^3$ и прямой $y = 3x - 1$;

- л) кубической параболой $y = x^3$ и параболой $y^2 = x$;
 м) кубическими параболой $y = (x - 1)^3$, $y = -(x + 1)^3$
 и прямой $5y = 7x + 19$;
 н) кривой $y = e^x$ и прямыми $2y + x = 2$ и $x = 2$;
 о) кривыми $y = e^x$, $x = e^y$ и прямыми $x + y = 1$ и $x + y = e + 1$;
 р) кривой $y = \ln x$ и прямой $(e^2 - 1)y = 2(x - 1)$;
 қ) кривой $y = \sin \pi x$ и прямой $4y = 3\sqrt{3}x$;
 г) кривыми $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x$ и прямой $x = \pi/4$;
 с) кривыми $xy^2 = 1$ и прямыми $x = 0$ и $x = 1$;
 т) кривыми $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Контрольное задание №10.

Вычислить интегралы:

$$1. \int (2x^2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}) dx, \quad \int \frac{1 - 3x}{3 + 2x} dx, \quad \int x^2 \sqrt[5]{5 - x^3} dx,$$

$$\int \ln 2x dx, \quad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

$$2. \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx, \quad \int \frac{x}{a - bx} dx, \quad \int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x - 1} dx,$$

$$\int \operatorname{arctg} 3x dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx.$$

$$3. \int \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x^2} dx, \quad \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx,$$

$$\int x \sin 3x dx, \quad \int \frac{1}{3x^2 - x + 1} dx.$$

$$4. \int \frac{(x - 1)(x^2 - x + 1)}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx, \quad \int \frac{x^2}{x^2 - 2} dx,$$

$$\int x 2^{-x} dx, \quad \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

5. $\int \frac{(x^2 - 1)^2}{\sqrt{x}} dx, \int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx, \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$
 $\int (x - 1)e^x dx, \int \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} dx.$
6. $\int \frac{(x - 1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx, \int \frac{x}{3x^2 + 2} dx, \int \sin^2 \frac{x}{3} dx,$
 $\int e^x \sin 2x dx, \int \frac{1}{x^2 + 4x + 10} dx.$
7. $\int (3x^2 - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}) dx, \int \frac{3}{\sqrt{1 - x}} dx, \int \cos^2 \frac{x}{2} dx,$
 $\int \frac{2x}{\sin^2 x} dx, \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx.$
8. $\int (\sqrt{x} - 1)(x + 1) dx, \int \frac{x^2 + 2}{x - 1} dx, \int \frac{1}{e^x + 2} dx,$
 $\int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx, \int 2x \arcsin x dx.$
9. $\int (2x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}) dx, \int \sqrt{a - bx} dx, \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx,$
 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{2x}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{3x^2 - x + 1}} dx.$
10. $\int \frac{(x + 1)^3}{\sqrt{x}} dx, \int \frac{2 - x}{2 + 3x} dx, \int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx,$
 $\int x^2 e^{2x} dx, \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$
11. $\int (3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}) dx, \int \frac{3x - 1}{3x + 2} dx, \int \frac{\cos x}{\sqrt{3}} dx,$
 $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx, \int \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx.$
12. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx, \int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}} dx,$
 $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \int \sqrt{2 - x - x^2} dx.$

$$13. \int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - x) dx, \int 2e^{-3x} dx, \int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx,$$

$$\int x^2 \sin x \cos x dx, \int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx.$$

$$14. \int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x^2) dx, \int \frac{x}{(1-x)^2} dx, \int x \sqrt[3]{2-x^2} dx,$$

$$\int (x^2 + x - 1)e^x dx, \int \frac{x}{\sqrt{3x^2+x+1}} dx.$$

$$15. \int \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx, \int \frac{1}{5x^2-9} dx, \int xe^{-x^2} dx,$$

$$\int \ln^2(2x) dx, \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}} dx.$$

$$16. \int \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^3} dx, \int \frac{x}{x^2+3} dx, \int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx,$$

$$\int (1-x)e^x dx, \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx.$$

$$17. \int \left(1 - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx, \int \sin^2 \frac{x}{4} dx, \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

$$\int x \ln(x-1) dx, \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$$

$$18. \int \left(5x^5 - \frac{5}{x^5} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) dx, \int \operatorname{ctg}^2 x dx, \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx,$$

$$\int (x^2+1)e^x dx, \int \frac{1}{x^2+2x} dx.$$

$$19. \int \sin^3 2x \cos 2x dx, \int x \sqrt[4]{4-x^2} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}} dx,$$

$$\int \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}\right) dx, \int (2-x^2)e^{-x} dx.$$

$$20. \int \frac{x^3-x-1}{\sqrt[3]{x}} dx, \int \frac{1}{\sin 2x \cos 2x} dx, \int \frac{2}{3x \ln^3 x} dx,$$

$$\int \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}} dx.$$

21. $\int b^{\sin x} \cos x dx$, $\int x \sin 2x dx$, $\int \frac{1}{\sin(2x+1)} dx$,
 $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$, $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.
22. $\int \left(2 - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$, $\int x \cos(1-x^2) dx$, $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$,
 $\int x \cos 4x dx$, $\int \sqrt{x^2+3x+5} dx$.
23. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(x+1)}{x^2} dx$, $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2-1}} dx$,
 $\int x \sin(2-x^2) dx$, $\int xa^{-x} dx$.
24. $\int \frac{(x^2-1)(x-\sqrt{x})}{x^3} dx$, $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x} dx$, $\int \operatorname{tg}^2 3x dx$,
 $\int (x-1) \cos 2x dx$, $\int \frac{1}{2x^2+x+1} dx$.
25. $\int \frac{(x^2+1)(x+\sqrt{x})}{x^3} dx$, $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$, $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$,
 $\int (2-x) \sin 2x dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}} dx$.
26. $\int (x-1)(\sqrt{x}-1) dx$, $\int \sqrt[3]{6-3x} dx$, $\int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$,
 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x}} dx$, $\int \sqrt{1-x-x^2} dx$.
27. $\int \frac{1-x-x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$, $\int \frac{1}{\sin 3x \cos 3x} dx$, $\int \frac{3}{2x \ln^3 x} dx$,
 $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} dx$, $\int x \cos 3x dx$.
28. $\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$, $\int \frac{4x-1}{4x+2} dx$, $\int \sin \frac{x}{\sqrt{2}} dx$,
 $\int (x^2+1)e^{-x} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}} dx$.

$$29. \int \frac{x - \sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int 2xe^{-x^2} dx, \quad \int \ln^2(x-1) dx,$$

$$\int \frac{1}{3x^2 - 16} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$$

$$30. \int \left(2 - \frac{x-1}{x+1}\right) dx, \quad \int \sin^3 3x \cos 3x dx, \quad \int x \sqrt[3]{2-x^2} dx,$$

$$\int (x^2 - 2)e^{-x} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} dx.$$

Контрольное задание №11.

Вычислить определенные интегралы:

$$1. \int_0^1 \frac{1}{2x^2 + x + 1} dx, \quad \int_0^{\pi/9} \operatorname{tg}^2 3x dx, \quad \int_1^2 \frac{(x^2 - 1)(x - \sqrt{x})}{x^3} dx,$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x} dx, \quad \int_0^{\pi/4} (x-1) \cos 2x dx.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} x \sin(2-x^2) dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 - 1}} dx,$$

$$\int_2^4 \frac{(x - \sqrt{x})(x+1)}{x^2} dx, \quad \int_0^1 x^2 a^{-x} dx.$$

$$3. \int_{-1}^0 \sqrt{x^2 + 3x + 5} dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad \int_0^1 x \cos(1-x^2) dx,$$

$$\int_0^{\pi/4} x \cos 4x dx, \quad \int_2^4 \left(2 - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx, \quad \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx, \quad \int_0^{\pi/2} b^{\sin x} \cos x dx,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(2x+1)} dx, \quad \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$5. \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{1}{\sin 2x \cos 2x} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx,$$

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{3x \ln^3 x} dx, \quad \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$6. \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx, \quad \int_{e/2}^e \ln 2x dx, \quad \int_0^1 \frac{1-3x}{3+2x} dx,$$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[5]{5-x^3} dx, \quad \int_1^2 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{9-6x} dx, \quad \int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x - 1} dx,$$

$$\int_{1/3}^1 \operatorname{arctg} 3x dx, \quad \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$$

$$8. \int_0^1 \frac{1}{3x^2 - x - 1} dx, \quad \int_0^{\pi/3} x \sin 3x dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx, \quad \int_{-2}^{-1} \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x^2} dx.$$

$$9. \int_3^4 \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx, \quad \int_1^2 \frac{(x-1)(x^2 - x + 1)}{x^2} dx, \quad \int_0^1 x 2^{-x} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 2} dx, \quad \int_0^1 \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx, \quad \int_4^9 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad \int_{-1}^0 (x-1)e^x dx.$$

$$11. \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{3x^2+2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+10} dx,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{3} dx, \quad \int_0^1 e^x \sin 2x dx.$$

$$12. \int_0^1 \sqrt{x^2+2x+5} dx, \quad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2x}{\sin^2 x} dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx,$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \frac{x}{2} dx, \quad \int_2^4 \left(3x^2 - \sqrt[4]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

$$13. \int_0^1 (\sqrt{x}-1)(x+1) dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2+2}{x-1} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{2x^2-x+1} dx,$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x+2} dx, \quad \int_0^1 2x \arcsin x dx.$$

$$14. \int_0^1 \sqrt{9-6x} dx, \quad \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}\right) dx, \quad \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{2x}} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x^2-x+1}} dx.$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx, \quad \int_1^2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{2-x}{2+3x} dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

$$16. \int_{1/2}^1 (3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}) dx, \quad \int_0^1 \frac{3x-1}{3x+2} dx, \quad \int_0^{\pi\sqrt{3}/2} \cos \frac{x}{\sqrt{3}} dx,$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 - 4x + 5} dx, \quad \int_0^1 (x^2 - 1)e^{-x} dx.$$

$$17. \int_1^2 \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{7-9x^2}} dx,$$

$$\int_{-1}^0 \sqrt{2-x-x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$18. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx, \quad \int_1^2 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - x) dx, \quad \int_0^1 2e^{-3x} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-x+1} dx, \quad \int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \cos x dx.$$

$$19. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+x+1}} dx, \quad \int_0^1 (x^2+x-1)e^x dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x)^2} dx,$$

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{2-x^2} dx, \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) dx.$$

$$20. \int_1^2 \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{5x^2-9} dx,$$

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx, \quad \int_1^2 \ln^2 2x dx.$$

$$21. \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x - 2} dx, \quad \int_0^1 (1-x)e^x dx, \quad \int_{\pi/12}^{\pi/9} \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx.$$

$$22. \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad \int_1^4 \left(1 - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx, \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

$$\int_e^{e+1} x \ln(x-1) dx, \quad \int_0^1 \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$$

$$23. \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx, \quad \int_1^2 \left(5x^5 - \frac{5}{x^5} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) dx, \quad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^2 x dx,$$

$$\int_1^2 \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx, \quad \int_0^1 (x^2+1)e^x dx.$$

$$24. \int_0^1 (2-x)e^{-x} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-1}} dx, \quad \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 2x \cos 2x dx, \quad \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}\right) dx.$$

$$25. \int_1^2 \frac{(x-1)(x-\sqrt{x})}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx,$$

$$\int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx.$$

$$26. \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx, \quad \int_1^2 \frac{(1-x^2)(\sqrt{x}-x)}{x^3} dx, \quad \int_0^{\pi/12} \operatorname{tg}^2 4x dx,$$

$$\int_0^{\pi/3} (x-2) \cos 2x \, dx, \quad \int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{\cos^4 2x} \, dx.$$

$$27. \int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} \, dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{2x^2-3} \, dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx, \quad \int_0^1 e^x \sin 2x \, dx.$$

$$28. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}} \, dx, \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2 \right) \, dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{x}{(x-1)^2} \, dx,$$

$$\int_0^1 x \sqrt[3]{x^2-2} \, dx, \quad \int_0^1 (x^2-x-1)e^x \, dx.$$

$$29. \int_1^2 \left(3x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x} \right) \, dx, \quad \int_0^1 \frac{3x+2}{1+3x} \, dx, \quad \int_0^{\pi\sqrt{3}/2} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} \, dx,$$

$$\int_0^1 \sqrt{8-4x+x^2} \, dx, \quad \int_0^1 (1-x^2)e^x \, dx.$$

$$30. \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+3} \, dx, \quad \int_{e/3}^e \ln 3x \, dx, \quad \int_0^2 \frac{2x+3}{3x+1} \, dx,$$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[5]{x^2-3} \, dx, \quad \int_1^2 \left(3x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right) \, dx.$$

Контрольное задание №12.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$1. \int_{-\infty}^0 e^x \, dx, \quad \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} \, dx.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx, \int_{-1}^1 \frac{3x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$3. \int_{-\infty}^0 xe^x dx, \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx, \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$6. \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx, \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.$$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx, \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx.$$

$$8. \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx.$$

$$9. \int_0^{+\infty} x \sin x dx, \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx.$$

$$10. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$11. \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2-1} dx, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$12. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$13. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$$

$$14. \int_0^{+\infty} x \cos x dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{2x^2} dx.$$

$$15. \int_0^{+\infty} x^2 \cos x dx, \quad \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx.$$

$$16. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx, \quad \int_1^4 \frac{x}{x^2-9} dx.$$

$$17. \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx.$$

$$18. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_0^2 \frac{x}{x^2-1} dx.$$

$$19. \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5}} dx, \quad \int_{-1}^3 \frac{x}{x^2-4} dx.$$

$$20. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{x^2} dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

$$21. \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx, \quad \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} 2x dx.$$

$$22. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} 2x dx.$$

$$23. \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx, \quad \int_{-2}^0 \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

$$24. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_1^3 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx.$$

$$25. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx, \quad \int_0^2 \frac{x^2}{(x^3 - 1)^3} dx.$$

$$26. \int_1^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_1^3 \frac{x-3}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$27. \int_{-\infty}^0 x e^{x^2} dx, \quad \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx.$$

$$28. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 6} dx, \quad \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} \frac{3x}{2} dx.$$

$$29. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_0^1 x^2 \ln x dx.$$

$$30. \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx, \quad \int_0^2 \frac{x}{x^2 - 1} dx.$$

Контрольное задание №13.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

1. Параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = 5$.
2. Полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямыми $x = 0, y = 4$.
3. Параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$.
4. Гиперболой $xy = 6$ и прямой $y = 7 - x$.
5. Кубической параболой $y = x^3$ и прямыми $y = x, y = 2x$.
6. Параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x + 3$.
7. Параболой $y = 8 + 2x - x^2$ и прямой $y = -2x + 8$.
8. Параболой $x = y - y^2 + 6$ и осью OY .
9. Кривыми $y - x^2 = 0$ и $y - 4 = 0$.
10. Кривой $y = e^x$ и прямыми $x = 0, x = 2$.
11. Параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.
12. Параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.
13. Параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $y + 3x - 4 = 0$.
14. Параболами $y = x^2 - x$ и $y^2 = 2x$.
15. Кривой $x = e^{-y}$, осью OX и прямой $y - x = 0$.
16. Параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y = 3$.
17. Кривыми $y = (x - 4)^2$ и $y = \sqrt{16 - x^2}$.
18. Параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = x$.
19. Параболой $y = (x + 1)^2$ и прямыми $y = 0, y = 5 - x$.
20. Кривой $y = -\ln x$ и прямыми $y = x, y = 0$.
21. Кривыми $y = e^x, y = e^{-x}$ и прямыми $x = \pm 1, y = 0$.
22. Кривой $x^2 + y^2 = 3$, осью OX и прямой $y + x = 0$.
23. Параболами $x = y^2$ и $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$.

24. Кривой $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$.
25. Параболой $y = x^2$ и прямой $y = 3 - 2x$.
26. Параболами $y = x^2 - 1$ и $y = -x^2 + 1$.
27. Параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1 - |x|$.
28. Кривой $y = e^x$ и прямыми $x = -1$, $y = -x + 1$.
29. Кривой $y = \ln x$ и прямыми $y = e$, $y = \frac{1}{2}$.
30. Кривой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x$.

ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

1. Исследовать на сходимость ряды, пользуясь необходимым условием сходимости:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}.$$

2. Исследовать на сходимость ряды, пользуясь признаком сравнения:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n(n+1)\sqrt{n}}.$$

3. Исследовать на сходимость ряды, пользуясь признаком Даламбера:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{3^n + n}.$$

4. Исследовать на сходимость ряды, пользуясь признаком Коши:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^n.$$

5. Исследовать на сходимость ряды, пользуясь интегральным признаком сходимости:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующиеся ряды:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

7. Исследовать на сходимость ряды:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}, & \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}, & \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}, \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, & \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}}, & \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n - \sqrt{n}}{3n + \sqrt{n}} \right)^n, \\ \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, & \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

Контрольное задание №14.

В каждом варианте первые три ряда исследовать на сходимость, а последний — на абсолютную и условную сходимость.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{(\sqrt{3})^n}, & \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}, & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, & \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^{n^2}, \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}. \end{aligned}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4 + n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^{n-1}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1/2} n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{2})^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^{n/2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \sqrt{n}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+1)^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}n!}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n^2-1}{3n^2+1}\right)^n,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n^3-1}{n^2+n}\right)^n,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n.$$

$$\begin{array}{l}
10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9 + n^2}, \\
\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n+1}. \\
11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+\sqrt{n}} \right)^n, \\
\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}. \\
12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n - 1}{2n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n - 1}{2n^2 - n + 1} \right)^n, \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2n} \right)^n. \\
13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}, \\
\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^2. \\
14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(\sqrt{5})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1} \right)^{n+1}, \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{1-3n} \right)^n. \\
15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+n)}{n^2-2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2}, \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n-1}{3n+1} \right)^n. \\
16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{2^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}, \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} \right)^n.
\end{array}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n + \sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2 + 1} \right)^n,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{1/n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{4+n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2+1} \right)^{1/n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[3]{n}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1 + 4n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(\sqrt{n})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + 9n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n - \sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{2^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{4/3} n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[3]{2} - 1)^{2n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{n^2 + 2n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n}{2n^2 + n} \right)^n,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\ln n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n \ln(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3+n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}.$$

$$25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{4+9n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{3^n}{n!}}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(\sqrt{3})^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^3-1}{2n^3+1}\right)^{n/2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2-1}{2^n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt[3]{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{n^3}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2+2n}\right)^{n/3},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!+1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2+n^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+3)}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n+n}{n! - 1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (n 3^{1/n} - n)^{n/2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}.$$

§ 2. Степенные ряды

1. Найти множество сходимости следующих рядов:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}x)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$; f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln^4 n}$.

2. Вычислив значения последовательных производных $f^{(k)}(x_0)$, написать первые четыре отличные от нуля члена разложения функции $f(x)$ в степенной ряд в точке x_0 :

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 4$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

c) $f(x) = \ln \sqrt[4]{x+1}$, $x_0 = 16$; d) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$, $x_0 = -1$;

e) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, если $x \neq 0$, а $f(0) = 1$, $x_0 = 0$.

3. Используя разложения основных элементарных функций, разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена и найти радиус его сходимости:

a) $f(x) = e^{-3x}$; b) $f(x) = \sin 7x$;

c) $f(x) = \cos \frac{x^5}{5}$; d) $f(x) = \ln \frac{1}{1-3x}$;

e) $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$; f) $f(x) = \ln(1+x-20x^2)$;

g) $f(x) = \frac{7}{12-x-x^2}$.

4. Вычислить следующие интегралы с точностью до 0.001:

a) $\int_0^{1/9} \sqrt{x}e^x dx$; b) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$; c) $\int_2^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$;

d) $\int_0^{1/2} \cos x^2 dx$; e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16+x^4}}$; f) $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

Контрольное задание №15.

Разложить в ряд Маклорена следующие функции и указать интервал сходимости:

1. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3};$
2. $f(x) = x\sqrt{1+x};$
3. $f(x) = \ln(1+2x);$
4. $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2};$
5. $f(x) = x \cos 3x;$
6. $f(x) = \sqrt[3]{8+x};$
7. $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2};$
8. $f(x) = \frac{x}{1+x^2};$
9. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3};$
10. $f(x) = 2^x;$
11. $f(x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x;$
12. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2};$
13. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}};$
14. $f(x) = \ln(1-x-6x^2);$
15. $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3};$
16. $f(x) = 3^x;$
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}};$
18. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x};$
19. $f(x) = \cos \sqrt{x};$
20. $f(x) = \frac{x}{2-x};$
21. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}};$
22. $f(x) = \frac{\cos x^2 - 1}{x^4};$
23. $f(x) = xe^{-x^2};$
24. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}};$
25. $f(x) = 5^x;$
26. $f(x) = x^{10} \sin 2x;$
27. $f(x) = \frac{9}{20-x-x^2};$
28. $f(x) = \ln(1+2x-8x^2);$
29. $f(x) = \cos^2 x;$
30. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}.$

Контрольное задание №16.

Вычислить определенные интегралы с точностью до 0.001:

1. $\int_0^{0.1} e^{-6x^2} dx;$

2. $\int_0^1 \cos x^2 dx;$

$$3. \int_0^{0.1} \sin 100x^2 dx;$$

$$5. \int_0^{0.1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx;$$

$$7. \int_0^{1.5} \frac{1}{\sqrt[3]{27 + x^3}} dx;$$

$$9. \int_0^{0.2} \sin 25x^2 dx;$$

$$11. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{16 + x^2}} dx;$$

$$13. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{64 + x^2}} dx;$$

$$15. \int_0^{0.3} e^{-2x^2} dx;$$

$$17. \int_0^{0.2} \cos 25x^2 dx;$$

$$19. \int_0^{0.4} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx;$$

$$21. \int_0^{2.5} \frac{1}{\sqrt[3]{125 + x^3}} dx;$$

$$23. \int_0^{0.5} \sin 4x^2 dx;$$

$$4. \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + x^4}} dx;$$

$$6. \int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right)}{x} dx;$$

$$8. \int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$10. \int_0^{0.5} \cos 4x^2 dx;$$

$$12. \int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx;$$

$$14. \int_0^{0.4} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} dx;$$

$$16. \int_0^{0.4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx;$$

$$18. \int_0^{1.5} \frac{1}{\sqrt[4]{81 + x^4}} dx;$$

$$20. \int_0^{0.1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx;$$

$$22. \int_0^{0.4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx;$$

$$24. \int_0^{0.4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx;$$

$$25. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{256 + x^4}} dx;$$

$$26. \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}} dx;$$

$$27. \int_0^{2.5} \frac{1}{\sqrt[4]{625 + x^4}} dx;$$

$$28. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8 + x^3}} dx;$$

$$29. \int_0^{1/2} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx;$$

$$30. \int_{0.1}^1 \frac{1}{xe^x} dx.$$

ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

1. Найти область определения функций двух переменных и изобразить ее на координатной плоскости:

a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$;

b) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) + \sqrt{y}$;

c) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{y}$;

d) $f(x, y) = \sqrt{y - \sqrt{x}}$;

e) $f(x, y) = \frac{1}{\cos x}$;

f) $f(x, y) = \sqrt{\sin y \cos x}$.

2. Вычислить частные производные 1-го и 2-го порядков:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;

b) $f(x, y) = \sin x \cos y$;

c) $f(x, y) = x^y$;

d) $f(x, y) = \frac{1 - y}{x + 1}$;

e) $f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$;

f) $f(x, y) = xe^{-xy}$.

3. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков:

a) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x}$;

d) $f(x, y) = \cos \frac{y}{x}$;

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$;

f) $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

Контрольное задание №17.

Для первой функции каждого варианта найти ее область определения и нарисовать ее на координатной плоскости,
для второй функции — найти частные производные 1-го и 2-го порядков,
для третьей функции — вычислить ее полный дифференциал 1-го порядка:

$$1. f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad f(x, y) = x^3 + \frac{3x^2}{y} + \frac{x}{y^3}.$$

$$2. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2 - 2x}}, \quad f(x, y) = y^x, \quad f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}.$$

$$3. f(x, y) = \arccos \frac{y}{x^2 - x}, \quad f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy}.$$

$$4. f(x, y) = \arcsin \frac{x}{x - y}, \quad f(x, y) = \sin \frac{\sqrt{y}}{x}, \quad f(x, y) = (x - y) e^{xy}.$$

$$5. f(x, y) = \frac{\sqrt{x - y}}{x}, \quad f(x, y) = \ln xy, \quad f(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{x^2}{y}.$$

$$6. f(x, y) = \arcsin xy, \quad f(x, y) = \arccos \frac{y}{x}, \quad f(x, y) = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$7. f(x, y) = \sqrt{x} + \arccos y, \quad f(x, y) = \cos \frac{x^2}{y}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$8. f(x, y) = \log_x y, \quad f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad f(x, y) = \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right).$$

$$9. f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{x - y}, \quad f(x, y) = e^{x+y}, \quad f(x, y) = x e^{x/y}.$$

$$10. f(x, y) = \frac{\sqrt{y - 3x}}{x}, \quad f(x, y) = \ln(xy - x), \quad f(x, y) = \arcsin \frac{x - y}{x + y}.$$

$$11. f(x, y) = \log_y x, \quad f(x, y) = \cos \frac{x - y}{y}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 y - y^2}.$$

$$12. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad f(x, y) = \ln \frac{\sin x}{y}.$$

13. $f(x, y) = \ln(y^2 + x)$, $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, $f(x, y) = \sqrt{y^2x + x^2y}$.
14. $f(x, y) = \sqrt{x} + \arcsin y$, $f(x, y) = \ln(y + xy)$, $f(x, y) = \operatorname{tg} e^{x-y}$.
15. $f(x, y) = \arcsin e^{xy}$, $f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + \frac{x}{y^4} + \frac{1}{xy^5}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - y}{y^3}}$.
16. $f(x, y) = \ln x + \arccos y$, $f(x, y) = \sin \frac{x+y}{x}$, $f(x, y) = \sqrt{\cos \frac{x}{y}}$.
17. $f(x, y) = \frac{\arcsin(x-y)}{\sqrt{x}}$, $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$, $f(x, y) = \operatorname{tg} e^{x+y}$.
18. $f(x, y) = \arccos e^{x-y}$, $f(x, y) = \sin \frac{xy}{x-y}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{y^2 - x}{x^2}}$.
19. $f(x, y) = \ln y + \arcsin x$, $f(x, y) = e^{\sqrt{x+y}}$, $f(x, y) = \operatorname{ctg} e^{x+y}$.
20. $f(x, y) = \frac{\arccos(x+y)}{\sqrt{y}}$, $f(x, y) = \operatorname{tg}(x-2y)$, $f(x, y) = \ln \sin \frac{x+y}{x}$.
21. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$, $f(x, y) = \ln \frac{x}{y}$, $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y^2}$.
22. $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x-y}$, $f(x, y) = e^{xy}$, $f(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{x}{y^2}$.
23. $f(x, y) = \arcsin \sqrt{xy}$, $f(x, y) = \sin \frac{x^2}{y}$, $f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.
24. $f(x, y) = \sqrt{y + \sqrt{x}}$, $f(x, y) = \cos \frac{\sqrt{x}}{y}$, $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2 + y^2}$.
25. $f(x, y) = \arcsin \frac{x+y}{y}$, $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - x}{y}}$.
26. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-2y}}{x}$, $f(x, y) = e^{x/y}$, $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2 + y^2}$.
27. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$, $f(x, y) = ye^x$, $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-y}$.
28. $f(x, y) = \arccos \frac{x-y}{x}$, $f(x, y) = \frac{x}{y-x}$, $f(x, y) = \sqrt{y^3 + 3xy}$.

$$29. f(x, y) = \frac{\sqrt{y+2x}}{y}, \quad f(x, y) = \operatorname{tg}(x+y), \quad f(x, y) = \operatorname{arccctg} \frac{x+y}{x}.$$

$$30. f(x, y) = \operatorname{arcsin} \ln \frac{x}{y}, \quad f(x, y) = \frac{y}{x-y}, \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Вычислить $\frac{dz}{dt}$, если

a) $z = e^{x+3y}, \quad x = t^2 + t + 1, \quad y = \operatorname{tg} t;$

b) $z = \frac{x}{y}, \quad x = \ln(t^2 - t + 1), \quad y = e^{1/t};$

c) $z = \ln \sin \sqrt{xy}, \quad x = \frac{t}{\sqrt{t-1}}, \quad y = \sqrt{t};$

d) $z = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad x = t^3, \quad y = \sin \ln t;$

e) $z = \ln(e^x + e^y), \quad x = \sqrt{t^2 - 1}, \quad y = \operatorname{arcsin} t^3;$

f) $z = x^y, \quad x = \sin t, \quad y = \sqrt{t}.$

2. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

a) $z = e^{uv}, \quad u = \cos xy, \quad v = \sqrt{\frac{x}{y}};$

b) $z = \sin(u+v), \quad u = \ln(x^2 - y^2), \quad v = xy;$

c) $z = u^3v + uv^3, \quad u = \frac{y}{x+y}, \quad v = \frac{x}{x+y};$

d) $z = \frac{u}{\sqrt{v}} + \frac{v}{\sqrt{u}}, \quad u = x\sqrt{y}, \quad v = y\sqrt{x};$

e) $z = u^v, \quad u = \operatorname{tg} xy, \quad v = \operatorname{ctg} \frac{x}{y};$

f) $z = \frac{u-v}{u+v}, \quad u = \cos \frac{x}{y}, \quad v = \sin \frac{y}{x}.$

3. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

a) $xyz = x + y + z;$

b) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1;$

c) $xe^{zy} + z = y;$

$$d) \quad x \cos x + y \cos y + z \cos z = 0;$$

$$e) \quad z^x = x^y + y^z;$$

Контрольное задание №18.

В пунктах а) и б) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, где $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

В пункте с) — также найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z(x, y)$ неявно задана указанным уравнением.

$$1. \quad a) \quad f(u, v) = \cos \frac{u}{v}, \quad u(x, y) = x^3 y, \quad v(x, y) = xy^2;$$

$$b) \quad f(u, v) = e^{u+v}, \quad u(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y}, \quad v(x, y) = \ln(y - x);$$

$$c) \quad z^3 xy + z^2 x^2 + 2zxy^2 - 3 = 0.$$

$$2. \quad a) \quad f(u, v) = \sin uv, \quad u(x, y) = xy^2, \quad v(x, y) = x^2 y;$$

$$b) \quad f(u, v) = e^{u-v}, \quad u(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{x}{y}, \quad v(x, y) = \ln(x + y);$$

$$c) \quad z^3 x^2 y + 3z^2 xy + 2zxy^2 + 1 = 0.$$

$$3. \quad a) \quad f(u, v) = \sin \frac{u+v}{v}, \quad u(x, y) = x + \sqrt{x}, \quad v(x, y) = \frac{x}{y};$$

$$b) \quad f(u, v) = e^{uv}, \quad u(x, y) = \frac{y}{x+y}, \quad v(x, y) = x^3 y;$$

$$c) \quad z^3 xy^2 + 2z^2 x^2 + zxy^2 - 2 = 0.$$

$$4. \quad a) \quad f(u, v) = \ln(u + vu), \quad u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad v(x, y) = xy + 1;$$

$$b) \quad f(u, v) = e^{\frac{y}{v}}, \quad u(x, y) = x^3 y, \quad v(x, y) = xy^2;$$

$$c) \quad z^3 xy + 2zy^2 x^{-1} + \frac{1}{z+1} = 0.$$

$$5. \quad a) \quad f(u, v) = \sin \frac{u}{v}, \quad u(x, y) = x\sqrt{y}, \quad v(x, y) = \frac{x^2}{y};$$

$$b) \quad f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y}, \quad v(x, y) = \sin xy;$$

$$c) \quad z^3 xy^2 + 2z^2 x^2 y - 3zxy + 1 = 0.$$

6. a) $f(u, v) = e^{u^2 v}$, $u(x, y) = \sqrt{xy^2}$, $v(x, y) = \sqrt{x^2 y}$;
 b) $f(u, v) = \frac{u}{2u - v}$, $u(x, y) = \operatorname{tg} xy$, $v(x, y) = \ln(x - y)$;
 c) $z^3 e^{x+y} + z^2 xy + \frac{1}{z+2} = 0$.
7. a) $f(u, v) = \ln(v - u^2)$, $u(x, y) = x^2 \sqrt{y} + \frac{1}{y}$, $v(x, y) = \frac{x}{x - y}$;
 b) $f(u, v) = \arccos(u - v)$, $u(x, y) = xy^2$, $v(x, y) = \frac{x}{y}$;
 c) $z^3 + 2z^2 e^{x/y} + 3 = 0$.
8. a) $f(u, v) = e^{u-3v}$, $u(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $v(x, y) = \frac{y}{x^2}$;
 b) $f(u, v) = \arcsin(u - v)$, $u(x, y) = \sqrt{x+y}$, $v(x, y) = \frac{x}{y-x}$;
 c) $z^3 e^{xy} + z^2(x+y) - zx^2 y + 2 = 0$.
9. a) $f(u, v) = \ln(u - v^2)$, $u(x, y) = x^2 y$, $v(x, y) = xy^2$;
 b) $f(u, v) = \frac{2u}{v-u}$, $u(x, y) = \operatorname{ctg} xy$, $v(x, y) = \ln(x+y)$;
 c) $z^3(x+y^2) - 2z^2 xy^2 + zx\sqrt{y} + 1 = 0$.
10. a) $f(u, v) = e^{v+2u}$, $u(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$, $v(x, y) = x^2 y$;
 b) $f(u, v) = \arccos(u + v)$, $u(x, y) = 2^y x$, $v(x, y) = yx$;
 c) $z^3 x^2 y + 2z^2 xy^{-1} - z(x - y) + 1 = 0$.
11. a) $f(u, v) = \sin \frac{u}{v}$, $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y}$, $v(x, y) = \frac{y}{x}$;
 b) $f(u, v) = e^{u-v}$, $u(x, y) = e^{y/x}$, $v(x, y) = \frac{x}{y-x}$;
 c) $z^3 xy^2 + z^2 x^2 + 2zx^2 y + 3 = 0$.
12. a) $f(u, v) = \ln(u - vu)$, $u(x, y) = x\sqrt{y}$, $v(x, y) = y\sqrt{x}$;
 b) $f(u, v) = e^{u+v}$, $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y}$, $v(x, y) = \frac{x}{y^2 + x^2}$;
 c) $z^3 xy^2 + 3z^2 x^2 y + 2zxy^2 + 2 = 0$.
13. a) $f(u, v) = \sin \frac{u+v}{v}$, $u(x, y) = x^3 y$, $v(x, y) = yx^2$;
 b) $f(u, v) = e^{uv}$, $u(x, y) = \ln(x - y)$, $v(x, y) = \ln(x + y)$;
 c) $z^3 xy^2 - 2z^2 x^2 y - zx^2 y + 3 = 0$.

14. a) $f(u, v) = e^{u+2v}$, $u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $v(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$;
 b) $f(u, v) = \arcsin(u + v)$, $u(x, y) = 2^x y$, $v(x, y) = x + y$;
 c) $z^3 xy^{-2} - 2zy^2 x^{-1} + z^{-1} = 0$.
15. a) $f(u, v) = \ln(2v + u^2)$, $u(x, y) = x^2 y$, $v(x, y) = x - y^2$;
 b) $f(u, v) = \sqrt{u^2 - v^2}$, $u(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$, $v(x, y) = \ln(x - y)$;
 c) $z^3 e^{x-y} + z e^{x+y} = 2$.
16. a) $f(u, v) = \arccos(u + v)$, $u(x, y) = xy^3$, $v(x, y) = x^2 y^2$;
 b) $f(u, v) = e^{u-v}$, $u(x, y) = \ln(x + y)$, $v(x, y) = \ln(x + 2y)$;
 c) $z^3 \sin x - z^2 \cos y = 1$.
17. a) $f(u, v) = \ln(v + u^2)$, $u(x, y) = xy^2 + x^2 y$, $v(x, y) = \sqrt{x - y}$;
 b) $f(u, v) = e^{u+v}$, $u(x, y) = \sin x \cos x$, $v(x, y) = \sin y \cos x$;
 c) $z^3(x - y^2) + 2z(x + y) + 3 = 0$.
18. a) $f(u, v) = \cos u \sin v$, $u(x, y) = x^2 y^2$, $v(x, y) = xy^3$;
 b) $f(u, v) = \arccos(u + v)$, $u(x, y) = e^{x-y}$, $v(x, y) = e^{x+y}$;
 c) $z^3 xy + 2zx^2 - 3zy = 0$.
19. a) $f(u, v) = \ln(u - v^2)$, $u(x, y) = xy^3$, $v(x, y) = x^2 y$;
 b) $f(u, v) = \arcsin(u - v)$, $u(x, y) = e^{xy}$, $v(x, y) = e^{x+y}$;
 c) $z^3 y + 2z^2 xy^{-1} - zy^2 x + 3 = 0$.
20. a) $f(u, v) = \sqrt{\frac{u}{v-1}}$, $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x - y$;
 b) $f(u, v) = \operatorname{arctg} uv$, $u(x, y) = y \ln x$, $v(x, y) = x \ln y$;
 c) $z^3 x^2 - z^2 y x^{-1} + 2zx - 4 = 0$.
21. a) $f(u, v) = \cos v \sin u$, $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = \frac{x}{y}$;
 b) $f(u, v) = \operatorname{arctg} uv$, $u(x, y) = e^{x-3y}$, $v(x, y) = e^{3x-y}$;
 c) $4z^3 + 2zxy^2 - x\sqrt[3]{y} = 0$.
22. a) $f(u, v) = \ln(2u + 3v)$, $u(x, y) = x^2 y$, $v(x, y) = xy^3$;
 b) $f(u, v) = \operatorname{arctg}(u + v)$, $u(x, y) = e^{xy}$, $v(x, y) = e^{x/y}$;
 c) $z^3(x - 2y) + 2z^2 xy^3 - 4z + 3 = 0$.

23. a) $f(u, v) = \operatorname{tg} v \sin u$, $u(x, y) = x - y^2$, $v(x, y) = x^2 + y$;
 b) $f(u, v) = e^{u/v}$, $u(x, y) = \ln(x - y)$, $v(x, y) = \ln(x + y)$;
 c) $3z^3xy^2 - 4zx^{-1}y + 3x\sqrt[3]{y} = 0$.
24. a) $f(u, v) = \ln u \cos v$, $u(x, y) = xy + 1$, $v(x, y) = x - y$;
 b) $f(u, v) = \operatorname{arctg}(u - v)$, $u(x, y) = xe^{2v}$, $v(x, y) = e^{xv}$;
 c) $4z^3 - 3z^2x + 2zy^2 - 3 = 0$.
25. a) $f(u, v) = \sqrt{u + v}$, $u(x, y) = x^2\sqrt{y}$, $v(x, y) = \sqrt{xy}$;
 b) $f(u, v) = e^{u+2v}$, $u(x, y) = \sin \frac{x}{y}$, $v(x, y) = \sin \frac{y}{x}$;
 c) $z^3e^{x/y} + 2zxy - 3 = 0$.
26. a) $f(u, v) = \sin uv$, $u(x, y) = e^{xy}$, $v(x, y) = e^{y-x}$;
 b) $f(u, v) = e^{u+3v}$, $u(x, y) = \ln(x - y)$, $v(x, y) = \ln(x + y)$;
 c) $z^3xy^2 - z^2x^2y + 2zxy + 3 = 0$.
27. a) $f(u, v) = \cos \frac{u}{v}$, $u(x, y) = \cos xe^y$, $v(x, y) = \sin xe^y$;
 b) $f(u, v) = e^{u-v}$, $u(x, y) = x + \operatorname{tg} xy$, $v(x, y) = xy$;
 c) $z^3(x + y^2) + z^2(y - x^2) + 2zx^2y + 1 = 0$.
28. a) $f(u, v) = \sqrt{u - v}$, $u(x, y) = \arcsin xy$, $v(x, y) = \arccos y$;
 b) $f(u, v) = \ln \sin uv$, $u(x, y) = x^2y$, $v(x, y) = xy^3$;
 c) $z^3 \sin x + z^2 \cos y + 2zxy + 3 = 0$.
29. a) $f(u, v) = \ln(u - vu)$, $u(x, y) = xy^3 - \sin xy$, $v(x, y) = x^2y$;
 b) $f(u, v) = \arccos(u + v)$, $u(x, y) = x - y$, $v(x, y) = xy^{-1}$;
 c) $z^3x^2y + 2zxy^2 - xz^{-1} = 1$.
30. a) $f(u, v) = vu^{-1} + uv^{-1}$, $u(x, y) = x(\sqrt{x^2 + y^2})^{-1}$, $v(x, y) = y(\sqrt{x^2 + y^2})^{-1}$;
 b) $f(u, v) = \arcsin uv$, $u(x, y) = e^{x-y}$, $v(x, y) = e^{x+y}$;
 c) $z^3(x + y + z) + 2zxy + 2z^2xy = z^{-1}$.

§ 3. Экстремумы функций

1. Исследовать на экстремум функции:

a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

b) $f(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

c) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 2y$;

d) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

e) $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ при условии $x > 0, y > 0$;

f) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$.

2. Найти экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y^2$
при условии $x + 2y = 1$.

3. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$
при условии $x^2 + 2y^2 = 1$.

4. Найти экстремум функции $f(x, y) = 2 - x + y$
при условии $x^2 + 2y^2 = 2$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
 $f(x, y) = 3 - 2x^2 - y^2 + xy$
в треугольнике, ограниченном прямыми
 $y = 0, x = 0$ и $x + y = 5$,
и в треугольнике, ограниченном прямыми
 $y = -1, x = -1$ и $x + y = 0$.

Контрольное задание №19.

В пункте а) каждого варианта найти экстремумы функции, в пункте б) — экстремумы при условии, наложенном на аргументы x и y , в пункте с) — наибольшее и наименьшее значения функции в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0$ и $x + y = 2$.

1. а) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 3y^2)$;

б) $f(x, y) = 3 - x - 2y, x^2 + 2y^2 = 4$;

с) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y$.

2. а) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x^2 - y^2)$;

б) $f(x, y) = 2 - 2x - y, 2x^2 + 3y^2 = 3$;

с) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 3x - y$.

3. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x^2 - 2y^2)$;
 b) $f(x, y) = 2 - 2x - y, \quad 2x^2 + y^2 = 4$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - x + y$.
4. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x^2 + 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 5 - 3x - 2y, \quad 3x^2 + 2y^2 = 4$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 3y$.
5. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - 2x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 3$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y$.
6. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(3x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 5 - 2x - 3y, \quad 2x^2 + 3y^2 = 4$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + 3y$.
7. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(2x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2x - 3y, \quad 2x^2 + 3y^2 = 3$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 5y$.
8. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(2x^2 + 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 5 - 2x - y, \quad 2x^2 + 3y^2 = 4$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 4x - 2y$.
9. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(2x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - 5y, \quad x^2 + 2y^2 = 3$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.
10. a) $f(x, y) = e^{-x^2-4y^2}(x^2 - 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - 2x - y, \quad 2x^2 + 3y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + x + y$.
11. a) $f(x, y) = e^{-4x^2-y^2}(x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - y, \quad x^2 + 4y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2x + y$.
12. a) $f(x, y) = e^{-4x^2-y^2}(x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - 2x - 3y, \quad x^2 + 4y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y$.

13. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (2x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - x - 3y, \quad x^2 + 4y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 7y$.
14. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (x^2 + 2y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - x - y, \quad 4x^2 + y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y$.
15. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (2x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2x - 3y, \quad 4x^2 + y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3y - 3x$.
16. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (x^2 - 2y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - 3y, \quad 2x^2 + 4y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 2y$.
17. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (x^2 - 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 3x - y, \quad 4x^2 + 2y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - x - y$.
18. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (3x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - 3y, \quad 4x^2 + 2y^2 = 1$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 2x - 3y$.
19. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (2x^2 - 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - 2y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x + 2y$.
20. a) $f(x, y) = e^{-4x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2x - y, \quad x^2 + 2y^2 = 6$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y$.
21. a) $f(x, y) = e^{-x^2 - 9y^2} (x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2x - y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y$.
22. a) $f(x, y) = e^{-x^2 - 9y^2} (x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 2 - x - 2y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x + y$.

23. a) $f(x, y) = e^{-x^2 - 9y^2} (2x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - x - 3y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + x + y$.
24. a) $f(x, y) = e^{-9x^2 - y^2} (2x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - 3x - y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 4x + y$.
25. a) $f(x, y) = e^{-9x^2 - y^2} (3x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 4 - 3x - 2y, \quad x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$.
26. a) $f(x, y) = e^{-9x^2 - y^2} (x^2 - 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - x - 2y, \quad 2x^2 + y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 5x + y$.
27. a) $f(x, y) = e^{-9x^2 - y^2} (2x^2 - 3y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2y - x, \quad 2x^2 + y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.
28. a) $f(x, y) = e^{-2x^2 - 8y^2} (3x^2 - 2y^2)$;
 b) $f(x, y) = 2 - 3x - y, \quad 2x^2 + y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 3x + y$.
29. a) $f(x, y) = e^{-8x^2 - 2y^2} (x^2 - y^2)$;
 b) $f(x, y) = 2 - x - 3y, \quad 2x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - x - 3y$.
30. a) $f(x, y) = e^{-8x^2 - 2y^2} (x^2 + y^2)$;
 b) $f(x, y) = 3 - 2x - y, \quad 2x^2 + 2y^2 = 5$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 5x + y$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА

§ 1. Понятие множества, подмножества, вложения

1. Восемь подмножеств, из них 6 собственных: $\{1\}$, $\{A\}$, $\{Z\}$, $\{1, A\}$, $\{1, Z\}$, $\{A, Z\}$, и два несобственных: \emptyset и $\{1, A, Z\}$.
2. Множество A состоит из двух элементов: $\{1, 2\}$ и 3 и имеет четыре подмножества: \emptyset , $\{\{1, 2\}\}$, $\{3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$.
3. Верны только следующие утверждения: $1 \in A$, $\{7\} \subset A$, $\{5\} \in A$.
4. Указание: докажите сначала, что $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$.
5. Указание: следует воспользоваться определениями понятий $A = B$, $A \in B$, $A \subset B$.
7. а), б), с), d) – верно.
9. а) $A = \{7\}$, б) $B = \emptyset$ (возможны и другие варианты ответа);
с) $C = \{1, 2\}$.

§ 2. Операции над множествами

1. $A \cap B = \{1, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 5, 7\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{5\}$.
2. Множество отличников группы;
множество студентов группы, не являющихся отличниками;
множество отличников в других группах факультета.
8. а) $A \cap B \cup C$; б) $A \cup B \cup C$;
с) $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (B \cup A))$;
d) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B)$.
9. Это число равно $m + n - k$.
10. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0; 1]$; $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$.

§ 3. Эквивалентность множеств

2. а) Неверно; б) верно.
3. Не является.
4. Указание: перенумеруйте элементы множества.
5. Указание: перенумеруйте элементы множества.
6. Указание: перенумеруйте элементы множества.
8. $A = Z$; B – множество всех подмножеств в множестве A ;
 C – множество всех подмножеств в множестве B .
9. Эквивалентны.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ

§ 1. Первоначальные понятия о функциях

1. a) $(-\infty; +\infty)$; b) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$;
c) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; d) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2\pi k, 2\pi k + \pi]$;
e) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$;
f) $\bigcup_{k \geq 0} (2\pi k, 2\pi k + \pi/2) \cup \bigcup_{k \geq 1} (2\pi k - \pi/2, 2\pi k)$;
g) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi/2, (k+1)\pi/2)$; h) $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.
2. a) Не является ни четной, ни нечетной; b) то же самое;
c) то же самое; d) четная; e) нечетная;
f) четная; g) то же самое; h) то же самое.
3. a) Непериодическая; b) то же самое;
c) периодическая с периодом π ;
d) периодическая с периодом 2π ;
e) непериодическая; f) то же самое;
g) периодическая с периодом 2π .

§ 2. Пределы функций. Бесконечно малые

1. a) $1/3$; b) 0; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 1; f) 1.
2. a) $4/3$; b) 0; c) $1/3$; d) $4/3$; e) $2/3$; f) $1/2$; g) 1;
h) $\ln 2$; i) $-\ln 6$; j) $-1/20$.
3. a) $-\infty$; b) 0; c) $2/5$; d) 2.
4. a) 0; b) $-1/16$; c) 0; d) $\ln 2/3$.
5. a) $1/e$; b) e^{-10} ; c) 1.
6. a) 1; b) 1; c) e ; d) e .
7. a) $1/2$; b) 1; c) 2; d) 1.
8. a) $\ln 2$; b) $8/3$; c) $-2/\ln 12$; d) $1/e$.
9. a) $1/2$; b) $2/\pi$; c) $7/2$; d) $10/3$; e) $\frac{\ln 2}{\ln 4/3}$; f) $-\infty$; g) 0;
h) $11/4$; i) 1; j) $1/8$; k) 0; l) e^{-1} ; m) e^2 ; n) -1;
o) $\lg e$; p) e ; q) $e^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; r) $3/2$; s) 0; t) 1.

§ 3. Непрерывные функции. Точки разрыва функций

1. Разрыв 1-го рода при $x=0$, скачок равен 2.
2. Разрыв 2-го рода при $x=0$ и 1-го рода при $x=e$, скачок равен -1 .
3. Разрыв 2-го рода при $x=0$.
4. Разрывы 2-го рода при $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Разрывы 1-го рода при $x=-1$ со скачком, равным -2 , и при $x=1$ со скачком, равным 2.
6. Разрывы 2-го рода при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$.
7. Разрыв 1-го рода при $x=0$, скачок равен -1 .

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Производная и дифференциал

1. а) $y' = 15x^2 - 14x$; б) $y' = \frac{3}{4\sqrt{x^3}}$; в) $y' = \frac{6x}{(x^2 + 2)^2}$;

д) $y' = -\frac{\sqrt{x} + 4}{2x^3}$; е) $y' = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}$;

ф) $y' = \frac{5}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$; г) $y' = 5^x 3 \ln 5$; х) $y' = 1 + \frac{1}{x}$;

и) $y' = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$; ж) $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; к) $y' = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$;

л) $y' = 3 \frac{\lg^2 x + \lg x + \lg e}{(\lg x + 1)^2}$; м) $y' = 10x \sin x + 5x^2 \cos x$;

н) $y' = 1 + \frac{3}{\cos^2 x}$; о) $y' = -\frac{1 + \cos x}{2 \sin^2 x}$;

п) $y' = \frac{1}{x} + e^x \operatorname{ctgx} - \frac{e^x + 1}{\sin^2 x}$; қ) $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

р) $y' = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$; с) $y' = e^x \operatorname{arctgx} + \frac{e^x}{1+x^2}$;

т) $y' = \frac{-1+x-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{\operatorname{arctgx}}{x^2}$.

2. a) $y' = 6(x^2 - 5x + 8)^5(2x - 5)$; b) $y' = -\frac{8x}{(x^2 - 2)^2}$;

c) $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$; d) $y' = -\frac{3x^2}{2(x^3 + 1)\sqrt{x^3 + 1}}$;

e) $y' = e^{x/3} + e^{-x/3}$; f) $y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; g) $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$;

h) $y' = \frac{4}{16x^2 - 1}$; i) $y' = \frac{\sqrt{e^x}}{2} \ln x^2 + \frac{2}{x} \sqrt{e^x}$; j) $y' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

k) $y' = \frac{4 \sin 2x}{\cos^3 2x}$; l) $y' = \frac{e^{\sin \ln(x+1)} \cos \ln(x+1)}{x+1}$;

m) $y' = 2(2x + \operatorname{tg}(3x+1))(2 + \frac{3}{\cos^2(3x+1)})$;

n) $y' = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{x+1}}$; o) $y' = \frac{6\sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-9x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1-9x^2)}}$;

p) $y' = \frac{\pi}{2}$; q) $y' = \frac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x}$;

r) $y' = e^{x-1}(x^2 + 2x)$; s) $y' = -(x^{-x})(1 + \ln x)$;

t) $y' = \sin^{1/\operatorname{tg} x} x \cdot (1 + \operatorname{ctg} x + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x})$.

3. a) $y'(x_0) = 4 - 3\sqrt{2}$; b) $y'(x_0) = 1$; c) $y'(x_0) = 8$;

d) $y'(x_0) = 4$; e) $y'(x_0) = -\frac{9}{10}$; f) $y'(x_0) = 1$;

g) $y'(x_0) = -\frac{1}{2}$; h) $y'(x_0) = \frac{1}{2}$; i) $y'(x_0) = -8\sqrt{3}$;

j) $y'(x_0) = -6$; k) $y'(x_0) = \frac{3}{2}$; l) $y'(x_0) = -36\sqrt[3]{4}$.

4. a) $y''' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$; b) $y''' = \frac{-8(1 + \cos^2 2x)}{\sin^3 2x}$;

c) $y''' = e^{-x^2}(12x - 8x^3)$; d) $y^{(IV)} = 5^5 e^{5x}$;

e) $y''' = -\frac{24x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$; f) $y''' = \frac{2x^6 + 12x^4 + 14x^3 + 6x + 2}{(x^3 - 1)^3}$;

g) $y''' = \frac{e^x(1 + x^2)}{(1 + x)^3}$; h) $y''' = \frac{8 \sin 2x(5 + \sin^2 2x)}{\cos^4 2x}$;

i) $y''' = 2 \frac{1 + 2 \sin^2 2x}{\cos^4 x}$; j) $y''' = -125 \cos 5x$;

k) $y''' = -\frac{1 + 3x}{4x\sqrt{x}(1+x)^2}$; l) $y''' = \frac{2}{x}$; m) $y^{(IV)} = \frac{24}{(x-1)^5}$;

n) $y''' = \frac{8 \sin x}{\cos^5 x}(2 + \sin^2 x)$; o) $y^{(IV)} = e^{-x}(12 - 8x + x^2)$.

$$5. \text{ a) } dy = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \text{ b) } dy = 6x^2(x^3 - 1)dx; \text{ c) } dy = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} dx;$$

$$\text{d) } dy = 2xe^{x^2} dx; \text{ e) } dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} dx;$$

$$\text{f) } dy = -3\sin(3x + 1)dx; \text{ g) } dy = \frac{8}{\sin 8x} dx;$$

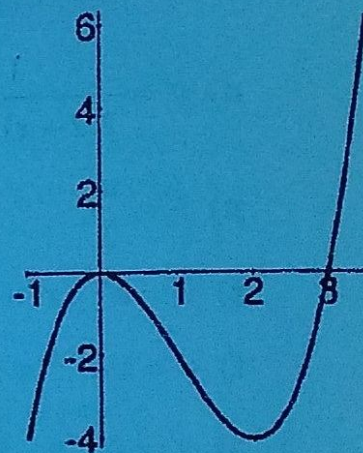
$$\text{h) } dy = \frac{3}{2\sqrt{3x(1-3x)}} dx; \text{ i) } dy = -\frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$\text{j) } dy = \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$$

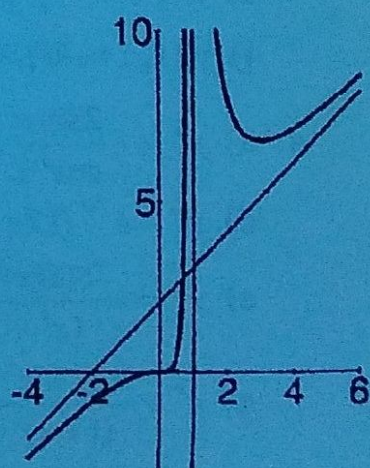
§ 2. Приложения производной

1. Ответы и графики смотрите ниже.

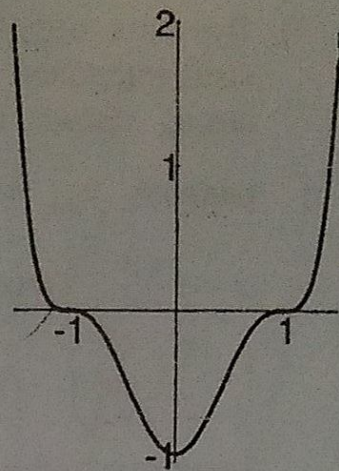
a) Функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Минимум, равный $y_{\min} = -4$, достигается при $x=2$, максимум, равный $y_{\max} = 0$ — при $x=0$, $(1; -2)$ — точка перегиба. Асимптот нет. Функция «выпукла вверх» при $x < 1$ и «выпукла вниз» при $x > 1$.



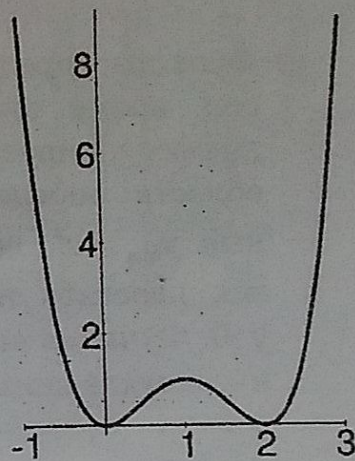
b) Функция определена при $x \neq 1$, непрерывна и дифференцируема в каждой точке своей области определения. Минимум, равный $y_{\min} = 27/4$, достигается при $x=3$, $(0;0)$ — точка перегиба. Асимптоты: $y = x + 2$ и $x=1$. Функция «выпукла вверх» при $x < 0$ и «выпукла вниз» при $x > 0, x \neq 1$.



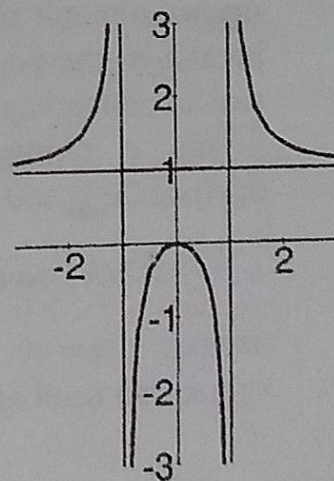
- с) Функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат. Минимум, равный $y_{\min} = -1$, достигается при $x=0$, точки перегиба - $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{64}{125}\right)$ и $(\pm 1; 0)$. Асимптот нет. Функция «выпукла вверх» при $-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}} < x < 1$, и «выпукла вниз» при $x < -1$, $-\frac{1}{\sqrt{5}} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $x > 1$.



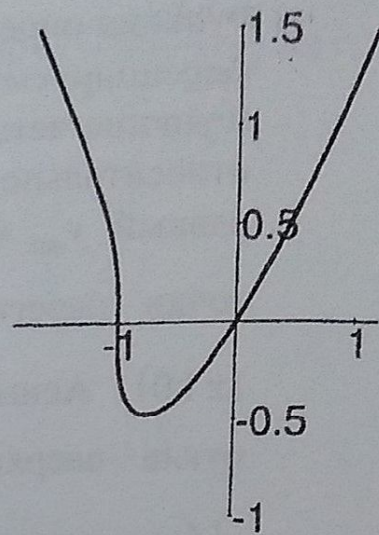
- д) Функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Максимум, равный $y_{\max} = 1$, достигается при $x=1$, минимум, равный $y_{\min} = 0$ - при $x=0$ и $x=2$. Абсциссы точек перегиба - $1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$. Асимптот нет. Функция «выпукла вверх» при $1 - \sqrt{\frac{1}{3}} < x < 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$, и «выпукла вниз» при $x < 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ и при $x > 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$.



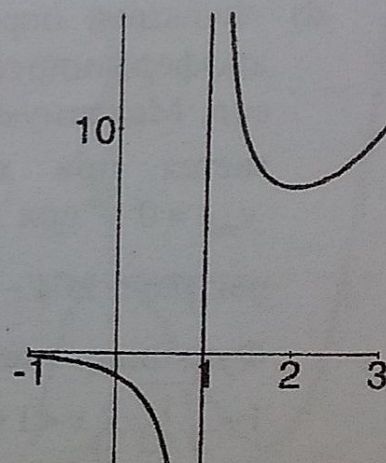
- е) Функция определена при $x \neq \pm 1$, непрерывна и дифференцируема в каждой точке своей области определения. Функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат. Максимум, равный $y_{\max} = 0$, достигается при $x=0$, точек перегиба нет. Асимптоты: $x = \pm 1$ и $y = 1$. Функция «выпукла вниз» при $|x| > 1$ и «выпукла вверх» при $|x| < 1$.



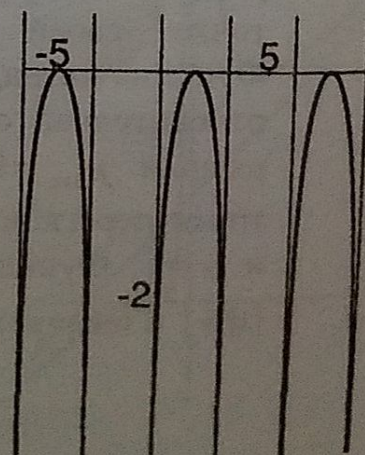
- f) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси и дифференцируема везде, кроме точки $x = -1$. Минимум, равный $y_{\min} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, достигается при $x = -\frac{3}{4}$. Точки перегиба — $(-1; 0)$ и $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2\sqrt[3]{2}})$. Асимптот нет. Функция «выпукла вверх» при $-\frac{3}{2} < x < -1$ и «выпукла вниз» при $x < -\frac{3}{2}$ и $x > -1$.



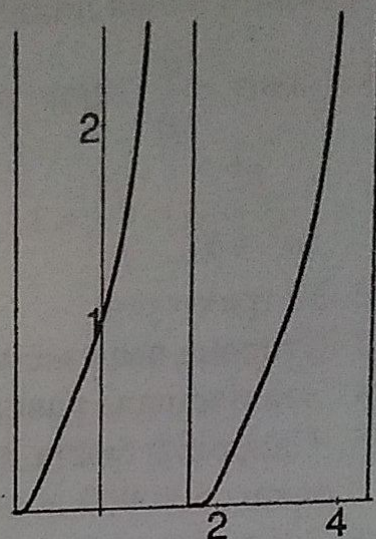
- g) Функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=1$, непрерывна и дифференцируема во всех точках своей области определения. Минимум, равный $y_{\min} = e^2$, достигается при $x=2$. Точек перегиба нет. Асимптоты: $x=1$ и $y=0$. Функция «выпукла вверх» при $x < 1$ и «выпукла вниз» при $x > 1$.



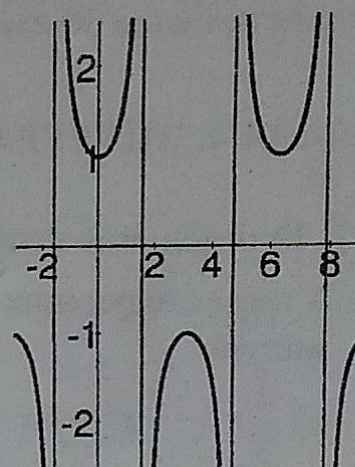
- h) Функция определена на промежутках $2\pi k < x < 2\pi k + \pi$, где (и далее) $k \in \mathbb{Z}$, произвольное целое число. Она непрерывна и дифференцируема во всех точках своей области определения, периодична с периодом 2π . Максимумы, равные $y_{\max} = 0$, достигаются в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, точек перегиба нет. Асимптоты: $x = \pi k$. Функция «выпукла вверх» во всей области определения.



i) Функция определена на промежутках $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, непрерывна и дифференцируема во всех точках своей области определения, периодична с периодом π . Экстремумов и точек перегиба нет. Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi k$ «слева». Функция «выпукла вниз» во всех точках своей области определения.



j) Функция определена на промежутках $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, непрерывна и дифференцируема во всех точках своей области определения и периодична с периодом 2π . Максимумы функции, равные $y_{\max} = -1$, достигаются при $x = 2\pi k + \pi$, а минимумы, равные $y_{\min} = 1$, при $x = 2\pi k$, точки перегиба отсутствуют. «Выпукла вниз» на промежутках вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, и «выпукла вверх» на промежутках вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.



2. Это число равно единице.

3. $S = \frac{l^2}{8}$ при $x = \frac{l}{4}$, где x – сторона прямоугольника, примыкающая к стене.

4. Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Ширина окна должна быть равна $\frac{2R}{4 + \pi}$.

6. Если сделан только круг.

7. Диаметр основания равен $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, высота равна диаметру.

8. В трех километрах от лагеря.

9. Через $1\frac{27}{43}$ час, то есть примерно через 1 час 38 минут.

10. Наибольшая длина равна приблизительно 8.32 м.

11. $\cos \varphi = \frac{q}{p}$, при условии, что $\frac{q^2}{p^2} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2}$; или $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, если

$$\frac{b^2}{a^2 + b^2} < \frac{q^2}{p^2} < 1.$$

12. 30 тракторов.

13. Сторона вырезаемого квадрата равна двум.

14. Эта площадь равна 32 ед^2 .

15. Скорость судна должна быть 50 км/час , минимальные затраты равны 500 000 долларов.

16. Максимальная прибыль, равная 900 долларов, достигается при скорости судна 30 км/час .

ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Вычисление интегралов и исследование их свойств

1. В нижеследующих формулах C обозначает произвольную постоянную.

a) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$;

b) $\frac{2}{5}x^{5/2} - \ln|x| + x^5 + C$;

c) $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{3}{4}x^{8/3} + \frac{3}{11}x^{11/3} + C$;

d) $-\frac{1}{4x^4} - \ln|x| + C$;

e) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \ln|2x + 1| + C$;

f) $\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg}x + C$;

g) $\arcsin \frac{x}{2} + C$;

h) $\sqrt{x^2 - 4} + 2 \ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$;

i) $\frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$;

$$j) -\frac{1}{2}e^{x^2} + C;$$

$$k) \frac{1}{2}\sin(4x+1) + C;$$

$$l) \frac{1}{6}\sin^6(x+3) + C;$$

$$m) \frac{1}{\sin(1-x)} + C;$$

$$n) -\frac{1}{\ln(x+1)} + C;$$

$$o) \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C;$$

$$p) -\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} + C;$$

$$q) \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\ln|2x + \sqrt{4x^2+1}| + C;$$

$$r) \sin x - x\cos x + C;$$

$$s) 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C;$$

$$t) -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$u) x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C;$$

$$v) \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C;$$

$$w) \ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x+10}| + C;$$

$$x) \frac{5}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C;$$

$$y) \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C;$$

$$z) \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

$$2. a) \frac{19}{6};$$

$$b) \frac{e^2-3}{2};$$

$$c) 1 + \frac{\pi}{12};$$

$$d) 1 - \frac{\ln(e^2-4)}{2};$$

$$e) \frac{\pi}{12};$$

$$f) \frac{18}{\ln 3};$$

$$g) \frac{e-1}{2e^3};$$

$$h) -\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$i) 2\ln 2;$$

- j) 2 k) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; l) $\ln 2$;
 m) $\sqrt{e} - 1$; n) $\frac{\pi}{12}$; o) $\frac{\pi}{48}$;
 p) 1; q) π ; r) $\frac{e-2}{e}$;
 s) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$; t) $2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2$; u) $\frac{\pi}{12}$;
 v) $e^{\pi/2} + 1$; w) $\frac{\pi}{6}$.

3. a) Сходится, равен $\frac{45}{44}$;

b) расходится: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4x^4} - \ln x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \infty = +\infty$;

c) сходится, равен π ; d) сходится, равен $\sqrt{5} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$;

e) сходится, равен $\frac{1}{\ln 5}$; f) сходится, равен $\frac{1}{2}$;

g) расходится; h) расходится;

i) сходится, равен $\operatorname{arctg}(x-2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$;

j) сходится, равен $\frac{\pi}{3}$; k) расходится: $-\frac{1}{\ln x} \Big|_0^1 = +\infty$;

l) расходится: $\frac{1}{2} \ln \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = +\infty$; m) расходится;

n) сходится, равен $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; o) сходится, равен $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$;

p) сходится, равен 2;

q) сходится, равен $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$;

r) сходится, равен π ; s) сходится, равен 4;

t) сходится, равен 2.

4. a) Сходится, равен 1;

b) расходится;

c) сходится, равен 2;

d) сходится, равен 1;

e) расходится;

f) расходится;

g) расходится;

h) расходится;

i) расходится;

j) сходится, равен нулю.

5. a) 12, b) 6, c) $\frac{9}{2}$, d) 6, e) $\frac{9}{2}$, f) 16, g) $\frac{125}{6}$, h) $\frac{16}{3}$,

i) $\frac{95}{6}$, j) $\frac{17}{4}$, k) $\frac{27}{4}$, l) $\frac{5}{12}$, m) $\frac{75}{4}$, n) $e^2 - 2$, o) $\frac{e^2}{2} + e - 3$,
 p) 2, q) $\frac{3}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, r) $\frac{1}{2}(\ln 2 + \sqrt{2} - 2)$, s) 4, t) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

- a) Расходится; b) расходится; c) расходится.
- a) Расходится; b) сходится; c) сходится.
- a) Сходится; b) сходится; c) сходится.
- a) Сходится; b) сходится; c) расходится.
- a) Сходится; b) расходится; c) сходится.
- a) Условно сходится; b) условно сходится; c) абсолютно сходится.
- a) Расходится; b) расходится; c) сходится;
 d) расходится; e) расходится; f) сходится;
 g) условно сходится; h) сходится.

§ 2. Степенные ряды

- a) $|x| < 1$; b) $x = 0$;
 c) абсолютно для $|x| < 1$, условно для $x = -1$;
 d) $|x| \leq 1$; e) $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 f) абсолютно для $|x| < 1$, условно для $x = -1$.
- a) $4 + \ln 2 \left((x-4) + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} \right) (x-4)^2 + \left(\frac{\ln^2 2}{96} - \frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{128} \right) (x-4)^3 + \dots \right)$;
 b) $1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$;
 c) $\frac{\ln 17}{4} + \frac{x-16}{68} - \frac{(x-16)^2}{2312} + \frac{(x-16)^3}{58956} + \dots$;
 d) $-\sin 1 + \frac{\cos 1}{3}(x+1) + \frac{\sin 1 + 2\cos 1}{18}(x+1)^2 + \frac{2\sin 1 + 3\cos 1}{54}(x+1)^3 + \dots$;
 e) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots$
- a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} x^n$,
 абсолютно сходится для всех значений x ;

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

абсолютно сходится для всех значений x ;

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^{2n}(2n)!} x^{10n},$$

абсолютно сходится для всех значений x ;

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n,$$

абсолютно сходится при $|x| < \frac{1}{3}$, условно для $x = -\frac{1}{3}$;

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n},$$

абсолютно сходится для всех $|x| < 1$;

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n + (-4)^n}{n} x^n,$$

абсолютно сходится при $|x| < \frac{1}{5}$, условно для $x = \frac{1}{5}$;

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{4^{n+1}} \right) x^n,$$

абсолютно сходится при $|x| < 3$, условно для $x = -3$.

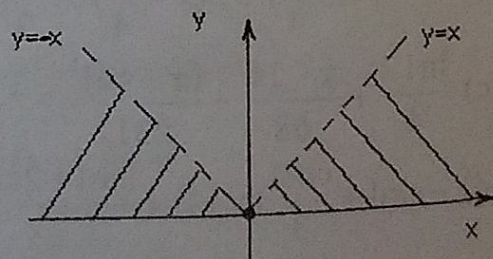
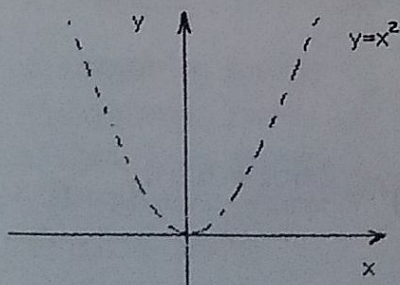
4. a) 0.026; b) 1.605; c) 0.384; d) 0.497;
e) 0.248; f) 0.481.

ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

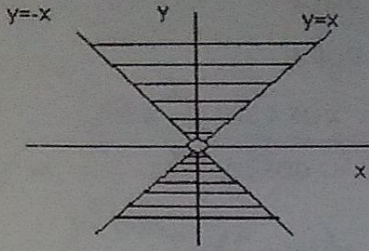
§ 1. Основные понятия

1. a) $y \neq x^2$;

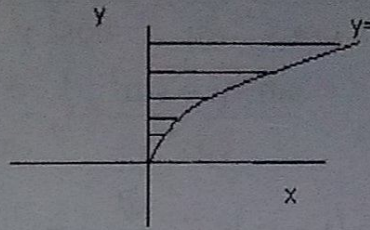
b) $0 \leq y < |x|$;



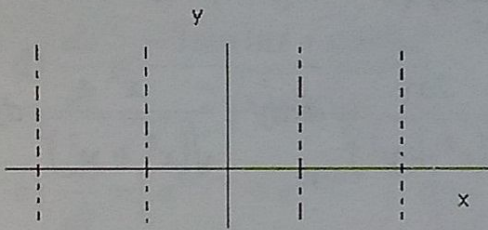
$$c) \begin{cases} y \neq 0 \\ |y| \geq |x| \end{cases};$$



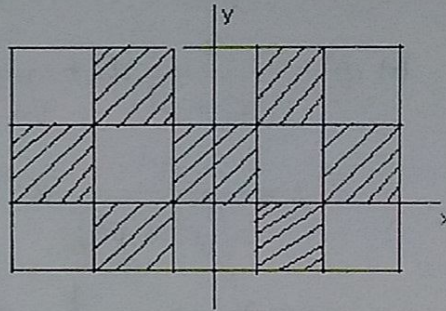
$$d) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq \sqrt{x} \end{cases};$$



$$e) x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$



$$f) \begin{cases} 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n \leq y \leq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi n \leq y \leq 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$2. \quad a) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2};$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y;$$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x);$$

$$d) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y-1}{(x+1)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(1-y)}{(1+x)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{(x+1)^2};$$

$$e) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos x}{\cos y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\sin x}{\cos y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\sin x (1 + \sin^2 y)}{\cos^3 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y};$$

$$f) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (1 - xy)e^{-xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(xy - 2)e^{-xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^3 e^{-xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x(xy - 2)e^{-xy}.$$

$$3. \quad a) \quad df = \frac{1}{y} e^{x/y} dx - \frac{x}{y^2} e^{x/y} dy,$$

$$d^2 f = \frac{1}{y^2} e^{x/y} dx^2 - \frac{2(x+y)}{y^3} e^{x/y} dx dy + \frac{x(2y+x)}{y^4} e^{x/y} dy^2;$$

$$b) \quad df = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy,$$

$$d^2 f = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx^2 - \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy^2;$$

$$c) \quad df = -\frac{\sqrt{y}}{x^2} dx + \frac{1}{2x\sqrt{y}} dy;$$

$$d^2 f = 2\frac{\sqrt{y}}{x^3} dx^2 - \frac{1}{x^2\sqrt{y}} dx dy - \frac{1}{4x\sqrt{y^3}} dy^2;$$

$$d) \quad df = \frac{y \sin \frac{y}{x}}{x^2} dx - \frac{\sin \frac{y}{x}}{x} dy,$$

$$d^2 f = \frac{-y \left(y \cos \frac{y}{x} + 2x \sin \frac{y}{x} \right)}{x^4} dx^2 + \frac{2 \left(x \sin \frac{y}{x} + y \cos \frac{y}{x} \right)}{x^3} dx dy - \frac{\cos \frac{y}{x}}{x^2} dy^2$$

$$e) \quad df = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} dy,$$

$$d^2 f = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} dx^2 + \frac{1}{2\sqrt{xy}} dx dy - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{y^3}} dy^2;$$

$$f) df = \frac{1}{y \cos^2 \frac{y}{x}} dx - \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{y}{x}} dy,$$

$$d^2 f = \frac{2 \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^3 \frac{x}{y}} dx^2 - \frac{2 \left(y \cos \frac{x}{y} + 2x \sin \frac{x}{y} \right)}{y^3 \cos^3 \frac{x}{y}} dx dy + \frac{2x \left(y \cos \frac{x}{y} + x \sin \frac{x}{y} \right)}{y^4 \cos^3 \frac{x}{y}} dy^2.$$

§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций

$$1. \quad a) \frac{dz}{dt} = \left(2t + \frac{3}{\cos^2 t} + 1 \right) e^{t^2 + t + 3 \operatorname{tg} t + 1};$$

$$b) \frac{dz}{dt} = \left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{\ln(t^2-t+1)}{t^2} \right) e^{-1/t};$$

$$c) \frac{dz}{dt} = \frac{2t-3}{4t^{1/4}(t-1)^{5/4}} \operatorname{ctg} \frac{t^{3/4}}{(t-1)^{1/4}};$$

$$d) \frac{dz}{dt} = \frac{-3 \sin \ln t + \cos \ln t}{2\sqrt{t^5} \sin \ln t};$$

$$e) \frac{dz}{dt} = \left(e^{\sqrt{t^2-1}} + e^{\arcsin t^3} \right)^{-1} t \left(\frac{e^{\sqrt{t^2-1}}}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{3te^{\arcsin t^3}}{\sqrt{1-t^6}} \right);$$

$$f) \frac{dz}{dt} = (\sin t)^{\sqrt{t}} \left(\frac{\ln \sin t}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t} \cos t}{\sin t} \right).$$

$$2. \quad a) \frac{\partial z}{\partial x} = e^{\sqrt{\frac{x}{y}} \cos xy} \left(\frac{\cos xy}{2\sqrt{xy}} - \sqrt{xy} \sin xy \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sqrt{\frac{x}{y^3}} e^{\sqrt{\frac{x}{y}} \cos xy} \cdot \left(\frac{\cos xy}{2} + xy \sin xy \right);$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(\ln(x^2 - y^2) + xy) \left(y + \frac{2x}{x^2 - y^2} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(\ln(x^2 - y^2) + xy) \left(x - \frac{2y}{x^2 - y^2} \right);$$

$$c) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(y-x)^3}{(x+y)^5}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y)^3}{(x+y)^5};$$

$$d) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{4\sqrt[4]{y}};$$

$$e) \frac{\partial z}{\partial x} = (\operatorname{tg} xy)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{y}} \left(\frac{2y \operatorname{ctg} \frac{x}{y}}{\sin 2xy} - \frac{\ln \operatorname{tg} xy}{y \sin^2 \frac{x}{y}} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\operatorname{tg} xy)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{y}} \left(\frac{2x \operatorname{ctg} \frac{x}{y}}{\sin 2xy} + \frac{x \ln \operatorname{tg} xy}{y^2 \sin^2 \frac{x}{y}} \right);$$

$$f) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y^2 \cos \frac{y}{x} \cos \frac{x}{y} - 2x^2 \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}}{x^2 y \left(\cos \frac{x}{y} + \sin \frac{y}{x} \right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2 \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} - 2y^2 \cos \frac{y}{x} \cos \frac{x}{y}}{xy^2 \left(\cos \frac{x}{y} + \sin \frac{y}{x} \right)^2}.$$

3. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1};$
 b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z};$
 c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{-y}}{1+xye^{-y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xze^{-y}}{1+xye^{-y}};$
 d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \sin x - \cos x}{\cos z - z \sin z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y \sin y - \cos y}{\cos z - z \sin z};$
 e) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yx^{y-1} - z^x \ln z}{xz^{x-1} - y^z \ln y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zy^{z-1} + x^y \ln x}{xz^{x-1} - y^z \ln y}.$

§ 3. Экстремумы функций

1. a) Локальный минимум в точке $\left(\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right), f_{\min} = -\frac{4}{7};$
 б) локальный минимум в точке $\left(0; -\frac{2}{3}\right), f_{\min} = -\frac{4}{3};$
 в) локальный минимум в точке $\left(-\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right), f_{\min} = -\frac{21}{10};$
 д) локальный минимум в точке $(-4; -2), f_{\max} = \frac{8}{e^2};$
 е) локальный минимум в точке $(3; 2), f_{\min} = 108;$
 ф) локальный минимум в точке $(0; 0), f_{\min} = 0;$
 локальные максимумы в точках $(0; 1)$ и $(0; -1), f_{\min} = \frac{2}{e}.$

2. Минимум в точке $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $f_{\min} = \frac{1}{5}$.
3. Максимум в точках $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{2}\right)$, и $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}\right)$, $f_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,
 минимум в точках $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}\right)$, и $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{2}\right)$, $f_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
4. Максимум в точке $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f_{\max} = 2 + \sqrt{3}$,
 минимум в точке $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f_{\min} = 2 - \sqrt{3}$.
5. Наибольшее значение равно 3 при $x=0$, $y=0$, наименьшее значение равно -47 при $x=5$, $y=0$; и наибольшее значение равно 3 при $x=0$, $y=0$, наименьшее значение равно -1, достигается в двух точках при $x=-1$, $y=1$ и $x=1$, $y=-1$.

Учебное пособие

*Вадим Алексеевич Волков
Олег Томович Ижболдин
Геннадий Николаевич Малолеткин
Андрей Алексеевич Семенов
Иван Борисович Фесенко
Владимир Георгиевич Халин
Петр Константинович Черняев*

**Учебные и контрольные задания по математике
Математический анализ**

Лицензия ИД № 05158 от 25.06.2001 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 27.09.2006.
Формат 60x84¹/₁₆. Печать ризографическая.
Уч.-печ. л. 5,93. Тираж 500 экз. Заказ № 720.

Издательский центр экономического факультета СПбГУ
191123, С.-Петербург, ул. Чайковского, 62.