УДК 521.14 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 70F07

Справедлива ли теорема Якоби в однократно осредненной ограниченной круговой задаче трех тел?*

К. В. Холшевников

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Для цитирования: *Холшевников К. В.* Справедлива ли теорема Якоби в однократно осредненной ограниченной круговой задаче трех тел? // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 179–184. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.116

К. Якоби установлено, что в общей задаче N (и, в частности, трех) тел для устойчивости по Лагранжу какого-либо решения *необходима* отрицательность полной энергии системы. Для ограниченной задачи трех тел это утверждение тривиально, поскольку тело нулевой массы вносит нулевой вклад в энергию системы. Если рассматривать лишь уравнения, описывающие движение точки нулевой массы, то исчезает интеграл энергии. Однако если осреднить уравнения по долготам главных тел, интеграл энергии снова появляется. Справедлива ли в этом случае теорема Якоби? Оказалось, что нет. Для сколь угодно больших значений полной энергии существуют ограниченные периодические орбиты. В то же время отрицательности энергии оказалось *достаточно* для ограниченности орбиты в конфигурационном пространстве.

Ключевые слова: ограниченная круговая задача трех тел, теорема Якоби об устойчивости, осреднение.

1. Введение. Рассмотрим общую задачу трех тел-точек, подверженных только взаимному ньютоновскому притяжению. Как известно, барицентрическая система отсчета инерциальна, и в этой системе существует интеграл энергии

$$T - V = h. \tag{1}$$

Здесь T — кинетическая энергия, V — силовая функция, h — постоянная энергии. Как обычно, фиксируем произвольную постоянную в определении силовой функции условием $V \to 0$ при неограниченном удалении всех тел друг от друга.

К. Якоби доказал [1], что в общей задаче N (и, в частности, трех) тел для устойчивости по Лагранжу какого-либо решения необходимо неравенство

$$h < 0. \tag{2}$$

Напомним, что решение называется устойчивым по Лагранжу в будущем, если оно существует при $0 \leqslant t < \infty$ и ограничено в конфигурационном пространстве. Здесь

*Работа выполнена с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Вычислительный центр» при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-02-00552).

$t = 0$ — начальная эпоха. Аналогично определяется устойчивость в прошлом и двусторонняя устойчивость. Теорема Якоби верна для всех трех вариантов устойчивости.

В ограниченной задаче трех тел эта теорема тривиальна, поскольку тело нулевой массы вносит нулевой же вклад и в кинетическую, и в потенциальную (гравитационную) энергию. Если рассматривать лишь уравнения, описывающие движение точки нулевой массы, то исчезает интеграл энергии. Однако если осреднить уравнения по долготам главных тел, интеграл энергии снова появляется.

Цель настоящей работы — получить ответ на вопрос: справедлива ли в этом случае теорема Якоби. Оказалось, что она не выполняется, но становится справедливой после небольшой модификации.

Возможные приложения: определение устойчивости (или неустойчивости) по Лагранжу в спутниковых системах по значению h без интегрирования системы уравнений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную круговую задачу трех тел-точек Q_1 массы m_1, Q_2 массы m_2 и Q нулевой массы; $0 < m_2 \leqslant m_1$. Пусть главные тела описывают кеплеровы окружности вокруг барицентра O с угловой скоростью (средним движением) ω.

Движение Q рассмотрим в инерциальной системе отсчета с началом в барицентре O и ориентированной плоскостью xy, совпадающей с ориентированной плоскостью движения главных тел. Обозначим расстояния Q_1Q_2, OQ_1, OQ_2, Q_1Q, Q_2Q, OQ через c, c_1, c_2, r_1, r_2, r. Из геометрических соображений

$$c_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} c, \quad c_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} c \geqslant c_1\,, \quad c = c_1 + c_2\,.$$

По третьему закону Кеплера

$$\omega = \sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}\, c^{-3/2},$$

где $\mathcal{G}$ — постоянная тяготения. Координаты точек Q_s в функции времени t за счет выбора начальной эпохи можно положить равными

$$Q_1 = (-c_1 \cos\omega t,\, -c_1 \sin\omega t,\, 0), \qquad Q_2 = (c_2 \cos\omega t,\, c_2 \sin\omega t,\, 0).$$

Координаты точки Q, как обычно, обозначаем через $Q = (x, y, z)$.

Кинетическая энергия и силовая функция единицы массы точки Q в поле главных тел равны

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2}\,, \qquad V = V_1 + V_2\,, \qquad V_s = \frac{\mathcal{G} m_s}{r_s}\,, \qquad s = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь

$$r_1^2 = (x + c_1 \cos\omega t)^2 + (y + c_1 \sin\omega t)^2 + z^2, \qquad r_2^2 = (x - c_2 \cos\omega t)^2 + (y - c_2 \sin\omega t)^2 + z^2.$$

Функции (3) имеют период $P = 2\pi/\omega$ по времени, поэтому допустимо применить к нашей динамической системе метод осреднения [2]. Это равносильно замене V на W, где [3]

$$W = W_1 + W_2\,, \qquad W_s = \frac{A_s \mathbf{K}(k_s)}{\sqrt{r^2 + 2c_s\varrho + c_s^2}}\,, \qquad A_s = \frac{2\mathcal{G} m_s}{\pi}\,. \tag{4}$$

Здесь используются цилиндрические координаты $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, z; $r^2 = \varrho^2 + z^2$;

$$k_s^2 = \frac{4c_s\varrho}{r^2 + 2c_s\varrho + c_s^2}\,, \qquad 0 \leqslant k_s \leqslant 1. \tag{5}$$

Равенство слева достигается только на оси z (при $x^2 + y^2 = 0$), справа — только на особой окружности (при $x^2 + y^2 = c_s^2$, $z = 0$). Определяемая функциями T, W система автономна и обладает поэтому интегралом энергии

$$T - W = h. \tag{6}$$

От азимута функция W не зависит.

3. Контр-пример. Покажем, что условие (2) не является необходимым для устойчивости по Лагранжу. Именно, для произвольного $h \geqslant 0$ мы построим круговую периодическую орбиту, лежащую в плоскости $z = 0$. Достаточно приравнять центростремительную силу силе тяготения:

$$T = -\frac{r}{2}\frac{\partial W}{\partial r} = \sum_{s=1}^{2} \frac{A_s}{4(r+c_s)}\left[\frac{r+c_s}{r-c_s}\mathbf{E}(k_s) + \mathbf{K}(k_s)\right]. \tag{7}$$

Мы воспользовались вытекающими из (4), (5) при $z = 0$ соотношениями

$$W_s = A_s\frac{\mathbf{K}(k_s)}{r+c_s}\,, \quad k_s^2 = \frac{4c_s r}{(r+c_s)^2}\,, \quad 1 - k_s^2 = \frac{(r-c_s)^2}{(r+c_s)^2}\,,$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial r} = -\frac{A_s}{2r(r+c_s)}\left[\frac{r+c_s}{r-c_s}\mathbf{E}(k_s) + \mathbf{K}(k_s)\right]. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$\sum_{s=1}^{2} \frac{A_s}{r+c_s}\left[\frac{r+c_s}{r-c_s}\mathbf{E}(k_s) - 3\mathbf{K}(k_s)\right] = 4h. \tag{9}$$

Обозначая левую часть (9) через $F(r)$, представим последнее соотношение в виде

$$F(r) = 4h. \tag{10}$$

Составим таблицу значений $F(r)$ в ключевых точках:

r	$0 \leqslant r < c_1$	$c_1 - 0$	$c_1 + 0$	$c_2 - 0$	$c_2 + 0$	∞
F	< 0	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞	-0

Из уравнения (10) с учетом данных таблицы следуют утверждения.

1. В области $0 \leqslant r < c_1$ круговые орбиты могут существовать только при $h < 0$.

2. В области $c_1 < r < c_2$ круговые орбиты существуют при любом h.

3. В области $r > c_2$ круговые орбиты существуют при любом $h \geqslant \min_{r>c_2} F(r)$. В частности, они существуют при любом неотрицательном h и при не слишком малых отрицательных h.

4. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости. Мы доказали, что условие (2) не является *необходимым* для устойчивости по Лагранжу. Тем интереснее, что оно является *достаточным* (почти).

Теорема. *При выполнении условия* (2) *движение происходит в ограниченной области конфигурационного пространства.*

Доказательство приведено в [3].

Все же не всякое движение при $h < 0$ является устойчивым по Лагранжу. Пусть, например, $\mathbf{r}_0 = (r_0, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$, $r_0 > c_2$. Движение с такими начальными данными дает траекторию падения на внешнюю особую окружность. Орбита определена лишь на конечном интервале времени $-\tau < t < \tau$, ограничена в конфигурационном пространстве, и неограничена в пространстве скоростей. Здесь

$$\tau = \int_{c_2}^{r_0} \left[\frac{2A_1\mathbf{K}(k_1)}{r+c_1} + \frac{2A_2\mathbf{K}(k_2)}{r+c_2} \right]^{-1/2} dr, \qquad k_s^2 = \frac{4c_s r}{(r+c_s)^2}\,. \tag{11}$$

Заметим, что подынтегральная функция в (11) ограничена.

Дадим теперь достаточное условие неограниченности траектории.

Теорема. *Пусть в начальную эпоху* $t = 0$ *начальные данные удовлетворяют условиям* $h \geqslant 0$, $r_0 > 2c_2$, $\dot{r}_0 \geqslant 0$. *Тогда траектория определена при всех* $t \geqslant 0$, *причем*

$$\lim_{t\to\infty} r = \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим $I = \mathbf{r}^2 = r^2$ и вычислим две производные:

$$\dot{I} = 2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}, \qquad \ddot{I} = 4T + 2\mathbf{r}\,\mathrm{grad}W,$$

где в конце использованы уравнения движения $\ddot{\mathbf{r}} = \mathrm{grad}W$. Интеграл энергии (6) позволяет выразить $\ddot{I}$ через W и h:

$$\ddot{I} = 4W + 2\mathbf{r}\,\mathrm{grad}W + 4h. \tag{13}$$

Из (13) и формул (18), (19) Приложения выводим

$$\ddot{I} = \sum_{s=1}^{2} \frac{A_s}{\sqrt{\varphi_s}} \left[3\mathbf{K}(k_s) - \frac{r^2 - c_s^2}{\psi_s}\mathbf{E}(k_s) \right] + 4h, \tag{14}$$

где φ_s, ψ_s отличаются от введенных в Приложении φ, ψ подстановкой $c \mapsto c_s$. Предположим, что $r > 2c_2$. Заменяя в (14) $\mathbf{E}$ на $\mathbf{K}$, мы уменьшим правую часть, поэтому

$$\ddot{I} \geqslant \sum_{s=1}^{2} \frac{2A_s\mathbf{K}(k_s)}{\psi_s\sqrt{\varphi_s}}(r^2 - 3c_s\varrho + 2c^2) + 4h.$$

Выражение в скобках уменьшится при замене ϱ на r, так что

$$\ddot{I} \geqslant \sum_{s=1}^{2} \frac{2A_s\mathbf{K}(k_s)}{\psi_s\sqrt{\varphi_s}}(r - c_s)(r - 2c_s) + 4h. \tag{15}$$

В условиях теоремы из (15) следует $\ddot{I}_0 > 0$. По непрерывности при достаточно малом положительном $\tilde{t}$

$$\ddot{I} > 0 \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant t < \tilde{t}. \tag{16}$$

Обозначим через τ верхнюю грань $\tilde{t}$, для которых справедливо (16). Тогда при $0 < t < \tau$

$$\dot{I} = \dot{I}_0 + \int_0^t \ddot{I}\,dt > \dot{I}_0\,, \qquad I = I_0 + \int_0^t \dot{I}\,dt > I_0 + \dot{I}_0 t. \tag{17}$$

Предположим, что τ конечно. Тогда $\ddot{I}(\tau) = 0$ по определению τ. С другой стороны, согласно (17) $I(\tau) > I_0$, $\dot{I}(\tau) > \dot{I}_0$, откуда $r(\tau) > r_0$, $\dot{r}(\tau) > 0$. В силу (15) отсюда $\ddot{I}(\tau) > 0$, и мы пришли к противоречию.

Итак, $\tau = \infty$, и (17) влечет $\lim_{t\to\infty} I = \infty$, откуда следует справедливость (12). Теорема доказана.

5. Приложение. Пусть

$$W = \frac{\mathbf{K}(k)}{\sqrt{\varphi}}\,, \qquad k^2 = \frac{4c\varrho}{\varphi}\,, \qquad 1 - k^2 = \frac{\psi}{\varphi}\,, \tag{18}$$

где

$$\varphi = \varrho^2 + z^2 + c^2 + 2c\varrho, \qquad \psi = \varrho^2 + z^2 + c^2 - 2c\varrho.$$

Очевидно, $0 \leqslant k \leqslant 1$. Равенство слева достигается только на оси z (при $\varrho = 0$), справа — только на особой окружности (при $\varrho = c$, $z = 0$).

Производная от эллиптического интеграла известна [4]

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial (k^2)} = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{1-k^2}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right) = \frac{\varphi}{8c\varrho}\left(\frac{\varphi}{\psi}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right).$$

Равенства

$$\frac{\partial (k^2)}{\partial \varrho} = \frac{4c(z^2 + c^2 - \varrho^2)}{\varphi^2}\,, \qquad \frac{\partial (k^2)}{\partial z} = -\frac{8c\varrho z}{\varphi^2}$$

позволяют вычислить нужные нам производные по цилиндрическим координатам ϱ, z:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varrho} = \frac{z^2 + c^2 - \varrho^2}{2\varrho\varphi}\left(\frac{\varphi}{\psi}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} = -\frac{z}{\varphi}\left(\frac{\varphi}{\psi}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right).$$

Теперь легко получить компоненты градиента функции W в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial W}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\varrho\sqrt{\varphi}}\left(\frac{z^2 + c^2 - \varrho^2}{\psi}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right), \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{z}{\psi\sqrt{\varphi}}\mathbf{E}$$

и вириал

$$\varrho\frac{\partial W}{\partial \varrho} + z\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\left(\frac{c^2 - \varrho^2 - z^2}{\psi}\mathbf{E} - \mathbf{K}\right). \tag{19}$$

Литература

1. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию.* Москва, Наука (1968).
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* Москва, Физматгиз (1963).

3. Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* **7 (65)**, вып. 4, 734–742 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413

4. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*, пер. с нем. Москва, Наука (1964).

Статья поступила в редакцию 9 мая 2020 г.;
после доработки 28 августа 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф. (1939–2021)

Is Jacobi theorem valid in the singly averaged restricted circular Three-Body-Problem?*

K. V. Kholshevnikov†

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Institute of Applied Astronomy RAS, 10, nab. Kutuzova, St. Petersburg, 191187, Russian Federation

For citation: Kholshevnikov K. V. Is Jacobi theorem valid in the singly averaged restricted circular Three-Body-Problem? *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 179–184. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.116 (In Russian)

C. Jacobi found that in the General N-Body-Problem (including $N = 3$) for the Lagrangian stability of any solution *necessary* is the negativity of the total energy of the system. For the restricted three-body-problem, this statement is trivial, since a zero-mass body introduces zero contribution to the energy of the system. If we consider only the equations describing the movement of the zero mass point, then the energy integral disappears. However, if we average the equations over the longitudes of the main bodies, the energy integral appears again. Is the Jacobi theorem valid in this case? It turned out not. For arbutrary large values of total energy, there exist bounded periodic orbits. At the same time the negative energy is *sufficient* for the boundedness of an orbit in the configuration space.

Keywords: restricted circular Three-Body-Problem, Jacobi theorem on stability, averaging.

References

1. Subbotin M. F. *Introduction to Theoretical Astronomy.* Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)

2. Bogolyubov N. N., Mitropolsky Y. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij.* Moscow, Fizmatgiz Publ. (1963). (In Russian) [Engl. transl.: *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations.* New York, Gordon and Breach (1961)].

3. Kholshevnikov K. V., Titov V. B. Minimal velocity surface in the restricted circular Three Body-Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 4, 734–742 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 4, 473–479 (2020)].

4. Janke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln höherer Functionen.* Stuttgart, Teubner Verlagsgesellschaft (1960). [Russ. ed.: *Special'nye funkcii.* Moscow, Mir Publ. (1964)].

Received: May 9, 2020
Revised: August 28, 2020
Accepted: September 17, 2020

Author's information:

Konstantin V. Kholshevnikov — (1939–2021)

*This work was supported my Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-02-00552).