УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 93E11, 60G35

Линейный фильтр Калмана — Бьюси с векторными авторегрессионными сигналом и шумом

Т. М. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Товстик Т. М.* Линейный фильтр Калмана — Бьюси с векторными авторегрессионными сигналом и шумом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 111–122.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.110

Рассматривается линейная задача фильтрации Калмана — Бьюси для системы, в которой сигнал и шум являются векторными независимыми стационарными процессами авторегрессии, порядок которых больше единицы. Выводятся рекуррентные уравнения для фильтрации и ошибки фильтрации. Предлагается оптимальный способ задания начальных данных. Описывается пример, в котором алгоритм приводит к стационарному режиму на бесконечности, а также пример, в котором фильтрация Калмана — Бьюси невозможна в связи со стремлением ошибки фильтрации к бесконечности. Поведение сигнала и его фильтрации прослеживается при моделировании сигнала и шума в виде векторных гауссовских стационарных процессов авторегрессии. Приведенные примеры подтверждают теоретические выводы.

Ключевые слова: фильтр Калмана — Бьюси, векторные стационарные процессы авторегрессии высокого порядка.

1. Введение. На выходе динамической системы наблюдается процесс, состоящий из суммы сигнала и шума с известными характеристиками. Нужно найти оптимальную оценку сигнала, которая в этом случае называется фильтрацией. Методы фильтрации, основанные на бесконечном интервале наблюдений, рассматриваются в работах [1–4]. В фильтрации Калмана — Бьюси начальный момент фильтрации совпадает с начальным моментом наблюдений. Первоначально этот вид фильтрации для дискретного времени был предложен в [5], а для непрерывного времени — в [6]. Различные обобщения задачи фильтрации и приложения для анализа динамических систем рассматриваются в работах [7–17]. Исследуются системы с дискретным и непрерывным временем, векторные системы, нелинейные задачи. Строятся рекуррентные соотношения фильтрации и ее ошибки и в связи с этим рассматриваются вопросы существования и устойчивости. В [11] применяются методы нелинейной фильтрации в непрерывном случае с дискретными измерениями. В ряде работ [12–14] в качестве сигнала рассматриваются нестационарные марковские векторные процессы, а в качестве шума — независимый случайный вектор. В [15] в условиях существования фильтров Липцера — Ширяева находятся приближенные решения стохастических уравнений фильтрации. В работах [16, 17] процессы авторегрессии n-го порядка сводятся к векторным марковским процессам первого порядка. В работах [18–20] задача Калмана — Бьюси рассмотрена для одномерных процессов авторегрессии высокого порядка. Построены рекуррентные соотношения для фильтрации и ее ошибки. Кроме того, в работах [19, 20] предложен еще один алгоритм фильтрации, не имеющий рекуррентного характера.

Данная работа является продолжением работы [18], в которой сигнал и шум — это стационарные процессы авторегрессии высокого порядка.

2. Векторные стационарные процессы авторегрессии. Пусть наблюдаемый векторный процесс ζ_t является суммой двух независимых стационарных процессов, представляющих сигнал θ_t и шум η_t, и заданных в дискретные моменты времени

$$\zeta_t = \theta_t + \eta_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Не ограничивая общности, можно считать $\mathbf{E}\theta_t = \theta_E = \mathbf{E}\zeta_t = 0$.

Если $\theta_E \neq 0$, то все случайные величины θ_t и ζ_t следует центрировать, и именно для таких данных получена формула фильтрации μ_t. Если $\theta_E \neq 0$, то окончательно фильтрация в момент t будет определяться формулой $\mu_t + \theta_E$.

Процессы $\theta_t = (\theta_t(1), \ldots, \theta_t(k))^*$ и $\eta_t = (\eta_t(1), \ldots, \eta_t(k))^*$ — независимые векторные процессы авторегрессии порядков n и m соответственно:

$$\sum_{j=0}^{n} A_j \theta_{t-j} = J_\theta \varepsilon_t^{(1)}, \quad \sum_{j=0}^{m} B_j \eta_{t-j} = J_\eta \varepsilon_t^{(2)}, \quad A_0 = B_0 = I. \tag{2}$$

Здесь $*$ — знак транспонирования, а A_j, B_j, J_θ, J_η, I — квадратные матрицы порядка k, I — единичная матрица. Не нарушая общности, матрицы J_θ и J_η можно считать нижнетреугольными. Векторы $\varepsilon_t^{(1)}$ и $\varepsilon_s^{(2)}$ независимы и состоят из независимых случайных величин, удовлетворяющих равенствам

$$\mathbf{E}\varepsilon_t^{(i)}(q) = 0, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t^{(i)}(q))^2 = 1, \quad \mathbf{E}\varepsilon_t^{(i)}(q)\varepsilon_s^{(j)}(r) = \delta_{ij}\delta_{qr}\delta_{ts}, \ i, j = 1, 2; \ 1 \le q, r \le k, \tag{3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $t, s = 0, 1, 2, \ldots$.

Из (1)–(3) следует, что $\mathbf{E}\zeta_t = \mathbf{E}\theta_t = \mathbf{E}\eta_t = 0$.

Формулы (2) применимы в общем случае при $t \ge w = \max(n, m)$. Начальный этап фильтрации при $t = 0, \ldots, w - 1$ рассмотрен в п. 5.

Обозначим ковариационные матрицы векторов θ_t и η_t соответственно

$$R_\theta(t) = ||\mathbf{E}\theta_{t+s}(i)\theta_s(j)||_{(i,j)_1^k}, \quad R_\eta(t) = ||\mathbf{E}\eta_{t+s}(i)\eta_s(j)||_{(i,j)_1^k}. \tag{4}$$

Связь между ковариациями (4) и коэффициентами авторегрессий (2) дается уравнениями Юла—Уокера [21], которые, например, для процесса θ_t запишем в виде

$$\sum_{j=0}^{n} A_j R_\theta(i - j) = \delta_{i0} G_\theta, \quad G_\theta = J_\theta J_\theta^*, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad R_\theta(-i) = R_\theta^*(i), \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{n} A_j R_\theta(i - j) = 0, \quad i = n + 1, n + 2, \ldots. \tag{6}$$

Векторный процесс авторегрессии θ_t является стационарным, если выполнены либо первые два из перечисленных ниже условий, либо третье условие.

1°. Все корни z_j многочлена $\det(\sum_{j=0}^{n} A_j z^{n-j})$ порядка $p = n\,k$ лежат внутри единичного круга, то есть

$$\det\left(\sum_{j=0}^{n} A_j z^{n-j}\right) = \prod_{j=1}^{p}(z - z_j), \quad |z_j| < 1, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{7}$$

2°. Матрица $\tilde{A}_\theta = \sum_{j=0}^{n} A_j R_\theta(j)$ должна быть положительно определенной, так как она является ковариационной матрицей $G = J_\theta J_\theta^*$ вектора $J_\theta \varepsilon_t^{(1)}$.

3°. Матричная функция $R_\theta(t)$ является положительно определенной [3]. Для процесса авторегрессии n-го порядка это условие сводится к положительной определенности корреляционной матрицы $\tilde{R}_\theta^{(n)}$ вектора $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$:

$$\tilde{R}_\theta^{(n)} = \begin{pmatrix} R_\theta(0) & R_\theta^*(1) & \ldots & R_\theta^*(n) \\ R_\theta(1) & R_\theta(0) & \ldots & R_\theta^*(n-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_\theta(n) & R_\theta(n-1) & \ldots & R_\theta(0) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ковариационные матрицы

$$R_\theta(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

и матрицы коэффициентов авторегрессии

$$A_i, \; i = 1, \ldots, n, \quad J_\theta \tag{10}$$

с учетом уравнений Юла — Уокера (5) взаимно однозначно определяют друг друга. Действительно, задавая матрицы (9), из уравнений (5) находим величины (10), и наоборот. При этом нужно проследить за положительной определенностью матриц $\tilde{A}_\theta$ и $\tilde{R}_\theta^{(n)}$. Задавая матрицы (10), нужно проверить выполнение условий 1° и 2°.

Аналогичными свойствами обладает процесс η_t.

Замечание. В книге Хеннана [22] утверждается, что если матрицы (10) векторного процесса авторегрессии θ_t удовлетворяют условию 1°, то вместе с любой положительно определенной матрицей $G = J_\theta J_\theta^*$ они определяют стационарный векторный процесс авторегрессии. Однако ниже приводится пример, в котором выполнены перечисленные выше условия, но они порождают нестационарный процесс, следовательно, для стационарности процесса выполнение условия 2° также необходимо.

3. Алгоритм рекуррентных уравнений фильтрации Калмана — Бьюси и ошибки фильтрации. Процессы θ_t и $\zeta_t = \theta_t + \eta_t$ стационарно связанные, а так как θ_t и η_t независимы, то

$$\mathbf{cov}(\theta_t, \zeta_s) = R_\theta(t-s), \quad R_\zeta(t-s) = \mathbf{cov}(\zeta_t, \zeta_s) = R_\theta(t-s) + R_\eta(t-s). \tag{11}$$

Пусть $F_t^\zeta = \sigma\{\omega : \zeta_0, \ldots, \zeta_t\}$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная векторами $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_t\}$.

Задача фильтрации Калмана — Бьюси состоит в прогнозе процесса θ_t при $t \geq 0$ по наблюдениям за процессом $\zeta_t, \; t \geq 0$.

В работе [8] рассмотрен случай $m = n = 1$, а в [18] рассматривается фильтрация в предположении, что сигнал и шум являются одномерными процессами авторегрессии с произвольными m и n. Ниже исследуется более общий случай, в котором сигнал θ_t и шум η_t — векторные процессы авторегрессии.

Введем следующие обозначения:

$$w = \max\{n, m\}, \quad A_j = 0,\ j > n, \quad B_i = 0,\ i > m, \tag{12}$$

которые дают возможность одновременно рассматривать случаи $n \geq m$ и $n < m$. Исключив из представлений (1) и (2) процесс η_t, являющийся шумом, получим уравнения для частично наблюдаемой пары процессов

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= -\sum_{j=1}^{n} A_j \theta_{t+1-j} + J_\theta \varepsilon_{t+1}^{(1)}, \\ \zeta_{t+1} &= -\sum_{j=1}^{m} B_j \zeta_{t+1-j} - \sum_{j=1}^{w} (A_j - B_j)\theta_{t+1-j} + J_\theta \varepsilon_{t+1}^{(1)} + J_\eta \varepsilon_{t+1}^{(2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Оценку вектора θ_t относительно σ-алгебры F_t^ζ и матрицу ошибок обозначим соответственно

$$\mu_t = \mathbf{E}(\theta_t | F_t^\zeta), \quad \gamma_t = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)(\theta_t - \mu_t)^* | F_t^\zeta]. \tag{14}$$

При $w > 1$ в рекуррентные уравнения, по которым вычисляются μ_t и γ_t, входят взаимные условные ковариационные матрицы $K_t[\tau]$ векторов $\hat{\theta}_t = \theta_t - \mu_t$ и $\hat{\theta}_{t-\tau}$:

$$K_t[\tau] = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)(\theta_{t-\tau} - \mu_{t-\tau})^* | F_t^\zeta], \quad 1 \leq \tau \leq w-1, \quad t > \tau, \quad K_t[0] = \gamma_t. \tag{15}$$

Из (15) следует, что $\mathbf{E}[(\hat{\theta}_s \hat{\theta}_t^*)|F_t^\zeta] = K_t[s-t] = K_t^*[t-s], 0 < s < t$.

Введем случайные векторы

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t+1} &= \theta_{t+1} - \mathbf{E}(\theta_{t+1}|F_t^\zeta), \\ \tilde{\zeta}_{t+1} &= \zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1}|F_t^\zeta) \end{aligned}$$

и их условные ковариации относительно σ-алгебры F_t^ζ

$$\begin{aligned} C_{11}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\theta}_{t+1}|F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{\tilde{\theta}_{t+1}\tilde{\theta}_{t+1}^*|F_t^\zeta\}, \\ C_{12}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1}|F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{\tilde{\theta}_{t+1}\tilde{\zeta}_{t+1}^*|F_t^\zeta\}, \quad C_{21}(t) = C_{12}(t)^*, \\ C_{22}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\zeta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1}|F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{\tilde{\zeta}_{t+1}\tilde{\zeta}_{t+1}^*|F_t^\zeta\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Для гауссовских случайных процессов θ_t и η_t оптимальная фильтрация m_t и матрица ошибок оценивания γ_t находятся на основании теоремы о нормальной корреляции [8] и имеют вид

$$\mu_{t+1} = \mathbf{E}(\theta_{t+1}|\{F_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = \mathbf{E}(\theta_{t+1}|F_t^\zeta) + C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)[\zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1}|F_t^\zeta)], \tag{17}$$

$$\gamma_{t+1} = \mathbf{cov}(\theta_{t+1}, \theta_{t+1}|\{F_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = C_{11}(t) - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)C_{21}(t). \tag{18}$$

В [8] (теор. 2, § 7, гл. VI) доказывается, что если процессы θ_t и η_t негауссовские, но не коррелированны, а вторые моменты процессов (13) ограничены, то оптимальная (в среднеквадратическом смысле) линейная оценка θ_t относительно ζ_s, $0 \leq s \leq t$, имеет вид (17), а ее матрица ошибок удовлетворяет равенству (18).

Из (13) следует

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\theta_{t+1}|F_t^{\zeta}) &= -\sum_{i=1}^{n} A_i\mu_{t+1-i},\\ \mathbf{E}(\zeta_{t+1}|F_t^{\zeta}) &= -\sum_{i=1}^{m} B_i\zeta_{t+1-i} - \sum_{i=1}^{w}(A_i - B_i)\mu_{t+1-i}.\end{aligned} \tag{19}$$

Для вычисления ковариаций (16) находим соответствующие составляющие:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{t+1} &= -\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i\hat{\theta}_{t+1-i} + J_\theta\varepsilon_{t+1}^{(1)},\\ \tilde{\zeta}_{t+1} &= -\sum_{i=1}^{w}(A_i - B_i)\hat{\theta}_{t+1-i} + J_\theta\varepsilon_{t+1}^{(1)} + J_\eta\varepsilon_{t+1}^{(2)}.\end{aligned} \tag{20}$$

Вычисление ковариаций случайных величин (20) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}&C_{11}(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i\gamma_{t+1-i}A_i^* + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{r=i+1}^{n}(A_iK_{t+1-i}[r-i]A_r^* + A_rK_{t+1-i}^*[r-i]A_i^*) + J_\theta J_\theta^*,\\ &C_{12}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\gamma_{t+1-i}(A_i - B_i)^* + \sum_{i=1}^{w-1}\sum_{r=i+1}^{w}(A_iK_{t+1-i}[r-i](A_r - B_r)^* +\\ &+A_rK_{t+1-i}^*[r-i](A_i - B_i)^*) + J_\theta J_\theta^*,\\ &C_{22}(t)=\sum_{i=1}^{w}(A_i-B_i)\gamma_{t+1-i}(A_i-B_i)^* + \sum_{i=1}^{w-1}\sum_{r=i+1}^{w}((A_i-B_i)K_{t+1-i}[r-i](A_r-B_r)^* +\\ &+(A_r - B_r)K_{t+1-i}^*[r-i](A_i - B_i)^*) + J_\theta J_\theta^* + J_\eta J_\eta^*.\end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть* (ζ, θ) *— частично наблюдаемая последовательность, удовлетворяющая уравнениям* (13)*. Тогда при выполнении равенств* (12) *оптимальные линейные фильтрации* μ_{t+1}*, матрицы ошибок* γ_{t+1} *и условных ковариаций* $K_{t+1}[\tau]$ *при* $t \geq w-1$*,* $w = \max\{n, m\}$*, подчиняются следующим рекуррентным уравнениям:*

$$\mu_{t+1}=-\sum_{k=1}^{n} A_k\mu_{t+1-k} + C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)\left[\zeta_{t+1} + \sum_{k=1}^{m} B_k\zeta_{t+1-k} + \sum_{k=1}^{w}(A_k - B_k)\mu_{t+1-k}\right], \tag{22}$$

$$\gamma_{t+1} = C_{11}(t) - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)C_{21}(t), \tag{23}$$

$$K_{t+1}[\tau] = -\sum_{i=1}^{w}(A_i - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)(A_i - B_i))K_{t+1-\min(i,\tau)}[\tau - i], \quad 1 \leq \tau \leq w-1, \tag{24}$$

условные корреляции $K_{t+1}[\tau]$ *определены в* (15)*, а корреляции* $C_{ij}(t)$ *находятся по формулам* (21).

Доказательство. Из формул (17) и (19) следует (22). Используя (17) и (20), получаем

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{t+1} = -\sum_{j=1}^{w}(A_j - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)(A_j - B_j))\hat{\theta}_{t+1-j}+\\ + (I - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t))J_\theta\varepsilon_{t+1}^{(1)} - C_{12}(t)C_{22}^{-1}(t)J_\eta\varepsilon_{t+1}^{(2)}.\end{aligned} \tag{25}$$

Умножив обе части равенства (25) на $\hat{\theta}^*_{t+1-\tau}$ и взяв математическое ожидание относительно F^{ζ}_{t+1} от обеих частей равенства, получаем (24). Теорема доказана. $\square$

Из уравнения (25) делаем вывод, что процесс $\hat{\theta}_{t+1}$ является процессом авторегрессии порядка w с нелинейными коэффициентами.

В случае фильтра Калмана — Бьюси, как видно из уравнений (23) и (24), условная матрица ошибок γ_t и условные матрицы ковариаций $K_t[\tau]$ не содержат случайных составляющих и совпадают с безусловными [8].

Теорема 1 является обобщением аналогичной теоремы [18] на случай векторных стационарных процессов.

4. Предельная ошибка фильтрации. Предположим, что при $t \to \infty$ существуют пределы величин (21) и

$$\lim_{t\to\infty} C_{ij}(t) = C_{ij}(\infty), \quad i,j = 1,2, \tag{26}$$

тогда предельные ошибка фильтрации γ_∞ и ковариации $K_\infty[\tau]$, $1 \le \tau \le w-1$, удовлетворяют равенствам (24), в которых сделаны соответствующие замены

$$\gamma_\infty = K_\infty[0] = C_{11}(\infty) - C_{12}(\infty)C_{22}^{-1}(\infty)C_{21}(\infty), \tag{27}$$

$$K_\infty[\tau] = -\sum_{i=1}^{w}(A_i - C_{12}(\infty)C_{22}^{-1}(\infty)(A_i - B_i))K_\infty[\tau - i], \quad 1 \le \tau \le w-1. \tag{28}$$

Если пределы (26) существуют и единственны, то ковариационная матрица вида (8), составленная из блоков $K_\infty[\tau]$, $0 \le \tau \le w-1$, является положительно определенной.

5. Задание начальных данных. Рекуррентные формулы (22)–(24), вычисляющие фильтрацию μ_t и ее ошибку γ_t, действуют при $t \ge w$, поэтому их нужно дополнить начальными данными при $0 \le t \le w-1$.

При $t = 0$, согласно теореме о нормальной корреляции в гауссовском случае и с учетом метода наименьших квадратов в негаусовском, получаем

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mathbf{cov}(\theta_0,\zeta_0)\mathbf{cov}^{-1}(\zeta_0,\zeta_0)\zeta_0, \\ \gamma_0 &= \mathbf{cov}(\theta_0,\theta_0) - \mathbf{cov}(\theta_0,\zeta_0)\mathbf{cov}^{-1}(\zeta_0,\zeta_0)\mathbf{cov}(\zeta_0,\theta_0), \end{aligned} \tag{29}$$

что в соответствии с равенствами (11) дает

$$\mu_0 = R_\theta(0)R_\zeta^{-1}(0)\zeta_0, \quad \gamma_0 = R_\theta(0) - R_\theta(0)R_\zeta^{-1}(0)R_\theta(0). \tag{30}$$

Начальные величины $\mu_t, \gamma_t, K_t[\tau]$ при $t, \tau = 1, \ldots, \le w-1$ вычисляем рекуррентным способом, пользуясь формулами (21)–(24), в которых процессы θ_t и η_t заменяем на процессы авторегрессии $\theta_t^{(t)}$ и $\eta_t^{(t)}$, порядки которых равны соответственно $n_0 = \min(n,t), m_0 = \min(m,t)$:

$$\begin{aligned} \theta_t^{(t)} &= -\sum_{k=1}^{n_0} A_k^{(t)}\theta_{t-k}^{(t)} + J_\theta^{(t)}\varepsilon_t^{(1)}, \quad n_0 = \min(t,n), \quad 1 \le t \le w-1, \\ \eta_t^{(t)} &= -\sum_{k=1}^{m_0} B_k^{(t)}\eta_{t-k}^{(t)} + J_\eta^{(t)}\varepsilon_t^{(2)}, \quad m_0 = \min(t,m). \end{aligned} \tag{31}$$

При каждом $t = 1, \ldots, w-1$ первые t корреляций у каждого из процессов (31) берем равными корреляциям исходных процессов (2), поэтому на примере процесса $\theta_t^{(t)}$ матрицы

$$J_\theta^{(t)}, \quad A_i^{(t)}, \; i = 1, \ldots, n_0, \tag{32}$$

находим из уравнений Юла — Уокера (5), в которых матрицы (10) заменены на (32). Аналогично поступаем с процессом $\eta_t^{(t)}$.

Чтобы найти рекуррентные уравнения для фильтрации μ_t и ее ошибки γ_t при $t = 1, \ldots, w-1$, нужно в формулах (21)–(24) произвести замену, которая соответствует замене процессов (2) на процессы (31).

Однако при каждом $t = 1, \ldots, w-1$ взаимные ковариации $K_t[\tau]$ вычисляем при τ в пределах $1 \le \tau \le t$, $1 \le \tau \le w-1$, в отличие от формул (24), в которых $t \ge w$.

6. Примеры. В примерах 1 и 2 сигнал θ_t и шум η_t являются векторными процессами авторегрессий размерности $k = 2$ и порядков $n = 3, \; m = 2$ (при этом $w = 3$)

$$\sum_{j=0}^{3} A_j \theta_{t-j} = J_\theta \varepsilon_t^{(1)}, \quad \sum_{j=0}^{2} B_j \eta_{t-j} = J_\eta \varepsilon_t^{(2)}, \quad A_0 = B_0 = I. \tag{33}$$

Для обоих примеров матрицы (8) $\tilde{R}_\theta^{(3)}$ и $\tilde{R}_\eta^{(2)}$ являются положительно определенными и, следовательно, процессы авторегрессии (33) стационарны.

Пример 1. Ниже приведены ковариационные матрицы процессов θ_t и η_t:

$$R_\theta(0) = \begin{pmatrix} 2.25 & 1.2 \\ 1.2 & 4 \end{pmatrix}, \quad R_\theta(1) = \begin{pmatrix} 1.6875 & 0.9 \\ 0.9 & 2.4 \end{pmatrix},$$
$$R_\theta(2) = \begin{pmatrix} 0.675 & 0.3 \\ 0.3 & 1.6 \end{pmatrix}, \quad R_\theta(3) = \begin{pmatrix} -0.45 & -0.3 \\ -0.3 & -0.4 \end{pmatrix},$$
$$R_\eta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(2) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

и вычисленные по уравнениям (5) коэффициенты авторегрессий

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.964 & -0.002 \\ -0.247 & -0.571 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.116 & 0.027 \\ 0.377 & -0.416 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.399 & -0.014 \\ -0.126 & 0.550 \end{pmatrix}, \quad J_\theta = \begin{pmatrix} 0.729 & 0.000 \\ 0.398 & 1.230 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.839 & 0.335 \\ 0.559 & -1.081 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.036 & -0.414 \\ -0.691 & 0.419 \end{pmatrix}, \quad J_\eta = \begin{pmatrix} 0.538 & 0.000 \\ 0.385 & 0.377 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере максимумы модулей корней уравнения (7) соответственно равны $\max_{i=1,6} z_i = 0.904$ и $\max_{i=1,4} x_i = 0.894$, предельные матрицы (27) и (28) существуют и равны:

$$\gamma_\infty = K_\infty[0] = \begin{pmatrix} 0.486 & 0.136 \\ 0.136 & 0.644 \end{pmatrix},$$
$$K_\infty[1] = \begin{pmatrix} 0.361 & 0.082 \\ 0.077 & 0.468 \end{pmatrix}, \quad K_\infty[2] = \begin{pmatrix} 0.247 & 0.113 \\ 0.108 & 0.254 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица γ_∞ симметрична.

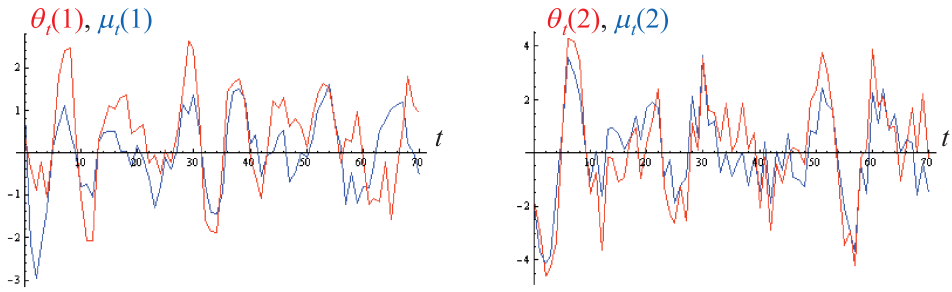

Рис. 1. Компоненты процесса $\theta_t(i)$ и сходящейся фильтрации $\mu_t(i)$, $i = 1, 2$.

Были промоделированы гауссовские векторные процессы авторегрессии θ_t и η_t с приведенными выше коэффициентами. На рис. 1 слева приводятся графики $\theta_t(1)$ первой компоненты процесса θ_t и его фильтрации $\mu_t(1)$, а справа — второй компоненты $\theta_t(2)$ и $\mu_t(2)$.

Матрицы второго порядка γ_t, $K_t[1]$, $K_t[2]$ с ростом t быстро стабилизируются и при $t = 20$ принимают приведенные выше предельные значения.

Пример 2. Как и в примере 1, здесь приводятся ковариационные матрицы $R_\theta(i)$ и $R_\eta(i)$ процессов θ_t и η_t и вычисленные по этим корреляциям коэффициенты авторегрессий A_i, J_θ, B_i, J_η:

$$R_\theta(0) = \begin{pmatrix} 36 & 4.8 \\ 4.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\theta(1) = \begin{pmatrix} 27 & 3.6 \\ 3.6 & 2.4 \end{pmatrix},$$
$$R_\theta(2) = \begin{pmatrix} 10.8 & 1.2 \\ 1.2 & 1.6 \end{pmatrix}, \quad R_\theta(3) = \begin{pmatrix} -7.2 & -3.6 \\ -3.6 & -0.4 \end{pmatrix},$$
$$R_\eta(0) = \begin{pmatrix} 4 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(1) = \begin{pmatrix} -2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(2) = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.256 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.917 & -0.190 \\ -0.0.72 & -0.524 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.159 & 0.413 \\ -0.196 & -0.366 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.265 & 1.037 \\ 0.244 & 0.415 \end{pmatrix}, \quad J_\theta = \begin{pmatrix} 2.478 & 0.000 \\ -0.321 & 1.052 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1.360 & -1.648 \\ -0.164 & -0.555 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.801 & -0.868 \\ -0.159 & 0.303 \end{pmatrix}, \quad J_\eta = \begin{pmatrix} 0.951 & 0.000 \\ 0.763 & 0.019 \end{pmatrix}.$$

К стационарным процессам θ_t и η_t, параметры которых приведены выше, нельзя применять алгоритм фильтрации Калмана — Бьюси. Ошибки фильтрации γ_t и условные ковариации $K_t[1], K_t[2]$ с ростом времени стремятся к бесконечности.

Поведение отдельных компонент промоделированного векторного процесса θ_t и его фильтрации μ_t при $0 \le t \le 40$ можно проследить на рис. 2, где приняты те же обозначения, что и на рис. 1.

Примеры показывают, что если существуют пределы (26)–(28), то именно к ним приводят уравнения (22)–(24).

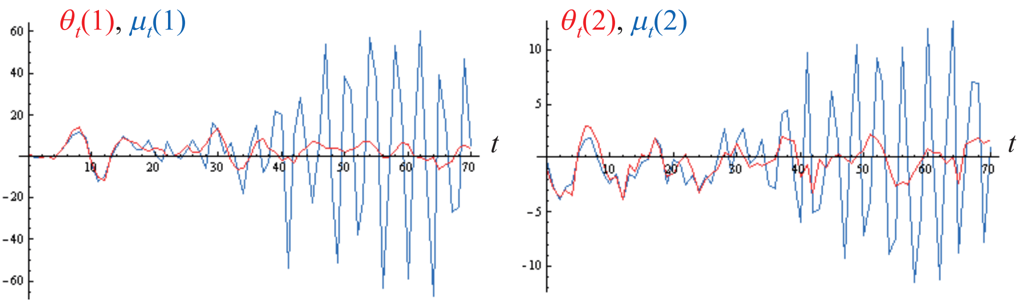

Рис. 2. Компоненты процесса $\theta_t(i)$ и расходящейся фильтрации $\mu_t(i)$, $i = 1, 2$.

Пример 3. Рассмотрим процесс η_t, у которого заданы корреляционные матрицы $R_\eta(0)$, $R_\eta(1)$, $R_\eta(2)$. По этим корреляциям найдены приведенные ниже коэффициенты авторегрессии второго порядка B_1, B_2, $G = J\,J^*$:

$$R_\eta(0) = \begin{pmatrix} 4 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(1) = \begin{pmatrix} -2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad R_\eta(2) = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1.360 & -1.648 \\ -0.193 & -0.581 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.801 & -0.868 \\ -0.193 & 0.419 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0.904 & 0.774 \\ 0.774 & 0.542 \end{pmatrix}.$$

Корни полинома (7)

$$\det\left(\sum_{j=0}^{2} B_j z^{n-j}\right) = z^4 + 0.7796z^3 + 0.1115z^2 - 0.3816z + 0.1678 \tag{34}$$

равны $z_{1,2} = 0.343 \pm i0.247, z_{3,4} = -0.733 \pm i0.633$, а их модули $|z_{1,2}| = 0.423, |z_{3,4}| = 0.969$ меньше единицы. Легко убедиться, что матрица G не является положительно определенной и, следовательно, нельзя найти вещественную матрицу J_η такую, что $J_\eta J_\eta^* = G$ и, как следствие, процесс не является стационарным.

Теперь рассмотрим векторный процесс авторегрессии второго порядка, у которого матрицы авторегрессии B_1 и B_2 взяты из данного примера, а положительно определенная матрица $\tilde{G} = J_\eta J_\eta^*$, например, такова: $\tilde{G} = I$ (единичная матрица).

Так как для матриц B_1 и B_2 корни полинома (34) по модулю меньше единицы, а $\tilde{G}$ — положительно определенная матрица, то согласно утверждению Хеннана [22] такой набор определяет стационарный процесс. Однако корреляционные матрицы $\tilde{R}_\eta(0), \tilde{R}_\eta(1), \tilde{R}_\eta(2)$, полученные из уравнений Юла — Уокера (5), приводят к матрице (8) $\tilde{R}_\eta^{(3)}$, не являющейся положительно определенной. Действительно, матрица $\tilde{R}_\eta^{(3)}$ составлена из блоков

$$\tilde{R}_\eta(0) = \begin{pmatrix} -14.183 & 21.737 \\ 3.120 & -2.612 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_\eta(1) = \begin{pmatrix} 14.183 & -19.154 \\ 1.276 & -0.716 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_\eta(2) = \begin{pmatrix} -3.120 & 5.195 \\ -0.567 & 1.179 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{R}_\eta(0)$ не является положительно определенной и, следовательно, процесс не является стационарным.

Если вместо единичной матрицы рассмотреть любую положительно определенную матрицу $\tilde{\tilde{G}}$, то новые корреляционные матрицы получаем по формулам $\tilde{\tilde{R}}_\eta(i) = \tilde{R}_\eta(i)\tilde{\tilde{G}}$, а коэффициенты авторегрессии останутся прежними.

Действительно, пусть существует обратная матрица $\tilde{R}_\eta^{-1}(0)$ и $\rho(i) = \tilde{R}_\eta(i)\tilde{R}_\eta^{-1}(0)$. Тогда уравнение Юла — Уокера при $\tilde{G} = I$ принимает вид $\sum B_i \rho(i)\tilde{R}(0) = I$. Если умножить обе части равенства справа на матрицу $\tilde{\tilde{G}}$, то нетрудно получить, что $\tilde{\tilde{R}}_\eta(i) = \rho(i)\tilde{R}_\eta(0)\tilde{\tilde{G}} = \tilde{R}_\eta(i)\tilde{\tilde{G}},\ 1 \le i \le m$.

Такое преобразование не влияет на положительную определенность матриц $\tilde{\tilde{R}}_\eta(i)$, так что результат будет прежним, процесс будет нестационарным.

Примеры показывают, что если процесс стационарный, то корни полинома (7) по модулю меньше единицы, а обратное утверждение неверно.

Литература

1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных процессов. *Известия АН СССР. Серия математическая*, (5), 3–14 (1941).

2. Wiener N. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series.* Cambridge (1949).

3. Розанов Ю. А. *Стационарные случайные процессы.* Москва, Наука (1990).

4. Товстик Т. М. *Стационарные случайные процессы с рациональными спектральными плотностями.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2000).

5. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 35–45 (1960).

6. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME, J. Basic Eng.* **83** (1), 95–108 (1961).

7. Браммер К., Зиффлинг Г. *Фильтр Калмана — Бьюси.* Москва (1982).

8. Ширяев А. Н. *Вероятность-2.* Москва, Изд-во МЦНМО (2004).

9. Фомин В. Н. *Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1996).

10. Граничин О. Н. *Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2003).

11. Куликова М. В., Куликов Г. Ю. Численные методы нелинейной фильтрации для обработки сигналов и измерений. *Вычислительные технологии* **21** (4), 64–98 (2016).

12. Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches.* Wiley Interscience (2006).

13. Chui C. K., Chen G. *Kalman Filtering with Real-Time Applications.* In: Springer Series in Information Sciences, vol. 17. 4th ed. New York, Springer (2009).

14. Law K., Stuart A., Zygalakis K. *Continuous Time: Filtering Algorithms.* In: Data Assimilation, 187–206. Springer (2015).

15. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р. Развитие теории фильтров Липцера — Ширяева. *Автомат. и телемех.*, вып. 4, 37–51 (2020). https://doi.org/10.1134/S0005231019040030

16. Niedzwiecki M., Cisowski K. Adaptive scheme for elimination of broadband noise and impulsive disturbances from AR and ARMA signals. *IEEE Trans. on Signal Proc.* **44** (1), 528–537 (1996). https://doi.org/10.1109/78.489026

17. Arnold M., Miltner W. H. R., Witte H., Bauer R., Braun C. Adaptive AR Modeling of Nonstationary Time Series by Means of Kalman Filtering. *IEEE Trans. on Biomedical Eng.* **45** (5), 553–562 (1998). https://doi.org/10.1109/10.668741

18. Товстик Т. М. Фильтр Калмана — Бьюси с авторегрессионными сигналом и шумом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5 (63)**, вып. 3, 452–463 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.309

19. Tovstik T. M., Tovstik P. E., Shirinkina D. A. Linear generalized Kalman — Bucy filter. *Abstracts of the Ninth Workshop on Simulation* (2018).

20. Товстик Т. М., Товстик П. Е. Линейный обобщенный фильтр Калмана — Бьюси. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 4, 636–645 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.409

21. Yule G. U. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Phil. Trans. Series A* **226**, 267–298 (1927). https://doi.org/10.1098/rsta.1927.0007

22. Хеннан Э. *Многомерные временные ряды*, пер. с англ. Москва, Мир (1974).

Статья поступила в редакцию 15 мая 2020 г.;
после доработки 16 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Товстик Татьяна Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доц.; peter.tovstik@mail.ru

Linear Kalman — Bucy filter with vector autoregressive signal and noise

T. M. Tovstik

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tovstik T. M. Linear Kalman — Bucy filter with vector autoregressive signal and noise. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 111–122. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.110 (In Russian)

The linear Kalman — Bucy filter problem for a system, at that a signal and a noise are vector independent stationary autoregressive processes with orders larger than 1, is investigated. The recurrent equations for filter and its error are delivered. The optimal way of the initial data definition is proposed. Some numerical examples are given. In one of them the algorithm leads to a stationary behavior at infinity. In the other example the Kalman — Bucy filter is impossible because the filter error goes to infinity. A behavior of a signal and its error is illustrated by a simulation of a signal and a noise as vector Gaussian stationary autoregressive processes. The simulation supports theoretical conclusions.

Keywords: Kalman — Bucy filter, vector autoregressive stationary process of high order.

References

1. Kolmogorov A. N. Interpolation and extrapolation of stationary random processes. *Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja*, (5), 3–14 (1941). (In Russian)

2. Wiener N. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series.* Cambridge (1949).

3. Rozanov Yu. A. *Stationary random processes.* Moscow, Nauka Publ. (1990). (In Russian)

4. Tovstik T. M. *Stationary random processes with rational spectral densities.* St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ. (2000). (In Russian)

5. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 35–45 (1960).

6. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME, J. Basic Eng.* **83** (1), 95–108 (1961).

7. Brammer K., Siffling G. *Kalman — Bucy filter*. Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung. Munchen (1975). [Russ. ed.: *Fil'tr Kalmana — B'jusi.* Moscow (1982)].

8. Shiryaev A. N. *Verojatnost'-2.* Moscow Center for Cont. Math. Education Publ. (2004). (In Russian) [Engl. transl.: Shiryaev A. N. *Probalility-2.* New York, Springer-Verlag (2019)].

9. Fomin V. N. *Operator methods in theory of linear filter of random processes.* St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (1996). (In Russian)

10. Granichin O. N. *Optimal filter of random processes.* St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (2013). (In Russian)

11. Kulikova M., Kulikov G. Numerical methods for nonlinear filtering of signals and measurements. *Computational Technologies* **21** (4), 64–98 (2016). (In Russian)

12. Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches.* Wiley Interscience (2006).

13. Chui C. K., Chen G. *Kalman Filtering with Real-Time Applications.* In: Springer Series in Information Sciences, vol. 17. 4th ed. New York, Springer (2009).

14. Law K., Stuart A., Zygalakis K. *Continuous Time: Filtering Algorithms.* In: Data Assimilation, 187–206. Springer (2015).

15. Sinitsyn I. N., Sinitsyn V. I., Korepanov E. R. Extending the Theory of Liptser — Shiryaev Filter. *Avtomat. i Telemekh.*, (4), 37–51 (2020). (In Russian) [Engl. transl.: *Autom. Remote Control* **81** (4), 602–613 (2020). https://doi.org/10.1134/S0005117920040037].

16. Niedzwiecki M., Cisowski K. Adaptive scheme for elimination of broadband noise and impulsive disturbances from AR and ARMA signals. *IEEE Trans. on Signal Proc.* **44** (1), 528–537 (1996). https://doi.org/10.1109/78.489026

17. Arnold M., Miltner W. H. R., Witte H., Bauer R., Braun C. Adaptive AR Modeling of Nonstationary Time Series by Means of Kalman Filtering. *IEEE Trans. on Biomedical Eng.* **45** (5), 553–562 (1998). https://doi.org/10.1109/10.668741

18. Tovstik T. M. Linear Kalman-Bucy Filter with Autoregressive Signal and Noise. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5 (63)**, iss. 3, 452–463 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.309 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **51**, iss. 3, 276–285 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118030093].

19. Tovstik T. M., Tovstik P. E., Shirinkina D. A. Linear generalized Kalman — Bucy filter. *Abstracts of the Ninth Workshop on Simulation* (2018).

20. Tovstik T. M., Tovstik P. E. Linear generalized Kalman — Bucy filter. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 4, 636–645 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.409 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **52**, iss. 4, 401–408 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040113].

21. Yule G. U. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Phil. Trans. Series A* **226**, 267–298 (1927). https://doi.org/10.1098/rsta.1927.0007

22. Hannan E. J. *Multiple time series.* John Wiley and Sons (1970). [Russ. ed.: *Mnogomernye vremennye rjady.* Moscow, Mir Publ. (1974)].

Received: May 15, 2020
Revised: September 16, 2020
Accepted: September 17, 2020

Author's information:

Tatiana M. Tovstik — peter.tovstik@mail.ru