

Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 2. Численный эксперимент

В. М. Рябов¹, Б. А. Ярцев^{1,2}, Л. В. Паршина²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Крыловский государственный научный центр,
Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Для цитирования: Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 2. Численный эксперимент // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 88–100. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.108>

Обсуждаются результаты численных исследований влияния ориентации армирования жестких слоев и относительной толщины мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных колебаний симметричной и асимметричной безопорных трехслойных прямоугольных композитных пластин. Показано, что в симметричной трехслойной пластине возникает изгибно-крутильное взаимодействие, порождающее взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний, если хотя бы в одном из направлений пластины одна из собственных форм характеризуется четным числом четвертей волны, а другая собственная форма — нечетным числом четвертей волны. В безопорной асимметричной трехслойной пластине возникает изгибно-изгибное взаимодействие, порождающее взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях, если в главных направлениях пластины обе собственные формы характеризуются либо четным, либо нечетным числом четвертей волны. Установлено, что каждой моде собственных колебаний трехслойных пластин соответствует эффективная относительная толщина мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера.

Ключевые слова: квазиоднородная пластина, симметричная трехслойная пластина, асимметричная трехслойная пластина, собственная частота, собственная форма, коэффициент механических потерь, относительная толщина.

1. Математическая модель и численный метод решения дифференциальных уравнений затухающих колебаний трехслойных пластин, образованных двумя жесткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера [1] позволяют определять параметры динамического отклика таких структур — собственные частоты, собственные формы колебаний, коэффициенты механических потерь. Очевидно, что эти параметры зависят от относительной толщины мягкого слоя вязкоупругого полимера \bar{h} , структуры армирования жестких слоев и температуры окружающей среды T_C . Многообразии структур армирования жестких слоев трехслойной пластины не оставляет надежд на рассмотрение бесконечного

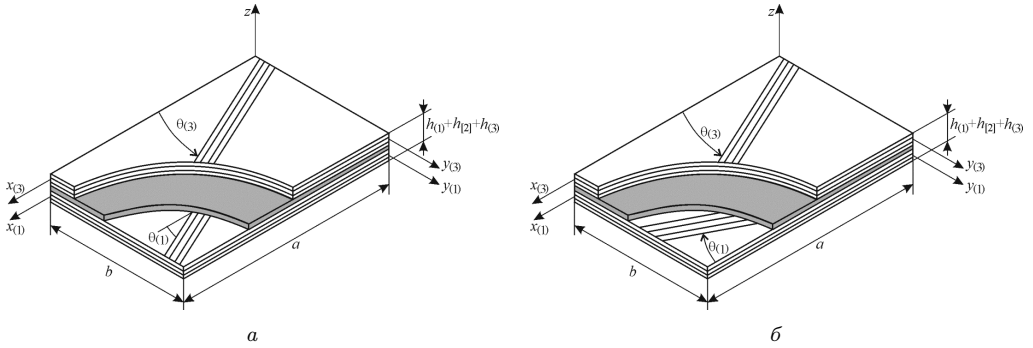


Рис. 1. Схема (а) симметричной и (б) асимметричной трехслойных пластин.

множества их возможных вариантов. Поэтому далее рассматриваются лишь две специальные структуры армирования жестких слоев, компонуемых из однонаправленных слоев углепластика HMS/DX-209 ($h_{(1)} = h_{(3)} = h = a/100 = 0.0016 \text{ м} = \text{const}$): симметричная и асимметричная. Симметричная структура армирования жестких слоев 1 и 3 образована совокупностью однонаправленных слоев углепластика, ориентированных в направлениях $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1, а). В асимметричной структуре армирования однонаправленные слои HMS/DX-209 ориентированы в направлениях $\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1, б). В качестве материала мягкого слоя используется изотропный вязкоупругий полимер ВДМ-2.

2. Вначале рассмотрим влияние ориентации армирования на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь квазиоднородной пластины из углепластика HMS/DX-209 ($a = 0.16 \text{ м}$, $b = a/4 = 0.04 \text{ м}$, $h = 0.0016 \text{ м}$). В этом случае $r = 1$, $B_{lm} = 0$, $E = G = \rho_{[2]} = 0$, $I_1 = 0$ и связанная система дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин [1] распадается на две системы, первая из которых описывает мембранно-сдвиговые колебания квазиоднородной моноклиной пластины

$$\begin{aligned}
 &A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{16}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{16}\tilde{u}_{,xy} + \\
 &\quad + A_{26}\tilde{v}_{,yy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{u} = 0, \\
 &A_{16}\tilde{u}_{,xx} + A_{26}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + \\
 &\quad + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + A_{26}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{v} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает изгибно-крутильные колебания квазиоднородной моноклиной пластины:

$$\begin{aligned}
 &A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{45}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{45}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \omega^2 I_0 \tilde{w} = 0, \\
 &D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{16}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{26}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - \\
 &\quad - A_{45}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\alpha} = 0, \\
 &D_{16}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{26}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - \\
 &\quad - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{45}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\beta} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

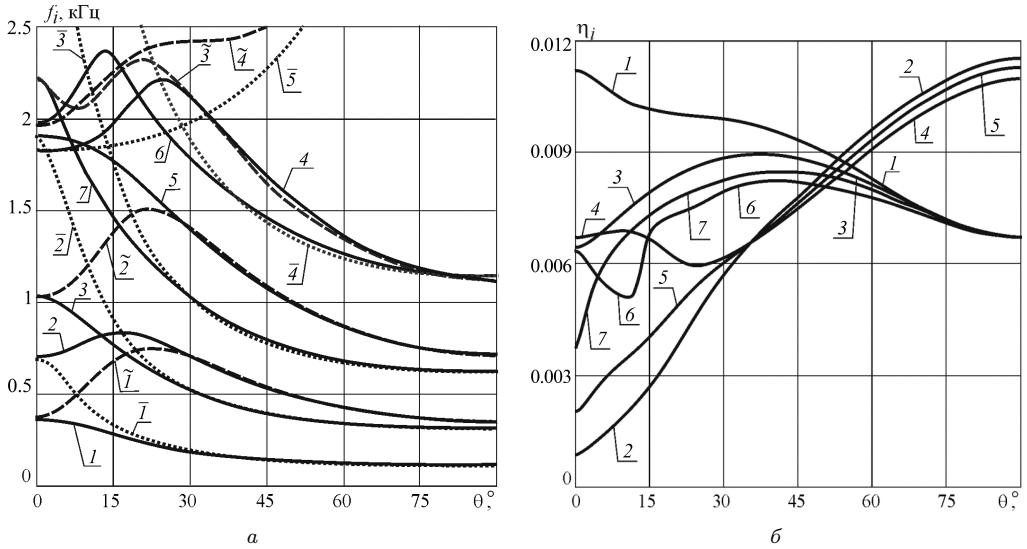


Рис. 2. Зависимости собственных частот (а), коэффициентов механических потерь (б) низших тонов связанных изгибно-крутильных колебаний квазиоднородной пластины от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика HMS/DX-209.

Если квазиоднородная пластина ортотропна, то $A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$ и система дифференциальных уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{u} &= 0, \\ A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + \omega^2 I_0 \tilde{v} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Также упрощается и система дифференциальных уравнений (2):

$$\begin{aligned} A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \omega^2 I_0 \tilde{w} &= 0, \\ D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\alpha} &= 0, \\ D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + \omega^2 I_2 \tilde{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений (3) описывает мембранные и сдвиговые колебания квазиоднородной ортотропной пластины, в то время как ее изгибные и крутильные колебания описывает система дифференциальных уравнений (4). Отметим, что нижняя часть спектра мембранно-сдвиговых колебаний пластины существенно выше нижней части спектра ее изгибно-крутильных колебаний.

При проведении численных исследований рассматривались семь низших тонов связанных изгибно-крутильных колебаний квазиоднородной пластины из однонаправленного углепластика HMS/DX-209 (рис. 2). Неклассический вид графиков зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ($i = \overline{1, 7}$), представленных на рис. 2, свидетельствует о фейерверке эффектов, порождаемых связанностью мод колебаний пластины. Анализ полученных результатов позволил установить, что в зависимости от значения угла θ каждой моде собственных колебаний соответствуют несколько различных собственных форм, порождаемых чередой взаимных трансформаций собственных форм связанных мод колебаний.

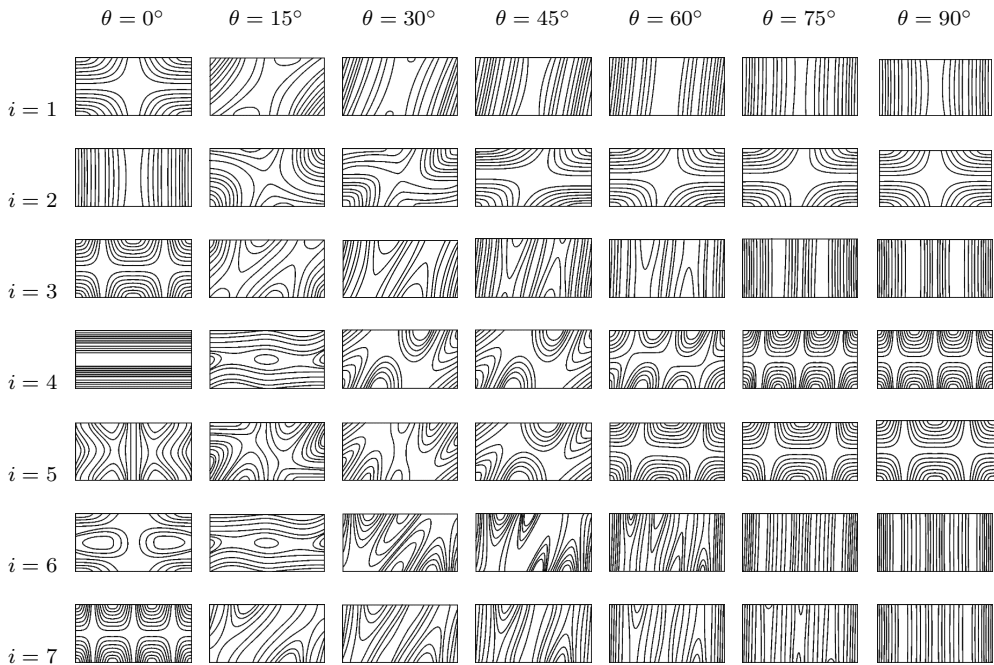


Рис. 3. Зависимость собственных форм связанных мод колебаний квазиоднородной пластины от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика HMS/DX-209.

Для демонстрации описанных эффектов рассмотрим последовательность взаимных трансформаций первой и второй связанных мод колебаний, графики зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ ($i = 1, 2$) которых приведены на рис. 2 (кривые 1, 2). На рис. 2, а также нанесены графики зависимостей парциальных изгибных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот (кривые $\tilde{1}, \tilde{1}$). Величины парциальных собственных частот определялись из решения систем дифференциальных уравнений (3), (4) по «свободным» комплексным модулям упругости $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$ и «свободным» комплексным модулям межслойного сдвига $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$, $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$, в то время как «свободный» комплексный модуль сдвига в плоскости армирования $G_{xy} = G_{xy}(\theta)$ заменялся «чистым» комплексным модулем сдвига в плоскости армирования $\tilde{G}_{xy}(\theta) = G_{xy}(\theta)/[1 - \mu_{xy,x}(\theta) \cdot \mu_{x,xy}(\theta)]$. Здесь $\mu_{x,xy}(\theta)$, $\mu_{xy,x}(\theta)$ — коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода. Понятия «свободных» и «чистых» модулей введены Фойгтом [2]. Изменения собственных форм низших тонов связанных колебаний квазиоднородной пластины из углепластика HMS/DX-209 в зависимости от угла ориентации армирования приведены на рис. 3.

Совместный анализ приведенных на рис. 2, 3 зависимостей позволяет утверждать, что на отрезке $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$ происходят взаимные трансформации собственных форм первой и второй мод связанных колебаний. Об этом, в частности, свидетельствует появление точки пересечения графиков зависимостей их парциальных изгибных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот от угла ориентации армирования θ (кривые $\tilde{1}, \tilde{1}$ на рис. 2, а) внутри области, ограниченной функциями $f_1 = f_1(\theta)$ и $f_2 = f_2(\theta)$ связанных мод колебаний (кривые 1, 2 на рис. 2, а). Пере-

сечение графиков функций $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ в точке $\theta \approx 8^\circ$ свидетельствует о том, что на примыкающем к ней отрезке с нечеткими границами по оси θ начинается взаимная трансформация собственных форм первой и второй связанных мод колебаний. Собственная форма первой связанной моды, идентифицируемая при $\theta < 8^\circ$ как первая квазикрутильная, при $\theta > 8^\circ$ трансформируется в первую квазиизгибную собственную форму. Собственная форма второй связанной моды, идентифицируемая при $\theta < 8^\circ$ как первая квазиизгибная, при $\theta > 8^\circ$ трансформируется в первую квазикрутильную собственную форму. Аналогичная картина наблюдается и для более высоких тонов колебаний. Например, пересечение графиков функций $\bar{f}_2 = \bar{f}_2(\theta)$ и $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$ в точке $\theta \approx 11^\circ$ (кривые $\bar{2}$, $\tilde{2}$ на рис. 2, а) свидетельствует о том, что на примыкающем к ней отрезке изменения θ происходит взаимная трансформация собственных форм третьей и пятой связанных мод колебаний. При $\theta > 11^\circ$ собственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму пятой связанной моды, а собственная форма пятой связанной моды — в собственную форму третьей связанной моды. В свою очередь, по мере увеличения угла θ функция парциальной изгибной частоты $\bar{f}_5 = \bar{f}_5(\theta)$ при $\theta \approx 33^\circ$ пересекается с функцией парциальной крутильной частоты $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_3(\theta)$ (кривые $\bar{5}$, $\tilde{3}$ на рис. 2, а), что также свидетельствует о появлении области взаимной трансформаций четвертой связанной (при $\theta \in [0^\circ, 33^\circ]$ — первой квазиизгибной относительно оси x) и пятой связанной (при $\theta \in [0^\circ, 33^\circ]$ — третьей квазикрутильной относительно оси x) мод колебаний. Результатом этой трансформации является тождественность собственной формы пятой связанной моды при $\theta = 90^\circ$ собственной форме седьмой связанной моды при $\theta = 0^\circ$. Собственная форма седьмой связанной моды в результате взаимной трансформации с более высокой связанной модой на отрезке с центром в точке $\theta \approx 13^\circ$ (кривые $\bar{3}$, $\tilde{3}$ на рис. 2, а) при $\theta = 90^\circ$ вырождается в четвертую изгибную моду колебаний относительно оси x .

Приведенный анализ позволяет заключить, что взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний безопорной квазизоднородной моноклинной прямоугольной пластины возникают в случае, если хотя бы в одном из направлений пластины x или y одна из собственных форм характеризуется четным числом четвертей волны, а другая собственная форма — нечетным числом четвертей волны.

3. Перейдем к рассмотрению двух специальных видов трехслойных пластин — симметричной и асимметричной. Квазизоднородные жесткие слои этих пластин имеют одинаковую толщину $h_{(1)} = h_{(3)} = h$, одинаковые инерционные характеристики $\rho_{(1)} = \rho_{(3)} = \rho$, $I_0^{(1)} = I_0^{(3)} = I_0 = \rho h$, $I_1^{(1)} = I_1^{(3)} = I_1 = 0$, $I_2^{(1)} = I_2^{(3)} = I_2 = \rho h^3/12$ и отличаются лишь ориентацией армирования углепластика HMS/DX-209. В симметричной пластине все слои углепластика ориентированы под углами $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta$ к направлениям глобальных осей $x_{(1)}$ и $x_{(3)}$ жестких слоев 1 и 3 (рис. 1, а), а в асимметричной — под углами $\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1, б) к направлениям тех же осей. В этом случае справедливы равенства $u^{(1)} = u^{(3)} = u$, $v^{(1)} = v^{(3)} = v$, $w^{(1)} = w^{(3)} = w$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(3)} = \alpha$, $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = \beta$.

Для симметричной трехслойной пластины элементы матриц мембранных, смещенных и изгибных жесткостей жестких слоев связаны соотношениями $A_{lm}^{(1)} = A_{lm}^{(3)} = A_{lm}$, $B_{lm}^{(1)} = B_{lm}^{(3)} = 0$, $D_{lm}^{(1)} = D_{lm}^{(3)} = D_{lm}$, подстановка которых в связанную систему дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин приводит к двум независимым системам дифференциальных уравнений. Первая из этих систем описывает мембранно-сдвиговые колебания глобально моноклинной трехслой-

ной пластины:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{16}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{16}\tilde{u}_{,xy} + A_{26}\tilde{v}_{,yy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \\
 & \quad + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{u} = 0, \\
 & A_{16}\tilde{u}_{,xx} + A_{26}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + A_{26}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \\
 & \quad + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{v} = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает изгибно-крутильные колебания глобально моноклинной трехслойной пластины:

$$\begin{aligned}
 & A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{45}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{45}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \\
 & \quad + \frac{G}{2} \left[h_{[2]}(\tilde{w}_{,xx} + \tilde{w}_{,yy}) - h(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{\beta}_{,y}) \right] + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{w} = 0, \\
 & D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{16}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{26}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - \\
 & \quad - A_{45}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}}\tilde{\alpha} - \tilde{w}_{,x} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\alpha} = 0, \\
 & D_{16}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{26}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - \\
 & \quad - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{45}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}}\tilde{\beta} - \tilde{w}_{,y} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\beta} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Если жесткие слои симметричной трехслойной пластины ортотропны ($A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$), то системы дифференциальных уравнений (5) и (6) упрощаются:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{u} = 0, \\
 & A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{v} = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \frac{G}{2} \left[h_{[2]}(\tilde{w}_{,xx} + \tilde{w}_{,yy}) - h(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{\beta}_{,y}) \right] + \\
 & \quad + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{w} = 0, \\
 & D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}}\tilde{\alpha} - \tilde{w}_{,x} \right) + \\
 & \quad + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\alpha} = 0, \\
 & D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}}\tilde{\beta} - \tilde{w}_{,y} \right) + \\
 & \quad + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\beta} = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Система дифференциальных уравнений (7) описывает мембранные и сдвиговые колебания глобально ортотропной трехслойной пластины, а система дифференциальных уравнений (8) описывает изгибные и крутильные колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

4. Для асимметричной трехслойной пластины элементы матриц мембранных, смешанных и изгибных жесткостей жестких слоев связаны соотношениями $A_{11}^{(1)} = A_{11}^{(3)} = A_{11}$, $A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(3)} = A_{12}$, $A_{16}^{(1)} = -A_{16}^{(3)} = A_{16}$, $A_{22}^{(1)} = A_{22}^{(3)} = A_{22}$, $A_{26}^{(1)} = -A_{26}^{(3)} = A_{26}$, $A_{66}^{(1)} = A_{66}^{(3)} = A_{66}$, $A_{44}^{(1)} = A_{44}^{(3)} = A_{44}$, $A_{45}^{(1)} = -A_{45}^{(3)} = A_{45}$, $A_{55}^{(1)} = A_{55}^{(3)} = A_{55}$, $B_{lm}^{(1)} = B_{lm}^{(3)} = 0$ ($l, m = 1, 2, 6$), $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(3)} = D_{11}$, $D_{12}^{(1)} = D_{12}^{(3)} = D_{12}$, $D_{16}^{(1)} = -D_{16}^{(3)} = D_{16}$, $D_{22}^{(1)} = D_{22}^{(3)} = D_{22}$, $D_{26}^{(1)} = -D_{26}^{(3)} = D_{26}$, $D_{66}^{(1)} = D_{66}^{(3)} = D_{66}$.

Подстановка этих соотношений в связанную систему дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин приводит к ее разделению на две независимые системы. Первая система, описывающая мембранные и сдвиговые колебания асимметричной трехслойной пластины, совпадает с системой дифференциальных уравнений (7), описывающей мембранные и сдвиговые колебания глобально ортотропной трехслойной пластины. Вторая система, описывающая изгибные и крутильные колебания асимметричной трехслойной пластины, совпадает с системой дифференциальных уравнений (8), описывающей изгибные и крутильные колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

Таким образом, связанные затухающие колебания симметричной трехслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений (5), (6) структуры которых близки структурам систем соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания квазиоднородной моноклинной пластины (1), (2). В то же время связанные затухающие колебания асимметричной трехслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений (7), (8), совпадающими с системами соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

5. Влияние ориентации армирования жестких слоев симметричной и асимметричной трехслойных пластин на величины их собственных частот и коэффициентов механических потерь исследовалось путем варьирования угла θ при фиксированных значениях относительной толщины мягкого слоя вязкоупругого полимера $\bar{h} = h_{[2]}/h = 0.2$ и температуры окружающей среды $T_C = 30^\circ$.

Результаты численных исследований зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$, коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ и собственных форм шести низших тонов колебаний симметричной трехслойной пластины приведены на рис. 4, 5. Сопоставление графиков зависимостей $f_i = f_i(\theta)$ и собственных форм колебаний для глобально моноклинной симметричной трехслойной пластины с аналогичными зависимостями для моноклинной квазиоднородной пластины из однопольного углепластика HMS/DX-209 (рис. 2, 3) позволяет отметить подобие их изменений, обусловленное изгибно-крутильной связанностью. Об этом свидетельствует появление множества областей взаимных трансформаций собственных форм связанных мод колебаний. Последовательность взаимных трансформаций собственных форм симметричной трехслойной пластины определяется ориентацией армирования ее жестких слоев, а также частотой колебаний и температурой окружающей среды, поскольку упруго-диссипативные характеристики мягкого слоя вязкоупругого полимера демонстрируют существенную зависимость от этих параметров.

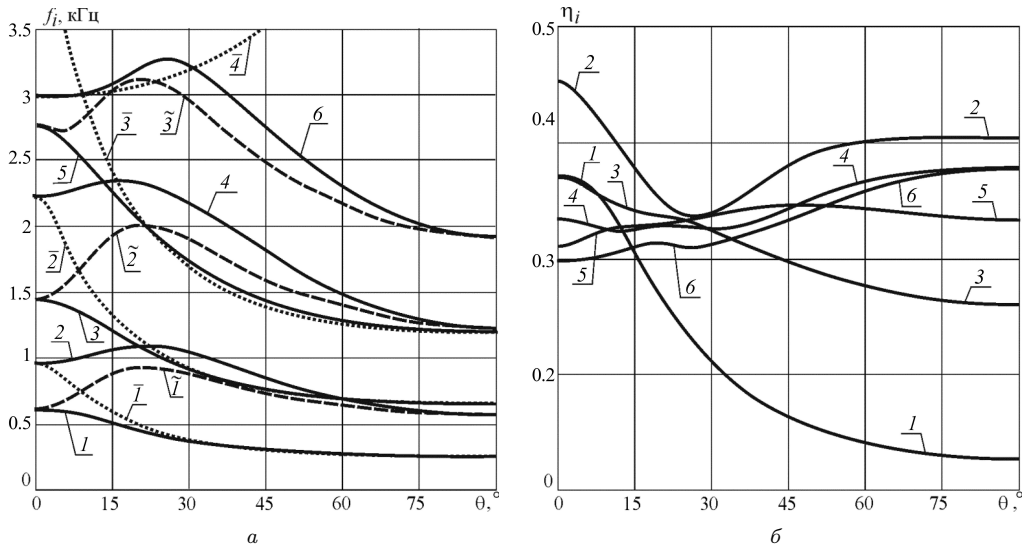


Рис. 4. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) низших тонов колебаний симметричной трехслойной пластины от угла ориентации армирования жестких слоев.

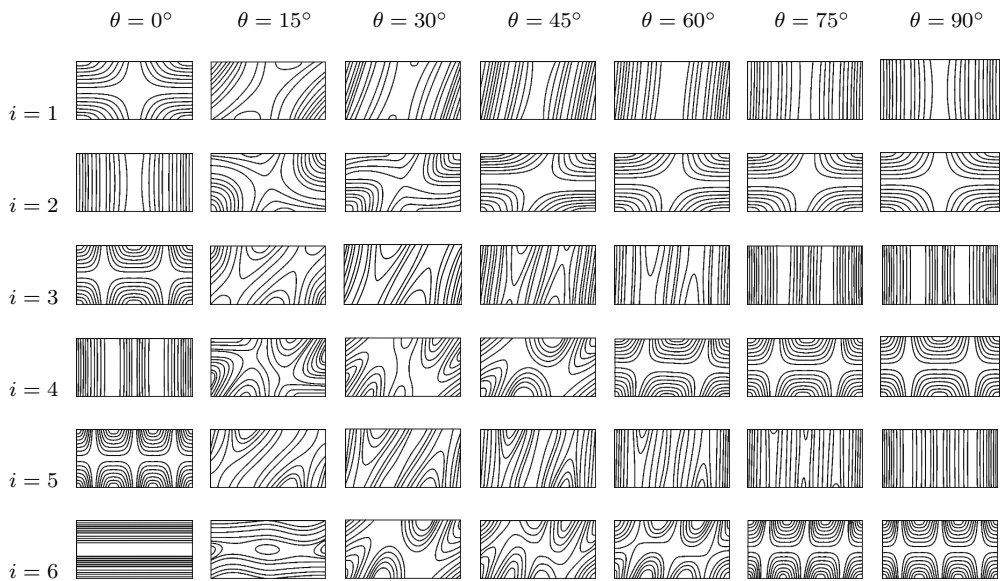


Рис. 5. Зависимость собственных форм связанных мод колебаний симметричной трехслойной пластины от угла ориентации армирования жестких слоев ($T_C = 30^\circ\text{C}$).

Из сопоставления представленных на рис. 4, 5 и на рис. 2, 3 результатов следует, что для всех $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ последовательности взаимных трансформаций собственных форм трех низших тонов связанных колебаний симметричной трехслойной пластины совпадают с аналогичными последовательностями для связанных колебаний квазиоднородной пластины. Для иллюстрации сказанного на графике за-

висимостей собственных частот связанных колебаний симметричной трехслойной пластины $f_i = f_i(\theta)$ дополнительно нанесены графики зависимостей парциальных изгибных $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот (соответственно точечные кривые $\bar{1}-\bar{4}$ и пунктирные кривые $\tilde{1}-\tilde{3}$ на рис. 4, а). Величины парциальных собственных частот определялись из решения системы дифференциальных уравнений (8) по «свободным» комплексным модулям упругости $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$, «свободным» комплексным модулям межслойного сдвига $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$, $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$ и «чистому» комплексному модулю сдвига в плоскости армирования $\bar{G}_{xy}(\theta) = G_{xy}(\theta)/[1 - \mu_{xy,x}(\theta) \cdot \mu_{x,xy}(\theta)]$.

Из совместного анализа приведенных на рис. 4, 5 зависимостей следует, что на отрезке $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$ происходят взаимные трансформации собственных форм первой и второй, третьей и четвертой, а также пятой и седьмой мод связанных колебаний. Об этом свидетельствует появление точек пересечения графиков зависимостей соответствующих парциальных изгибных $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот от угла ориентации армирующих слоев θ внутри областей, ограниченных функциями $f_m = f_m(\theta)$ и $f_n = f_n(\theta)$ связанных мод колебаний (пересечения кривых $\bar{1}$, $\tilde{1}$ при $\theta \approx 10^\circ$, кривых $\bar{2}$, $\tilde{2}$ при $\theta \approx 8^\circ$, кривых $\bar{3}$, $\tilde{3}$ при $\theta \approx 12^\circ$).

6. Результаты численных исследований зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$, коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ и собственных форм шести низших тонов колебаний асимметричной трехслойной пластины приведены на рис. 6, 7. В безопорной асимметричной трехслойной пластине возникает взаимодействие изгибных мод колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях (изгибно-изгибное взаимодействие). Для иллюстрации этого взаимодействия на графике зависимостей собственных частот колебаний $f_i = f_i(\theta)$ нанесены графики зависимостей парциальных изгибных собственных частот $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ (точечные кривые $\bar{1}-\bar{4}$ на рис. 6, а). Величины парциальных изгибных собственных частот определялись из решения системы дифференциальных уравнений (8) по «чистым» комплексным модулям упругости $\bar{E}_{xx}(\theta) = E_{xx}(\theta)/[1 - \mu_{xy,x}(\theta) \cdot \mu_{x,xy}(\theta)]$ и «свободным» комплексным модулям межслойного сдвига $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$, $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$.

Совместный анализ зависимостей, приведенных на рис. 6, 7, позволяет утверждать, что на отрезке $\theta \in [15^\circ, 30^\circ]$ происходит взаимная трансформация собственных форм шестой и седьмой мод колебаний. Об этом свидетельствует появление точки пересечения графиков зависимостей соответствующих парциальных собственных частот при $\theta \approx 23^\circ$ (кривые $\bar{3}$, $\bar{4}$). В результате взаимной трансформации собственная форма шестой связанной моды, при $\theta = 0^\circ$ идентифицируемая как первая изгибная относительно оси x , при $\theta = 90^\circ$ идентифицируется как третья изгибная относительно оси y (см. рис. 7). Представленные результаты позволяют заключить, что для безопорной асимметричной трехслойной пластины взаимодействие изгибных мод колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях возникает в том случае, если в направлениях пластины x или y обе собственные формы характеризуются либо четным, либо нечетным числом четвертей волны.

7. Численные исследования влияния относительной толщины мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера \bar{h} на величины собственных частот $f_i = f_i(\bar{h})$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ шести низших тонов колебаний ($i = \bar{1}, \bar{6}$) проводились для фиксированных углов ориентации армирования жестких слоев трехслойных пластин. Рассматривались глобально моноклиная симметричная ($\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta = 15^\circ$) и глобально ортотропная асимметричная ($\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta = 15^\circ$) трехслойные пластины. Полученные результаты приведены на рис. 8, 9 в

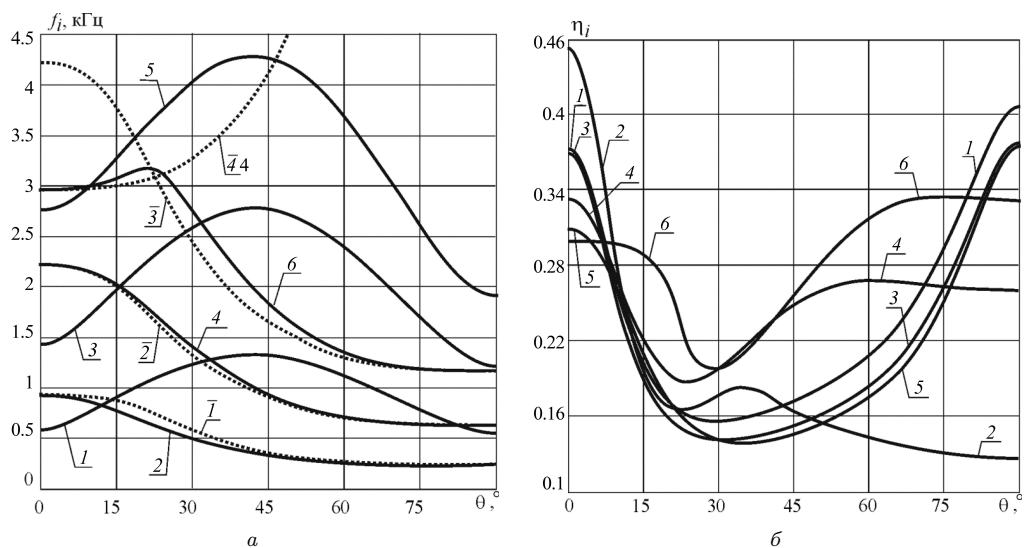


Рис. 6. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) низших тонов колебаний асимметричной трехслойной пластины от угла ориентации армирования жестких слоев.

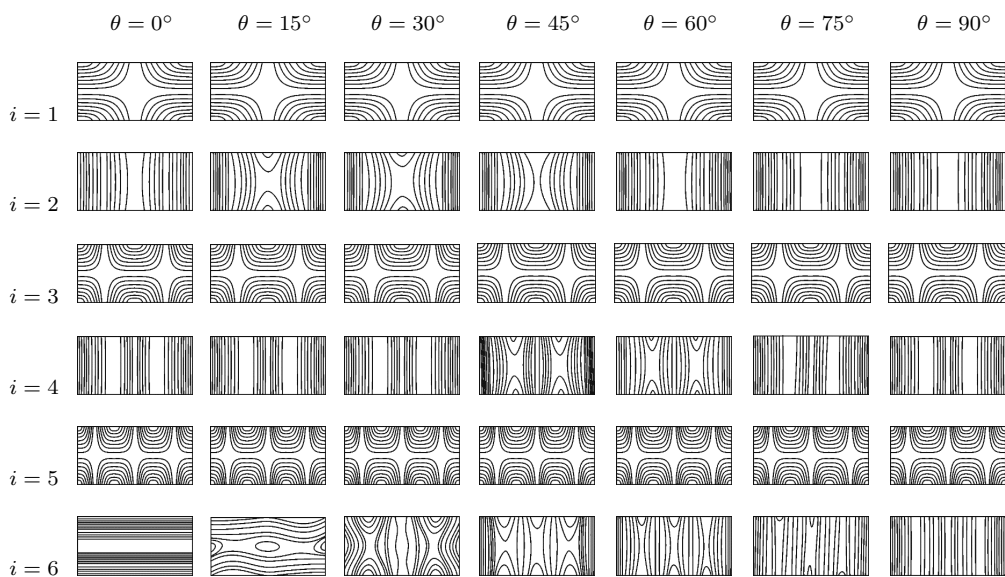


Рис. 7. Зависимость собственных форм связанных мод колебаний асимметричной трехслойной пластины от угла ориентации армирования жестких слоев ($T_C = 30^\circ\text{C}$).

виде графиков зависимостей $f_i = f_i(\bar{h})$ и $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$. Судя по приведенным на рис. 8, 9 данным, согласующимся с результатами работы [3], каждой моде собственных колебаний как симметричных, так и асимметричных трехслойных пластин соответствует эффективная относительная толщина мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера \bar{h}_e , при которой функция $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ достигает максимума.

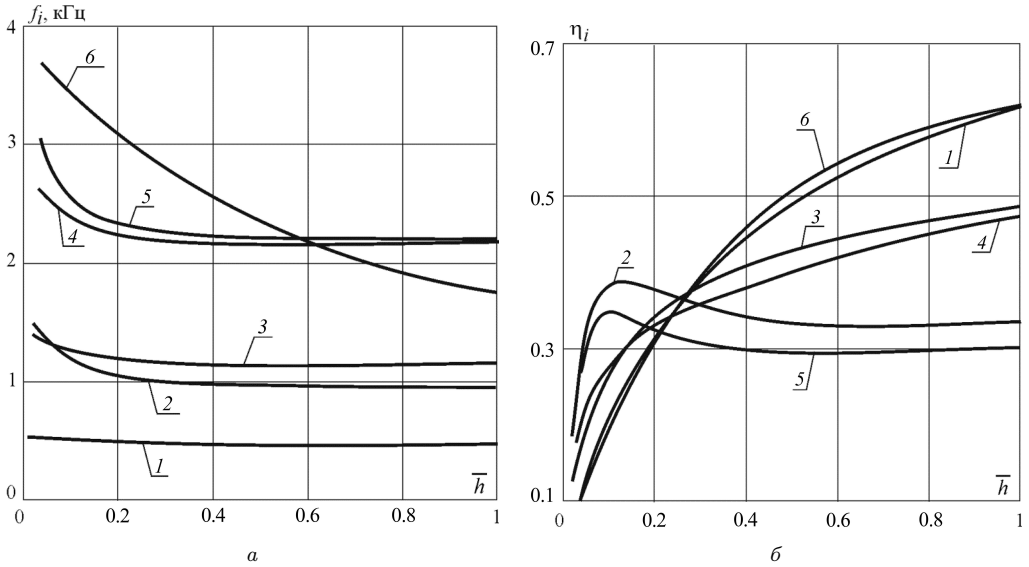


Рис. 8. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) симметричной трехслойной пластины от относительной толщины мягкого слоя вязкоупругого полимера ($\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta = 15^\circ$).

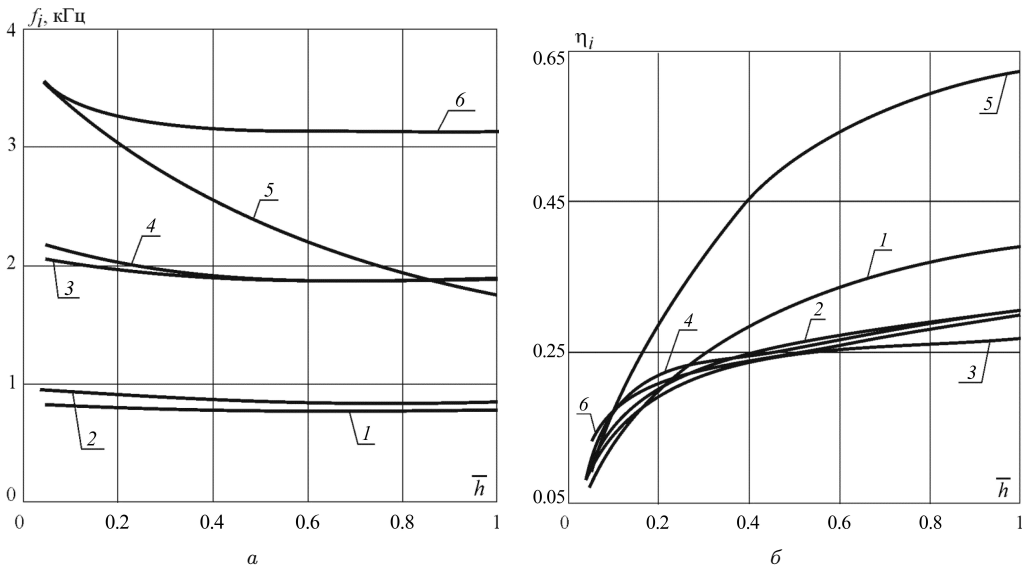


Рис. 9. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) асимметричной трехслойной пластины от относительной толщины мягкого слоя вязкоупругого полимера ($\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta = 15^\circ$).

Дальнейшее увеличение величины $\bar{h} > \bar{h}_e$ не только не приводит к увеличению значений коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$, но часто сопровождается снижением уровней демпфирования. Последнее объясняется температурно-частотной зависимостью упруго-диссипативных характеристик вязкоупругого полимера, порождающей аналогичную зависимость величины $\bar{h}_e = \bar{h}_e(f, T_C)$. При

$\bar{h} = \bar{h}_e$ функции $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ достигают глобального максимума. Эти же области значений аргумента \bar{h} соответствуют максимальным значениям функций $\partial f_i(\bar{h})/\partial \bar{h}$. Сопоставление представленных на рис. 8, 9 функций $\eta_i = \eta_i(\bar{h})$ ($\bar{h} \in [0, 1]$) позволяет отметить, что изгибно-крутильная связанность колебаний симметричных трехслойных пластин позволяет реализовать уровни демпфирования, превышающие уровни демпфирования асимметричных трехслойных пластин.

Литература

1. Рябов В.М., Ярцев Б.А., Паршина Л.В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 3, 469–480 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309>
2. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig und Berlin, Teubner (1928).
3. Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 3. Численный эксперимент. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 1, 144–156 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.111>

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2020 г.;
после доработки 29 февраля 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук, нач. сектора; boris_yar@mail.ru

Паршина Людмила Валентиновна — канд. техн. наук, ст. науч. сотр.; ludaparshina@mail.ru

Coupled vibrations of viscoelastic three-layer composite plates.

2. Numerical experiments

V. M. Ryabov¹, B. A. Yartsev^{1,2}, L. V. Parshina²

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Krylov State Research Center, 44, Moskovskoye shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

For citation: Ryabov V. M., Yartsev B. A., Parshina L. V. Coupled vibrations of viscoelastic three-layer composite plates. 2. Numerical experiments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 88–100. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.108> (In Russian)

Results of numerical studies of the influence of reinforcement orientation of hard layers and the relative thickness of the soft layer of an isotropic viscoelastic polymer on the values of natural frequencies and coefficients of mechanical losses are discussed. In a symmetrical three-layer plate, a bending-torsion interaction arises, generating mutual transformations of the eigenmodes of the coupled vibration modes, if at least one of its own forms in plate directions is characterized by an even number quarters of a wave, and another proper form — an odd number of quarters the waves. In an unsymmetrical asymmetric three-layer plate, bending-bending interaction arises, generating mutual transformations eigenmodes of coupled vibration modes in two mutually orthogonal planes if in the main directions of the plate both of their own forms characterized by either an even or an odd number of quarters of a wave. It was found that each mode of natural vibrations of three-layer

plates corresponds to the effective relative thickness of the soft isotropic layer viscoelastic polymer.

Keywords: plate, composite, anisotropy, viscoelastic polymer, temperature-frequency dependence, coupled vibrations, natural frequency, loss factor.

References

1. Ryabov V.M., Yartsev B.A., Parshina L.V. Coupled vibrations of viscoelastic three-layer composite plates. 1. Formulation of Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 3, 469–480 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **53**, iss. 3, 320–328 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063454120030127>].
2. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig und Berlin, Teubner (1928).
3. Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A. Energy dissipation during vibrations of heterogeneous composite structures: 3. Numerical Experiments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (65), iss. 1, 144–156 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.111> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **52**, iss. 1, 102–111 (2019). <https://doi.org/10.3103/S1063454119010114>].

Received: February 2, 2020

Revised: February 29, 2020

Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru

Boris A. Yartsev — boris_yar@mail.ru

Ludmila V. Parshina — ludaparshina@mail.ru