УДК 519.71 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 93C55

Об условиях существования циклов в двумерной дискретной системе с секторной нелинейностью*

Т. Е. Звягинцева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Звягинцева Т. Е.* Об условиях существования циклов в двумерной дискретной системе с секторной нелинейностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 63–72. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.106

В статье изучается система автоматического управления второго порядка с дискретным временем. Работа является продолжением исследований, представленных в статьях автора «О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе» и «О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования циклов периодов три и шесть в двумерной дискретной системе», где рассматривались системы с 2- и 3-периодическими нелинейностями, лежащими в гурвицевом угле. В этой статье исследуются системы с нелинейностями, подчиненными более сильным ограничениям. Предполагается, что нелинейность не только лежит в гурвицевом угле, но и удовлетворяет дополнительному секторному условию. Такая постановка задачи встречается во многих работах, посвященных теоретическим и прикладным вопросам теории автоматического управления. В данной работе система с указанной выше нелинейностью исследуется при всех допустимых значениях параметров. Показано, что и в этом случае существуют значения параметров, при которых система с 2-периодической нелинейностью имеет семейство циклов периода четыре, а система с 3-периодической нелинейностью — семейство циклов периода три или периода шесть. Условия на параметры, при выполнении которых система может иметь семейство периодических решений, выписываются в явном виде. Из доказательства теорем следует способ построения нелинейности таким образом, что любое решение системы с начальными данными, лежащими на некотором определенном луче, будет периодическим.

Ключевые слова: система второго порядка с дискретным временем, проблема Айзермана, секторная нелинейность, абсолютная устойчивость, периодическое решение.

1. Введение. Теория абсолютной устойчивости, начало которой было положено в сороковых годах прошлого столетия в работах А. И. Лурье, В. Н. Постникова и М. А. Айзермана, активно развивается в настоящее время. В классической формулировке задачи рассматривается система, состоящая из устойчивой стационарной линейной части и нелинейности, которая принадлежит некоторому классу, обычно определяемому так называемыми «секторными» неравенствами. Такая постановка вопроса обусловлена тем, что системы указанного типа возникают при решении многих прикладных проблем теории автоматического управления и регулирования.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

Исследование абсолютной устойчивости системы, доказательство наличия или отсутствия в системе колебаний чрезвычайно важно при решении прикладных задач.

Обзор основных методов исследования на устойчивость систем автоматического управления с непрерывным временем и результатов, полученных к настоящему времени, можно найти, например, в работах [1–3].

В последние годы значительное внимание исследователей направлено на развитие теории управления для систем с дискретным временем, большой теоретический и практический интерес представляют системы с периодическими секторными нелинейностями. Система второго порядка с нелинейностью такого типа и рассматривается в этой статье.

Работа является продолжением исследований, представленных в статьях автора [4, 5], где рассматривались системы с 2- и 3-периодическими нелинейностями, удовлетворяющими обобщенному условию Рауса — Гурвица. В данной работе изучается дискретная система, нелинейность которой не только лежит в гурвицевом угле, но и удовлетворяет дополнительному секторному условию. Системы с нелинейностями указанного типа интересны не только в теоретическом плане, такая постановка задачи встречается во многих работах, посвященных исследованию прикладных задач теории автоматического управления, а также механических, физических и инженерных задач.

В системах второго порядка с указанными нелинейностями при некоторых значениях параметров существуют циклы, как показано в работах [6–8], где представлены два примера дискретных систем, имеющих периодические решения периода три и четыре. В данной статье такая система исследуется при всех допустимых значениях параметров. Указаны области в пространстве параметров, в которых система с периодической нелинейностью может иметь семейство циклов.

Результаты работы сформулированы в виде трех теорем. В первой теореме выписаны условия на параметры, при выполнении которых 2-периодическая нелинейность может быть построена таким образом, что в системе возникает семейство циклов периода четыре. Во второй и третьей теоремах указаны условия, при выполнении которых может быть построена такая 3-периодическая нелинейность, что система будет иметь семейство циклов периода три или шесть. Условия на параметры выписываются в явном виде. Из доказательства теорем следует способ построения указанной нелинейности.

2. Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - \phi\left(\sigma_j\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_j = a y_j + b x_j$, $j \in N$, $a^2\beta - ab\alpha + b^2 \neq 0$. Для определенности будем считать, что $a > 0$. Случай $a < 0$ рассматривается аналогично.

Предполагаем, что $(\alpha, \beta) \in \Delta$, где $\Delta = \{(\alpha, \beta) : |\alpha| - 1 < \beta < 1\}$, то есть система (1) асимптотически устойчива при $\phi\left(\sigma_j\right) \equiv 0$.

Обозначим через Θ множество таких неотрицательных $S = \text{const}$, для которых система (1) с линейной функцией $\phi\left(\sigma_j\right) = S\sigma_j$ асимптотически устойчива. Для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β множество Θ есть промежуток $[0, S_{\max})$, где $S_{\max} = \frac{1-\beta}{b}$, если $b \geq \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$; $S_{\max} = \frac{1-\alpha+\beta}{a-b}$, если $\alpha \geq 0$, $b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$ или $\alpha < 0$, $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} \leq b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$; и $S_{\max} = -\frac{1+\alpha+\beta}{a+b}$, если $\alpha < 0$, $b \leq \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$.

Положим в системе (1)

$$\phi(\sigma_j) = S_j \sigma_j, \tag{2}$$

где $S_j \in \Theta$, $j \in N$. Определенная таким образом нелинейность лежит в гурвицевом угле и удовлетворяет секторному условию

$$0 \le \phi(\sigma_j)\,\sigma_j < S_{\max}\sigma_j^2$$

для всех $\sigma_j \in R$.

Сначала рассмотрим систему (1) с 2-периодической нелинейностью вида (2).

Теорема 1. *Если* $\alpha < 0$, $b \in \left(B_0, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, *где* $B_0 = \frac{a\left(\alpha(1+\beta)+(1-\beta)^2\right)}{\alpha^2+(2-\alpha)(1-\beta)}$, *то существует такая 2-периодическая последовательность* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$, *что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *имеет 4-периодические решения.*

Теперь предположим, что нелинейность (2) системы (1) 3-периодическая.

Теорема 2. *Если* $\alpha < 1$ *и* $\beta \neq 2\alpha - 1$, *то существуют значения параметров* a *и* b, *для которых 3-периодическая последовательность* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$ *может быть построена таким образом, что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *будет иметь 3-периодические решения.*

Теорема 3. *Если* $\alpha < 0$, $(1+\alpha)\left((1-\beta)^2+\alpha^2\right) > 2(1-\beta)$ *или* $\beta < -2\alpha - 1$, *то существуют значения параметров* a *и* b, *для которых 3-периодическая последовательность* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$ *может быть построена так, что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *будет иметь 6-периодические решения.*

3. Доказательство теорем. Запишем систему (1) с нелинейностью (2) в виде

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $P_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_j & -\alpha_j \end{pmatrix}$, $\alpha_j = \alpha + aS_j$, $\beta_j = \beta + bS_j$, $S_j \in \Theta$, $j \in N$.

Из определения Θ следует, что $(\alpha_j, \beta_j) \in \Delta$. Кроме того, $\beta_j = \frac{b\alpha_j + c}{a}$, $\alpha_j \in [\alpha, \alpha_{\max})$, где $c = a\beta - b\alpha$, $\alpha_{\max} = \alpha + aS_{\max}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ 2-периодическая. Наряду с системой (3) рассмотрим линейную систему

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_{j+1}P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \tag{4}$$

с постоянной матрицей $P_{j+1}P_j = P_2P_1 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 - \beta_2 \end{pmatrix}$, $j = 2m-1, m \in N$.

Система (4) имеет 2-периодическое решение, и, следовательно, система (3) имеет 4-периодическое решение, если

$$\alpha_2\alpha_1 + (1-\beta_2)(1-\beta_1) = 0. \tag{5}$$

При выполнении условия (5) решение системы (3) с начальными условиями $\binom{x_1}{y_1}$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-\beta_1}{\alpha_1}x_1$, является циклом периода четыре, состоящим из точек $\binom{x_j}{y_j}$, где $x_2 = y_1$, $y_2 = x_3 = -x_1$, $y_3 = x_4 = -y_1$, $y_4 = x_1$ и $x_{j+4} = x_j$, $y_{j+4} = y_j$ для всех $j \in N$.

Равенство (5) может быть верно только, если $\alpha_2\alpha_1 < 0$. Поэтому система (3) с 2-периодической матрицей P_j может иметь цикл периода четыре, если $\alpha < 0$ и $-\frac{\alpha}{a} \in \Theta$, то есть $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$.

Пусть $\alpha < 0$. Равенство (5) верно, если $H(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, где

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 + \left(1 - \frac{b\alpha_1 + c}{a}\right)\left(1 - \frac{b\alpha_2 + c}{a}\right).$$

Положим $H_1 = H(\alpha, \alpha_{\max})$, $H_2 = H\left(\frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}, \frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}\right)$.

Заметим, что $H_2 > 0$, поскольку $H(\alpha_1, \alpha_1) > 0$ для всех $\alpha_1 \in [\alpha, \alpha_{\max})$.

Найдем значения параметров, при которых $H_1 < 0$. При таких значениях (в силу непрерывности функции H) существует $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ такое, что $H(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ при $\alpha_1 = (1-t)\alpha + t\alpha_{\max}$, $\alpha_2 = t\alpha + (1-t)\alpha_{\max}$.

1. Если $b \geq \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a-c}{b}$, $H_1 = \frac{\alpha}{b}(a-c)$, и $H_1 < 0$ при $b \in \left[\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$.

2. Если $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} < b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$,

$$H_1 = \frac{\alpha}{a-b}\left(a\left(\alpha(1+\beta) + (1-\beta)^2\right) - b\left(\alpha^2 + (2-\alpha)(1-\beta)\right)\right),$$

и $H_1 < 0$ при $b \in \left(B_0, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$.

Таким образом, система (1) с 2-периодической нелинейностью вида (2) имеет 4-периодические решения, если $\alpha < 0$, $b \in \left(B_0, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, и теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ 3-периодическая. Наряду с системой (3) рассмотрим линейную систему

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_{j+2}P_{j+1}P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \tag{6}$$

с постоянной матрицей

$$P_{j+2}P_{j+1}P_j = P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 - \beta_2 \\ \beta_1\beta_2 - \alpha_2\alpha_3\beta_1 & \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$j = 3m - 2, m \in N$.

Система (6) имеет неподвижную точку, и система (3) имеет 3-периодическое решение, если

$$1 + \beta_1\beta_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_2 = 0. \tag{7}$$

При выполнении условия (7) решение системы (3) с начальными условиями $\binom{x_1}{y_1}$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, является циклом периода три. При этом $x_2 = y_1$, $y_2 = \frac{\beta_1\beta_2-\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $x_3 = y_2$, $y_3 = x_1$, и $x_{j+3} = x_j$, $y_{j+3} = y_j$ для всех $j \in N$.

Равенство (7) верно, если $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, где

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \tfrac{(b\alpha_1+c)}{a}\tfrac{(b\alpha_2+c)}{a}\tfrac{(b\alpha_3+c)}{a} - \\ -\alpha_1\tfrac{(b\alpha_3+c)}{a} - \alpha_2\tfrac{(b\alpha_1+c)}{a} - \alpha_3\tfrac{(b\alpha_2+c)}{a}. \end{aligned}$$

Пусть $F_1 = F(\alpha, \alpha, \alpha_{\max})$, $F_2 = F(\alpha_{\max}, \alpha_{\max}, \alpha)$, $F_3 = F\left(\frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}, \frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}, \frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}\right)$. Заметим, что $F_3 > 0$ (по построению множества Θ).

Найдем значения параметров, при которых $F_1 < 0$ или $F_2 < 0$. Если $F_1 < 0$, то (по непрерывности функции F) существует значение $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ такое, что $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (1-t)\,\alpha + t\alpha_{\max}, \quad \alpha_3 = t\alpha + (1-t)\,\alpha_{\max}. \tag{8}$$

В случае $F_2 < 0$ существует значение $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ такое, что $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, если α_j $(j = 1, 2, 3)$ определены равенством (8).

1. Если $b \geq \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a-c}{b}$,

$$F_1 = \frac{1}{b}\left(b\left((\alpha-1)^2(\alpha+1) + (\alpha-\beta)^2\right) - a(1-\beta)\left(\beta-\alpha^2\right)\right),$$

и $F_1 < 0$, если $b < B_1$, где $B_1 = \frac{a(1-\beta)\left(\beta-\alpha^2\right)}{(\alpha-\beta)^2+(1-\alpha)^2(1+\alpha)}$.

Нетрудно показать, что $B_1 \geq \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, если $(1-\beta)^2 + \alpha(2\alpha-\beta-1) \leq 0$.

$$F_2 = \frac{1}{b^2}\left((\alpha-1)\,b + a(1-\beta)\right)\left(\left(\alpha^2+\alpha-1-\beta\right)b + a\alpha(1-\beta)\right).$$

Пусть $B_2 = \frac{a(1-\beta)}{1-\alpha}$, $B_3 = \frac{a\alpha(1-\beta)}{\beta-\alpha^2-\alpha+1}$. Тогда $F_2 < 0$, если $\alpha < 1$ и выполнено одно из следующих четырех условий:

а) $\beta \leq \alpha^2 + \alpha - 1$, $b \in (B_2, +\infty)$,
б) $\alpha^2 + \alpha - 1 < \beta < 2\alpha - 1$, $b \in (B_2, B_3)$,
в) $2\alpha - 1 < \beta \leq 3\alpha - 1$, $b \in (B_3, B_2)$,
г) $\beta > 3\alpha - 1$, $b \in \left[\frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}, B_2\right)$.

2. Если $\alpha \geq 0$, $b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$ или $\alpha < 0$, $\frac{a(1+\beta)}{\alpha} \leq b < \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}$, то $\alpha_{\max} = \frac{a+c}{a-b}$,

$$F_1 = \frac{1}{a-b}\left(bk_1 + ak_2\right), F_2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left(b^2m_1 - abm_2 + a^2m_3\right),$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= k_1(\alpha,\beta) = (1-\alpha)\left(\alpha^2 + (1-\beta)^2\right) - 2(1-\beta),\\
k_2 &= k_2(\alpha,\beta) = (1+\beta)\left(\alpha^2 + (1-\beta)^2\right) - 2\alpha\beta,\\
m_1 &= m_1(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta+1)\left(\alpha^2 - 3\alpha + 1\right) + 4\alpha,\\
m_2 &= m_2(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)(2\alpha\beta - 3\beta - \alpha) + 2\alpha^2 + 3,\\
m_3 &= m_3(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta+1)\left(\beta^2 + \beta + 1\right) - 4\beta(\beta+1).
\end{aligned}$$

Функция F_1 может принимать отрицательные значения, если $\alpha \geq 0$. При этом $F_1 < 0$, если $(1-\beta)^2 + \alpha(2\alpha-\beta-1) \leq 0$, $k_1 \geq 0$, $b \in \left(-\infty, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$ или $(1-\beta)^2 + \alpha(2\alpha-\beta-1) \geq 0$, $k_1 < 0$, $b \in \left(B_4, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$, где $B_4 = -\frac{ak_2}{k_1}$.

Дискриминант D квадратного трехчлена $M = b^2m_1 - abm_2 + a^2m_3$ (как функции от b при фиксированных параметрах a, α, β) меняет знак в рассматриваемом случае.

Если $m_1 \neq 0$, $D > 0$, то пусть B_5, B_6 — корни M: $B_5 = \frac{am_2-\sqrt{D}}{2m_1}$, $B_6 = \frac{am_2+\sqrt{D}}{2m_1}$. Если $m_1 = 0$, то положим $B_5 = \frac{am_3}{m_2}$.

Нетрудно показать, что в этом случае $F_2 < 0$, если $\beta > 3\alpha - 1$ и $b \in \left(B_5, \frac{a(1-\beta)}{2-\alpha}\right)$.

3. Если $\alpha < 0$, $b < \frac{a(1+\beta)}{\alpha}$, то $\alpha_{\max} = -\frac{a+c}{a+b}$,

$$F_1 = \frac{(\alpha+\beta+1)}{(a+b)} \left(b\left(\alpha^2 - \alpha\beta - \beta + 1\right) - a\left(\alpha\beta + \alpha - \beta^2 - 1\right)\right),$$

$$F_2 = \frac{(\alpha+\beta+1)}{(a+b)^2} \left(b^2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) - ab\left(2\alpha\beta + \alpha + \beta - 1\right) + a^2\left(\beta^2 + \beta + 1\right)\right),$$

и в этом случае $F_1 > 0$ и $F_2 > 0$.

Собирая все значения параметров, при которых $F_1 < 0$ или $F_2 < 0$, получим требуемое. Теорема доказана. □

Переформулируем теорему 2, указав явно все значения параметров, при которых 3-периодическая система (3) может иметь циклы периода 3.

Разобьем треугольник Δ на 8 частей (рис. 1):

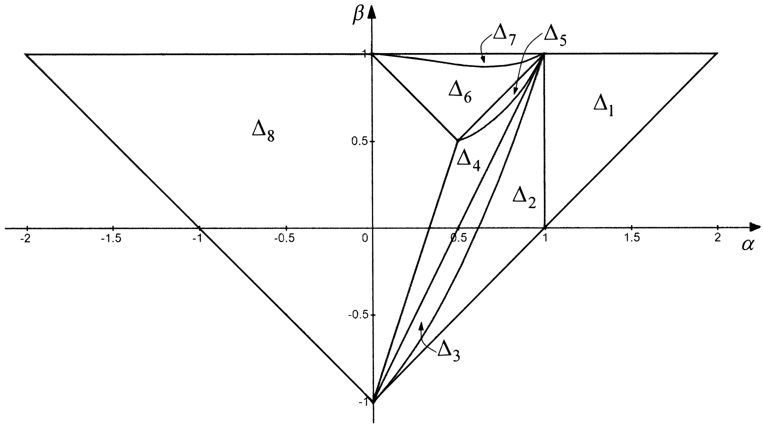

Рис. 1.

$\Delta_1 = \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq 1\}$, $\Delta_2 = \left\{(\alpha,\beta) : \alpha < 1, \beta \leq \alpha^2 + \alpha - 1\right\}$,
$\Delta_3 = \left\{(\alpha,\beta) : \alpha^2 + \alpha - 1 < \beta \leq 2\alpha - 1\right\}$,
$\Delta_4 = \left\{(\alpha,\beta) : 2\alpha - 1 < \beta \leq 3\alpha - 1, (1-\beta)^2 - \alpha(1+\beta-2\alpha) \geq 0\right\}$,
$\Delta_5 = \left\{(\alpha,\beta) : \beta \leq \alpha, (1-\beta)^2 - \alpha(1+\beta-2\alpha) < 0\right\}$,
$\Delta_6 = \left\{(\alpha,\beta) : \beta > \alpha, \beta > 1-\alpha, (1-\alpha)\left((1-\beta)^2 + \alpha^2\right) \leq 2(1-\beta)\right\}$,
$\Delta_7 = \left\{(\alpha,\beta) : 0 < \alpha < 1, (1-\alpha)\left((1-\beta)^2 + \alpha^2\right) > 2(1-\beta)\right\}$,
$\Delta_8 = \{(\alpha,\beta) : 3\alpha - 1 < \beta \leq 1 - \alpha\}$.

Теорема 2′. *Если выполнено одно из следующих условий на параметры системы:*

1) $(\alpha,\beta) \in \Delta_2$, $b \in (B_2, +\infty)$;
2) $(\alpha,\beta) \in \Delta_3$, $\beta \neq 2\alpha - 1$, $b \in (B_2, B_3)$;
3) $(\alpha,\beta) \in \Delta_4$, $b \in (B_3, B_2)$;
4) $(\alpha,\beta) \in \Delta_5$, $b \in (B_4, B_1) \cup (B_3, B_2)$;
5) $(\alpha,\beta) \in \Delta_6$, $b \in (B_4, B_2)$;
6) $(\alpha,\beta) \in \Delta_7$, $b \in (-\infty, B_2)$;

7) $(\alpha,\beta)\in\Delta_8$, $b\in(B_5,B_2)$;
то существует 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Theta$, *такая что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *имеет 3-периодические решения.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Система (6) имеет цикл периода 2, и система (3) имеет 6-периодическое решение, если

$$1+\beta_1\beta_2\beta_3-\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_2=0. \tag{9}$$

При выполнении условия (9) решение системы (3) с начальными условиями $\binom{x_1}{y_1}$, где $x_1\neq 0$, $y_1=-\frac{1+\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, является циклом периода шесть, состоящим из точек $\binom{x_j}{y_j}$, где $x_2=y_1$, $y_2=x_3=\frac{\alpha_1+\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2-\beta_2}x_1$, $y_3=x_4=-x_1$, $y_4=x_5=-x_2$, $y_5=x_6=-x_3$, $y_6=x_1$ и $x_{j+6}=x_j$, $y_{j+6}=y_j$ для всех $j\in N$.

Равенство (9) верно, если $G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$, где

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1-\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\frac{(b\alpha_1+c)}{a}\frac{(b\alpha_2+c)}{a}\frac{(b\alpha_3+c)}{a}+ \\ +\alpha_1\frac{(b\alpha_3+c)}{a}+\alpha_2\frac{(b\alpha_1+c)}{a}+\alpha_3\frac{(b\alpha_2+c)}{a}.$$

Как и в доказательстве теоремы 1, находим значения параметров, при которых $G_1=G(\alpha,\alpha,\alpha_{\max})<0$ или $G_2=G(\alpha_{\max},\alpha_{\max},\alpha)<0$. При этих значениях параметров существует $t\in(0,1)$ такое, что $G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$, если α_j $(j=1,2,3)$ определены равенством (8), поскольку $G_3=G\left(\frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2},\frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2},\frac{\alpha+\alpha_{\max}}{2}\right)>0$.

Переформулируем теорему 3, явно указав все значения параметров, при которых 3-периодическая система (3) может иметь циклы периода 6.

Для этого разобьем треугольник Δ на 5 частей (рис. 2):

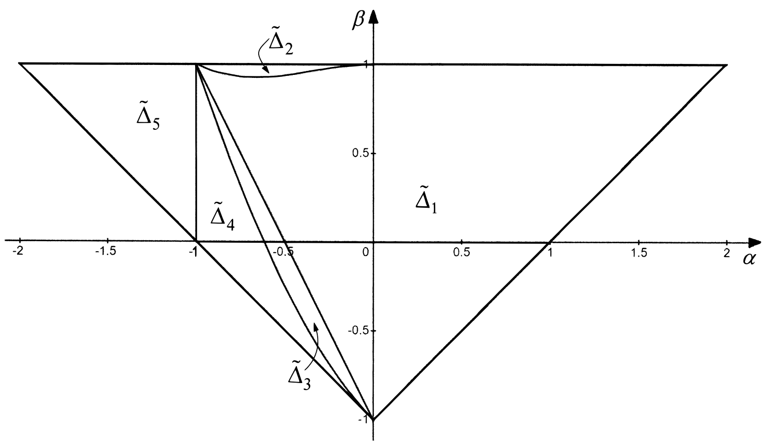

Рис. 2.

$$\tilde\Delta_1=\left\{(\alpha,\beta):\beta\geq-1-2\alpha,(1+\alpha)\left((1-\beta)^2+\alpha^2\right)\leq 2(1-\beta)\right\},$$
$$\tilde\Delta_2=\left\{(\alpha,\beta):\alpha<0,(1+\alpha)\left((1-\beta)^2+\alpha^2\right)>2(1-\beta)\right\},$$
$$\tilde\Delta_3=\left\{(\alpha,\beta):\alpha^2-\alpha-1\leq\beta<-2\alpha-1\right\},$$
$$\tilde\Delta_4=\left\{(\alpha,\beta):\alpha\geq-1,\beta<\alpha^2-\alpha-1\right\},\ \tilde\Delta_5=\{(\alpha,\beta):\alpha<-1\},$$

и положим

$$B_7=-\frac{a(1-\beta)\left(\beta-\alpha^2\right)}{(\alpha+1)^2(1-\alpha)+(\alpha+\beta)^2},\quad B_8=-\frac{a(1-\beta)}{1+\alpha},\quad B_9=\frac{a\alpha(1-\beta)}{\beta-\alpha^2+\alpha+1},$$

$$B_{10} = -\frac{a\left(\beta\left(\alpha+\beta\right)+1+\alpha\right)}{\beta\left(1-\alpha\right)-1-\alpha^2}, \quad B_{11} = \frac{a\left(\left(1+\beta\right)\left(\alpha^2+\left(1-\beta\right)^2\right)+2\alpha\beta\right)}{\left(1+\alpha\right)\left(\alpha^2+\left(1-\beta\right)^2\right)-2\left(1-\beta\right)}.$$

Теорема 3′. *Если выполнено одно из следующих условий на параметры системы:*

1) $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Delta}_2$, $b \in (-\infty, B_{11})$;

2) $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Delta}_3$, $b \in (B_{10}, B_7)$;

3) $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Delta}_4$, $b \in (B_{10}, B_7) \cup (B_9, +\infty)$;

4) $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Delta}_5$, $b \in (B_{10}, B_8)$;

то существует 3-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$ *такая, что система* (1) *с нелинейностью вида* (2) *имеет 6-периодические решения.*

Литература

1. Леонов Г. А. О проблеме Айзермана. *Автомат. и телемех.*, (7), 37–49 (2009).

2. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Брагин В. О. О проблемах Айзермана и Калмана. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 3, 31–47 (2010).

3. Либерзон М. Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости. *Автомат. и телемех.*, (10), 86–119 (2006).

4. Звягинцева Т. Е. О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 1, 50–59 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105

5. Звягинцева Т. Е. О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования циклов периодов три и шесть в двумерной дискретной системе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 2, 309–318 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213

6. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture. *Proceedings of the European Control Conference (ECC15)*, 2015, Linz, Austria, 981–985 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330669

7. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture. *Automatica* **60**, 140–144 (2015). https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.07.005

8. Heath W. P., Carrasco J. Global asymptotic stability for a class of discrete-time systems. *Proceedings of the European Control Conference (ECC15)*, 2015, Linz, Austria, 969–974 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330667

Статья поступила в редакцию 2 августа 2020 г.;
после доработки 9 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru

On the conditions for cycles existence in a second-order discrete-time system with sector-nonlinearity*

T. E. Zvyagintseva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Zvyagintseva T. E. On the conditions for cycles existence in a second-order discrete-time system with sector-nonlinearity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 63–72. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.106 (In Russian)

In this paper, a second-order discrete-time automatic control system is studied. This work is a continuation of the research presented in the author's papers "On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of a four-period cycle in a second-order discrete-time system" and "On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of three- and six-period cycles in a second-order discrete-time system", where systems with two- and three-periodic nonlinearities lying in the Hurwitz angle were considered. The systems with nonlinearities subjected to stronger constraints are discussed in this paper. It is assumed that the nonlinearity not only lies in the Hurwitz angle, but also satisfies the additional sector-condition. This formulation of the problem is found in many works devoted to theoretical and applied questions of the automatic control theory. In this paper, a system with such nonlinearity is explored for all possible values of the parameters. It is shown that in this case there are parameter values for which a system with a two-periodic nonlinearity has a family of four-period cycles, and a system with a three-periodic nonlinearity has a family of three- or six-period cycles. The conditions on the parameters under which the system can have a family of periodic solutions are written out explicitly. The proofs of the theorems provide a method for constructing nonlinearity in such a way that any solution of the system with initial data lying on some definite ray is periodic.

Keywords: second-order discrete-time system, Aizerman conjecture, sector nonlinearity, absolute stability, periodic solution.

References

1. Leonov G. A. On the Aizerman problem. *Avtomat. i Telemekh.*, (7), 37–49 (2009). (In Russian) [Engl. transl.: *Autom. Remote Control* **70** (7), 1120–1131 (2009). https://doi.org/10.1134/S0005117909070042].

2. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Bragin V. O. On problems of Aizerman and Kalman. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 3, 31–47 (2010). (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **43**, iss. 3, 148–162 (2010). https://doi.org/10.3103/S1063454110030052].

3. Liberzon M. R. Essays on the absolute stability theory. *Avtomat. i Telemekh.*, (10), 86–119 (2006). (In Russian) [Engl. transl.: *Autom. Remote Control* **67** (10), 1610–1644 (2006). https://doi.org/10.1134/S0005117906100043].

4. Zvyagintseva T. E. On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of a fourperiod cycle in a second-order discrete-time system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 1, 50–59 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.105 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 1, 37–44 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120010161].

5. Zvyagintseva T. E. On the Aizerman problem: coefficient conditions for the existence of threeand six-period cycles in a second-order discrete-time system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 2, 309–318 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.213 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 2, 206–213 (2020). https://doi.org/10.1134/S106345412002017X].

*This work is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00388).

6. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture. *Proceedings of the European Control Conference (ECC15)*. 2015. Linz, Austria, 981–985 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330669

7. Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture. *Automatica* **60**, 140–144 (2015). https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.07.005

8. Heath W. P., Carrasco J. Global asymptotic stability for a class of discrete-time systems. *Proceedings of the European Control Conference (ECC15)*, 2015, Linz, Austria, 969–974 (2015). https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330667

Received: August 2, 2020
Revised: September 9, 2020
Accepted: September 17, 2020

Author's information:

Tatiana E. Zvyagintseva — zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru