УДК 517.521 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 32A05

Степенные ряды нескольких переменных с условием логарифмической выпуклости коэффициентов

А. В. Железняк

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Для цитирования: *Железняк А. В.* Степенные ряды нескольких переменных с условием логарифмической выпуклости коэффициентов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 49–62.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.105

В статье рассматривается обобщение теоремы Харди о степенных рядах нескольких переменных, обратных к степенным рядам с положительными коэффициентами. А именно, доказывается, что если последовательность коэффициентов $\{a_s\} = a_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$ степенного ряда удовлетворяет условию, подобному условию логарифмической выпуклости коэффицентов, начиная с некоторого места $||s|| \geq K$, и первый коэффициент a_0 достаточно большой, то у обратного степенного ряда все коэффициенты кроме первого будут отрицательны. Классическая теорема Харди соответствует случаю $K = 0$, $n = 1$. Такого рода результаты применяются в теории Неванлинны — Пика.

Ключевые слова: степенной ряд, ядра Неванлинны — Пика, логарифмическая выпуклость.

1. Введение. Давно известно, что ряд, обратный формально степенному ряду одной переменной с первым положительным коэффициентом и остальными отрицательными, будет иметь строго положительные коэффициенты (см. [1]). Однако обратное условие неверно, и в случае ряда Харди одной переменной было найдено простейшее достаточное условие того, что ряд, обратный формальному степенному ряду с положительными коэффициентами, будет иметь все отрицательные коэффициенты, кроме самого первого (см. [2]). Это условие вспоследствии будет использовано в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика, а именно при рассмотрении вопроса ее разрешимости (см. [3]). Особый интерес представляет случай формальных степенных рядов одной переменной.

Пусть дан формальный степенной ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

с положительными коэффициентами. Рассмотрим формальный степенной ряд, обратный исходному:

$$g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad f(x)g(x) = 1. \tag{2}$$

Мы хотим знать, при каких a_0, a_n коэффициенты b_0, b_n обратного ряда $g(x)$ удовлетворяют условиям

$$b_0 > 0, \qquad b_n \le 0, \quad n > 0. \tag{3}$$

Это условие естестественным образом возникает в интерполяционной задаче Неванлинны — Пика. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1\}$, а $H^2(\mathbb{D})$ — пространство Харди в $\mathbb{D}$. Для данных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{D}$ и значений $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ мы хотим найти функцию $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что $\varphi(x_k) = w_k$ при всех $k = 1, \dots, n$. Известно, что задача Неванлинны — Пика разрешима тогда и только тогда, когда матрица $A = (\frac{1-w_k\overline{w_l}}{1-x_k\overline{x_l}})_{1\le k,l\le n}$ положительно определена. Другими словами, матрица

$$A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\le k,l\le n} \text{ положительно определена,} \tag{4}$$

где $k(x, y) = \frac{1}{1-x\overline{y}}$ — воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Это условие впервые было получено Пиком в 1916 году, более того, было доказано, что такое решение единственно и представимо в виде произведения Бляшке, а в 1919 году Неванлинна рассмотрел эту задачу независимо от Пика.

Рассмотрим общую задачу Неванлинны — Пика. Пусть $H-$ гильбертово пространство аналитических функций в $\mathbb{D}$ такое, что функционал вычисления значения в точке непрерывен. Для данных $x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ мы ищем мультипликатор пространства H такой, что $\varphi(x_k) = w_k, k = 1, 2, \dots, n$ и $||\varphi|| \le 1$. Известно (см. [1]), что условие положительной определенности матрицы $A = ((1 - w_k\overline{w_l})k(x_k, x_l))_{1\le k,l\le n}$ будет необходимым и может быть достаточным, если

$$K = (k(x_k, x_l))_{1\le k,l\le n} \ \text{ положительно определена,} \tag{5}$$

где

$$k(x, y) = \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{1 - b(x, y)}, \tag{6}$$

причем матрица $B = (b(x_k, x_l))_{1\le k,l\le n}$ положительно определена.

Ядра $k(x, y)$ называются ядрами Неванлинны — Пика. Рассмотрим ядра следующего вида: $k(x, y) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x\overline{y})^n$ (воспроизводящее ядро пространства $H^2(\mathbb{D})$). Для выполнения условия (5) достаточно неотрицательности чисел a_n, а для выполнения условия (6) достаточно, чтобы у степенного ряда $1/k(x, y) = \sum_{n=0}^\infty b_n(x\overline{y})^n$ все коэффициенты, кроме нулевого, были неположительны. Это условие в точности соответствует условию (3) (см. [1, 4]). Для случая рядов одной переменной простейшее достаточное условие было получено Харди (см. [2]).

Теорема 1 (Харди). *Положим $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^\infty a_n x^n$ — формальный степенной ряд, рассмотрим $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^\infty b_n x^n$ — формальный степенной ряд, обратный к f. Если коэффициенты a_n удовлетворяют условию логарифмической выпуклости*

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \ge \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{7}$$

то коэффициенты ряда g неположительны, за исключением нулевого.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, K — натуральное число. Говорят, что *последовательность удовлетворяет условию K-Харди*, если при всех натуральных $n \geq K$ выполнено условие (7).

В работе [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Положим* $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *— формальный степенной ряд, рассмотрим* $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *— формальный степенной ряд, обратный к* $f(x)$*. Тогда для любой последовательности чисел* $\{a_n\}$*, удовлетворяющей условию K-Харди, существует число* a_0 *такое, что коэффициенты* $b_n < 0$ *при всех натуральных* n.

Цель настоящей статьи — обобщить теорему 2 на многомерный случай.

2. Основная часть. В дальнейшем нам потребуются следующие вспомогательные обозначения. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — мультииндекс. Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — мультииндекс, состоящий из нулей и одной единицы на i-м месте, а через $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ и $\mathbb{E} = (1, \ldots, 1)$ — мультииндексы, состоящие из нулей и единиц соответственно. Для удобства и краткости будем использовать обозначения $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ и $a_s = a_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Также будет писать, что $s > t$ и $s \geq t$, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено $s_i > t_i$ и $s_i \geq t_i$ соответственно. Обозначим через $||s|| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$ порядок мультииндекса s. Будем говорить, что $s >> t$, если выполнены два условия: $s \geq t$ и $s \neq t$.

Определение 2. Пусть дана последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел, s — мультииндекс порядка n. Будем говорить, что *тройка мультииндексов* (s, t, u) *B-выпуклая*, если

$$a_{s+t+u} a_s \geq B a_{s+t} a_{s+u}.$$

Определение 3. Пусть дана последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел, s — мультииндекс порядка n. Будем говорить, что она *удовлетворяет n-мерному условию Харди*, если выполнены три следующих условия:

1) тройки (s, e_i, e_i) 1-выпуклы при $1 \leq i \leq n$,

2) тройки (s, e_i, e_j) 1-выпуклы при $s_i s_j > 0$ и при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$,

3) тройки (s, e_i, e_j) $\frac{n-l}{n-l-1}$ выпуклы при $s_i s_j = 0$, где l — число нулей в последовательности $\{s_k\}_{k \neq i, k \neq j}$ и при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

В работе [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Рассмотрим формальный степенной ряд от n переменных*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_{\mathbb{O}} + \sum_{||s|| >> \mathbb{O}} a_s x^s.$$

Положим

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} = \sum_{||s|| \geq \mathbb{O}} b_s x^s.$$

Ряд $g(x)$ — формальный степенной ряд от n переменных, обратный к $f(x)$. Если последовательность $\{a_s\}_{s>>0}$ положительных чисел, s — мультииндекс порядка n, удовлетворяет n-мерному условию Харди, то существует число $a_{\mathbb{O}}$ такое, что коэффициенты $b_s \leq 0$ при всех $s >> \mathbb{O}$.

Определение 4. Пусть $\{a_s\}$ — последовательность положительных чисел, s — мультииндекс порядка n. Будем говорить, что она *удовлетворяет n-мерному условию K-Харди*, если n-мерное условие Харди выполнено для всех мультииндексов s, чей порядок не меньше, чем K.

Теорема 4. *Рассмотрим формальный степенной ряд от n переменных*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_{\mathbb{O}} + \sum_{||s||>>\mathbb{O}} a_s x^s.$$

Положим

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} = \sum_{||s||\geq\mathbb{O}} b_s x^s.$$

Ряд $g(x)$ — формальный степенной ряд от n переменных, обратный к $f(x)$. Если последовательность $\{a_s\}_{s>>\mathbb{O}}$ положительных чисел, s — мультииндекс порядка n, удовлетворяет n-мерному условию K-Харди, то существует число $a_{\mathbb{O}}$ такое, что коэффициенты $b_s < 0$ при всех $s >> \mathbb{O}$.

Заметим, что теорема 2 — частный случай теоремы 4 для случая одной переменной.

Поскольку ряды $g(x)$ и $f(x)$ связаны равенством $f(x)g(x) = 1$, то для коэффициентов a_i и b_j этих рядов выполнены соотношения

$$\begin{cases} a_{\mathbb{O}} b_{\mathbb{O}} = 1, & \qquad (*) \\ \sum\limits_{\mathbb{O}\leq j\leq I} a_{I-j} b_j = 0, \quad i \geq \mathbb{O}, i \neq \mathbb{O}. & \end{cases}$$

Тем самым коэффициент $b_{\mathbb{O}} = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}}$, а все остальные коэффициенты b_i выражаются через коэффициенты a_j $(\mathbb{O} \leq j \leq i)$. Зафиксируем все числа $a_j, i \neq \mathbb{O}$.

Лемма 1. *Коэффициент b_l имеет вид*

$$b_l = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} \cdot P_l(a_{\mathbb{O}}),$$

где P_l — многочлен степени $||l|| - 1$, с коэффициентами, зависящими от чисел $a_j (j \leq l)$, причем старший коэффициент равен $(-a_l)$.

Доказательство леммы 1. Индукция по порядку мультииндекса l.

База $||l|| = 1$. Из формулы $(*)$ следует, что $a_{\mathbb{O}} b_{\mathbb{O}} = 1$ и $a_{e_k} b_{\mathbb{O}} + a_{\mathbb{O}} b_{e_k} = 0$, откуда $b_{\mathbb{O}} = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}}$ и $b_{e_k} = \frac{-a_{e_k}}{a_{\mathbb{O}}^2}$.

Переход от $||l||$ к $||l|| + 1$. Рассмотрим произвольный мультииндекс S порядка $||l|| + 1$. Рассмотрим формулу $(*)$ при $I = S$:

$$a_S b_{\mathbb{O}} + a_{S-e_1} b_{e_1} + \ldots + a_{\mathbb{O}} b_S = 0.$$

Следовательно, по предположению индукции получаем

$$b_S a_{\mathbb{O}} = -b_{S-e_1} a_{e_1} - \ldots - b_{\mathbb{O}} a_S =$$
$$= -\left[\frac{a_{e_1} P_{S-e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} + \frac{a_{2e_1} P_{S-2e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^{||l||}} + \cdots + \frac{a_{S-e_1} P_{e_1}(a_{\mathbb{O}})}{a_{\mathbb{O}}^2} + \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}} \right] =$$
$$= -\frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} Q_S(a_{\mathbb{O}}) - \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+1}} a_S a_{\mathbb{O}}^{||l||},$$

где Q_S — многочлен степени $(||l||-1)$, $a_S a_{\mathbb{O}}^{||l||}$ — моном степени $||l||$. Таким образом,

$$b_S = \frac{1}{a_{\mathbb{O}}^{||l||+2}} \cdot P_l(a_{\mathbb{O}}).$$

Тем самым, лемма 1 доказана. □

Следующие два замечания показывают асимптотику коэффициентов b_S.

Замечание 1. При достаточно больших $a_{\mathbb{O}}$ верно

$$b_S = \frac{-a_S}{a_{\mathbb{O}}^2}(1 + o(1)).$$

Замечание 2. Существует положительное число A такое, что при всех $a_{\mathbb{O}} > A$ выполнено

$$\left| b_S + \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{a_S}{a_{\mathbb{O}}^2}$$

для всех мультииндексов S, чей порядок не превосходит N.

Таким образом,

$$-\frac{3}{2} \frac{a_s}{a_{\mathbb{O}}^2} < b_s < -\frac{1}{2} \frac{a_s}{a_{\mathbb{O}}^2} \text{ при всех s.}$$

Доказательство теоремы 4. Будем проводить доказательство по следующей схеме: вначале проведем индукцию по n, а потом — по порядку мультииндекса S.

Индукция по n. База $n = 1$ — теорема 3.

Переход. Пусть в случае $m < n$ условия теоремы выполнены. Докажем, что для n условие теоремы выполнено. Доказательство разобьем на 3 этапа.

Этап 1. $||S|| \leq K$. Согласно замечанию 2 можно подобрать число A такое, что при $a_{\mathbb{O}} > A$ будет верно $b_s \leq 0$.

Далее будем проводить индукцию по порядку мультииндекса S.

Этап 2. База индукции. $||S|| = K + 1$. Не умаляя общности, будем считать, что $S > \mathbb{O}$ (если хоть один из индексов равен 0, то утверждение верно по предположению индукции для меньшей размерности).

Введем обозначения:

$$m = \max \frac{a_S}{a_{S-e_j}}, \quad 1 \leq j \leq n, ||S|| = K + 1,$$

$$b = \min \frac{a_S}{a_{S-e_j}}, \quad 1 \leq j \leq n, ||S|| = K + 1,$$

$$M = \max \frac{a_\alpha}{a_{\alpha - e_j}}, \quad 1 \le j \le n, ||\alpha|| \le K,$$

$$T = \max\, a_\alpha, \quad 0 < ||\alpha|| \le K.$$

Перемножив ряды $f(x)$ и $g(x)$ и применив соотношения $(*)$ для коэффициентов при x^S, x^{S-e_i} $(i = 1, \dots, n)$, получим

$$\begin{array}{ccccccc} a_S b_{\mathbb{O}} & + & a_{S-e_1} b_{e_1} + & \dots & + & a_{\mathbb{O}} b_S = 0, \\ a_{S-e_1} b_{\mathbb{O}} & + & \dots & & + & a_{\mathbb{O}} b_{S-e_1} = 0, \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{S-e_n} b_{\mathbb{O}} & + & \dots & & + & a_{\mathbb{O}} b_{S-e_n} = 0. \end{array}$$

Домножив первое тождество $(n a_{S-e_1} a_{S-e_2} \dots a_{S-e_n})$, второе — на $(a_S a_{S-e_2} \dots a_{S-e_n})$, третье — на $(a_S a_{S-e_1} a_{S-e_3} \dots a_{S-e_n})$, ..., последнее — на $(a_S a_{S-e_1} \dots a_{S-en-1})$ и вычитая из первого остальные, получим

$$n a_{\mathbb{O}} a_{S-e_1} \dots a_{S-e_n} b_S + b_{S-e_1}(n a_{e_1} a_{S-e_1} - a_{\mathbb{O}} a_S) a_{S-e_2} \dots a_{S-e_n} + \\ + b_{S-2e_1}(n a_{2e_1} a_{S-e_1} - a_{e_1} a_S) a_{S-e_2} \dots a_{S-e_n} + \dots = 0.$$

Группируя, имеем

$$a_{S-e_2} a_{S-e_3} a_{S-e_n} C_1 + a_{S-e_1} a_{S-e_3} a_{S-e_n} C_2 + \dots + \\ + a_{S-e_1} a_{S-e_2} a_{S-e_{n-1}} C_n + n b_S a_{S-e_1} a_{S-e_n} a_0 = 0. \quad (8)$$

Если докажем, что числа $C_i \ge 0$ при всех i, то из этого будет следовать, что $b_S \le 0$, так как $a_I \ge 0$. Запишем коэффициенты $C_1, C_2, \dots C_n$ в явном виде. Заметим, что числа $C_1, C_2, \dots C_n$ нельзя однозначно выразить, поэтому наложим одно дополнительное условие, а именно условие симметричности:

$$\begin{gathered} C_1 = b_{S-e_1}(n a_{e_1} a_{S-e_1} - a_{\mathbb{O}} a_S) + b_{S-2e_1}(n a_{2e_1} a_{S-e_1} - a_{e_1} a_S) + \dots + \\ + b_{S-\alpha_1 e_1 - \alpha_n e_n} \left[\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_1} - a_{\alpha - e_1} a_S \right], \\ C_1 = \sum_{S >> \alpha \ge e_1} b_{S-\alpha} \left(\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_1} - a_{\alpha-e_1} a_S \right), \\ C_j = \sum_{S >> \alpha \ge e_j} b_{S-\alpha} \left(\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_s \right). \end{gathered} \quad (9)$$

Если доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \left| b_{S-e_j} \right| \left| (n a_{e_j} a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}} a_S) \right| \ge \sum_{S >> \alpha >> e_j} \left| b_{S-\alpha} \left(\frac{n}{||\alpha||} a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j} a_S \right) \right|,$$

то поскольку числа $b_{S-\alpha}$ отрицательны, последние слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое положительно. Значит, число $C_i \ge 0$.

Лемма 2. *В условиях теоремы 3 предыдущее неравенство верно.*

Доказательство леммы 2. Оценим правую часть неравенства:

$$\sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-e_j}a_{\alpha-e_j}\left|b_{S-\alpha}\right|\left(\frac{n}{||\alpha||}\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\leq \text{(по определению числа } T)$$

$$\leq Ta_{S-e_j}\sum_{e_j<<\alpha<<S}\left|b_{S-\alpha}\right|\left(\frac{n}{||\alpha||}\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\leq$$

$$\leq Ta_{S-e_j}\sum_{e_j<<\alpha<<S}\left|b_{S-\alpha}\right|\left(n\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}+\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\leq$$

$$\leq T(Mn+m)a_{S-e_j}\sum_{e_j<<\alpha<<S}\left|b_{S-\alpha}\right|\leq\frac{3}{2}T(Mn+m)a_{S-e_j}\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}.$$

Последнее неравенство получено при помощи замечания 2.

Перепишем левую часть неравенства в виде

$$\frac{1}{2}\left|b_{S-e_j}\right|\left|(na_{e_j}a_{S-e_j}-a_{\mathbb{O}}a_S)\right|=\frac{1}{2}\left|b_{S-e_j}\right|a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j}\left|\left(n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\right|.$$

Тем самым осталось доказать, что

$$\frac{3}{2}T(Mn+m)a_{S-e_j}\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}\leq\frac{1}{2}\left|b_{S-e_j}\right|a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j}\left|\left(n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\right|.$$

Сократив на $1/2a_{S-e_j}$, имеем

$$3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}\leq\left|b_{S-e_j}\right|a_{\mathbb{O}}\left|\left(n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right)\right|.$$

Подберем число $a_{\mathbb{O}}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}\right|<\frac{b}{2},$$

откуда немедленно следует

$$\left|\frac{a_S}{a_{S-e_j}}-n\frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}}\right|>\frac{b}{2}. \tag{10}$$

Тем самым осталось доказать

$$3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}\leq\frac{b}{2}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Ввиду замечания 2 выполнено $\left|b_{S-e_j}\right|\geq\frac{1}{2}\frac{a_{S-e_j}}{a_{\mathbb{O}}{}^2}$, следовательно, можно усилить предыдущее неравенство:

$$\frac{b}{2}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right|\geq\frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}\frac{a_{S-e_j}}{a_{\mathbb{O}}^2}\geq 3T(Mn+m)\sum_{e_j<<\alpha<<S}\frac{a_{S-\alpha}}{a_{\mathbb{O}}^2}.$$

Если последнее неравенство будет верно, то лемма 2 будет доказана. Сократив на $\frac{1}{a_{\mathbb{O}}^2}$, имеем

$$\frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j} \geq 3T(Mn+m) \sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-\alpha}. \qquad (**)$$

Пусть $\beta = \frac{3T(Mn+m)\cdot 4}{b}$, тогда сокращая на $\frac{b}{4}$, предыдущее неравенство перепишется в виде

$$a_{\mathbb{O}}a_{S-e_j} \geq \beta \sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-\alpha}.$$

Пусть $Y = \min_{|I|=K=|S|-1} a_I$. Докажем более сильное неравенство:

$$a_{\mathbb{O}}Y \geq \beta \sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-\alpha}. \qquad (11)$$

Так как верно неравенство

$$\sum_{e_j<<\alpha<<S} a_{S-\alpha} \leq \sum_{\mathbb{O}<<I;||I|\leq K+1} a_I,$$

то число, стоящее в правой части, ограничено, поэтому можно подобрать $a_{\mathbb{O}}$ так, чтобы неравенство (11) было верным.

Лемма 2 доказана. □

Замечание 3. Из леммы 2 следует, что

$$C_j \geq \frac{1}{2}\left|b_{S-\alpha}\right| \left|na_{e_j}a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}}a_S\right|.$$

Замечание 4. Неравенство (11) можно модифицировать. Для любой константы c можно подобрать такое число $a_{\mathbb{O}}$, что будет выполнено неравенство

$$ca_{\mathbb{O}}|b_{S-e_j}| \geq \sum_{e_j<<\alpha<<S} |b_{S-\alpha}|.$$

Предыдущее неравенство легко получается применением замечания 2. В дальнейшем нам потребуются оценки числа b_S.

Лемма 3. *Верно следующее неравенство:* $|b_S| \geq \frac{b}{4n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|b_{S-e_j}\right|$.

Доказательство леммы 3. Поскольку верно соотношение, эквивалентное (8), то

$$a_{S-e_2}a_{S-e_3}\dots a_{S-e_n}C_1 + a_{S-e_1}a_{S-e_3}\dots a_{S-e_n}C_2 +$$

$$+a_{S-e_1}a_{S-e_1}\dots a_{S-e_n}C_3 + \dots + a_{S-e_1}\dots a_{S-e_{n-1}}C_n = -nb_S a_{S-e_1}\dots a_{S-e_n}a_{\mathbb{O}}.$$

Отсюда, выражая b_S, получим

$$b_S = \frac{-1}{na_{\mathbb{O}}}\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j}{a_{S-e_j}},$$

$$|b_S| = \frac{1}{na_{\mathbb{O}}}\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j}{a_{S-e_j}} \geq \frac{1}{na_{\mathbb{O}}}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{|b_{S-e_j}|}{a_{S-e_j}}\left|na_{e_j}a_{S-e_j} - a_{\mathbb{O}}a_S\right| =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{S-e_j}\right|\left|\frac{na_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right| \geq \frac{b}{4n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Первое неравенство в цепочке верно ввиду леммы 2, а последнее — в силу неравенства (10). Отсюда получаем

$$|b_S| \geq \frac{b}{4n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Лемма 3 доказана. □

Тем самым база индукции доказана.

Этап 3. Переход $||S|| > K+1$. Не умаляя общности, будем считать, что $S > \mathbb{O}$ (если хоть один из индексов в мультииндексе равен 0, то утверждение верно по предположению индукции по n).

Будем действовать, как и в случае $||S|| = K+1$ до равенства (9). Положим для удобства $d_{S-\alpha} = \frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j}a_S$,

$$C_j = \sum_{e_J \leq \alpha << S} b_{S-\alpha}\left(\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j}a_S\right) = \sum_{e_j \leq \alpha << S} b_{S-\alpha}d_{S-\alpha} =$$

$$= \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| \geq K+1}} b_{S-\alpha}d_{S-\alpha} + \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha}d_{S-\alpha}.$$

Докажем, положительность чисел C_j. Для этого докажем положительность каждой из сумм выше.

Лемма 4. *При α: $||\alpha|| \geq K+1$ выражение $d_{S-\alpha}$ будет отрицательно ввиду выполнения условия Харди.*

Доказательство леммы 4 будет произведено позже.

Из леммы 4 следует, что первая сумма положительна ввиду отрицательности чисел $b_{S-\alpha}$ и $d_{S-\alpha}$.

Докажем, что вторая сумма будет неотрицательна.

$$\sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha}d_{S-\alpha} = \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}} b_{S-\alpha}\left(\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j} - a_{\alpha-e_j}a_S\right).$$

Если выполнено неравенство

$$\frac{a_S}{a_{S-e_j}} \geq Mn,$$

то множитель в скобках неположителен, следовательно, $C_j \geq 0$, поэтому далее будем считать, что $\frac{a_S}{a_{S-e_j}} < Mn$.

Лемма 5. *Верно следующее неравенство:*

$$\frac{1}{2}\left|na_{e_j}a_{S-e_j}-a_{\mathbb{O}}a_S\right|\left|b_{S-e_j}\right| \geq \sum_{\substack{e_j\leq\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}\left|b_{S-\alpha}\right|\left|\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j}-a_{\alpha-e_j}a_S\right|.$$

Доказательство леммы 5 будет произведено позже.

Если верна лемма 5, то поскольку числа $b_{S-\alpha}$ отрицательны, последние слагаемые будут меньше в два раза, чем первое по модулю, следовательно, их сумма будет иметь знак первого слагаемого, которое положительно. Тем самым вторая сумма будет положительна. Значит, числа C_j будут неотрицательны, более того, будет верно следующее неравенство:

$$C_j=\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<<S\\|\alpha|\geq K+1}}b_{S-\alpha}d_{S-\alpha}+\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}b_{S-\alpha}d_{S-\alpha}\geq$$

$$\geq\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<<S\\|\alpha|<K+1}}b_{S-\alpha}d_{S-\alpha}\geq\frac{1}{2}\left|na_{e_j}a_{S-e_j}-a_{\mathbb{O}}a_S\right|\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Теорема 4 доказана. □

Для доказательства леммы 5 потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *В предположении* $C_j\geq\frac{1}{2}\left|na_{e_j}a_{S-e_j}-a_{\mathbb{O}}a_S\right|\left|b_{S-e_j}\right|$ *для всех* j *верна оценка*

$$|b_S|\geq\frac{b}{4n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 3.

Доказательство леммы 5. Оценим правую часть неравенства:

$$\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<S\\|\alpha|<K+1}}\left|b_{S-\alpha}\right|\left|\frac{n}{||\alpha||}a_\alpha a_{S-e_j}-a_{\alpha-e_j}a_S\right|=$$

$$=\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<S\\|\alpha|<K+1}}a_{S-e_j}a_{\alpha-e_j}\left|\frac{n}{||\alpha||}\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}-\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\right|\left|b_{S-\alpha}\right|\leq$$

$$\left(\text{так как по предположению }\frac{a_S}{a_{S-e_j}}\leq Mn,\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\leq M\right)$$

$$\leq Mn\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<S\\|\alpha|<K+1}}a_{S-e_j}a_{\alpha-e_j}\left|b_{S-\alpha}\right|\leq(\text{так как }a_{\alpha-e_j}\leq T)\leq$$

$$\leq MnT\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<S\\|\alpha|<K+1}}a_{S-e_j}\left|b_{S-\alpha}\right|\leq MnTa_{S-e_j}\sum_{\substack{e_j\leq\alpha<S\\|\alpha|<K+1}}\left|b_{S-\alpha}\right|.$$

Тем самым надо доказать, что

$$MnTa_{S-e_j} \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha|<K+1}} |b_{S-\alpha}| \leq \frac{1}{2} a_{\mathbb{O}} \left| n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right| a_{S-e_j} \left| b_{S-e_j} \right|.$$

Сокращая на a_{S-e_j}, имеем

$$MnT \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha|<K+1}} |b_{S-\alpha}| \leq \frac{1}{2} a_{\mathbb{O}} \left| n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right| \left| b_{S-e_j} \right|. \tag{12}$$

Если коэффициент $a_{\mathbb{O}}$ подобрать таким образом, чтобы выполнялись условия $\frac{na_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} < \frac{b}{2}$ и $\frac{a_S}{a_{S-e_j}} \geq b$, то

$$\frac{1}{2} \left| n \frac{a_{e_j}}{a_{\mathbb{O}}} - \frac{a_S}{a_{S-e_j}} \right| \geq \frac{b}{4}.$$

Отсюда неравенство (12) будет верным, если доказать

$$MnT \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha|<K+1}} |b_{S-\alpha}| \leq \frac{b}{4} a_{\mathbb{O}} \left| b_{S-e_j} \right|. \tag{13}$$

Сумма $\sum\limits_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha|<K+1}} |b_{S-\alpha}|$ состоит из двух частей: первая часть содержит те мультииндексы α, для которых выполнено условие $|S-\alpha| < K+1$, вторая часть содержит те мультииндексы α, для которых верно $|S-\alpha| \geq K+1$. Назовем их, соответственно, $\sum_{\text{до}}$ и $\sum_{\text{после}}$. Заметим, что $\sum\limits_{\text{до}}$ появляется лишь в случае, когда $|S| < 2K+1$, поэтому рассмотрим два случая.

Случай 1. $|S| < 2K+1$. Напишем оценки для каждой из полученных сумм. По замечанию 4 сумму $\sum_{\text{до}}$ можно оценить как

$$\sum\nolimits_{\text{до}} |b_{S-\alpha}| \leq \sum_{|i|=K, i<S-e_j} ca_{\mathbb{O}} |b_i|,$$

$$\sum\nolimits_{\text{после}} |b_{S-\alpha}| = \sum_{\alpha, |S-\alpha|=K+1} + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=K+2} + \dots + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-2}.$$

Так как в силу леммы 6 верно неравенство $|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left| b_{S-\alpha-e_j} \right|$, следовательно, верно и более сильное утверждение $|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n} |b_{S-\alpha-e_j}|$, а количество мультииндексов α порядка m не превосходит n^m, то

$$\sum_{\alpha, |S-\alpha|=K+1} + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=K+2} + \dots + \sum_{\alpha, |S-\alpha|=|S|-2} \leq D_1 \left(\frac{b}{4}, n, K \right) \left| b_{S-e_j} \right|,$$

где $D_1(\frac{b}{4}, n, K)$ — некоторая константа. Будем далее для краткости обозначать ее D_1. Отсюда получаем, что

$$MnT \sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha|<K+1}} |b_{S-\alpha}| \leq MnT \left(D_1 \left| b_{S-e_j} \right| + \sum_{|i|=K, i<S-e_j} ca_{\mathbb{O}} |b_i| \right).$$

Если доказать, что верно

$$\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right| \geq \sum_{|i|=K, i<S-e_j} ca_{\mathbb{O}}|b_i|, +D_1\left|b_{S-e_j}\right|,$$

то получим требуемое неравенство (13). Так как $\underset{|i|=K}{|b_i|}$ удовлетворяет условию лемм 3 и 6, то $|b_i| \leq \left(\frac{4n}{b}\right)^{|S|-K}\left|b_{S-e_j}\right|$, а количество элементов $\underset{|i|=K}{|b_i|}$ не превосходит $n^{|S|-K}$, получим

$$\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}}|b_{S-e_j}| \geq \left[a_{\mathbb{O}}c\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right]\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Поэтому, сократив на $|b_{S-e_j}|$, имеем $\frac{b}{4MnT}a_{\mathbb{O}} \geq \left[a_{\mathbb{O}}c\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right]$; подобрав костанту c таким образом, чтобы $\frac{b}{4MnT}\frac{1}{2} > c \cdot \max\left(\left(\frac{4n^2}{b}\right)^K, 1\right)$, получим

$$\left[a_{\mathbb{O}}\left(\frac{4n^2}{b}\right)^{|S|-K} + D_1\right] \leq \frac{b}{8MnT}a_{\mathbb{O}} + D_1,$$

откуда вытекает условие на $a_{\mathbb{O}}$: $ba_{\mathbb{O}} > 8MnTD_1$.

Случай 2. $|S| \geq 2K+1$. В этом случае $\sum_{\text{до}}$ отсутствует, а $\sum_{\text{после}}$ имеет следующий вид:

$$\sum\nolimits_{\text{после}}|b_{S-\alpha}| = \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-K} + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-K+1} + \cdots + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-2}.$$

По лемме 6 имеем неравенство $|b_{S-\alpha}| \geq \frac{b}{4n}|b_{S-\alpha-e_j}|$, и поскольку количество мультииндексов α порядка m не превосходит n^m, получаем, что

$$\sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-K} + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-K+1} + \cdots + \sum_{\alpha,|S-\alpha|=|S|-2} \leq D_2\left(\frac{b}{4}, n, K\right)\left|b_{S-e_j}\right|,$$

где $D_2(\frac{b}{4}, n, K)$ — некоторая константа. Будем далее для краткости обозначать ее D_2. Отсюда получаем, что

$$MnT\sum_{\substack{e_j \leq \alpha << S \\ |\alpha| < K+1}}|b_{S-\alpha}| \leq MnTD_2\left|b_{S-e_j}\right|.$$

Если доказать, что верно

$$\frac{b}{4}a_{\mathbb{O}}\left|b_{S-e_j}\right| \geq MnTD_2\left|b_{S-e_j}\right|,$$

то получим требуемое. Очевидно, что такое $a_{\mathbb{O}}$ подобрать можно.

Лемма 5 доказана. □

Доказательство леммы 4. Заметим для начала, что если последовательность $\{a_s\}$ положительных чисел удовлетворяет n-мерному условию Харди, то тройка (a, b, c) 1-выпукла для всех мультииндексов a, b, c. Поэтому, если мультииндекс α

не содержит нулей, то утверждение леммы выполнено. Пусть теперь мультииндекс α содержит l нулей, стоящих для определенности на первых l местах, $j > l$. Тогда по n-мерному условию Харди выполнены следующие неравенства:

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n-(l-1)}{n-(l-1)-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1}}{a_{\alpha-e_j+e_1}},$$

$$\frac{a_{\alpha+e_1}}{a_{\alpha-e_j+e_1}}\frac{n-(l-2)}{n-(l-2)-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+e_2}}{a_{\alpha-e_j+e_1+e_2}},$$

$$\cdots$$

$$\frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_{(l-1)}}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_{(l-1)}}}\frac{n}{n-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n-(l-1)}{n-(l-1)-1}\frac{n-(l-2)}{n-(l-2)-1}\cdots\frac{n}{n-1} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}},$$

откуда имеем

$$\frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{n-l} = \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{||\alpha||} \leq \frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}}.$$

Так как мультииндекс S не имеет нулей и $S >> \alpha$, то $S \geq \alpha + e_1 + \cdots + e_l$. Так как тройка $(\alpha - e_j + e_1 + \cdots + e_l, e_j, S - (\alpha + e_1 + \cdots + e_l))$ 1-выпукла, имеем

$$\frac{a_S}{a_{S-e_j}} \geq \frac{a_{\alpha+e_1+\cdots+e_l}}{a_{\alpha-e_j+e_1+\cdots+e_l}} \geq \frac{a_\alpha}{a_{\alpha-e_j}}\frac{n}{||\alpha||}.$$

Лемма 4 доказана. □

Литература

1. Agler J., McCarthy J. E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 44. Providence, American Mathematician Society (2002).

2. Hardy G. H. *Divergent Series.* Oxford, Clarendon Press (1949).

3. Полиа З. Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Москва, Наука (1978).

4. Shimorin S. Complete Nevanlinna — Pick property of Dirichlet-type spaces. *Journ. of Funct. Anal.* **191**, 276–296 (2002).

5. Железняк А. В. Степенные ряды одной переменной с условием логарифмической выпуклости коэффициентов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 1, 28–38 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103

6. Железняк А. В. Многомерный аналог условия Харди для степенных рядов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 4, 28–33 (2009).

Статья поступила в редакцию 28 апреля 2020 г.;
после доработки 4 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Железняк Александр Владимирович — ст. преп.; ferrum2001@mail.ru

Power series of several variables with condition of logarithmical convexity

A. V. Zheleznyak

St. Petersburg Electrotechnical University LETI,
5, ul. Professora Popova, St. Petersburg, 197376, Russian Federation

For citation: Zheleznyak A. V. Power series of several variables with condition of logarithmical convexity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 49–62. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.105 (In Russian)

We obtain a new version of Hardy theorem about power series of several variables reciprocal to the power series with positive coefficients. We prove that if the sequence $\{a_s\} = a_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$, $||s|| \geq K$ satisfies condition of logarithmically convexity and the first coefficient a_0 is sufficiently large then reciprocal power series has only negative coefficients $\{b_s\} = b_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$, except $b_{0,0,\ldots,0}$ for any K. The classical Hardy theorem corresponds to the case $K = 0, n = 1$. Such results are useful in Nevanlinna — Pick theory. For example, if function $k(x, y)$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} a_n(x\bar{y})^n$, $a_n > 0$, and reciprocal function $\frac{1}{k(x,y)}$ can be represented as power series $\sum_{n\geq 0} b_n(x\bar{y})^n$ such that $b_n < 0$, $n > 0$, then $k(x, y)$ is a reproducing kernel function for some Hilbert space of analytic functions in the unit disc $\mathbb{D}$ with Nevanlinna — Pick property. The reproducing kernel $\frac{1}{1-x\bar{y}}$ of the classical Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ is a prime example for our theorems.

Keywords: power series, Nevanlinna — Pick kernels, logarithmical convexity.

References

1. Agler J., McCarthy J. E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 44. Providence, American Mathematician Society (2002).

2. Hardy G. H. *Divergent Series.* Oxford, Clarendon Press (1949).

3. Polia Z. G., Sege G. *Problems and theorems of analysis.* Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)

4. Shimorin S. Complete Nevanlinna — Pick property of Dirichlet-type spaces. *Journ. of Funct. Anal.* **191**, 276–296 (2002).

5. Zheleznyak A. Power series of one variable with condition of logarithmical convexity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 1, 28–38 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.103 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 1, 20–28 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120010148].

6. Zheleznyak A. Multidimensional analog of the Hardy condition for power series. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 4, 28–33 (2009). (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **42**, 269–274 (2009). https://doi.org/10.3103/S1063454109040049].

Received: April 28, 2020
Revised: June 4, 2020
Accepted: September 17, 2020

Author's information:

Alexandr V. Zheleznyak — ferrum2001@mail.ru