ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929
MSC 34K20

Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием

Б. Г. Гребенщиков

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Российская Федерация, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Для цитирования: *Гребенщиков Б. Г.* Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 81–96. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108

При решении проблемы получения достаточных условий асимптотической устойчивости линейных систем нейтрального типа с линейным запаздыванием достаточно эффективно путем замены аргумента свести выяснение таких свойств для одного класса линейных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянным запаздыванием. Существенной особенностью полученных систем является то, что некоторые их коэффициенты в правой части имеют экспоненциальный множитель (т. е. правая часть данных систем не является ограниченной). Применение традиционных методов исследования (например, с помощью функционалов Ляпунова—Красовского) не представляется возможным, а получение оценок решений приводит к весьма грубым результатам. Используя аппарат разностных систем и свойства более простых систем, изученных нами ранее, а также следуя идеям, изложенным В. Б. Колмановским и В. Р. Носовым, получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости таких систем. В качестве примера рассмотрена система второго порядка. Приведены графики решения соответствующих систем как без нейтральных членов, так и исходной (полной) системы, правая часть которой содержит нейтральные члены.

Ключевые слова: запаздывание, экспоненциальная устойчивость, разностные системы, стабилизация, управление.

1. Введение. При исследовании асимптотических свойств одного класса линейных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянным запаздыванием, существенной особенностью которых является то, что некоторые их коэффициенты в правой части имеют экспоненциальный множитель (т. е. правая часть таких систем не является ограниченной) [1–5], возникает проблема получения достаточных условий асимптотической устойчивости решения этих систем.

Приведем конкретный пример. При изучении процесса колебаний токоприемника движущегося локомотива при прохождении опоры с упругим закреплением контактного провода необходимо рассмотреть систему четвертого порядка с линейным запаздыванием вида [6]

$$d\bar{x}(\vartheta)/d\vartheta = A_4\bar{x}(\vartheta) + B_4 x(\mu\vartheta), \ \ \vartheta > \vartheta_0 > 0. \tag{1}$$

Достаточными условиями асимптотической устойчивости является совокупность условий: 1) $\Re(\lambda) < 0$, где λ — собственные числа матрицы A_4; 2) $|\rho| < 1$, здесь ρ — собственные числа матрицы $-A_4^{-1}B_4$. Далее, когда $\exists\ \bar{\lambda} : \Re(\bar{\lambda}) > 0$, система (1) неустойчива при любой матрице B [4]. При выполнении первого условия для изучения асимптотических свойств в зависимости от собственных значений ρ делается замена аргумента $t = \ln(\frac{\vartheta}{\vartheta_0})$, полученная система с постоянным запаздыванием

$$dx_4(t)/dt = \vartheta_0 e^t[A_4x_4(t) + B_4x_4(t-\tau)], \ \ \tau = -\ln(\mu), \ \ t > 0, \tag{2}$$

исследуется методом преобразования Лапласа, в результате определяется не только второе условие, но и доказывается, что в случае существования величины $\bar{\rho}$: $|\bar{\rho}| > 1$ система (2) неустойчива [7]. На практике это означает, что при некоторых скоростях происходит значительный отрыв полоза токоприемника от контактного провода при прохождении точки опоры и возможен обрыв провода.

В работе [6] указано, что при изучении колебаний токоприемника движущегося локомотива вдали от опоры (она находится сзади токоприемника) необходимо учитывать влияние возмущений (именно, эффект воздействия отраженных волн контактного провода от струн, поддерживающих этот провод, и от опоры, находящейся перед движущимся токоприемником [8]), следует исследовать систему, подобную (1), но уже содержащую «нейтральные» члены. В случае асимптотической устойчивости системы (1) наличие данных «нейтральных» членов также влияет на асимптотическую устойчивость колебаний токоприемника. Возникает проблема стабилизации этой механической системы вида

$$dx_4(\vartheta)/d\vartheta = A_4x_4(\vartheta) + B_4x_4(\mu\vartheta) + d/d\vartheta R_4x_4(\vartheta)/dt + Cu(\vartheta), \ \ \vartheta > \vartheta_0,$$

где R_4 — постоянная матрица; C — матрица размерности $[4 \times r]$, $1 \leqslant r \leqslant 4$; $u(\vartheta)$ — вектор управляющего воздействия.

В настоящей работе (по аналогии с [2, с. 165]) анализируются более сложные системы, когда для исследования асимптотических свойств метод преобразования Лапласа не применим. Используя аппарат разностных систем и асимптотические свойства более простых систем, изученных нами ранее, получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости таких систем. В качестве примера в п. 4 описана система второго порядка. Приведены графики решения соответствующих систем как без нейтральных членов, так и исходной (полной) системы, правая часть которой содержит нейтральные члены. На основании теории разностных систем предложен алгоритм стабилизации некоторых систем подобного вида. Отметим, что проблема стабилизации систем с линейным запаздыванием изучалась в работах [9, 10]. Очевидно, данная проблема представляет как научный, так и технический интерес.

Рассматривается линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^m$, в котором норму вектора $w = \{w_j\}^\top$ (здесь w_j $(j = 1, 1, ..., m)$ — компоненты вектора w, $\top$ — значок транспонирования) определим, например, равенством

$$\|w\| = \sum_{j=1}^{m} |w_j|.$$

(Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, ..., m)$ получим в соответствии с нормой вектора [11, с. 12]: $\|D\| = \max\limits_j \sum\limits_i |d_{ij}|$.) В пользу такого выбора можно сказать то, что норма матрицы находится почти сходным образом, как и норма вектора. Дадим некоторые определения, которые понадобятся в дальнейшем [2, с. 113–114].

Определение 1. Решение системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием $\tau > 0$

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + R(t)dx(t-\tau)/dt, \ \ t \geqslant t_0, \tag{3}$$

определенное непрерывно дифференцируемой начальной вектор-функцией $\phi(\xi) : t_0 - \tau \leqslant \xi \leqslant t_0$, называется устойчивым, если существует положительная постоянная $\hat{C}$ такая, что из условия ограниченности величины $\|\phi(\xi)\| + \|\phi'(\xi)\|$ следует неравенство $\|x(t, \phi(\xi), \phi'(\xi))\| < \hat{C}$.

Определение 2. Если решение системы (3) $x(t, \phi(\xi), \phi'(\xi))$, наряду с устойчивостью, обладает также свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, \phi(\xi), \phi'(\xi)) = 0$, то данное решение является асимптотически устойчивым.

2. Постановка задачи. Основные предположения и вспомогательные утверждения. Рассмотрим линейную систему нейтрального типа с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} dx(t)/dt = \vartheta_0 e^t[A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau)] + \mu R(t)dx(t-\tau)/dt, \\ \mu = \mathrm{const}, \ \ 0 < \mu < 1, \ \ \tau = -\ln(\mu), \ \ \vartheta_0 = \mathrm{const}, \ \ \vartheta_0 > 0, \ \ t > 0. \end{gathered} \tag{4}$$

В системе (4) $A(t), B(t)$ и $R(t)$ — матрицы размерности $[m \times m]$, периодические, периода τ и достаточное число раз дифференцируемые; $x(t)$ — вектор-функция размерности m, определенная в начальный момент $t_0 = 0$ вектор-функцией $\phi(\xi)$: $-\tau \leqslant \xi \leqslant 0$, при этом данная вектор-функция имеет ограниченную производную.

Отметим следующее: требование достаточной дифференцируемости матриц $A(t)$, $B(t)$ необходимо для исследования асимптотических свойств системы без нейтральных членов [12]; требование дифференцируемости матрицы $R(t)$ в дальнейшем будет учитываться при доказательстве леммы 1.

Очевидно, рассмотрение системы (4) представляет дальнейший шаг в изучении асимптотических свойств некоторых систем с линейным запаздыванием [2, с. 165].

Полагаем, что справедливы следующие условия при $t \in [0, \tau]$:

1) собственные числа $\lambda(t)$ матрицы $A(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\Re(\lambda(t)) < -2\beta_1, \ \ \beta_1 = \mathrm{const}, \ \ \beta_1 > 0; \tag{5}$$

2) наряду с этим собственные числа $\rho(t)$ матрицы $-A^{-1}(t)B(t)$ удовлетворяют неравенству

$$|\rho(t)| < \sigma_1, \ \ \sigma_1 = \mathrm{const}, \ \ 0 < \sigma_1 < 1; \tag{6}$$

3) собственные числа $\nu(t)$ матрицы $R(t)$ удовлетворяют аналогичному неравенству

$$|\nu(t)| < \sigma_2, \ \ \sigma_2 = \mathrm{const}, \ \ 0 < \sigma_2 < 1. \tag{7}$$

Нас интересует экспоненциальная устойчивость системы (4) при любых $0 < \mu < 1$. Некоторые системы нейтрального типа с малым μ исследовались ранее в работе [13].

Для того чтобы эффективно использовать аппарат теории разностных систем, перейдем к счетной дифференциально-разностной системе на конечном промежутке времени $[0, \tau]$. Имеем соотношения [1, с. 103]

$$\begin{gathered}\varepsilon_n dx_{n+1}(t)/dt = e^t \left[A(t)x_{n+1}(t) + B(t)x_n(t)\right] + \mu R(t) dx_n(t)/dt, \\ x_{n+1}(t) = x(t + n\tau), \;\; \varepsilon_n = \frac{\mu^n}{\vartheta_0}, \;\; t \in [0, \tau], \;\; n = 0, 1, 2, ..., \end{gathered} \tag{8}$$

при краевых условиях

$$x_{n+1}(0) = x_n(\tau).$$

Начальная вектор-функция (с кусочно-непрерывной производной) есть выражение $x_0(t) = \phi(t - \tau)$. Введем норму вектор-функции $w(t)$ на отрезке $[0, \tau]$:

$$\|w(t)\|_\tau = \sup_{t \in [0,\tau]} \|w(t)\|.$$

Тогда при такой нормировке пространство $\mathbb{R}^m$ становится банаховым пространством [11, с. 159].

При исследовании асимптотических свойств дифференциально-разностной системы (8) нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *При выполнении неравенства* (7) *разностная система*

$$Z(t) = \mu R(t) Z(t - \tau) \tag{9}$$

экспоненциально устойчива при любых $0 < \mu < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду периодичности матрицы $R(t)$ и ограниченности ее производной можно разбить интервал $[0, \tau]$ на конечное число l равных промежутков длиной меньше δ_l таких, что справедливы неравенства

$$\|R(t) - R(t_j)\| < \bar{\varepsilon}, \;\; |t - t_j| < \delta_l, \;\; 0 < t_1 < ... < t_l = \tau, \;\; j = 1, 2, ..., l$$

($\bar{\varepsilon}$ — достаточно малое положительное число). Рассмотрим поведение разностной системы

$$\bar{z}(t + \tau) = R(t)\bar{z}(t) \tag{10}$$

на фиксированном промежутке $|t - t_j| < \delta_l$. Очевидно (ввиду неравенства (7)), справедлива оценка [14, с. 43]

$$\|\prod_{k=0}^{n} R(t_j + k\tau)\| \leqslant L_j(\sigma_2)^n, \;\; L_j = \text{const}, \;\; L_j > 1. \tag{11}$$

Тогда вследствие (11) при $|t - t_j| < \delta_l$ на данном фиксированном промежутке, представив решение разностной системы (10) в виде

$$\bar{z}(t + \tau) = R(t_j)\bar{z}(t) + [R(t) - R(t_j)]\bar{z}(t)$$

и полагая неоднородность второго члена в правой части предыдущего равенства, а также используя формулу вариации постоянных [14, с. 23], последовательно имеем оценки

$$\max_t \|\bar{z}(t + k\tau)\| \leqslant L_j(\sigma_2)^k \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \tau} \|\bar{z}(\xi)\| + L_j\bar{\varepsilon} \sum_{j=1}^{k} (\sigma_2)^{k-j} \max_t \|\bar{z}(t + j\tau)\|, \tag{12}$$

$$t_j - \delta \leqslant t \leqslant t_j + \delta.$$

Разделив обе части соотношения (12) на величину $(\sigma_2)^k$ и обозначив $\bar{u} = \frac{\max\limits_t \bar{z}(t+j\tau)}{(\sigma_2)^j}$, получаем неравенство

$$\bar{u}_k \leqslant L_j \bar{u}_0 + \frac{L_j \bar{\varepsilon}}{\sigma_2} \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_{j-1}.$$

Известно [14, с. 39], что в этом случае справедлива оценка

$$\bar{u}_k \leqslant \left(1 + \frac{L_j \bar{\varepsilon}}{\sigma_2}\right)^{k-1} \left(L_j + \frac{L_j \bar{\varepsilon}}{\sigma_2}\right) u_0.$$

Отсюда, возвращаясь к переменным $\bar{z}(t + k\tau)$, имеем оценку

$$\max_t \|\bar{z}(t + n\tau)\| < L_j (\sigma_2 + L_j)^n \left(1 + \frac{L_j \bar{\varepsilon}}{\sigma_2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{L_j \bar{\varepsilon}}{\sigma_2}\right), \;\; t_j - \delta \leqslant t \leqslant \delta + t_j.$$

Пусть теперь величина $\bar{\varepsilon}$ настолько мала, что справедливо неравенство

$$\sigma_2 + \bar{\varepsilon} \max_j L_j < \bar{\sigma}, \;\; \bar{\sigma} = \text{const}, \;\; \sigma_2 < \bar{\sigma} < 1.$$

Тогда окончательно получаем оценку

$$\| \prod_{k=0}^{n} R(t + k\tau) \| \leqslant L(\bar{\sigma})^n, \;\; L = \max_j L_j, \;\; L > 1, \;\; t \in [0, \tau],$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость системы (9) при любых $0 < \mu < 1$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При выполнении неравенства* (7) *для разностной системы* (9) *существует положительно определенная функция* $V(t, x(t)) : V(t + \tau, x(t)) = V(t, x(t))$*; при этом для данной функции на решениях системы* (9) *справедливо неравенство*

$$V(t, x(t)) - V(t, x(t - \tau)) \leqslant -W(t, x(t - \tau)),$$

где $W(t, x(t - \tau))$ *— определенно положительная квадратичная форма.*

Приведем алгоритм вычисления функции $V(t, x(t))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в (9) $\mu = 1$. Вновь разбиваем весь интервал $[0, \tau]$ на конечное число $2k + 1$ равных промежутков длиной $h = \frac{\tau}{2k+1}$, $j = 0, 1, ..., 2k + 1$ (при этом $t_0 = 0$, $t_{j+1} = t_j + h$, $h = \frac{\tau}{2k+1}$, $j = 0, 1, ..., 2k + 1$, $h < \delta_l$). Задавшись симметрической положительно определенной периодической (периода τ) матрицей $G(t)$, в каждой точке $t_j = j\delta_l$ $(j = 0, 1, \dots, l - 1)$ решаем матричное уравнение

$$(R(t_j))^\top P(t_j) R(t_j) - P(t_j) = -G(t_j), \tag{13}$$

из которого находим величины $P(t_j)$ (разрешимость уравнения (13) вытекает вследствие оценок (11) [14, с. 38]). Получили набор значений периодической матрицы $P(t)$ в точках t_j. Но тогда (как следует из [15, с. 478]) всегда можно подобрать совокупность коэффициентов $\alpha_0^s, \alpha_1^s, ..., \alpha_k^s; \beta_1^s, \beta_2^s, ..., \beta_k^s$ тригонометрического полинома k-го порядка:

$$\hat{P}_k(t) = \frac{\alpha_0^s}{2} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^s \cos\left(\frac{2\pi jt}{\tau}\right) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^s \sin\left(\frac{2\pi jt}{\tau}\right),$$

значения которого при $t = t_j$ равны $P(t)$. Справедливы соотношения

$$\alpha_0^s = \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{2k} \hat{P}_k(jh), \;\; \alpha_i^s = \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{2k} \hat{P}_k(jh)\cos(\omega_{ij}),$$

$$\beta_j^s = \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{2k} \hat{P}_k(jh)\sin(\omega_{ij}), \;\; \omega_{ij} = \frac{2\pi i}{\tau}jh, \;\; 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Ввиду принятых предположений матрица $P(t)$ будет иметь ограниченную вариацию, тогда справедливы предельные равенства

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\alpha}_0^s = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau P(\zeta)d\zeta, \;\; \lim_{k\to\infty} \hat{\alpha}_i^s = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau P(\zeta)\cos\left(\frac{2\pi i}{\tau}\zeta\right)d\zeta,$$

$$\lim_{k\to\infty} \beta_i^s = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau P(\zeta)\sin\left(\frac{2\pi i}{\tau}\zeta\right)d\zeta.$$

Очевидно, что при достаточно больших k тригонометрический полином $\hat{P}_k(t)$ весьма хорошо приближает матрицу $P(t)$. Критерием этого может быть неравенство $\|\hat{P}_k(t) - \hat{P}_{k-1}(t)\| < \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}$ — достаточно малое положительное число. Следовательно, с достаточной степенью точности построена искомая функция $V(t, x(t)) = (x(t))^\top \hat{P}_k(t)x(t)$, при этом справедливо приближенное равенство

$$(R(t))^\top \hat{P}_k(t)R(t) - \hat{P}_k(t) \approx -G(t), \;\; t \in [0, \tau]. \tag{14}$$

Принимая во внимание формулу (14), изучим поведение функции $V(t, x(t))$ на решениях системы (9) при $0 < \mu < 1$. Имеем следующий ряд соотношений:

$$(\mu R(t))^\top \hat{P}_k(t)\mu R(t) - \hat{P}_k(t) \approx \mu^2[\hat{P}_k(t) - G(t)] - \hat{P}_k(t) = (\mu^2 - 1)\hat{P}_k(t) - \mu^2 G(t),$$

откуда следует, что при любом $0 < \mu < 1$ первая разность функции $V(t, x(t))$ на решениях системы (9) есть функция определенно отрицательная, т. е. решение этой линейной разностной системы экспоненциально устойчиво.

Лемма 2 доказана.

3. Обоснование достаточных условий экспоненциальной устойчивости. Рассмотрим теперь счетную дифференциально-разностную систему, соответствующую системе (8) без нейтральных членов при достаточно малом ε_n:

$$\varepsilon_n d\hat{x}_{n+1}(t)/dt = e^t\left[A(t)\hat{x}_{n+1}(t) + B(t)\hat{x}_n(t)\right]. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (6)*. Тогда решение системы* (15) *экспоненциально устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В банаховом пространстве $\mathbf{B}$ введем линейный оператор сдвига [14, с. 213]

$$T_n(t)w(s) = Y_n(t,0,\varepsilon_n)w(\tau) + \int\limits_0^t Y_n(t,s,\varepsilon_n)\frac{e^s}{\varepsilon_n}B(s)w(s)ds.$$

Здесь $Y_n(t,s,\varepsilon_n)$ — фундаментальная матрица решений дифференциально-разностной системы без запаздывающих членов:

$$\varepsilon_n d\hat{y}_{n+1}(t)/dt = e^t\left[A(t)\hat{y}_{n+1}(t)\right]. \tag{16}$$

С помощью данного оператора решение системы (15) можно представить в операторном виде, именно, получаем соотношение $x_{n+1}(t) = T_n(t)x_n(s)$. Известно [16], что при достаточно малом ε_n (ввиду (5)) фундаментальная матрица $Y_n(t,s,\varepsilon_n)$ допускает оценку

$$\|Y_n(t,s,\varepsilon_n)\| < \bar{C}\exp\left(\frac{-\beta_1}{\mu^n}(e^t - e^s)\right),\ \ \bar{C} = \text{const},\ \ \bar{C} > 1,\ \ 0 < s < t \leqslant \tau. \tag{17}$$

Тогда из (17), ввиду того, что $\|T_n(t)\| \leqslant \bar{C}(1 + \frac{\|B(t)\|_\tau}{\beta_1}) = \bar{q}$, имеем (подробнее см. [12]) весьма грубые оценки на рост решения $x_n(t)$, $x_n'(t)$:

$$\begin{gathered}\|\hat{x}_n^{(j)}(t)\| \leqslant \bar{C}_j(\theta_0)^j\hat{q}^n\sup_t\|\hat{x}_0(t)\|,\\ j = 0,1,\ \ \bar{C}_j = \text{const},\ \ \bar{C}_j > 1,\ \ \hat{q} = \bar{q} + 1.\end{gathered} \tag{18}$$

Оценки не учитывают асимптотические свойства системы (15). Тем не менее, принимая во внимание (18), с учетом асимптотических свойств вырожденных систем, в работе [12] получены более точные оценки на рост решения $\hat{x}_n(t)$, $\hat{x}_n'(t)$; именно, при достаточно малых ε_n для величины $x_{n+1}(t)$ имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\hat{x}_{n+1}(t) = (-A^{-1}(t)(B(t) + \mathbf{O}(\mu^{n+1})))\hat{x}_n(t) + Y_n(t,0,\varepsilon_n)\hat{x}_n(\tau) + f_n(t), \tag{19}$$

где «исчезающие» (т. е. ограниченные и стремящиеся к нулю при $t \to \infty$) векторфункции $f_n(t)$ [12] допускают оценку

$$\|f_n(t)\|_\tau = \mathbf{O}((q_1)^n)\|x_0(t)\|_\tau,\ \ q_1 = \text{const},\ \ 0 < q_1 < 1. \tag{20}$$

Для производных $\hat{x}_{n+1}'(t)$ справедливо более сложное, но подобное асимптотическое соотношение

$$\begin{gathered}\hat{x}_{n+1}'(t) = (-A^{-1}(t)(B(t) + \mathbf{O}(\mu^{n+1})))x_n'(t) + Y_{n+1}^1(t,0,\varepsilon_n)\hat{x}_n'(\tau) + \Pi_{1,n}^1(t,\varepsilon_n)\hat{x}_n'(\tau) + \\ + F_{1,n}(t)\hat{x}_n(t) + \Pi_{j,n}^0(t,\varepsilon_n)\hat{x}_n(\tau) + (\theta_0)f_n^1(t), \\ \|f_n^1(t)\| \leqslant \mathbf{O}((\hat{q})^n)\|\hat{x}_0(t)\|_\tau,\end{gathered} \tag{21}$$

здесь $F_{1,n}(t,n)$ — равномерно ограниченные матрицы размерности $m \times m$, $\hat{q} = \text{const}$, $0 < \hat{q} < 1$; матрицы $Y_{n+1}^1(t,0,\varepsilon_n)$, $\Pi_{n,t}^j(t,0,\varepsilon_n)$ $(j = 0,1)$ допускают оценки, аналогичные (20).

Рассмотрим асимптотическое равенство (19) в точке $t = \tau$. Ввиду оценок (16), (17) имеем следующее асимптотическое представление:

$$Y_n(\tau,0,\varepsilon_n)\hat{x}_n(0) = o(\mu^n)\|\hat{x}_n(t)\|_\tau.$$

Учитывая лемму 2 и сходимость ряда $\sum\limits_n \mathbf{O}(\mu^n)$, находим, что решение однородной системы, соответствующей (19), допускает оценку

$$\|\hat{x}_n^0(t)\|_\tau < \hat{L}_0(\bar{\sigma})^n \|x_0(t)\|_\tau, \;\; \hat{L}_0 = \mathrm{const}, \;\; \hat{L}_0 > 1.$$

Полагая, что число n достаточно велико, запишем решение неоднородной системы (19), используя формулу вариации постоянных:

$$\hat{x}_{n+k}(\tau) = X_{n+k,n}(\tau)\hat{x}_n(\tau) + \sum_{j=1}^{k-1} X_{n+k,n+j}(\tau) f_{n+j-1}(\tau) + f_{n+k-1}(\tau). \tag{22}$$

Здесь $X_{n+k,n+j} = \prod\limits_{l=j}^{k}(-A(\tau)^{-1}B(\tau) + \mathbf{O}(\mu^{n+l}))$, $j < k$. Очевидно (ввиду леммы 2), справедлива оценка

$$\|X_{n+k,n+j}(t)\|_\tau \leqslant \hat{L}_0(\bar{\sigma})^{k-j}. \tag{23}$$

Без ограничения общности считаем, что $q_1 > \bar{\sigma}$, значит, $\bar{\sigma} = \alpha q_1$: $\alpha = \mathrm{const}$, $0 < \alpha < 1$. Учитывая (23), рассмотрим асимптотическое поведение членов в правой части соотношения (22). Очевидно, что $\|X_{n+k,n}(\tau)\hat{x}_n(\tau)\| \to 0$ при $k \to \infty$. Далее, имеем цепь неравенств

$$\|\sum_{j=1}^{k-1} X_{n+k,n+j}(\tau) f_{n+j-1}(\tau)\| \leqslant \hat{L}_0 \sum_{j=1}^{k-1} (q_1\alpha)^{k-j} \bar{L}(q_1)^{n+j-1} \|x_0(t)\|_\tau <$$

$$< \hat{L}_0 \bar{L}(q_1)^{n+k-1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x_n(t)\|_\tau, \;\; \bar{L} = \mathrm{const}, \;\; \bar{L} > 1,$$

откуда (учитывая (16), (18)) получаем оценку

$$\|\hat{x}_{n+k}(\tau)\| = \mathbf{O}(q_1^{n+k})\|x_0(t)\|_\tau.$$

Отметим, что, рассматривая асимптотическое представление (21) для $\hat{x}'(t)$, учитывая оценки вида (23), методами, подобными использованным ранее при получении оценки (21), находим аналогичную оценку и для величины $\|\hat{x}'_{n+k}(t)\|_\tau$, именно,

$$\|\hat{x}'_{n+k}(t)\|_\tau = \mathbf{O}(q_1^{n+k})[\sup_t \|x_0(\tau)\| + \sup_t \|x'_0(\tau)\|], \;\; t \in [0, \tau].$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5)–(7)*. Тогда решение системы* (4) *экспоненциально устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим исходную систему (4). Преобразуем ее следующим образом:

$$d\left(x(t) + \mu R(t)x(t-\tau)\right)/dt = \vartheta_0 e^t \left[A(t)x(t) + \left(B(t) + \frac{e^{-t}}{\vartheta_0}R'(t)x(t-\tau)\right)\right].$$

Тогда дифференциально-разностная система (8) будет иметь вид

$$\varepsilon_n d\left(x_{n+1}(t) + \mu R(t)x_n(t)\right)/dt = e^t \left[A(t)x_{n+1}(t) + (B(t) + \mathbf{O}(\mu^{n+1}))x_n(t)\right]. \tag{24}$$

Отметим, что система (24) является сингулярно возмущенной, и при $\varepsilon_n = 0$ получаем

$$\bar{x}^0_{n+1}(t) = -A^{-1}(t)B(t)\bar{x}^0_n(t),$$

при этом данная (вырожденная) разностная система равномерно асимптотически устойчива (ввиду леммы 2).

Будем исследовать асимптотические свойства системы (18), следуя методике, предложенной в [4]. Введем функционал $v_{n+1}(t) = x^0_{n+1}(t) - \mu R(t)x^0_n(t)$. Учитывая сделанную замену, имеем однородную (возмущенную) дифференциально-разностную систему

$$\varepsilon_n dv_{n+1}(t)dt = e^t \left[A(t)v_{n+1}(t) + (B(t) + \mathbf{O}(\mu^{n+1}))v_n(t)\right]$$

(она получается в результате замены в правой части величин $x_{n+1}(t), x_n(t)$ соответственно величинами $v_{n+1}(t), v_n(t)$ [4, с. 174]). Ввиду сходимости ряда $\sum\limits_n \mathbf{O}(\mu^n)$ системой первого приближения является более простая система

$$\varepsilon_n d(v^0_{n+1}(t))/dt = e^t \left[A(t)v^0_{n+1}(t) + B(t)v^0_n(t)\right],$$

ее решение $\|v^0_n(t)\|$ удовлетворяет оценке

$$\|v^0_n(t)\|_\tau \leqslant \bar{L}_0(\bar{q}_0)^n \|v^0_0(t)\|_\tau, \ \ \bar{L}_0 = \text{const}, \ \ \bar{L}_0 > 1, \ \ \bar{q}_0 = \text{const}, \ \ 0 < \bar{q}_0 < 1$$

(это следует из результатов, приведенных выше). Ввиду того, что система (19) устойчива по первому приближению [17], ее решение $v_n(t)$ удовлетворяет оценке, подобной (21) с несколько иной константой $\bar{L}_1 > \bar{L}_0$.

Учитывая сделанную замену, имеем неоднородную разностную систему

$$x_{n+1}(t) = -\mu R(t)x_n(t) + v_{n+1}(t). \tag{25}$$

Записывая решение системы (25) с помощью формулы вариации постоянных, получаем равенство

$$x(t)_{n+k} = (-\mu R(t))^k x_n(t) + \sum_{j=1}^{k-1}(-\mu R(t))^j v_{n+j-1}(t) + v_{n+k}(t). \tag{26}$$

Очевидно, справедлива оценка

$$\|(-\mu R(t))^j\| \leqslant \bar{L}(\sigma_2)^j, \ \ \bar{L} = \text{const}, \ \ \bar{L} > 1, \ \ t \in [0, \tau].$$

Тогда, принимая ее во внимание, из соотношения (26) получаем неравенство

$$\|x(t)_{n+k}\| \leqslant \bar{L}(\sigma_2)^k \|x_n(t)\|_\tau + \bar{L}\sum_{j=1}^{k-1}(\sigma_2)^j \|v_{n+j-1}(t)\|_\tau + \|v_{n+k}(t)\|_\tau.$$

Ввиду оценки (21) из (22) имеем очередное неравенство

$$\|x(t)_{n+k}\|_\tau \leqslant \bar{L}(\sigma_2)^k \|x_n(t)\|_\tau + \left\{\bar{L}_0\bar{L}\sum_{j=1}^{k-1}(\sigma_2)^j(\bar{q}_0)^{n+j-1} + \bar{L}_0(\bar{q}_0)^{n+k}(t)\right\}\|v^0_0\|_\tau.$$

Методами, аналогичными использованным ранее при получении неравенства (21) и полагая, что величина $\sigma_2 < \bar{q}_0 < 1$, находим для величины $\|x(t)_{n+k}\|_\tau$ окончательную асимптотическую оценку:

$$\|x(t)_{n+k}\|_\tau \leqslant \bar{L}(\sigma_2)^k\|x_n(t)\|_\tau + \frac{\bar{L}\bar{L}_0}{1-\bar{\alpha}}\|\bar{v}_0^0(t)\|_\tau, \;\; \bar{\alpha}\bar{q}_0 = \sigma_2. \qquad (27)$$

Поскольку величины $\|x_j(t)\|$, $\|x'_j(t)\|$, $j = 1, 2, ..., n$, ограничены (это следует из того, что величина ε_j равномерно ограничена), то и решения систем (20) и (21) (с ограниченными коэффициентами) также ограничены ввиду леммы Беллмана—Гронуола [1, с. 378]), следовательно, из оценки (27) вытекает асимптотическая устойчивость решения исходной системы (4).

Следствие 1. *Если матрицы A, B и R постоянные, то получаем, что при выполнении условий* (5)–(7) *соответствующая система также экспоненциально устойчива. Отметим, что аналогичные свойства такой системы с использованием преобразования Лапласа [1, с. 77] установлены ранее в работе [18]. Как мы упоминали выше, из результатов работы [8] в случае существования величин $\bar{\rho}$: $|\bar{\rho}| > 1$ (либо величин $|\bar{\nu}|$: $|\bar{\nu}| > 1$) решения соответствующей системы неустойчивы, следовательно, условия экспоненциальной устойчивости, полученные в этой статье, достаточно точные.*

Следствие 2. *Если матрицы $A(t), B(t)$ и $R(t)$ периодические (периода τ), достаточное число раз дифференцируемые и при этом справедливы условия* (5), (6) *(т. е. система без нейтральных членов экспоненциально устойчива), а сама система* (4) *неустойчива или устойчива, но неасимптотически, ее можно стабилизировать нейтральными членами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим управляемую систему

$$\varepsilon_n dx_{n+1}(t)/dt = e^t\left[A(t)x_{n+1}(t) + B(t)x_n(t)\right] + \mu R(t)dx_n(t)/dt + \bar{C}u(t), \qquad (28)$$

где $\bar{C}$ — постоянная матрица размерности $m \times r$, $1 \leqslant r \leqslant m$; $u(t)$ — r-мерный вектор управляющего воздействия. Очевидно, при $u(t) \equiv 0$ решение данной системы неустойчиво или устойчиво, но не асимптотически. Учитывая теорему 2, видим, что осуществить стабилизацию системы (28) можно «исправив» матрицу $\mu R(t)$, т. е. стабилизируя данную систему нейтральными членами. Следовательно, приходим к проблеме стабилизации разностной системы

$$z_{n+1}(t) = \mu R(t)z_n(t) + \bar{C}u(t). \qquad (29)$$

Будем стабилизировать разностную систему (29), используя алгоритм стабилизации разностных систем с постоянными коэффициентами [19]. Рассмотрим вспомогательную управляемую систему

$$z_{n+1}(t) = \frac{2}{\bar{l}}\left[\mu R(t)z_n(t) + \bar{C}_1\bar{u}_n(t)\right], \;\; \bar{l} = \mathrm{const}, \;\; 0 < \bar{l} < 1. \qquad (30)$$

Полагаем, что при данной константе $\bar{l}$ ранг матрицы

$$\left\{\frac{2}{\bar{l}}\bar{C}_1, \frac{4}{\bar{l}^2}\mu R(t)\bar{C}_1, ..., \frac{(2)^m}{\bar{l}^m}\left(\mu R(t)\right)^{m-1}\bar{C}_1\right\}, \;\; t \in [0, \tau],$$

равен m, т. е. система (30) вполне управляема. Будем теперь стабилизировать вспомогательные разностные системы

$$z_{n+1}^j = \frac{2}{\bar{l}} \left[\mu R(t_j) z_n^j + \bar{C}_1 \hat{u}_n^j \right],$$
$$t_1 = h, \;\; t_{j+1} = t_j + h, \;\; h = \frac{\tau}{2\bar{k}+1}, \tag{31}$$

минимизируя при этом для каждой системы функционал

$$Q_j = \sum_{i=0}^{\infty} (z_i^j)^\top G z_i^j + (\hat{u}_i^j)^\top D \hat{u}_i^j$$

(G, D — положительно определенные симметричные матрицы размерности соответственно $m \times m$ и $r \times r$.) Известно [19], что при этом искомые управления $\hat{u}_n^j$ имеют вид

$$\hat{u}_n^j = \left[D + \left(\frac{2}{\bar{l}}\right)^2 \bar{C}^\top \bar{P}_j \bar{C} \right]^{-1} \left(\frac{2}{\bar{l}}\right)^2 \bar{C}^\top \bar{P}_j \mu R(t_j) z_n^j = F(t_j) z_n^j,$$

где $\bar{P}_j$ — симметричные, положительно определенные матрицы размерности $[r \times r]$, удовлетворяющие матричным уравнениям

$$\left(\frac{4}{\bar{l}^2}\right) \mu R(t_j)^\top \bar{P}_j \mu R(t_j) - \bar{P}_j + G -$$
$$- \left(\frac{16}{\bar{l}^4}\right) \left((\bar{C})^\top \bar{P}_j \mu R(t_j) \right)^\top \left[D + \left(\frac{2}{\bar{l}}\right)^2 (\bar{C}^\top \bar{P}_j \bar{C}) \right]^{-1} (\bar{C})^\top \bar{P}_j \mu R(t_j) = 0$$

(которые разрешимы ввиду полной управляемости системы (30)).

Вновь получим набор величин $F(t_j)$ неизвестной вектор-функции $F(t)$. Отметим, что в тех точках $\bar{t}_j$, где $|\rho(\mu R(\bar{t}_j)| < 0.5\bar{l}$, полагаем $F(\bar{t}_j) \equiv 0$. Теперь (по аналогии нахождения приближенного значения матрицы $P(t)$ в лемме 2) рассмотрим тригонометрический полином $\bar{k}$-го порядка

$$\bar{H}_{\bar{k}}(t) = \frac{\bar{\alpha}_0^s}{2} + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \bar{\alpha}_j^s \cos\left(\frac{2\pi j t}{\tau}\right) + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \bar{\beta}_j^s \sin\left(\frac{2\pi j t}{\tau}\right),$$

значения которого при $t = t_j$ равны $F(t_j)$. Полагая теперь в системе (31) управление $u(t) \approx \bar{H}_k(t) z_n$, получаем, что у матрицы $\mu R(t) + \bar{C}\bar{H}_{\bar{k}}(t)$ при достаточно большом $\bar{k}$ есть собственные значения $\rho_F(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|\rho_F(t)| < \bar{\sigma}, \;\; 0 < \bar{\sigma} < 1.$$

Тогда в стабилизированной системе (17) имеем управление $u(t) \approx \bar{H}_k(t) dx(t-\tau)/dt$, и ввиду теоремы 2 эта система экспоненциально устойчива, причем стабилизация управляемой системы осуществлена нейтральными членами. Следствие 2 доказано.

4. Пример. Рассмотрим систему второго порядка

$$dx_1(t)/dt = e^t\{-(1+2\cos(2\pi t))x_1(t) - 2(1-\sin(2\pi t))x_2(t) + (0.5(1+2\cos(2\pi t))x_1(t-1)) +$$
$$+ 0.5(1-\sin(2\pi t))x_2(t-1)\} + \frac{0.3}{e}\cos(2\pi t) dx_1(t-1)/dt + \frac{2}{e} dx_2(t-1)/dt,$$
$$dx_2(t)/dt = e^t\{2(1+\sin(2\pi t))x_1(t) - (1-2\cos(2\pi t))x_2(t) - (1+\sin(2\pi t))x_1(t-1) +$$

$$+0.25(1-2\cos(2\pi t))x_2(t-1)\} + \frac{0.6}{e}\sin(2\pi t)dx_2(t-1)/dt,$$
$$\tau = -\ln(\mu) = 1, \ \ \mu = \frac{1}{e}, \ \ t \geqslant 0. \tag{32}$$

Матрица $A(t)$ периодическая, периода $T = 1$, ее собственные значения $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = -1$, матрица $B(t)$ также периодическая, периода $T = 1$, матрица $-A^{-1}(t)B(t)$ имеет вид

$$-A(t)^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix},$$

ее собственные значения $\rho_1 = -0.5$, $\rho_2 = -0.25$, следовательно, система без нейтральных членов

$$dx_1^0(t)/dt = e^t\{-(1+2\cos(2\pi t))x_1^0(t) - 2(1-\sin(2\pi t))x_2^0(t) + (0.5(1+2\cos(2\pi t))x_1^0(t-1)) +$$
$$+\ 0.5(1-\sin(2\pi t))x_2^0(t-1)\},$$
$$dx_2^0(t)/dt = e^t\{2(1+\sin(2\pi t))x_1^0(t) - (1-2\cos(2\pi t))x_2^0(t) - (1+\sin(2\pi t))x_1^0(t-1) +$$
$$+\ 0.25(1-2\cos(2\pi t))x_2^0(t-1)\},$$
$$\tau = -\ln(\mu) = 1, \ \ \mu = \frac{1}{e}, \ \ t \geqslant 0,$$

экспоненциально устойчива. График решения системы без нейтральных членов при начальной вектор-функции $\{\phi(\xi)\}^\top = \{1; 1\}$ представлен на рис. 1.

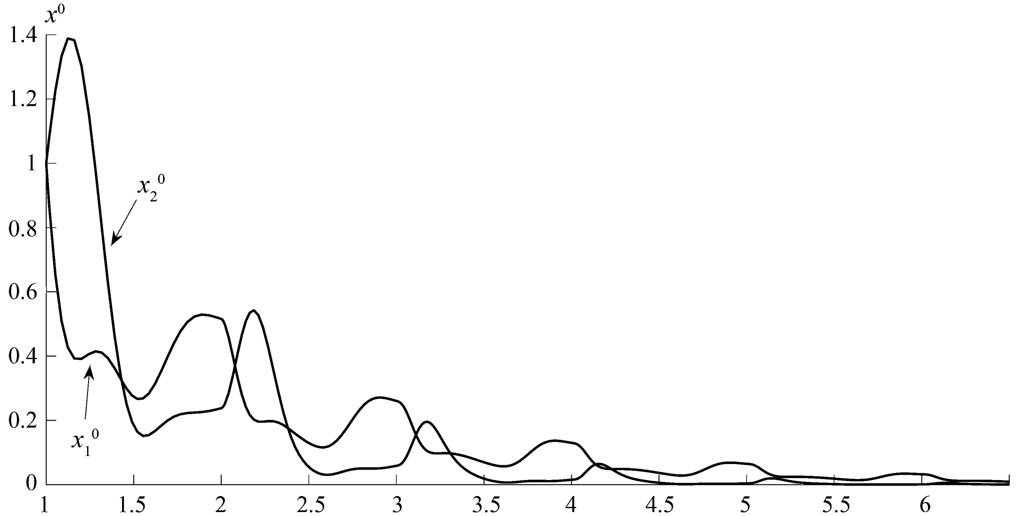

Рис. 1. График системы без нейтральных членов

Периодическая (периода $T = 1$) матрица $R(t)$ соответственно имеет вид

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0.3\cos(2\pi t) & 2 \\ 0 & 0.6\sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

ее собственные значения $\nu_1(t) = 0.3\cos(2\pi t)$, $\nu_2(t) = 0.6\sin(2\pi t)$, тогда экспоненциально устойчива и исходная (полная) система (32), ее график представлен на рис. 2.

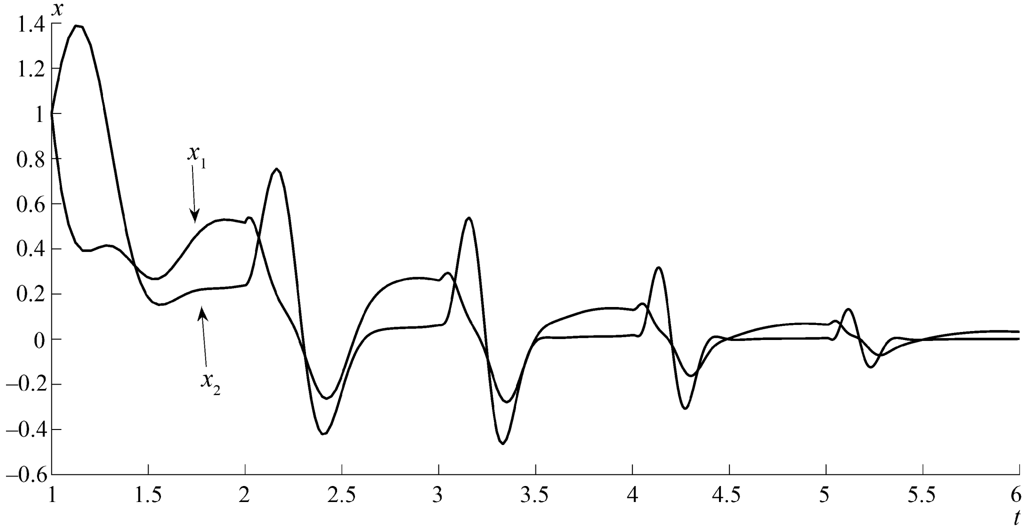

Рис. 2. График решения полной системы членов

5. Заключение. Ценность алгоритма стабилизации, предложенного в данной работе, состоит в том, что решается задача успокоения нелипшицевых систем; используются методы, которые разработаны ранее для стабилизации более простых систем, и для их реализации имеются стандартные программы, содержащиеся в пакете прикладных программ MatLab (в частности, решение уравнений Ляпунова—Рикатти). Используя этот пакет, были также построены графики решений, представленные на рис. 1 и 2. Эти графики хорошо иллюстрируют эффективность полученного алгоритма стабилизации.

Автор благодарит доцента А. Б. Ложникова за помощь при составлении графиков.

Литература

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения / пер. с англ. А. М. Зверкина, Г. А. Каменского; под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967. 548 с. (*Bellman R., Cooke K.* Differential-difference equations.)

2. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

3. *Власов В. В., Иванов С. А.* Оценки решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2006. № 3. С. 24–30.

4. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 5. С. 751–758.

5. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1984. 448 с.

6. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Soc. London. Ser. A. 2002. Vol. 322. P. 447–468. https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078

7. *Марквардт Н. Г., Власов И. И.* Контактная сеть. М.: Транспорт, 1978. 325 с.
8. *Гребенщиков Б. Г., Новиков С. И.* О неустойчивости некоторой системы с линейным запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2010. № 2. С. 1–10. https://doi.org/10.3103/S1066369x10020015
9. *Жабко А. П., Тихомиров О. Г., Чижова О. Н.* О стабилизации класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 165–172.
10. *Sesekin A. N., Shlyakov A. S.* On the stability of discontinuous solutions of bilinear systems with impulse action, constant and linear delays // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. N 030009. P. 1–5.
11. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1967. 224 с.
12. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости линейных систем с постоянным запаздыванием и экспоненциальными коэффициентами // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания / под ред. Н. М. Матвеева. Л., 1990. С. 38–48.
13. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* Асимптотические свойства некоторых систем с линейным запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н. В. Азбелева. Пермь: Изд-во Пермск. нац. исслед. политех. ун-та, 2018. С. 51–59.
14. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / пер. с рум. М. И. Букатаря, Г. В. Ножака; под ред. В. И. Рубаника. М.: Мир, 1971. 312 с. (*Halanay A., Wexler D.* Teoria calitaliva a sistemelor cu impulsuri.)
15. *Фихтенгольц Г. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. В 3 т. М.: Наука, 2002. Т. 3. 655 с.
16. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания / под ред. С. Н. Шиманова. Свердловск: Изд-во Свердловск. гос. ун-та, 1984. С. 18–29.
17. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2012. № 2. С. 34–42. https://doi.org/10.3103/3103/S1066369x12020041
18. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Известия вузов. Математика. 1991. № 7. С. 69–71.
19. *Гребенщиков Б. Г.* О стабилизации стационарных линейных систем с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Известия вузов. Математика. 1991. Деп. в ВИНИТИ. № 4384–92.

Статья поступила в редакцию 2 октября 2020 г.
Статья принята к печати 15 января 2021 г.

Контактная информация:

Гребенщиков Борис Георгиевич — канд. физ.-мат. наук; b.g.grebenshchikov@urfu.ru

Asymptotic properties and stabilization of a neutral type system with constant delay

B. G. Grebenshchikov

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin,
19, ul. Mira, Yekaterinburg, 620002, Russian Federation

For citation: Grebenshchikov B. G. Asymptotic properties and stabilization of a neutral type system with constant delay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 81–96.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108 (In Russian)

The problem of obtaining sufficient conditions for the asymptotic stability for a certain class of linear systems of a neutral type with constant delay is analyzed in the article. Some coefficients of these systems in the right side have an exponential factor. As a consequence, the study of the stability of such systems with the help of the Lyapunov—Krasovskii functionals is not possible; methods of receiving asymptotic appreciations lead to extremely rough results. By applying the apparatus of difference systems and the properties of simpler systems, which the author examined previous, sufficient conditions for the exponential stability of such systems are obtained. As an example, a second-order system is considered. The graphs of the solutions of the corresponding system, both without neutral members and with the original system where the right-hand side contains neutral terms, are provided. On the basis of theory difference systems, the author proposes an algorithm of stabilization for some systems of a similar type.

Keywords: delay, exponential stability, difference systems, stabilization, control.

References

1. Bellman R., Cooke K. *Differential-difference equations.* New York, Academic Press, 1963, 480 p. (Rus. ed.: Bellman R., Cooke K. *Differencial'no-raznostnyje uravnenija.* Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.)

2. Elsholz L. E., Norckin C. B. *Vvedenie v teoriju differencialnykh uravnenij s otcklonjajushchimcja argumentom* [*Introduction to theory of differential equations with deviat argument*]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 296 p. (In Russian)

3. Vlasov V. V., Ivanov S. A. Ocenky resheniy neodnorodnykh differential'no-raznostnykh uravneniy neytralnogo typa [Estimates of solutions of non ordinary differential-difference equations of neutral type]. *Izvestiya vuzov, Matematica* [*Russian Mathematics*], 2006, no. 3, pp. 24–30. (In Russian)

4. Grebenshchikov B. G., Rozhkov V. I. Asymptoticheskoe povedenie odnoy stacionarnoy systemy s zapazdyvaniem [Asymptotical behavior once system with delay]. *Differenz. uravneniya* [*Differential Equations*], 1993, vol. 29, no. 5, pp. 751–758. (In Russian)

5. Kolmanovskiy V. B., Nosov V. R. *Ustoichivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyh system s posledeystviem* [*Stability of periodical regimes of regular systems delay*]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 448 p. (In Russian)

6. Ockendon J. R., Tayler A. B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. Soc. London. Ser. A.*, 2002, vol. 322, pp. 447–468. https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078

7. Markvardt N. G., Vlasov I. I. *Contactnaia set'* [*Contact net*]. Moscow, Transport Publ., 1978, 325 p. (In Russian)

8. Grebenshchikov B. G., Novikov S. I. O neustojchivosti nekotoroj sistemy s linejnym zapazdyvaniem [Instability of systems with linear delay reduceble to singularty pertubed ones]. *Izvestija vuzov. Matematika* [*Russian Mathematics*], 2010, no. 2, pp. 1–10. https://doi.org/10.3103/S1066369x10020015 (In Russian)

9. Zhabko A. P., Tihomirov O. G., Chizhova O. N. O stabilizacii klassa sistem s proporcional'nym zapazdyvaniem [About stabilization same class of system with proportional delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 165–172. (In Russian)

10. Sesekin A. N., Shlyakov A. S. On the stability of discontinuous solutions of bilinear systems with impulse action, constant and linear delays. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2172, no. 030009, pp. 1–5.

11. Barbashin E. A. *Vvedenije v teoriju ustoichivosty dvigenija* [*Introduction to theory of stability of motion*]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 225 p. (In Russian)

12. Grebenshchikov B. G. Ob ustoichivosti lineinyh system s postoiannymi zapazdyvaniem i exponential'nymi coefficientami [About stability some linear systems with constant delay and exponential coefficients]. *Mathematicheskiy analiz. Voprosy theoryi, historyi i methodiki prepodovaniya* [*Mathematical analis. Questions of theory, history and methodology of educations*]. Eds by N. M. Matveev. Leningrad, 1990, pp. 38–48. (In Russian)

13. Grebenshchikov B. G., Loznikov A. B. Asymptoticheskie svoistva necotoryh system s lineinym zapazdyvaniem. Functional'no-differentzial'nye uravneniya: theoryia i prilozheniya [Asymptotical properties of some systems with linear delay]. *Materialy conferentsii posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N. V. Azbeleva* [*Proceedings of conference with memory of year born prof. N. V. Azbelev.*] Perm, Perm Research Polytechnic University Press, 2018, pp. 51—59. (In Russian)

14. Halanai A., Wexler D. *Kachestvennaia teoryia impulsnykh system* [*Qualitaive theory of puls systems*]. Moscow, Mir Publ., 1971, 312 p. (In Russian)

15. Fihtengolz G. M. *Differenzialnoe i integralnoe ischislenie.* V 3 t. [*Differential and integral calculus.* In 3 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 2002, vol. 3, 655 p. (In Russian)

16. Grebenshchikov B. G. Ob ustoichivosti nestazionarnyx system s bol'shim zapazdyvaniem. *Ustoichivost' i nelineinye kolebaniya* [*Stability and non linear oscilations*]. Eds by S. N. Shimanov. Sverdlovsk, Sverdlovsk State University Press, 1984, pp. 18–19. (In Russian)

17. Grebenshchikov B. G. Ob ustojchivosti po pervomu priblizheniju odnoj nestacionarnoj sistemy s zapazdyvaniem [About stability by first approximation some unstationar system with delay]. *Izvestija vuzov. Matematika* [*Russian Mathematics*], 2012, no. 2, pp. 34–42.
https://doi.org/10.3103/3103/S1066369x12020041 (In Russian)

18. Grebenshchikov B. G. Ob ustoichivosti stazionarnykh system lineinykh differencialnykh uravnenij neutralnogo typa s zapazdyvaniem, line'no zaviciashchim ot vremeni [About stability stationary systems of linear differential delay equations, whose delay linear depends of time]. *Izvestiya vuzov, Matematica* [*Russian mathematics*], 1991, no. 7, pp. 69–71. (In Russian)

19. Grebenshchikov B. G. O stabilizacii stationarnykh lineinykh system s zapazdyvaniem, lineino zaviciashchim ot vremeny [About stabilization stationary linear systems with delay, linear depends of time]. *Izvestiya vuzov, Matematica* [*Russian Mathematics*], 1991, Dep. VINITY, no. 4384–92. (In Russian)

Received: October 02, 2020.
Accepted: January 15, 2021.

A u t h o r ' s i n f o r m a t i o n:

Boris G. Grebenshchikov — PhD in Physics and Mathematics; b.g.grebenshchikov@urfu.ru