УДК 531.36
MSC 34D20

Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2021. Т. 17. Вып. 1

Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции*

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 13–26. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.102

Рассматривается линейная механическая система с большим параметром при векторе скоростных сил и распределенным запаздыванием в позиционных силах. С помощью метода декомпозиции получены условия, при выполнении которых задача анализа устойчивости исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка может быть сведена к исследованию устойчивости двух вспомогательных подсистем первого порядка. Следует отметить, что одна из вспомогательных подсистем не содержит запаздывания, а для второй подсистемы, содержащей распределенное запаздывание, условия устойчивости формулируются в терминах разрешимости систем линейных матричных неравенств. Для обоснования указанной декомпозиции используется прямой метод Ляпунова. Предложены специальные конструкции функционалов Ляпунова—Красовского. Разработанный подход применяется в задаче одноосной стабилизации твердого тела. Приводятся результаты численного моделирования, которые подтверждают выводы, полученные аналитически.

Ключевые слова: механическая система, устойчивость, распределенное запаздывание, декомпозиция, твердое тело, функционал Ляпунова—Красовского.

1. Введение. Для исследования устойчивости движений механических систем широко и эффективно используется метод декомпозиции [1–3]. Следует заметить, что существуют различные подходы к применению данного метода (см., например, [1–10] и цитируемую там литературу). Один из таких подходов был предложен В. И. Зубовым в монографии [4]. С его помощью задача устойчивости механической системы, описываемой линейными стационарными дифференциальными уравнениями второго порядка, при определенных условиях может быть сведена к анализу устойчивости двух изолированных подсистем первого порядка. В работе [11] подход В. И. Зубова был распространен на линейные механические системы с постоянным запаздыванием в позиционных силах. Для получения указанных результатов в [4] и [11] применялся первый метод Ляпунова.

А. А. Косовым был разработан другой способ обоснования предложенного В. И. Зубовым подхода, базирующийся на методе функций Ляпунова [12]. Этот способ получил дальнейшее развитие в статьях [13–16], в которых были найдены новые условия декомпозиции линейных нестационарных механических систем, механических систем с нелинейными позиционными силами, а также систем с переменным запаздыванием в позиционных силах.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146-а).

Цель настоящей работы — исследование устойчивости линейных механических систем с распределенным запаздыванием. С одной стороны, такое запаздывание может присутствовать в управляемых механических системах в качестве интегральной части ПИД-регулятора [17, 18]. С другой стороны, члены с распределенным запаздыванием могут представлять собой возмущения, обусловленные эффектом памяти формы материала или наличием гистерезиса [19].

Некоторые условия устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием были получены в работах [17–21]. В [17, 18] для анализа устойчивости использовались функционалы Ляпунова—Красовского с отрицательно определенными производными и специальные оценки решений. Результаты [20, 21] установлены с помощью метода предельных уравнений и функционалов Ляпунова—Красовского со знакопостоянными производными.

В данной работе для изучения устойчивости применяется метод декомпозиции. Проводится распространение подхода В. И. Зубова на системы с распределенным запаздыванием. Вместо исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка предлагается рассматривать две вспомогательные изолированные подсистемы первого порядка, одна из которых не содержит запаздывания, а для второй подсистемы, содержащей распределенное запаздывание, условия устойчивости формулируются в терминах разрешимости систем линейных матричных неравенств. Разработанный подход используется в задаче одноосной стабилизации твердого тела.

2. Постановка задачи. Пусть движения механической системы описываются уравнениями

$$A\ddot{q}(t) + hB\dot{q}(t) + Cq(t) + D\int\limits_{t-\tau}^{t} q(s)ds = 0. \qquad (1)$$

Здесь $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — n-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, A, B, C, D — постоянные матрицы, h — положительный параметр, τ — постоянное положительное запаздывание. Будем предполагать, что матрицы A и B являются неособыми.

Каждое решение $q(t, t_0, \varphi)$ системы (1) при $t \geqslant t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\varphi(\theta)$, где $t_0 \geqslant 0$, $\varphi(\theta)$ принадлежит пространству $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых функций с равномерной нормой

$$\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta\in[-\tau,0]} \left(\|\varphi(\theta)\| + \|\dot{\varphi}(\theta)\|\right),$$

а $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Через $q_t(t_0, \varphi)$ обозначим отрезок решения: $q_t(t_0, \varphi) : \theta \to q(t + \theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Для анализа устойчивости системы (1) воспользуемся методом декомпозиции. Строим вспомогательные изолированные подсистемы

$$\dot{x}(t) = -A^{-1}Bx(t), \qquad (2)$$

$$\dot{y}(t) = Py(t) + Q\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds, \qquad (3)$$

в которых $P = -B^{-1}C,\ \ Q = -B^{-1}D$.

Требуется определить условия, при выполнении которых из устойчивости подсистем (2) и (3) следует устойчивость исходной системы (1).

Заметим, что в работе [15] для обоснования декомпозиции механических систем с переменным запаздыванием применялись функции Ляпунова и метод Разумихина. В настоящей статье будем использовать функционалы Ляпунова—Красовского.

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости. Правые части уравнений (2) не содержат запаздывания. Будем считать, что справедливы следующие предположения.

Предположение 1. Подсистема (2) асимптотически устойчива.

Известно (см. [22, 23]), что функционал Ляпунова—Красовского для подсистемы (3) можно строить в виде

$$V(y_t) = y^\top(t)Ly(t) + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t} y^\top(u)Ry(u)duds, \tag{4}$$

где L, R — постоянные положительно определенные матрицы.

Предположение 2. Существуют постоянные положительно определенные матрицы L и R, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}(P^\top L + LP) + R & LQ \\ Q^\top L & -R \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

З а м е ч а н и е 1. Если справедливо предположение 2, то подсистема (3) асимптотически устойчива, а для производной функционала (4) на решениях этой подсистемы имеет место оценка

$$\dot V(y_t) \leqslant -c_1\|y(t)\|^2 - c_2\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2 ds,$$

здесь c_1, c_2 — положительные постоянные [22].

З а м е ч а н и е 2. Для выполнения предположения 2 необходимо, чтобы матрица P была гурвицевой.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geqslant h_0$ система* (1) *асимптотически устойчива.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью замены переменных

$$x(t) = \dot q(t), \quad y(t) = q(t) - \frac{1}{h}B^{-1}A\dot q(t) \tag{5}$$

перейдем от уравнений (1) к системе

$$\begin{aligned} A\dot x(t) &= -hBx(t) - Cy(t) + \frac{1}{h}CB^{-1}Ax(t) - D\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds + \frac{1}{h}DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s)ds, \\ hB\dot y(t) &= -Cy(t) + \frac{1}{h}CB^{-1}Ax(t) - D\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds + \frac{1}{h}DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t} x(s)ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Из асимптотической устойчивости подсистемы (2) следует существование постоянной положительно определенной матрицы M такой, что матрица

$$N = MA^{-1}B + \left(A^{-1}B\right)^\top M \tag{7}$$

положительно определена.

Функционал Ляпунова—Красовского для системы (6) выбираем в виде

$$\widetilde{V}(x_t,y_t)=\frac{1}{2}x^\top(t)Mx(t)+hy^\top(t)Ly(t)+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}y^\top(u)Ry(u)duds+\varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}(s+\tau-t)\|x(s)\|^2ds, \tag{8}$$

где ε — положительный параметр, а матрицы L и R обладают свойствами, указанными в предположении 2. Тогда выполнены неравенства

$$a_1\|x(t)\|^2+ha_2\|y(t)\|^2\leqslant\widetilde{V}(x_t,y_t)\leqslant a_3\|x(t)\|^2+ha_4\|y(t)\|^2+$$

$$+a_5\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}\|y(u)\|^2duds+\varepsilon\tau\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|^2ds.$$

Здесь a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 — положительные постоянные.

Дифференцируя функционал (8) в силу системы (6), имеем соотношения

$$\dot{\widetilde{V}}=x^\top(t)MA^{-1}\left(-hBx(t)-Cy(t)+\frac{1}{h}CB^{-1}Ax(t)-D\int\limits_{t-\tau}^{t}y(s)ds+\frac{1}{h}DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t}x(s)ds\right)+$$

$$+2y^\top(t)LB^{-1}\left(-Cy(t)+\frac{1}{h}CB^{-1}Ax(t)-D\int\limits_{t-\tau}^{t}y(s)ds+\frac{1}{h}DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t}x(s)ds\right)+$$

$$+\tau y^\top(t)Ry(t)-\int\limits_{t-\tau}^{t}y^\top(s)Ry(s)ds-\varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|^2ds+\varepsilon\tau\|x(t)\|^2=$$

$$=-\frac{h}{2}x^\top(t)Nx(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\begin{pmatrix}y(t)\\y(s)\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}\frac{1}{\tau}(P^\top L+LP)+R & LQ\\ Q^\top L & -R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(t)\\y(s)\end{pmatrix}ds+$$

$$+x^\top(t)MA^{-1}\left(-Cy(t)+\frac{1}{h}CB^{-1}Ax(t)-D\int\limits_{t-\tau}^{t}y(s)ds+\frac{1}{h}DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t}x(s)ds\right)+$$

$$+\frac{2}{h}y^\top(t)LB^{-1}\left(CB^{-1}Ax(t)+DB^{-1}A\int\limits_{t-\tau}^{t}x(s)ds\right)-\varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|^2ds+\varepsilon\tau\|x(t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant(-hb_1+\varepsilon\tau)\|x(t)\|^2-b_2\|y(t)\|^2-b_3\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2ds-\varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|^2ds+\frac{b_4}{h}\|x(t)\|^2+$$

$$+\left(b_5+\frac{b_6}{h}\right)\|x(t)\|\|y(t)\|+b_7\|x(t)\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|ds+\frac{1}{h}(b_8\|x(t)\|+b_9\|y(t)\|)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|ds,$$

где $b_i>0$, $i=1,\dots,9$.

Нетрудно проверить: при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое $h_0 > 0$, что при всех $h \geqslant h_0$ будет справедлива оценка

$$\dot{\widetilde{V}} \leqslant -\frac{1}{2}\left(hb_1\|x(t)\|^2 + b_2\|y(t)\|^2 + b_3\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2ds + \varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}\|x(s)\|^2ds\right).$$

Значит [23], система (6) будет асимптотически устойчива. Учитывая вид преобразования (5), получаем, что тогда асимптотически устойчивой будет и система (1). Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим другой способ построения функционала Ляпунова—Красовского для изолированной подсистемы (3). В работе [22] была предложена следующая конструкция функционала:

$$V(y_t) = y^\top(t)Ly(t) + \tau\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}y^\top(u)Ry(u)duds + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{s}^{0}\int\limits_{t+\theta}^{t}\dot{y}^\top(u)W\dot{y}(u)dud\theta ds, \qquad (9)$$

в которой L, R, W — постоянные положительно определенные матрицы.

Предположение 3. Существуют постоянные положительно определенные матрицы L, R и W, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} P^\top L + LP + \tau^2R - 2W & LQ + \frac{2}{\tau}W & P^\top W \\ Q^\top L + \frac{2}{\tau}W & -R - \frac{2}{\tau^2}W & Q^\top W \\ WP & WQ & -\frac{2}{\tau^2}W \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

Замечание 3. Если справедливо предположение 3, то подсистема (3) асимптотически устойчива, а для производной функционала (9) на решениях этой подсистемы имеет место оценка

$$\dot{V}(y_t) \leqslant -c_3\|y(t)\|^2 - c_4\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2ds - c_5\|\dot{y}(t)\|^2,$$

где c_3, c_4, c_5 — положительные постоянные [22].

Замечание 4. Для выполнения предположения 3 необходимо, чтобы матрица $P + \tau Q$ была гурвицевой [22].

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1 и 3. Тогда существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geqslant h_0$ система* (1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Снова с помощью преобразования (5) переходим от уравнений (1) к системе (6), для которой функционал Ляпунова—Красовского выбираем в виде

$$\widetilde{V}(x_t, y_t) = \frac{1}{2}x^\top(t)Mx(t) + hy^\top(t)Ly(t) + \tau\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}y^\top(u)Ry(u)duds +$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{s}^{0}\int\limits_{t+\theta}^{t}\dot{y}^\top(u)W\dot{y}(u)dud\theta ds + \varepsilon\int\limits_{t-\tau}^{t}(s + \tau - t)\|x(s)\|^2ds,$$

здесь ε — положительный параметр, матрицы L, R, W обладают свойствами, указанными в предположении 3, M — постоянная положительно определенная матрица, для которой матрица (7) положительно определена.

С использованием этого функционала дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

З а м е ч а н и е 5. По сравнению с теоремой 1 преимущество теоремы 2 заключается в том, что в ней не требуется гурвицевость матрицы P. Стабилизация системы (1) может обеспечиваться за счет выбора матрицы D в интегральном слагаемом.

4. Задача одноосной стабилизации твердого тела. Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг своего центра масс (точки O) с угловой скоростью ω. Предположим, что с телом связаны главные центральные оси инерции $Oxyz$. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента M имеют вид

$$\Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = M, \tag{10}$$

где $\Theta = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$ — тензор инерции тела в осях $Oxyz$.

Рассмотрим два единичных вектора. Орт ξ неподвижен в инерциальном пространстве, а орт r неподвижен в системе координат $Oxyz$. Вектор ξ вращается по отношению к системе координат $Oxyz$ с угловой скоростью $-\omega$. Следовательно,

$$\dot{\xi}(t) = -\omega(t) \times \xi(t). \tag{11}$$

В результате получаем систему, состоящую из динамических уравнений Эйлера (10) и кинематических уравнений Пуассона (11).

Рассмотрим задачу об одноосной стабилизации тела [24]. Нужно выбрать управляющий момент M так, чтобы обеспечить для системы (10), (11) существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия:

$$\omega = 0, \quad \xi = r. \tag{12}$$

В работе [24] доказано, что указанная задача может быть решена с помощью управляющего момента вида $M = -F\omega(t) - a\xi(t) \times r$, представляющего собой сумму момента диссипативных сил и восстанавливающего момента. Здесь F — постоянная положительно определенная матрица, a — положительный коэффициент.

В настоящей статье изучим случай, когда на тело, наряду с моментом M, действует момент $M_\tau = b\int_{t-\tau}^{t} \xi(s) \times r ds$, где $b = \mathrm{const} \neq 0$, τ — постоянное положительное запаздывание. Кроме того, будем предполагать, что при векторе диссипативного момента имеется множитель $h > 0$. Тогда уравнения Эйлера принимают вид

$$\Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = -hF\omega(t) - a\xi(t) \times r + b\int_{t-\tau}^{t} \xi(s) \times r ds. \tag{13}$$

Для анализа устойчивости положения равновесия (12) системы (11), (13) воспользуемся подходом, разработанном в п. 3.

Теорема 3. *Если выполнено неравенство*

$$a > \tau|b|, \tag{14}$$

то существует число $h_0 > 0$ *такое, что при всех* $h \geqslant h_0$ *положение равновесия* (12) *системы* (11), (13) *асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y(t) = \xi(t) - r - \frac{1}{h}\left(F^{-1}\Theta\omega(t)\right) \times r.$$

Получим систему

$$\Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = -hF\omega(t) - ay(t) \times r - \frac{a}{h}\left(\left(F^{-1}\Theta\omega(t)\right) \times r\right) \times r +$$

$$+ b\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s) \times r ds + \frac{b}{h}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\left(F^{-1}\Theta\omega(s)\right) \times r\right) \times r ds,$$

$$\dot{y}(t) = -\omega(t) \times y(t) - \frac{1}{h}\omega(t) \times \left(\left(F^{-1}\Theta\omega(t)\right) \times r\right) + \frac{1}{h}\left(F^{-1}\left(\omega(t) \times \Theta\omega(t)\right)\right) \times r +$$

$$+\frac{a}{h}\left(F^{-1}\left(y(t) \times r + \frac{1}{h}\left(\left(F^{-1}\Theta\omega(t)\right) \times r\right) \times r\right)\right) \times r -$$

$$-\frac{b}{h}\left(F^{-1}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(y(s) + \frac{1}{h}F^{-1}\Theta\omega\right) \times r ds\right) \times r. \qquad (15)$$

При этом положению равновесия (12) системы (11), (13) соответствует нулевое решение системы (15).

Изолированные подсистемы для (15) строим в виде

$$\Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = -hF\omega(t), \qquad (16)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{a}{h}\left(F^{-1}\left(y(t) \times r\right)\right) \times r - \frac{b}{h}\left(F^{-1}\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s) \times r ds\right) \times r. \qquad (17)$$

Матрица F положительно определена. Значит, нулевое решение подсистемы (16) асимптотически устойчиво, а в качестве функции Ляпунова для нее можно выбрать функцию

$$V_1(\omega) = \frac{1}{2}\omega^\top\Theta\omega.$$

Далее рассмотрим функционал

$$V_2(y_t) = h\|y(t)\|^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}(y(u) \times r)^\top R(y(u) \times r)du ds,$$

где R — постоянная положительно определенная матрица. Дифференцируя его в силу подсистемы (17), получаем, что

$$\dot{V}_2 = \int\limits_{t-\tau}^{t}\begin{pmatrix} y(t) \times r \\ y(s) \times r \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\tau}F^{-1} + R & bF^{-1} \\ bF^{-1} & -R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \times r \\ y(s) \times r \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int\limits_{t-\tau}^{t}\begin{pmatrix} z(t) \\ z(s) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\tau}I + \widetilde{R} & bI \\ bI & -\widetilde{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z(t) \\ z(s) \end{pmatrix} ds.$$

Здесь $z(t) = F^{-\frac{1}{2}}(y(t) \times r)$, $\widetilde{R} = F^{\frac{1}{2}}RF^{\frac{1}{2}}$, I — единичная матрица.

С использованием результатов работы [25] нетрудно показать, что для существования положительно определенной матрицы $\widetilde{R}$, при которой матрица

$$\begin{pmatrix} -\frac{2a}{\tau}I+\widetilde{R} & bI \\ bI & -\widetilde{R} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство (14), причем в случае его выполнения в качестве $\widetilde{R}$ можно взять матрицу $|b|I$. Тогда $R=|b|F^{-1}$.

Функционал Ляпунова—Красовского для системы (15) определим по формуле

$$\widetilde{V}(\omega_t,y_t)=\frac{1}{2}\omega^\top(t)\Theta\omega(t)+h\|y(t)\|^2+|b|\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}(y(u)\times r)^\top F^{-1}(y(u)\times r)duds+$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}(s+\tau-t)\|\omega(s)\|^2ds.$$

Для этого функционала и его производной в силу системы (15) справедливы оценки

$$c_1\|\omega(t)\|^2+h\|y(t)\|^2\leqslant\widetilde{V}(\omega_t,y_t)\leqslant c_2\|\omega(t)\|^2+h\|y(t)\|^2+$$

$$+c_3\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{t+s}^{t}\|y(u)\times r\|^2duds+\tau\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|^2ds,$$

$$\dot{\widetilde{V}}\leqslant-\Big(hc_4-\frac{c_5}{h}-c_6\|y(t)\|-\tau\Big)\|\omega(t)\|^2-\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|^2ds-c_7\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\times r\|^2ds-c_8\|y(t)\times r\|^2+$$

$$+c_9\|\omega(t)\|\|y(t)\times r\|+c_{10}\|\omega(t)\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\times r\|ds+\frac{c_{11}}{h}\|\omega(t)\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|ds+$$

$$+\frac{c_{12}}{h}\|\omega(t)\|\|y(t)\|+\frac{c_{13}}{h}\|y(t)\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|ds,$$

где $c_i>0$, $i=1,\ldots,13$.

При достаточно больших значениях h имеем неравенство

$$\dot{\widetilde{V}}\leqslant-\left(\frac{1}{2}hc_4-c_6\|y(t)\|\right)\|\omega(t)\|^2-\frac{1}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|^2ds-\frac{1}{2}c_7\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\times r\|^2ds-$$

$$-\frac{1}{2}c_8\|y(t)\times r\|^2+\frac{c_{12}}{h}\|\omega(t)\|\|y(t)\|+\frac{c_{13}}{h}\|y(t)\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|ds.$$

Нетрудно проверить, что положительные числа $\mu, \delta, \tilde{c}$ можно выбрать так, чтобы при $\|y(t)\| + \|\omega(t)\| < \delta$ выполнялось неравенство

$$\|y(t) \times r\|^2 \geqslant \mu\|y(t)\|^2 - \frac{\tilde{c}}{h}\|\omega(t)\|^2.$$

Значит, если h достаточно велико, а δ достаточно мало, то

$$\dot{\tilde{V}} \leqslant -\frac{1}{4}hc_4\|\omega(t)\|^2 - \frac{1}{4}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\omega(s)\|^2 ds - \frac{1}{2}c_7\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s) \times r\|^2 ds - \frac{1}{4}\mu c_8\|y(t)\|^2$$

при $\|y(t)\| + \|\omega(t)\| < \delta$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 6. Теорема 3 представляет собой распространение теоремы 1 на задачу одноосной стабилизации твердого тела. Аналогичным образом на эту задачу можно распространить и теорему 2.

5. Результаты численного моделирования. Рассмотрим твердое тело с моментами инерции $A_1 = 5$, $A_2 = 6$, $A_3 = 4$. Здесь и далее все физические величины имеют размерности в системе СИ. Ставится задача одноосной стабилизации тела в базовой системе координат в положении равновесия (12), при котором $r = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)^\top$. Задача решается с использованием диссипативного, восстанавливающего и интегрального моментов в соответствии с уравнениями (11), (13).

Пусть $F = \operatorname{diag}\{1,1,1\}$, $a = 2$, $b = 1$, $h = 0.7$, $\tau = 0.9$. Тогда неравенство (14) выполнено. Предположим, что тело в начальный момент времени было отклонено от положения равновесия так, что углы крена, тангажа и рыскания («самолетные» углы) соответственно имели значения $\varphi(0) = 0.5$, $\theta(0) = 0.6$, $\psi(0) = -0.8$, а проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции были равны $\omega_x(0) = \omega_y(0) = \omega_z(0) = 1$.

Процесс стабилизации тела показан на рис. 1, 2. Видно, что результаты численного моделирования согласуются с утверждением, доказанным в теореме 3.

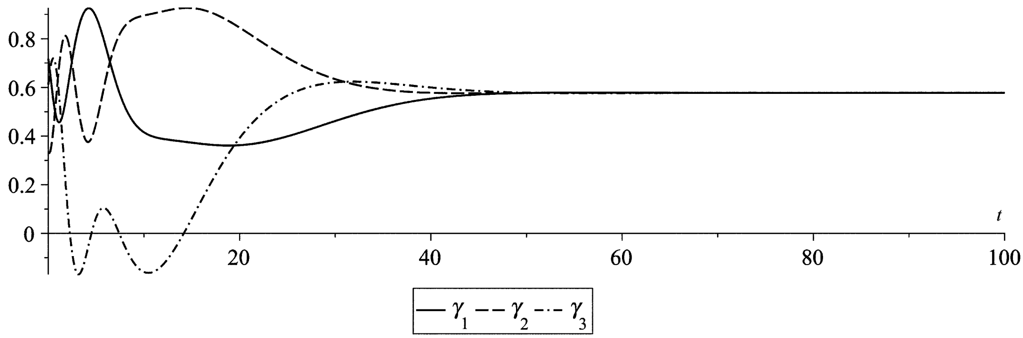

Рис. 1. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = 1$

Для сравнения было выполнено численное моделирование процесса стабилизации того же тела в том же положении при тех же начальных условиях, но при отсутствии интегральных составляющих в управляющем моменте ($b = 0$). Результаты приведены на рис. 3, 4.

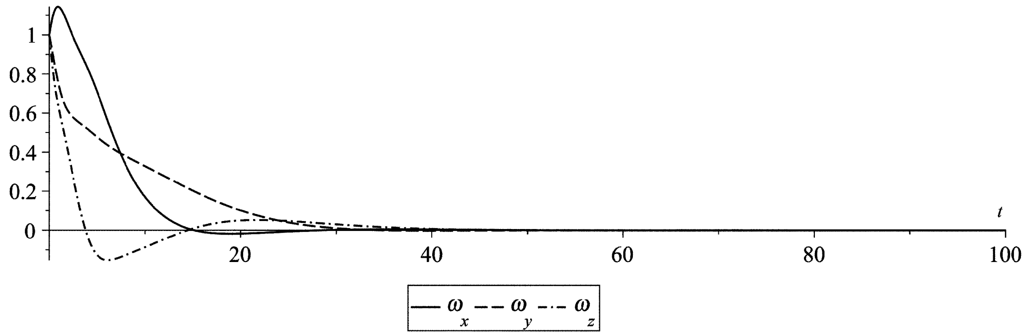

Рис. 2. Проекции угловой скорости тела, $b = 1$

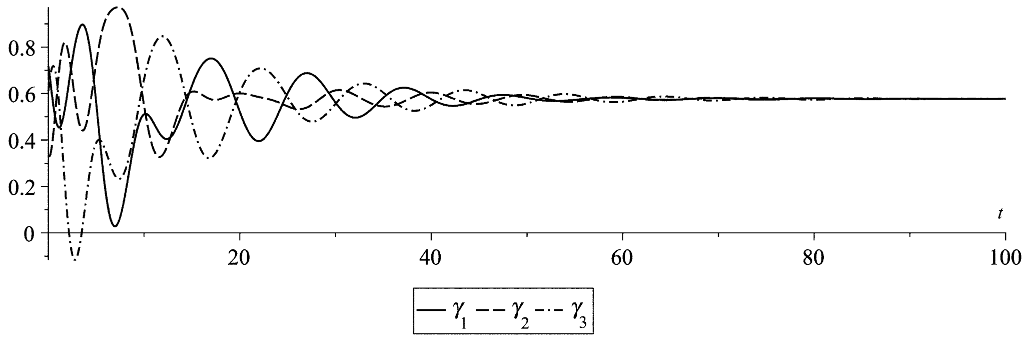

Рис. 3. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = 0$

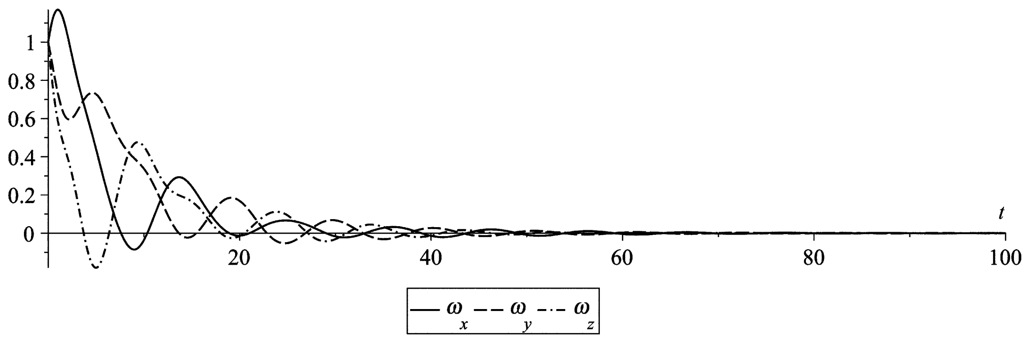

Рис. 4. Проекции угловой скорости тела, $b = 0$

Практическое значение теоремы 3 наглядно подтверждается сравнением рис. 1 и рис. 3, а также рис. 2 и рис. 4, из которого следует, что введение в систему управления интегральных составляющих позволяет существенно снизить колебательность процесса управления и ускорить его сходимость к асимптотически устойчивому решению.

6. Заключение. Рассматриваемая задача стабилизации тела относится к категории нелинейных задач динамики [26–28]. Поэтому обеспечение более высокой гладкости процесса управления может быть принципиально важным при управлении большой конструкцией, имеющей в своем составе недостаточно жесткие элементы, особенно в условиях близости собственных частот системы к резонансным соотношениям [29, 30].

Литература

1. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

2. *Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

3. *Siljak D. D.* Decentralized control of complex systems. New York: Academic Press, 1991. 525 p.

4. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 320 с.

5. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.

6. *Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V.* On stability and dissipativity of some classes of complex systems // Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70. N 8. P. 1265–1280.

7. *Tkhai V. N.* Model with coupled subsystems // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. N 6. P. 919–931.

8. *Подвальный С. Л., Провоторов В. В.* Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 126–142.

9. *Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A.* Unique weak solvability of a non-linear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 264–277.

10. *Klimina L. A.* Method for forming autorotations in controllable mechanical system with two degrees of freedom // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59. N 6. P. 817–827.

11. *Купцов С. Ю.* Об одном методе исследования на устойчивость семейств линейных систем дифференциальных уравнений // Труды Средневолжск. матем. об-ва. 2006. Т. 8. № 1. С. 224–235.

12. *Косов А. А.* Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 4. С. 123–129.

13. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L.* Stability of hybrid mechanical systems with switching linear force fields // Non-linear Dynamics and Systems Theory. 2011. Vol. 11. N 1. P. 53–64.

14. *Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y.* Stability and stabilization of mechanical systems with switching // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. N 6. P. 1143–1154.

15. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P.* Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. Vol. 9. P. 388–397.

16. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B.* Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched non-linear positional forces // Non-linear Dynamics. 2016. Vol. 83. N 4. P. 2427–2434.

17. *Su Y. X., Zheng C. H.* PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators // International Journal of Systems Sciences. 2017. Vol. 48. P. 547–558.

18. *Anan'evskii I. M., Kolmanovskii V. B.* On stabilization of some control systems with an aftereffect // Automation and Remote Control. 1989. N 9. P. 1174–1181.

19. *Zhang X., Chen X., Zhu G., Su C.-Y.* Output feedback adaptive motion control and its experimental verification for time-delay non-linear systems with asymmetric hysteresis // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2020. Vol. 67. N 8. P. 6824–6834.

20. *Павликов С. В., Исавнин А. Г.* О стабилизации управляемой механической системы с запаздывающей обратной связью // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2014. № 1. С. 139–146.

21. *Павликов С. В.* О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // Докл. Рос. акад. наук. 2007. Т. 412. № 2. С. 176–178.

22. *Fridman E.* Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European Journal of Control. 2014. Vol. 20. P. 271–283.

23. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 458 p.

24. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 380 с.

25. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal Riccati stability and applications // Linear Algebra Appl. 2016. Vol. 492. P. 38–51.

26. *Samsonov V. A., Dosaev M. Z., Selyutskiy Y. D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2011. Vol. 21. N 10. P. 2955–2961.

27. *Sedighi H. M., Daneshmand F.* Non-linear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2015. Vol. 1. N 1. P. 1–9.

28. *Park Y., Lee C.* Dynamic investigation of non-linear behavior of hydraulic cylinder in mold oscillator using PID control process // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7. N 1. P. 270–276.

29. *Тихонов А. А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4. Многочастотные резонансы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2000. Вып. 1. С. 131–137.

30. *Kosjakov E. A., Tikhonov A. A.* Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body // International Journal of Non-linear Mechanics. 2015. Vol. 73. P. 51–57.

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2020 г.
Статья принята к печати 15 января 2021 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Stability analysis of mechanical systems with distributed delay via decomposition*

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Stability analysis of mechanical systems with distributed delay via decomposition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 13–26.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.102 (In Russian)

The article analyzes a linear mechanical system with a large parameter at the vector of velocity forces and a distributed delay in positional forces. With the aid of the decomposition method, conditions are obtained under which the problem of stability analysis of the original system of the second-order differential equations can be reduced to studying the stability of two auxiliary first-order subsystems. It should be noted that one of the auxiliary subsystems does not contain a delay, whereas for the second subsystem containing a distributed delay, the stability conditions are formulated in terms of the feasibility of systems of linear matrix inequalities. To substantiate this decomposition, the Lyapunov direct method is used. Special constructions of Lyapunov—Krasovskii functionals are proposed. The developed approach is applied to the problem of monoaxial stabilization of a rigid body. The results of a numerical simulation are presented confirming the conclusions obtained analytically.

Keywords: mechanical system, stability, distributed delay, decomposition, rigid body, Lyapunov—Krasovskii functionals.

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00146-a).

References

1. Matrosov V. M. *Metod vektornyh funkcij Ljapunova: analiz dinamicheskih svojstv nelinejnyh sistem* [*Vector Lyapunov function method: analysis of dynamical properties of nonlinear systems*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 384 p. (In Russian)

2. Chernous'ko F. L., Anan'evskii I. M., Reshmin S. A. *Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimi sistemami* [*Methods of control of nonlinear mechanical systems*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 328 p. (In Russian)

3. Siljak D. D. *Decentralized control of complex systems.* New York, Academic Press Publ., 1991, 525 p.

4. Zubov V. I. *Analiticheskaja dinamika giroskopicheskih sistem* [*Analytical dynamics of gyroscopic systems*]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1970, 320 p. (In Russian)

5. Pyatnitskii E. S. Princip dekompozicii v upravlenii mehanicheskimi sistemami [The principle of decomposit ion in the control of mechanical systems]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [*Proceedings of Academy Sciences USSR*], 1988, vol. 300, no. 2, pp. 300–303. (In Russian)

6. Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V. On stability and dissipativity of some classes of complex systems. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 8, pp. 1265–1280.

7. Tkhai V. N. Model with coupled subsystems. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 6, pp. 919–931.

8. Podval'nyi S. L., Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of a parabolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 126–142. (In Russian)

9. Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Gnilitskaya Yu. A. Unique weak solvability of a non-linear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 264–277.

10. Klimina L. A. Method for forming autorotations in controllable mechanical system with two degrees of freedom. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, no. 6, pp. 817–827.

11. Kuptsov S. Yu. Ob odnom metode issledovanija na ustojchivost' semejstv linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij [On a method for stability investigation of linear differential systems families]. *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [*Proceedings of the Middle Volga Mathematical Society*], 2006, vol. 8, no. 1, pp. 224–235. (In Russian)

12. Kosov A. A. Issledovanie ustojchivosti singuljarnyh sistem metodom vektor-funkcij Ljapunova [Stability investigation of singular systems via vector Lyapunov functions method]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2005, iss. 4, pp. 123–129. (In Russian)

13. Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Kosov A. A., Zhang L. Stability of hybrid mechanical systems with switching linear force fields. *Non-linear Dynamics and Systems Theory*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 53–64.

14. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 6, pp. 1143–1154.

15. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2014, vol. 9, pp. 388–397.

16. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched non-linear positional forces. *Non-linear Dynamics*, 2016, vol. 83, no. 4, pp. 2427–2434.

17. Su Y. X., Zheng C. H. PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators. *Intertnational Journal of Systems Sciences*, 2017, vol. 48, pp. 547–558.

18. Anan'evskii I. M., Kolmanovskii V. B. On stabilization of some control systems with an aftereffect. *Automation and Remote Control*, 1989, no. 9, pp. 1174–1181.

19. Zhang X., Chen X., Zhu G., Su C.-Y. Output feedback adaptive motion control and its experimental verification for time-delay non-linear systems with asymmetric hysteresis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, vol. 67, no. 8, pp. 6824–6834.

20. Pavlikov S. V., Isavnin A. G. O stabilizacii upravljaemoj mehanicheskoj sistemy s zapazdyvajushhej obratnoj svjaz'ju [On stabilization of a controlled mechanical system with delayed feedback]. *Vestnik of Voronezh State University. Series Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 139–146. (In Russian)

21. Pavlikov S. V. O stabilizacii dvizhenij upravljaemyh mehanicheskih sistem s zapazdyvajushhim reguljatorom [On the stabilization of movements of controlled mechanical systems with a retarded

controller]. *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk* [*Proceedings of Academy Sciences of Russia*], 2007, vol. 412, no. 2, pp. 176–178. (In Russian)

22. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems. *European Journal of Control*, 2014, vol. 20, pp. 271–283.

23. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. *Introduction to functional differential equations*. New York, Springer-Verlag Publ., 1993, 458 p.

24. Zubov V. I. *Dinamika upravljaemyh sistem* [*Dynamics of control systems*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2004, 380 p. (In Russian)

25. Aleksandrov A., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications. *Linear Algebra Appl.*, 2016, vol. 492, pp. 38–51.

26. Samsonov V. A., Dosaev M. Z., Selyutskiy Y. D. Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2011, vol. 21, no. 10, pp. 2955–2961.

27. Sedighi H. M., Daneshmand F. Non-linear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 1–9.

28. Park Y., Lee C. Dynamic investigation of non-linear behavior of hydraulic cylinder in mold oscillator using PID control process. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 270–276.

29. Tikhonov A. A. Rezonansnye javlenija v kolebanijah gravitacionno-orientirovannogo tverdogo tela. Ch. 4. Mnogochastotnye rezonansy [Resonance phenomena in oscillations of a gravity-oriented rigid body. Pt 4. Multifrequency resonances]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2000, iss. 1, pp. 131–137. (In Russian)

30. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2015, vol. 73, pp. 51–57.

Received: December 24, 2020.
Accepted: January 15, 2021.

Authors' information:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Alexey A. Tikhonov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.tikhonov@spbu.ru