ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.972.2
MSC 49K21

Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности*

М. Э. Аббасов[1,2], *А. С. Шарлай*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61
[3] Военный институт (железнодорожных войск и военных сообщений) Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва, Российская Федерация, 198504, Санкт-Петербург, ул. Суворовская, 1

Для цитирования: *Аббасов М. Э., Шарлай А. С.* Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 4–12. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101

Исследуется задача получения оптимальной по стоимости затрат на строительство траектории дороги. С помощью аппарата математического моделирования определяется интегральный функционал стоимости, в котором аргументом выступает функция, описывающая траекторию пути. Этот функционал после некоторых дополнительных преобразований переписывается в более простой форме. Для полученной таким образом задачи вариационного исчисления выводится условие оптимальности, учитывающее специфику данного функционала. В отличие от классического условия Эйлера—Лагранжа оно приводит не к дифференциальному, а к интегродифференциальному уравнению. Рассмотрен пример численного решения выведенного уравнения с привлечением методов вычислительной математики.

Ключевые слова: вариационное исчисление, оптимизация, интегродифференциальные уравнения.

1. Обзор проблемы и постановка задачи. Проблема поиска оптимальной в смысле затрат на строительство траектории дороги, соединяющей два заданных пункта, естественным образом возникающая перед различными частными организациями, государственными органами и военными структурами, является предметом изучения для многих исследователей. Одним из наиболее популярных подходов к

* Необходимые условия минимума в рассматриваемой задаче (п. 2) были получены в ИПМаш РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

решению такой задачи, которым пользуются инженеры и который в англоязычных источниках называется *Cost Path Analysis*, базируется на построении и анализе решетки стоимости (см. [1–3]). В данной работе предлагается иной подход, основанный на вариационных принципах.

Пусть на карте рельефа местности заданы координаты начальной и конечной точек O и A, которые нужно связать дорогой, затратив минимальное количество средств на строительство. Естественно предполагать, что общая цена строительства складывается из двух компонент:

- цены доставки строительных материалов;
- цены укладки дорожного покрытия.

Будем считать, что подвоз строительных материалов осуществляется из пункта O, выполняющего роль материальной базы. При этом их транспортировка к текущему расположению строительной площадки производится исключительно по уже готовому участку дороги, т. е. проходит в одних и тех же условиях на протяжении всего процесса строительства. Очевидно, цена доставки зависит от удаленности от базы и объема перевозимого материала. Так как технология укладки дороги едина в любой точке траектории, количество материалов, требующихся для строительства единицы длины пути, постоянное. Поэтому можно ввести постоянную α, равную цене доставки, приходящейся на единицу длины пути (от базы), объема строительных материалов, необходимых для укладки единицы длины дороги.

В каждой точке свои условия строительства, обусловленные, например, рельефом, ландшафтом и другими факторами. Потому цена укладки β в каждой точке траектории своя.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O. Пусть (x_a, y_a) — координаты точки A, а $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$y(0) = 0, \quad y(x_a) = y_a.$$

Любую такую кривую будем называть допустимой. Цену строительства дороги, определяемую функцией $y(x)$, представим следующим образом:

$$J(y) = \int\limits_0^{x_a} \alpha\sqrt{1 + y'^2(x)} \int\limits_0^{x} \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi\, dx + \int\limits_0^{x_a} \beta(x, y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{1}$$

Здесь $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Будем далее предполагать, что дважды непрерывно дифференцируемая допустимая кривая $y_*(x)$ доставляет минимум функционалу (1). Она и обусловливает оптимальную по стоимости строительства траекторию дороги.

Таким образом, получаем задачу вариационного исчисления с закрепленными концами.

2. Необходимые условия минимума. Вначале сформулируем и докажем вспомогательный результат.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f(x) \in C[0, a]$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{a} f(x) \int\limits_0^{x} f(\xi)\, d\xi\, dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{a} f(x)\, dx\right)^2. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть равенства (2) представляет из себя двойной интеграл

$$\int_0^a \int_0^x f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \iint_{G_1} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx,$$

где область G_1 изображена вертикальной штриховкой на рис. 1. Меняя порядок интегрирования, находим, что

$$\iint_{G_1} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \int_0^a \int_\xi^a f(\xi) f(x)\, dx\, d\xi.$$

Воспользовавшись тем, что переменные x и ξ симметрично входят в подинтегральное выражение в правой части, меняем их местами:

$$\int_0^a \int_\xi^a f(\xi) f(x)\, dx\, d\xi = \int_0^a \int_x^a f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \iint_{G_2} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx.$$

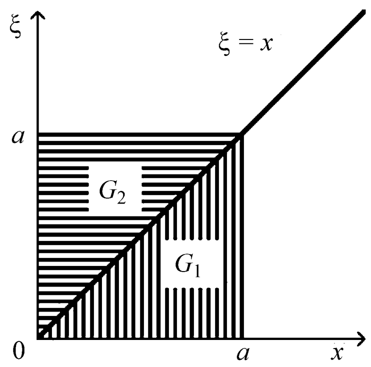

Рис. 1. Иллюстрация областей, по которым ведется интегрирование

Таким образом, интеграл по области G_2, изображенной на рис. 1 горизонтальной штриховкой, равен интегралу по области G_1:

$$\iint_{G_1} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \iint_{G_2} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx.$$

Поэтому интеграл можно записать в виде

$$\iint_{G_1} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \frac{1}{2} \iint_{G_1 \bigcup G_2} f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx = \int_0^a \int_0^a f(\xi) f(x)\, d\xi\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a f(x)\, dx \int_0^a f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \left(\int_0^a f(x)\, dx \right)^2,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Воспользовавшись доказанным результатом, перепишем функционал (1) следующим образом:

$$J(y)=\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_0^{x_a}\sqrt{1+y'^2(x)}dx\right)^2+\int\limits_0^{x_a}\beta(x,y)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx. \tag{3}$$

Теорема. *Для того чтобы допустимая кривая $y_*(x)\in C^2[0,x_a]$ доставляла минимум функционалу* (3)*, необходимо, чтобы она удовлетворяла равенству*

$$\begin{gathered}\frac{y_*''(x)}{1+{y_*'}^2(x)}\left(\alpha\int\limits_0^{x_a}\sqrt{1+{y_*'}^2(x)}dx+\beta(x,y_*(x))\right)+\\+y_*'(x)\frac{\partial\beta(x,y_*(x))}{\partial x}-\frac{\partial\beta(x,y_*(x))}{\partial y}=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для удобства введем обозначение $F(y')=\sqrt{1+y'^2}$. Тогда функционал равен

$$J(y)=\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_0^{x_a}F(y'(x))dx\right)^2+\int\limits_0^{x_a}\beta(x,y)F(y'(x))\,dx.$$

Пусть $\delta(x)$ — непрерывная, финитная на $[0,x_a]$ функция, а ε — скалярная величина. Выпишем (см. [4]) вариацию функционала

$$\delta J(y_*)=\frac{d}{d\varepsilon}J(y_*+\varepsilon\delta)|_{\varepsilon=0}.$$

Для того чтобы допустимая кривая y_* доставляла минимум функционалу J, необходимо [4–7], чтобы выполнялось равенство

$$\delta J(y_*)=0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\delta J(y_*)=&\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_0^{x_a}F(y_*'+\varepsilon\delta')dx\right)^2+\int\limits_0^{x_a}\beta(x,y_*+\varepsilon\delta)F(y_*'+\varepsilon\delta')\,dx\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=\\=&\alpha\int\limits_0^{x_a}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta'\,dx\int\limits_0^{x_a}F(y_*')\,dx+\int\limits_0^{x_a}\frac{\partial\beta}{\partial y}F(y_*')\delta\,dx+\int\limits_0^{x_a}\beta\frac{\partial F}{\partial y'}\delta'\,dx.\end{aligned} \tag{5}$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, рассмотрим отдельно выражения в слагаемых, входящих в правую часть равенства (5):

$$\int\limits_0^{x_a}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta'\,dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta\Big|_0^{x_a}-\int\limits_0^{x_a}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta\,dx=-\int\limits_0^{x_a}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_a} \beta \frac{\partial F}{\partial y'} \delta' \, dx = \beta \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \Big|_0^{x_a} - \int\limits_0^{x_a} \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta \, dx = - \int\limits_0^{x_a} \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta \, dx.$$

С учетом полученного необходимое условие минимума можно записать в виде

$$\delta J(y_*) = \int\limits_0^{x_a} \left(-\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \int\limits_0^{x_a} F(y'_*) \, dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} F(y'_*) - \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta \, dx = 0.$$

Функция, находящаяся под интегралом и являющаяся сомножителем δ, принадлежит $C[0, x_a]$. Так как $C[0, x_a] \subset \widetilde{\mathscr{L}_2}[0, x_a]$, а множество непрерывных на $[0, x_a]$ финитных функций всюду плотно в $\widetilde{\mathscr{L}_2}[0, x_a]$ (см. [8]), из последнего равенства следует, что

$$-\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \int\limits_0^{x_a} F(y'_*) \, dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} F(y'_*) - \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Подставляя в это равенство $F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = y''_* (1 + {y'_*}^2)^{-\frac{3}{2}}$, получаем уравнение

$$\frac{y''_*(x)}{1 + {y'_*}^2(x)} \left(\alpha \int\limits_0^{x_a} \sqrt{1 + {y'_*}^2(x)} dx + \beta(x, y_*(x)) \right) +$$

$$+ \, y'_*(x) \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial x} - \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial y} = 0,$$

что и завершает доказательство. □

З а м е ч а н и е. Отметим, что можно получить то же условие (4) и с помощью классических результатов вариационного исчисления. Для этого нужно представить функционал (3) в виде, пригодном для непосредственного применения условий Эйлера—Лагранжа.

3. Пример и численная реализация. Таким образом, для получения допустимой кривой, удовлетворяющей необходимому условию минимума, нужно решить интегродифференциальное уравнение

$$\frac{y''}{1 + y'^2} \left(\alpha \int\limits_0^{x_a} \sqrt{1 + y'^2} dx + \beta \right) + y' \beta_x - \beta_y = 0, \tag{6}$$

численное решение которого является предметом отдельного детального исследования.

Опишем адаптированный с учетом задаваемого в рассмотренном случае типа начальных условий метод, разработанный в [9], который позволил решить конкретную задачу.

На отрезке $[0, x_a]$ введем равномерную сетку, содержащую $n + 1$ узел. Зная значения вторых производных искомой функции в узлах сетки, можно построить интерполяционный полином для $y''(x)$ степени n. Интегрируя его и используя величины функции в первом и последнем узлах сетки (концах отрезка $[0, x_a]$), определим интерполяционные многочлены степени $n + 1$ и $n + 2$ для функций $y'(x)$ и $y(x)$ соответственно. Применяя какую-либо квадратурную формулу для вычисления интеграла

$\int\limits_0^{x_a} \sqrt{1+y'(x)^2}dx$, сводим уравнение (6) к задаче решения системы нелинейных уравнений относительно значений вторых производных в узлах сетки.

Обозначим через $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ вектор коэффициентов интерполяционного многочлена для $y''(x)$. Пусть $\overline{y}^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}\right)^T$ — вектор, компоненты которого равны значению функции $y''(x)$ в узлах сетки, т. е.

$$y_i^{(2)} = y''(x_i), \quad x_i = (i-1)\frac{x_a}{n}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Рассмотрим матрицу Вандермонда

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Имеем $\overline{y}^{(2)} = Zp$, откуда в силу невырожденности Z (см., например, [10]) получаем $p = Z^{-1}\overline{y}^{(2)}$. Отсюда

$$y''(x) = XZ^{-1}\overline{y}^{(2)},$$

где $X = (1, x, \dots, x^n)$. Интегрируя последнее равенство в пределах от x_1 до x_i для каждого из $i = 1, \dots, n+1$, находим, что

$$\overline{y}^{(1)} = Iy'(x_1) + S\overline{y}^{(2)},$$

здесь $I = (1, \dots, 1)^T$ — n-мерный единичный вектор, $\overline{y}^{(1)}$ — вектор, компоненты которого равны значению функции $y'(x)$ в узлах сетки, $S = BZ^{-1}$, а матрица предстает в виде

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 - x_1 & \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} & \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} & \dots & \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1} - x_1 & \frac{x_{n+1}^2 - x_1^2}{2} & \frac{x_{n+1}^3 - x_1^3}{3} & \dots & \frac{x_{n+1}^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Обозначая $\overline{y}$ через вектор, компоненты которого равны величине функции $y(x)$ в узлах сетки, аналогично приходим к равенству

$$\overline{y} = Iy(x_1) + SIy'(x_1) + S^2\overline{y}^{(2)}. \tag{7}$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче известно значение искомой функции $y(x)$ в точке x_n (на правом конце отрезка) $y_n = y(x_n)$, а не $y'(x_1)$, из (7) определяем нужную нам величину

$$y'(x_1) = \frac{y(x_n) - y(x_1) - \left[S^2\overline{y}^{(2)}\right]_n}{[SI]_n},$$

где $\left[S^2\overline{y}^{(2)}\right]_n$ и $[SI]_n$ обозначают n-е компоненты векторов $S^2\overline{y}^{(2)}$ и SI соответственно. Считая n четным, вычисляем интеграл с помощью формулы Симпсона

$$\int\limits_0^{x_a} \sqrt{1+y'^2}dx \approx \int\limits_0^{x_a} F(y'(x))dx = \frac{x_a}{3n}\sum_{i=1}^{n/2}\left(F(y_{2i-1}^{(1)}) + 4F(y_{2i}^{(1)}) + F(y_{2i+1}^{(1)})\right).$$

Таким образом, окончательно приходим к нелинейной системе из n уравнений относительно n переменных $y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}$

$$\begin{cases} \frac{y_j^{(2)}}{1+\left(y_j^{(1)}\right)^2} \left[\alpha\Phi(\overline{y}^{(1)}) + \beta(x_j, y_j)\right] + y_j^{(1)}\beta_x(x_j, y_j) - \beta_y(x_j, y_j) = 0, \\ j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} &y'(x_1) = \frac{y(x_n) - y(x_1) - \left[S^2\overline{y}^{(2)}\right]_n}{[SI]_n}, \\ &\overline{y}^{(1)} = Iy'(x_1) + S\overline{y}^{(2)}, \\ &\overline{y} = Iy(x_1) + SIy'(x_1) + S^2\overline{y}^{(2)}, \\ &\Phi(\overline{y}^{(1)}) = \frac{x_a}{3n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(F(y_{2i-1}^{(1)}) + 4F(y_{2i}^{(1)}) + F(y_{2i+1}^{(1)})\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу, в которой $\alpha = 0.1$, $x_a = y_a = 1$, а функция $\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y$. Для удобства интерпретации можно считать, что эта функция задает уравнение поверхности местности, т. е. стоимость укладки дорожного покрытия тем больше, чем выше точка располагается над плоскостью Oxy.

Найдем с помощью описанного выше подхода с применением математического пакета MatLab*) оптимальную по затратам траекторию, соединяющую точки O и A. Принимая $n = 26$ (при этом, очевидно, искомая кривая y аппроксимируется многочленом 28-й степени), получаем следующие результаты:

x	0	0.0385	0.0769	0.1154	0.1538	0.1923	0.2308	0.2692	0.3077
y	0	0.0110	0.0218	0.0333	0.0453	0.0588	0.0728	0.0880	0.1058
x	0.3462	0.3846	0.4231	0.4615	0.5000	0.5385	0.5769	0.6154	0.6538
y	0.1228	0.1424	0.1635	0.1859	0.2103	0.2363	0.2645	0.2956	0.3282
x	0.6923	0.7308	0.7692	0.8077	0.8462	0.8846	0.9231	0.9615	1.0000
y	0.3668	0.4061	0.4532	0.5087	0.5739	0.6533	0.7500	0.8526	1.0000

На рис. 2 полученная траектория изображена на поверхности $z = \beta(x, y)$. Кривая ожидаемо «обходит» возвышенности.

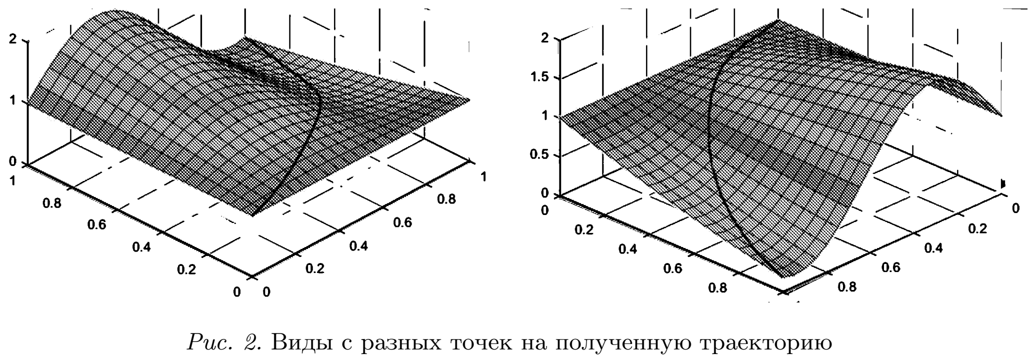

Рис. 2. Виды с разных точек на полученную траекторию

*) Была использована функция fsolve с параметрами по умолчанию.

4. Заключение. Отметим, что к аналогичным математическим формулировкам могут приводить проблемы и из других областей, таких, например, как робототехника [11, 12]. Поэтому полученные в настоящей работе результаты могут применяться не только в рамках дорожного строительства, но и для более широкого круга задач.

Литература

1. *Douglas D. H.* Least cost path in GIS using an accumulated cost surface and slope lines // Cartographica. 1994. Vol. 31. P. 37–51.
2. *Tomlin D.* Propagating radial waves of travel cost in a Grid // International Journal of Geographical Information Science. 2010. Vol. 24(9). P. 1391–1413.
3. *Yu C., Lee J., Munro-Stasiuk M.* Extensions to least-cost path algorithms for roadway planning // International Journal of Geographical Information Science. 2003. Vol. 17(4). P. 361–376.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
5. *Люстерник Л. А., Лаврентьев М. А.* Курс вариационного исчисления. М.: ГОНТИ, 1938. 192 с.
6. *Mordukhovich B. S.* Variational analysis and generalized differentiation. II. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag Publ., 2006. XXII. 610 p.
7. *Rindler F.* Calculus of variations. Berlin: Springer Intern. Publishing, 2018. XII. 444 p.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
9. *Бандурин Н. Г., Гуреева Н. А.* Метод и пакет программ для численного решения систем существенно нелинейных обыкновенных интегродифференциально-алгебраических уравнений // Матем. моделирование. 2012. Т. 24(2). С. 3–16.
10. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
11. *Li X., Zhao G., Li B.* Generating optimal path by level set approach for a mobile robot moving in static/dynamic environments // Applied Mathematical Modelling. 2020. Vol. 85. P. 210–230.
12. *Sprunk C., Lau B., Pfaff P.* et al. An accurate and efficient navigation system for omnidirectional robots in industrial environments // Autonomous Robots. 2016. Vol. 41(2). P. 473–493.

Статья поступила в редакцию 2 декабря 2020 г.
Статья принята к печати 15 января 2021 г.

Контактная информация:

Аббасов Меджид Эльхан оглы — д-р физ.-мат. наук, проф.; m.abbasov@spbu.ru

Шарлай Артем Сергеевич — преп.; sharlayar@mail.ru

Searching for the cost-optimal road trajectory on the relief of the terrain*

M. E. Abbasov[1,2], *A. S. Sharlay*[3]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation
[3] Military Educational Institute of Logistics named after General of the Army A. V. Khrulyov, 1, Suvorovskaya ul., St. Petersburg, 198504, Russian Federation

For citation: Abbasov M. E., Sharlay A. S. Searching for the cost-optimal road trajectory on the relief of the terrain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 4–12.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.101 (In Russian)

* The necessary conditions for a minimum in the considered problem (section 2) were obtained at the IPME RAS with the financial support of the Russian Science Foundation (project N 20-71-10032).

The article analyzes the problem of obtaining the cost-optimal trajectory for building a road. Using the apparatus of mathematical modelling, the authors derive the cost functional, the argument of which is the function that describes the path trajectory. The resulting functional after some additional transformations is written in a simpler form. For the problem of the calculus of variations obtained in this manner, an optimality condition is derived. This condition takes into account the specifics of the constructed functional. Unlike the classical Euler—Lagrange condition, it leads not to a differential, but to an integro-differential equation. An illustrative example of the numerical solution of the obtained equation using the methods of computational mathematics is provided.

Keywords: calculus of variations, optimization, integro-differential equations.

References

1. Douglas D. H. Least cost path in GIS using an accumulated cost surface and slope lines. *Cartographica*, 1994, vol. 31, pp. 37–51.

2. Tomlin D. Propagating radial waves of travel cost in a grid. *International Journal of Geographical Information Science*, 2010, vol. 24(9), pp. 1391–1413.

3. Yu C., Lee J., Munro-Stasiuk M. Extensions to least-cost path algorithms for roadway planning. *International Journal of Geographical Information Science*, 2003, vol. 17(4), pp. 361–376.

4. Elsgolc L. E. *Differencialnye uravneniya i variacionnoe ischislenie* [*Differential equations and calculus of variations*]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 424 p. (In Russian)

5. Lyusternik L. A., Lavrentev M. A. *Kurs variacionnogo ischisleniya* [*Course of calculus of variations*]. Moscow, GONTI Publ., 1938, 192 p. (In Russian)

6. Mordukhovich B. S. *Variational analysis and generalized differentiation. II.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2006, XXII, 610 p.

7. Rindler F. *Calculus of variations*. Berlin, Springer Intern. Publ., 2018, XII, 444 p.

8. Trenogin V. A. *Funkcionalnyj analiz* [*Functional analysis*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 495 p. (In Russian)

9. Bandurin N. G., Gureeva N. A. Metod i paket programm dlia chislennogo resheniia sistem sushchestvenno nelineinykh obyknovennykh integro-differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii [A method and a software package for numerical solution of the systems of nonlinear ordinary integrodifferential-algebraic equations]. *Matematicheskoe modelirovanie* [*Mathematical Modeling*], 2012, vol. 24(2), pp. 3–16. (In Russian)

10. Kurosh A. G. *Kurs vysshej algebry* [*Higher algebra course*]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 431 p. (In Russian)

11. Li X., Zhao G., Li B. Generating optimal path by level set approach for a mobile robot moving in static/dynamic environments. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, vol. 85, pp. 210–230.

12. Sprunk C., Lau B., Pfaff P. et al. An accurate and efficient navigation system for omnidirectional robots in industrial environments. *Autonomous Robots*, 2016, vol. 41(2), pp. 473–493.

Received: December 02, 2020.
Accepted: January 15, 2021.

A u t h o r s' i n f o r m a t i o n:

Majid E. Abbasov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; m.abbasov@spbu.ru

Artyom S. Sharlay — Lecturer; sharlayar@mail.ru