Санкт-Петербургский государственный университет

Т.А. Ефимова

Производная и ее применение к исследованию функций
Методическое пособие

Санкт-Петербург
2021

УДК 517.27
ББК 22.161

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Осипов А.В (СПбГУ), канд. физ.-мат. наук, доцент Леора С.Н. (СПбГМТУ)

Рекомендовано к размещению в репозитории СПбГУ Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 “Математика и механика” Санкт-Петербургского государственного университета.

Ефимова Т.А. Производная и ее применение к исследованию функций методическое пособие СПб.: СПбГУ, 2021.- 62 с.

В методическом пособии изложены некоторые методы дифференцирования элементарных функций, а также применение производной к исследованию функций. Пособие состоит из двух глав. Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, основные формулы, подробно разбираются решения типовых примеров, предлагаются примеры для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним.

Пособие предназначено для студентов нематематических специальностей, в частности для студентов института наук о Земле, изучающих тему “Производная “, в качестве дополнительной литературы. С его помощью студенты могут усвоить эту тему и применить свои знания в изучении математических и специальных дисциплин.

Оглавление

Предисловие

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университетов, изучающих тему “Производная и ее приложения” в качестве дополнительной литературы. Составлено на основе опыта автора чтения лекций и проведения практических занятий на факультете ‘Науки о Земле” (направления: география, гидрометеорология, землеведение и кадастр, картография и геоинформатика, экология и природопользование).
При составлении пособия были учтены программы курсов других естественных факультетов.
При малом количестве академических часов или при слабой подготовке студентов некоторые параграфы можно исключить из рассмотрения.
Для понимания материала, изложенного в пособии, требуется знать математику в объеме средней школы: уметь решать неравенства, делать алгебраические и тригонометрические преобразования, уметь исследовать свойства функции элементарными методами. Кроме того, студенты должны знать определение предела функции и уметь вычислять простые пределы.
С помощью пособия студенты лучше усвоят понятие производной функции, научатся дифференцировать. Научатся исследовать поведение функции с помощью производных, а также применять производную для раскрытия неопределенностей различных типов (правило Лопиталя).
Пособие состоит из двух глав. В первой главе дается определения производной, изучаются различные методы дифференцирования. Во второй главе рассматривается применение производной к исследованию функций. Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, формулировки теорем и основные формулы (доказательства теоретических вопросов не приводится, их можно найти в одном из учебников [1]-[3]), подробно разбираются решения типовых примеров, а также предлагаются примеры для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним. Нумерация формул, рисунков и теорем сквозная. В каждой главе примеры нумеруются двумя цифрами: первая- номер параграфа, вторая- номер примера. В каждом параграфе нумерация примеров для самостоятельной работы собственная.
С помощью пособия студенты смогут лучше усвоить понятие производной и применять свои знания при изучении математических и специальных дисциплин.

Глава 1 Производные и дифференциалы функции

§ 1 Производная

Будем обозначать через $\langle a,b\rangle$ любой из промежутков (замкнутый, открытый, конечный, бесконечный). Если $x_0 \in (a,b)$, то будем говорить, что x_0 внутренняя точка промежутка.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в $\langle a,b\rangle$. Приращением функции в точке $x \in \langle a,b\rangle$ называется выражение вида

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) , \qquad (1)$$

где Δx -приращение аргумента, точки x и $x + \Delta x$ принадлежат $\langle a,b\rangle$.

Определение 1 Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю. Для производной принято обозначение y', читается y штрих , y'_x , читается y штрих по x , $\frac{dy}{dx}$ читается де y по де x

Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \qquad (2)$$

Если предел (2) существует и конечен, то функция называется **дифференцируемой** в точке x , операция нахождения производной называется дифференцированием. Справедлива

Теорема 1 Если функция дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке.

Обратное неверно (пример 1.1 (4))

Геометрическое истолкование производной. Производная в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке $M(x, f(x))$. На рис.1 α - угол наклона касательной к кривой в точке $M(x, f(x))$, тогда $tg\alpha = f'(x)$

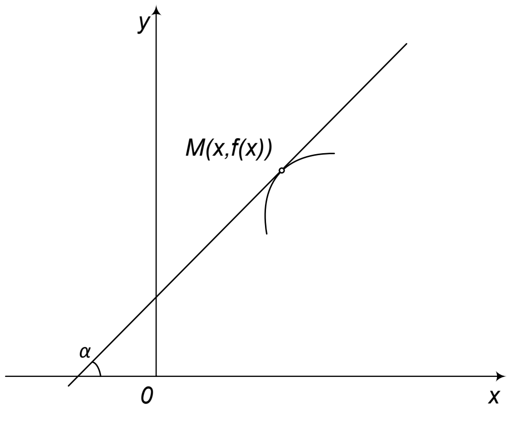

Рис. 1

Механическое истолкование производной. Если тело движется неравномерно прямолинейно по закону $S = S(t)$, то скорость тела равна производной от пути по времени $V(t) = S'(t)$.

Особые случаи

1. Односторонние производные

В некоторых случаях при вычислении предела (2) приходится ограничиваться приближением Δx к нулю только справа или только слева.

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

называется **правосторонней производной** в точке x и обозначается $y'_+(x)$. Если предел (3) существует и конечен, то в точке $M(x, f(x))$ график функции имеет правостороннюю касательную.

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

называется **левосторонней производной** точке x и обозначается $y'_-(x)$ Если предел (4) существует и конечен, то в точке $M(x, f(x))$ график имеет левостороннюю касательную

Левосторонняя и правосторонняя производные называются **односторонними производными.**

Если пределы (3) и (4) существуют и конечны, то в точке $M(x, f(x))$ график функции имеет правостороннюю и левостороннюю касательные, пересекающиеся под некоторым углом. В этом случае точка называется угловой. (рис. 2)

Отметим, что, если функция задана в промежутке $[a,b]$, то в точке a может существовать только правосторонняя производная, а в точке b левосторонняя производная.

Справедлива

Теорема 2 Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $y'_+(x) = y'_-(x)$

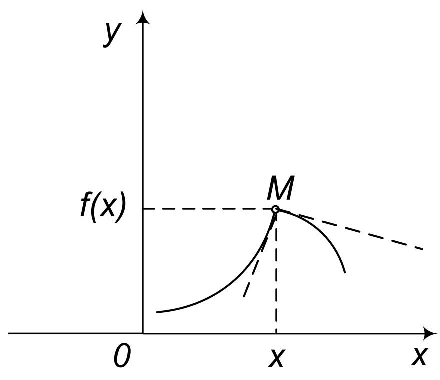

Рис.2

2. Бесконечная производная

Если предел (2) равен ∞, то в точке x производная равна ∞ и график функции имеет в точке $M(x, f(x))$ вертикальную касательную (рис. 3)

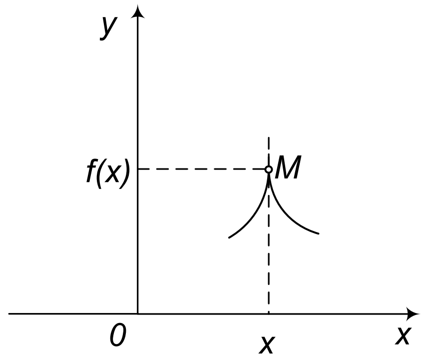

Рис. 3

Пример 1.1

Пользуясь определением, найти производную функции в указанных точках

1. $y = x^2 + 2x + 3$. в точке $x = 1$ **2**. $y = \cos(2x+3)$ в точке $x = x_0$

3. $y = \sqrt[3]{x-2}$ в точке $x = 2$ **4**. $y = |\ln x|$ в точке $x = 1$

5 . $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x = 0$

Решение

1. $y = x^2 + 2x + 3$ в точке $x = 1$. Приращение функции в точке $x = 1$ равно

$$\Delta y = y(1+\Delta x) - y(1) = (1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) + 3 - (1^2 + 2\cdot 1 + 3) = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 +$$

$+ 2 + 2\Delta x + 3 - 1 - 2 - 3 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$. Тогда $y'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4$.

2. $y = \cos(2x+3)$ в точке $x = x_0$. Приращение функции в точке x_0 равно

$$\Delta y = \cos(2(x_0 + \Delta x) + 3) - \cos(2x_0 + 3) = -2\sin\frac{4x_0 + 2\Delta x + 6}{2}\sin\frac{2\Delta x}{2} =$$

$= -2\sin(2x_0 + 3 + \Delta x)\sin\Delta x$. Производная $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-2\sin(2x_0 + 3 + \Delta x)\sin\Delta x}{\Delta x} =$

$= -2\sin(2x_0 + 3)$ (воспользовались тем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\sin(2x_0 + 3 + \Delta x) = \sin(2x_0 + 3)$, так как функция $\sin x$ непрерывна и замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$)

3. $y = \sqrt[3]{x-2}$ в точке $x = 2$. Приращение функции равно $\Delta y = \sqrt[3]{(2+\Delta x) - 2} - \sqrt[3]{(2-2)}$.

Тогда производная в этой точке равна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\Delta x}\right)^2} = \infty$

4. $y = |\ln x|$ в точке $x = 1$. Приращение функции в точке $x = 1$ равно

$$\Delta y = y(1 + \Delta x) - y(1) = |\ln(1 + \Delta x)| - |\ln 1| = \begin{cases} \ln(1 + \Delta x), \; \textit{при} \; \Delta x > 0 \\ -\ln(1 + \Delta x), \; \textit{при} \; \Delta x < 0 \end{cases}$$

Так как слева и справа от точки $x = 1$ приращения заданы разными формулами, то в точке $x = 1$ найдем односторонние производные

$$y'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1, \; y'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

(воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1$)

Так как $y'_+(1) \neq y'_-(1)$, то в точке $x = 1$ функция недифференцируема.

В точке $M(1,0)$ график функции имеет односторонние касательные.

Правосторонняя касательная образует с осью X угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Левосторонняя касательная образует осью X угол $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис .4).

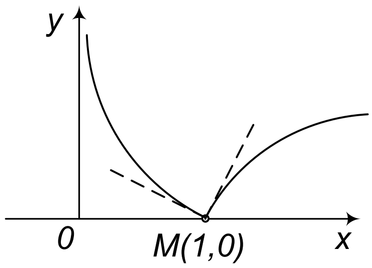

Рис.4

Замечание Функция непрерывна в точке $x = 1$, но недифференцируема в этой точке. Отсюда следует, что из непрерывности функции в точке не следует ее дифференцируемость в этой точке.

5. $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x = 0$. Так как область определения функции $x \geq 0$, то в точке $x = 0$ может существовать только правосторонняя производная. Приращение функции равно

$\Delta y = \sqrt{(0 + \Delta x)^3} - \sqrt{(0)^3} = \sqrt{(\Delta x)^3}$, при $\Delta x > 0$. Тогда $y'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^3}}{\Delta x} = 0$

В точке $O(0,0)$ график имеет правостороннюю касательную, совпадающую с осью X.

Примеры для самостоятельного решения

Пользуясь определением, найти производные функций в указанных точках

1. $y = 2x^3 + 3x - 5$ в точке $x = 1$ **2.** $y = 3^{2x}$ в точке $x = x_0$,

3. $y = \sqrt[5]{x^3}$ в точке $x = 0$ **4.** $y = 3|x| + 1$ в точке $x = 0$

Ответы

1. 9 **2.** $3^{2x_0}\ln 3$ **3.** ∞ **4.** $y'_+(0) = 3$, $y'_-(0) = -3$

§ 2 Правила дифференцирования функции

При практическом вычислении производных пользуются таблицей производных основных элементарных функций и правилами дифференцирования.

2.1. Таблица производных

Запишем таблицу производных основных элементарных функций.

Таблица производных

№	Функция	Производная	Примечание
1	C	0	
2	x^{μ}	$\mu x^{\mu-1}$	
3	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$
3а	e^x	e^x	
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
4а	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
5	$\sin x$	$\cos x$	
6	$\cos x$	$-\sin x$	
7	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, k целое
8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k$, k целое
9	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
10	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
11	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	
12	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

Пример 2.1

Доказать формулы из таблицы производных

1. 3, 3а. **2 .** 2

Решение

1. $y = a^x$ (формула 3). Приращение функции равно $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Тогда производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a$ (воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = a^x \ln a$).

$y = e^x$ (формула 3а). По формуле 3 производная $y' = e^x \ln e = e^x$.

2. $y = x^\mu$ (формула 2). Приращение функции равно $\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu((1 + \dfrac{\Delta x}{x})^\mu - 1)$

Тогда производная равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^\mu((1 + \frac{\Delta x}{x})^\mu - 1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^\mu((1 + \frac{\Delta x}{x})^\mu - 1)}{x \frac{\Delta x}{x}} = \mu \cdot x^{\mu - 1}$

(воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu$)

Пример 2.2

Найти производные функций

1. $y = \sqrt{x}$ **2.** $y = \dfrac{1}{x}$ 3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **4..** $y = 2^x$ **5.** $y = \log_5 x$

Решение

1.. $y = \sqrt{x}$. Запишем выражение в виде степени с дробным показателем $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Тогда производная равна $y' = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (формула 2, $\mu = \dfrac{1}{2}$). Обычно производную функции $y = \sqrt{x}$ запоминают в виде $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $y=\dfrac{1}{x}$ **.** Запишем выражение в виде степени с отрицательным показателем $y=x^{-1}$

Тогда производная $y'=-x^{-1-1}=-x^{-2}$ (формула 2 , $\mu=-1$)

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Запишем функцию в виде $y=x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда $y'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

4. $y=2^x$. Производная $y'=2^x\ln 2$ (формула 3 , $a=2$)

5. $y=\log_5 x$. Производная $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$ (формула 4 $a=5$)

Примеры для самостоятельного решения

1. Доказать формулы 4, 4а, 5 из таблицы производных

2. Найти производные функций, пользуясь таблицей производных

а. $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$ **б.** $y=\dfrac{1}{x^4}$ **в.** $y=\sqrt[8]{x}$ **г.** $y=\log_2 x$ **д.** $y=4^x$

Ответы

2. а. $y'=-\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$ **б.** $y'=-\dfrac{4}{x^5}$ **в.** $y'=\dfrac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

г. $y'=-\dfrac{1}{x\ln 2}$ **д.** $y'=4^x\ln 4$

2.2. Правила вычисления производных связанные с арифметическими операциями над функциями

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемые в точке x функции, тогда в этой точке дифференцируемы их сумма, произведение, частное и справедливы формулы

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (5)$$

$$(uv)'=u'v+uv' \qquad (6)$$

$$(cu)'=cu' \qquad (7)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},\ v\neq 0 \quad (8)$$

Замечания

1. Из формулы (7) следует, что постоянный множитель можно выносить за знак производной.

2. Формула (5) справедлива для любого конечного числа слагаемых. то есть

$$\left(u_1 \pm u_2 \pm \dots u_n\right)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots u_n' \qquad (9)$$

3. Из замечаний 1 и 2 следует формула

$$\left(c_1 u_1 \pm c_2 u_2 \pm \dots c_n u_n\right)' = c_1 u_1' \pm c_2 u_2' \pm \dots c_n u_n' \quad (10)$$

Пример 2.3

Пользуясь формулами (5) – (10) и таблицей производных, найти производные следующих функций

1. $y = 3x^2 + 2x + 4$ **2.** $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

3. $y = \left(x^2 + 1\right)\cos x$ **4.** $y = \dfrac{-5\sin x}{2 + \sqrt{x}}$

Решение

1. $y = 3x^2 + 2x + 4$. По формуле (10) получим $y' = \left(3x^2 + 2x + 4\right)' = 3\left(x^2\right)' + 2\left(x\right)' + \left(4\right)' =$

$= 3 \cdot 2x + 2 = 6x + 2$

(воспользовались формулой 1 из таблицы производных ($\mu = 1,\ \mu = 2,\ \mu = 0$)

2. $y = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$. По формуле (10) имеем $y' = 2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' - 3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'$. Записав функции в виде степеней с дробными и отрицательными показателями и воспользовавшись формулой 1 из таблицы производных, получим

$$y' = 2\left(x^{-2}\right)' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - 3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 2(-2)x^{-2-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} - 3\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -4x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{4}{3}}$$

3.. $y = \left(x^2 + 1\right)\cos x$. По формуле (6) производная произведения равна

$y' = \left(x^2 + 1\right)' \cos x + (x^2 + 1)(\cos x)'$. Воспользовавшись таблицей производных, получим

$y' = 2x\cos x - (x^2 + 1)\sin x$

4. $y = \dfrac{-5\sin x}{2 + \sqrt{x}}$. Вынесем множитель -5 за знак производной и воспользуемся формулой (8)

производная частного . Получим $y' = -5\left(\dfrac{\sin x}{2 + \sqrt{x}}\right)' = -5\dfrac{(\sin x)'\left(2 + \sqrt{x}\right) - \sin x\left(2 + \sqrt{x}\right)'}{\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$

По формулам из таблицы производных окончательно найдем $y' = -5\dfrac{\cos x\left(2 + \sqrt{x}\right) - \sin x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$

Замечание При решении примеров не следует увлекаться упрощением выражений, полученных в результате дифференцирования, поскольку основная цель научиться дифференцировать, а не проверить умение делать тождественные преобразования. По этой причине ответы к примерам для самостоятельного решения даны без упрощения выражений, полученных в результате дифференцирования

Примеры для самостоятельного решения

Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных, найти производные следующих функций

1. $y = 5x^2 - 2x + 6$ **2.** $y = x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$ **3.** $y = 2x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4 . $y = (x^3 + 1)\sin x$ **5.** $y = (\sin x + 3\cos x)\sqrt[3]{x}$

6 $y = \dfrac{tgx}{\sin x + 2}$ **7.** $y = \dfrac{3\sqrt[3]{x} - \cos x}{2\sin x}$

Ответы

1. $y'' = 10x - 2$ **2** $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{4}{x^3}$ **3.** $y' = 6x^2 + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{5}{3}}$

4. $y' = 3x^2\sin x + (x^3 + 1)\cos x$ **5.** $y' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\sin x + 3\cos x) + \sqrt[3]{x}(\cos x - 3\sin x)$

6. $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\sin x + 2) - tgx\cos x}{(\sin x + 2)^2}$ **7.** $y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^{-\frac{2}{3}} + \sin x\right)\sin x - (3\sqrt[3]{x} - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$

2.3. Производная сложной функции

Сформулируем правило дифференцирования сложной функции.

Теорема 3 Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x , а функция $y = f(u)$ дифференцируема точке u тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u u'_x \ . \qquad (11)$$

Функция u называется промежуточным аргументом.

Правило нахождения производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций.

Например, если $y = f(u)$, $u = u(x)$, $x = x(t)$, то производная сложной функции $y = f(u(x(t)))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} \ . \qquad (12)$$

Пример 2.4

Найти производные сложных функций

1 . $y = \sin^6 x$ **2.** $y = \ln\cos 2x$

Решение

1. $y = \sin^6 x$. Это сложная функция вида $y = u^6$, где $u = \sin x$.

По формуле (11) производная функции равна $y'_x = \left(u_u^6\right)'_u \left(\sin x\right)'_x = 6u^5 \cos x = 6\sin^5 x \cos x$

2. $y = \ln\cos 2x$. Функция представляет собой суперпозицию трех функций $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = 2x$. Тогда $y'_x = (\ln u)'_u (\cos v)'_v (2x)'_x = \frac{1}{u}(-\sin v)\cdot 2 = \frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2 = -2tg2x$

При решении примеров мы выписывали составляющие данных сложных функций и указывали аргументы, по которым производится дифференцирование. На практике составляющие функции обычно не выписываются, а указываются только промежуточные аргументы. Например, решение примера $y = \ln\cos 2x$ можно оформить так:

$$y'_x = (\ln\cos 2x)'_x = (\ln\cos 2x)'_{\cos 2x} (\cos 2x)'_{2x} (2x)' = \frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2$$

После приобретения навыков дифференцирования не указываются и промежуточные аргументы.

Пример 2.5

Доказать формулу $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$, где $u = u(x)$

Доказательство

Пусть $y = \ln|u|$. Если $u > 0$, то по теореме о производной сложной функции $y' = (\ln|u|)' = (\ln u)' = (\ln u)'_u \cdot u' = \frac{1}{u}u'$. Если $u < 0$, то по теореме о производной сложной функции $y' = (\ln|u|)' = (\ln(-u))' = \frac{1}{-u}\cdot(-u)' = \frac{1}{u}u'$

Для вычисления односторонних производных справедливо утверждение.

Теорема 3 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в $(x_0, x_0 + \delta)$ и непрерывна в точке x_0 , то $y'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} y'(x)$, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в $(x_0 - \delta, x_0)$ и непрерывна в точке x_0 то $y'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} y'(x)$.

Пример 2.6

Исследовать на дифференцируемость функцию $y = |\ln x|$.

Решение

Раскрывая абсолютную величину, получим $y=|\ln x|=\begin{cases}\ln(x), & при\ x\geq 1\\ -\ln(x), & при\ x<1\end{cases}$. Функция дифференцируема при $x\neq 1$, и ее производная равна $y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & при\ x>1\\ -\dfrac{1}{x}, & при\ x<1\end{cases}$. В точке $x=1$ найдем односторонние производные $y'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x}=1$

$y'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-\dfrac{1}{x})=-1$. Так как $y'_-(1)\neq y'_+(1)$, то в точке $x=1$ функция недифференцируема.

Замечание При самостоятельном решении примеров не следует увлекаться тождественными преобразованиями выражений , полученных в результате дифференцирования. Поэтому ответы к примерам приводятся без упрощения выражений, полученных в результате дифференцирования.

Примеры для самостоятельного решения

1.а. $y=\ln tgx$ **б.** $y=3^{\cos x}$ **в.** $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos x}$

2. Исследовать функцию на дифференцируемость

$$y=\begin{cases}\sin x, & при\ x\geq 0\\ x^2, & при\ x<0\end{cases}$$

Ответы

1. а. $y'=\dfrac{1}{tgx}\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **б.** $y'=3^{\cos x}\ln 3(-\sin x)$ **в.** $y'=\dfrac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}x\cdot\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)$

2. В точке $x=0$ функция недифференцируема. $y'_+(0)=1$, $y'_-(0)=0$

2.4. Логарифмическая производная

Логарифмической производной функции - это производная от логарифма данной функции

Вычисление логарифмической производной называется логарифмическим дифференцированием. Этот метод применяется при вычислении производной степенно-показательной функции $y=u^v$. Так как $\ln y=v\ln u$, то есть производная логарифма $y=u^v$ равна производной произведения . Также логарифмическое дифференцирование рекомендуется применять при вычислении производной произведений и частных, так как логарифмы произведений и частных равны сумме и разности логарифмов, что упрощает дифференцирование.

Пример 2.7

Вывести формулу для производной степенно- показательной функции $y = u^v$

Решение

Прологарифмировав, получим $\ln y = v \ln u$. Дифференцируя это равенство, найдем

$\frac{y'}{y} = (v \ln u)' = \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$. Тогда

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right). \qquad (13)$$

Эту формулу можно запомнить, а можно каждый раз проделывать необходимые выкладки.

Есть другой способ вычисления производной степенно-показательной функции. По основному логарифмическому тождеству можно записать $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$. Тогда

$(u^v)' = \left(e^{\ln u^v}\right)'_x = e^{v \ln u}(v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$. Опять получилась формула (13).

Пример 2.8

Найти производную степенно- показательных функций

1. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$ **2.** $y = (\sin 3x)^{x^2 - 1}$

3. $y = (arctgx)^x + x^{arctgx}$ **4.** $y = arctg(x^x)$

Решение

1. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$. Прологарифмируем это равенство по основанию e. Тогда

$\ln y = \sqrt{x} \ln(\sin x)$. Дифференцируя равенство по x и считая

y функцией от x, получим $\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sin x + \sqrt{x} \frac{\cos x}{\sin x} \right)$.

Отсюда $y' = y \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sin x + \sqrt{x} \frac{\cos x}{\sin x} \right) = (\sin x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sin x + \sqrt{x} ctgx \right)$

2. $y = (\sin 3x)^{x^2 - 1}$. По основному логарифмическому тождеству $y = e^{\ln(\sin 3x)^{x^2-1}} = e^{(x^2-1)\ln \sin x}$. Тогда

$y' = \left(e^{(x^2-1)\ln \sin 3x}\right)' = e^{(x^2-1)\ln \sin 3x}\left((x^2 - 1)\ln \sin 3x\right)' = (\sin 3x)^{x^2-1}\left(2x \ln \sin 3x + (x^2 - 1)\frac{3\cos 3x}{\sin 3x} \right)$

3. $y = (arctgx)^x + x^{arctgx}$. Положим $y_1 = (arctgx)^x$, $y_2 = x^{arctgx}$ и найдем их производные методом логарифмического дифференцирования. Логарифмируя равенство $y_1 = (arctgx)^x$, получим

$\ln y_1 = x\ln arctgx$, тогда $\dfrac{y_1'}{y_1} = \left(x' \ln arctgx + x(\ln arctgx)'\right) = \ln arctg + x\dfrac{1}{arctgx}\dfrac{1}{1+x^2}$ и

$y_1' = y_1\left(x' \ln arctgx + x(\ln arctgx)'\right) = (arctgx)^x(\ln arctg + x\dfrac{1}{arctgx}\dfrac{1}{1+x^2})$.

Аналогично $\ln y_2 = arctgx \cdot \ln x$. Дифференцируя, получим

$\dfrac{y_2'}{y_2} = \left(\ln x \cdot (arctgx)' + (\ln x)' \cdot arctgx'\right) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{arctgx}{x}$ и

$y_2' = y_2(\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{arctgx}{x}) = x^{arctgx}(\dfrac{\ln x}{1+x^3} + \dfrac{arctgx}{x})$.

Производная $y' = y_1' + y_2' = (arctgx)^x\left(\ln arctgx + \dfrac{x}{arctgx(1+x^2)}\right) + x^{arctgx}\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{arctgx}{x}\right)$

Способ решения громоздкий. Рациональнее представить функцию в виде $y = e^{x\ln arctgx} + e^{arctg\ln x}$, а затем найти производную (см. решение примера 2)

4. $y = arctg(x^x)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$y' = (arctg(x^x))'(x^x)' = \dfrac{1}{1+(x^x)^{2.}}(x^x)'$. Так как $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$,

То $(x^x)' = (e^{x\ln x})'(x\ln x)' = e^{x\ln x}(\ln x + \dfrac{x}{x}) = x^x(\ln x + 1)$. Тогда $y' = \dfrac{1}{1+(x^x)^2}\cdot x^x(\ln x + 1)$

Пример 2.9

Найти логарифмические производные функций

1. $y = \dfrac{1-x}{1+x^3}\cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$ **2.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

Решение

1. $y = \dfrac{1-x}{1+x^3}\cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$. Прологарифмировав равенство, получим

$\ln|y| = \ln\left|\dfrac{1-x}{1+x^3}\cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x\right| = \ln|1-x| - \ln|1+x^3| - 3\ln|\sin x| + 2\ln|\cos x|$. Тогда

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{3x^2}{1+x^3} - 3\dfrac{\cos x}{\sin x} + 2\dfrac{-\sin x}{\cos x}$ (воспользовались формулой $(\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$). Отсюда

$y' = y\cdot(\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{3x^2}{1+x^3} - 3\dfrac{\cos x}{\sin x} + 2\dfrac{-\sin x}{\cos x}) = \dfrac{1-x}{1+x^3}\cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot (\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3x^2}{1+x^3} - 3ctgx - 2tgx)$

2. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$. Прологарифмировав равенство, получим

$\ln|y| = \ln\left|\sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5=x}}}\right| = \ln|x| + \dfrac{1}{3}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{15}\ln|5-x|$. Дифф6ренцируя, найдем

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}+\frac{1}{15(5-x)}$$. Тогда $$y'=\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}+\frac{1}{15(5-x)}\right)$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти производные степенно-показательных функций

а. $y=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$ **б.** $y=(arctgx)^{\sqrt{x^2+1}}$

в. . $y=(\arcsin x)^x+x^{\arcsin x}$ **г.** $y=\sin(x^x)$

2. Найти логарифмические производные функций

а. $y=(2x+3)^3(5x-2)(x-1)$ **б.** $y=\dfrac{(4x-7)^3\sqrt[5]{(5x+2)^2}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$

Ответы

1. а $y'=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ln\cos x-\sqrt[3]{x}tgx\right)$ **б.** $y'=(arctgx)^{\sqrt{x^2+1}}\left(\dfrac{\ln arctgx}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{arctgx\sqrt{1+x^2}}\right)$

в. $y'=(\arcsin x)^x\left(\ln\arcsin x+\dfrac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)+x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

г. $y'=\cos\cdot(x^x)\cdot x^x(\ln x+1)$

2. а. $y'=(2x+3)^3(5x-2)(x-1)\left(\dfrac{6}{2x+3}+\dfrac{5}{5x-2}+\dfrac{1}{x-1}\right)$

б. $y'=\dfrac{(4x-7)^3\sqrt[5]{(5x+2)^2}}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}\left(\dfrac{12}{4x-7}+\dfrac{25}{2(5x+2)}-\dfrac{4}{6x-1}\right)$

2.5. Производная обратной функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема, имеет непрерывную обратную функцию $x=g(y)$ и $y'_x\neq 0$, то производная x'_y существует и справедлива формула

$$g'_y(y)=\frac{1}{f'_x(x)} \text{ или } x'_y=\frac{1}{y'_x} \quad . \qquad (14)$$

Геометрически эту формулу можно интерпретировать следующим образом.

На рис 5 изображен график функции $y=f(x)$ или $x=g(y)$ и касательная к нему в точке $M(x,y)$

Из геометрического смысла производной следует, что $y'_x=tg\alpha$, $x'_y=tg\beta$

Так как $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, то $tg\alpha=tg(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=ctg\beta=\dfrac{1}{tg\beta}$ или $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$

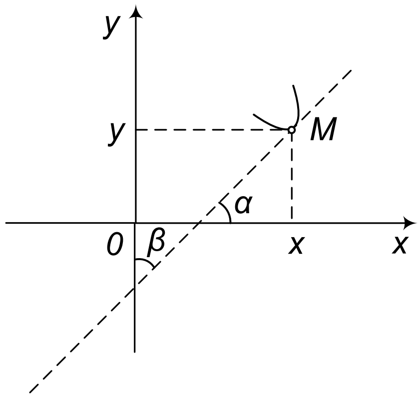

Рис. 5

Пример 2.10

Найти x'_y

1. $y=3x^5+2x^3+1$ **2.** $y=x+e^x$

Решение

1. $y=3x^5+2x^3+1$. По формуле (14) $x'_y=\dfrac{1}{(3x^5+2x^3+1)'}=\dfrac{1}{15x^4+6x^2}$

2. $y=x+e^x$. По формуле (14) $x'_y=\dfrac{1}{(x+e^x)'}=\dfrac{1}{1+e^x}$

Пример 2.11

Найти y'_x

1. $x=y\ln y-y$ **2.** $x=y-\sin y$

Решение

1. $x=y\ln y-y$. Из формулы (14) следует, что $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$. Тогда

$$y'_x=\frac{1}{(y\ln y-y)'}=\frac{1}{\ln y+\frac{y}{y}-1}=\frac{1}{\ln y}.$$

2. $x=y-\sin y$. По формуле $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ найдем $y'_x=\dfrac{1}{(y-\sin y)'}=\dfrac{1}{1-\cos y}$

Пример 2.12

Доказать формулу $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $x>0$, если известно, что $(a^x)' = a^x \ln a$

Решение

Пусть $y=\log_a x$ **,** тогда $x=a^y$. Находим $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x\ln a}$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти x'_y , если

а. $y=x^2+x+1$ **б.** $y=xe^{-x}$

2. Найти y'_x , если

а. $x=y+\sin y$ **б.** $x = y arctg y$

3. Доказать формулу $(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$, если $(x^3)' = 3x^2$

Ответы

1. а. $x'_y = \dfrac{1}{2x+1}$ **б.** $x'_y = \dfrac{1}{e^{-x} - xe^{-x}}$

2. а. $y'_x = \dfrac{1}{1+\cos y}$ **б.** $y'_x = arctg y + \dfrac{y}{1+y^2}$

2.6. Производная функции, заданной неявно

Дано уравнение с двумя переменными $F(x.y)=0$. Если существует дифференцируемая в (a,b) функция $y(x)$, которая будучи подставлена в уравнение $F(x.y)=0$ обращает его в тождество , то будем говорить, что $y(x)$ неявная функция , определенная уравнением $F(x.y)=0$

Для нахождения производной можно из уравнения $F(x.y)=0$ выразить функцию $y(x)$, а затем найти ее производную. Часто это бывает трудно. Производную можно найти так: продифференцировать уравнение по *x*, считая у функцией от *x* и из полученного уравнения найти $y'(x)$.

Пример 2.13

Найти производную функции, заданной неявно

1 $y^3-3y+3x=1$ **2.** $\cos(x+y)=y$ **3.** $x+arctg y = y$

Решение

1. $y^3-3y+3x=1$**.** Дифференцируя обе части уравнения по x и считая y функцией от x, получим $3y^2y'-3y'+3=0$ **.** Отсюда находим $y'=\dfrac{1}{1-y^2}$

2. $\cos(x+y)=y$**.** Дифференцируем обе части уравнения по x (y функция от x), находим $-\sin(x+y)(x+y')=y'$. Отсюда $y'=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

3. $x+arctgy=y$ Дифференцируя обе части уравнения, получим $1+\dfrac{y'}{1+y^2}=y'$. Отсюда $y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные функций, заданных неявно

1. $y=e^{x+y}$ **2.** $x^3+y^3+3xy=0$ **3.** $\sin y=x^2-y$

Ответы

1. $y'=\dfrac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}}$ **2.** $y'=-\dfrac{x^2+y}{y^2+x}$ **3.** $y'=\dfrac{2x}{\cos y+1}$

2.7. Производная функции, заданной параметрически

Задана система дифференцируемых в (a,b) функций $\begin{cases}\cdot\, x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ параметра t

Если эта система определяет явную функцию $y=y(x)$, то будем говорить, что функция $y(x)$ задана параметрически.

Теорема 4 Дана система дифференцируемых функций $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$.

Если функция $x(t)$ удовлетворяет условиям теоремы о производной обратной функции (имеет непрерывную обратную функцию $t=t(x)$ и $t'(x)=\dfrac{1}{x'(t)}$), то система определяет явную функцию $y(x)=y(t(x))$. Производная этой функции равна

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \quad . \qquad (15)$$

Пример 2.14

Найти производную функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

Решение

1. . $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ **Первый способ** . Из первого уравнения найдем $t = \dfrac{x-1}{2}$ и подставим во второе уравнение. Получим $y = \dfrac{(x-1)^2}{4}$. Тогда $y' = (\dfrac{(x-1)^2}{4})' = \dfrac{2(x-1)}{4} = \dfrac{x-1}{2}$

Второй способ. По формуле (15) $y'_x = \dfrac{(t^2)'}{(2t+1)'} = \dfrac{2t}{2} = t$

2. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ По формуле (15) имеем $y'_x = \dfrac{(\sin t - t\cos t)'}{(\cos t + t\sin t)'} = \dfrac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\sin t + \sin t + t\cos t} = tgt$

3. $\begin{cases} x = \ln x \\ y = t^3 \end{cases}$ По формуле (15) $y'_x = \dfrac{(t^3)'}{(\ln t)'} = \dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производную функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = t^5 - 7 \end{cases}$

Ответы

1 $y'_x = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$ **2.** $y'_x = \dfrac{2t - t^3}{1 - 2t^3}$ **3.** $y'_x = \dfrac{5t^3}{2}$

§ 3 Дифференциал функции

Функция $y = f(x)$ дифференцируема

Определение 2 Дифференциалом функции называется произведение производной этой функции на приращение аргумента Δx и обозначается dy .

По определению дифференциал независимой переменной равен ее приращению $dx = \Delta x$. Итак

$$dy = y'dx \quad . \qquad (17)$$

Напомним, что выражение $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ называется приращением функции.
Приращение и дифференциал функции связаны формулой $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$,

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, Следовательно, $\alpha(\Delta x)\Delta x$ имеет более высокий порядок малости, чем Δx и приращение функции Δy эквивалентно дифференциалу dy. Таким образом, дифференциал- главная , линейная относительно Δx часть приращения.

Геометрический смысл дифференциала . На рис.6 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке $M(x, f(x))$, α угол наклона касательной к оси X Из геометрического истолкования производной следует, что $y' = tg\alpha$. Тогда $AB = AM \cdot tg\alpha = y'tg\alpha = dy$. Таким образом, дифференциал это приращение ординаты касательной, $AC = \Delta y$ приращение функции. $BC = \Delta y - dy = \alpha(\Delta x)\Delta x$

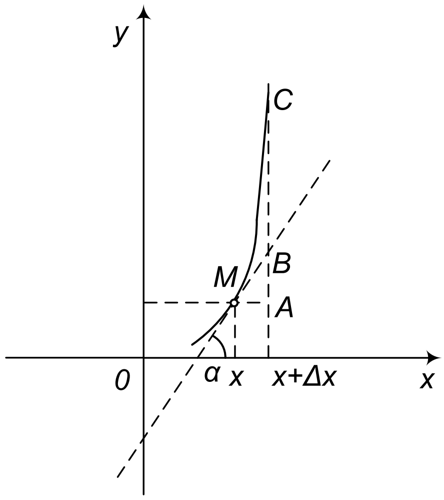

Рис 6

Дифференциал обладает следующими свойствами:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$ **2**. $d(u \cdot v) = vdu + udv$

3. $d(cu) = cdu$ **4.** $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{duv - udv}{v^2}$

5. Инвариантность формы дифференциала

Пусть $y = f(x)$ и $x = x(t)$ функция аргумента t .

Тогда $dy = y'_x dx$, но $dx = x'_t dt \neq \Delta x$. То есть дифференциал сохраняет свою форму, если $x = x(t)$ функция аргумента t

Пример 3.1

Найти приращение и дифференциал функции

$y = 3x^2 - x$

Решение

$y = 3x^2 - x$. Приращение функции равно

$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (3x^2 - x) = 6x\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x$

Так как дифференциал линейная относительно Δx часть приращения, то сгруппировав слагаемые, содержащие Δx в первой степени, получим $\Delta y = (6x-1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Тогда дифференциал функции $dy = (6x^2-1)dx$, $(\Delta x)^2$ величина более высокого порядка малости чем Δx

Пример 3.2

Найти дифференциал функции

а. $y = \ln x - \cos x$ **б.** $y = 5^x \arccos\frac{1}{x}$

Решение

а. $y = \ln x - \cos x$. Так как дифференциал суммы равен сумме дифференциалов, то

$$dy = d\ln x - d\cos x = \frac{1}{x}dx + \sin x dx$$

б. . $y = 5^x \arccos\frac{1}{x}$. Дифференциал произведения равен

$$dy = d5^x \cdot \arccos\frac{1}{x} + 5^x d\arccos\frac{1}{x} = 5^x \ln 5dx - 5^x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(-\frac{1}{x^2})dx$$

Заметим, что не обязательно пользоваться свойствами дифференциала, а можно найти производную и результат умножить на. dx

Пример 3.3

Вычислить приближенно $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x_0 = 0{,}15$

Решение

Приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ тогда $y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y$

Так как $\Delta y \approx dy$, то $y(x+\Delta x) \approx y(x) + dy$. Возьмем $x = 0$, $\Delta x = 0{,}15$, тогда

$y(0+0{,}15) \approx y(0) + dy$. Найдем

$$dy = (\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}})'\Delta x = \frac{1}{5}(\frac{2-x}{2+x})^{-\frac{4}{5}} \frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}\Delta x = -\frac{4}{5}(\frac{2-x}{2+x})^{-\frac{4}{5}} \frac{\Delta x}{(2+x)^2}$$

При $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}15$ $dy = -\frac{4}{5}\frac{0{,}15}{4} = -0{,}03$.Тогда

$$y(0+0{,}15) \approx y(0) + dy = \sqrt[5]{\frac{2-0}{2+0}} - 0{,}03 = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$$

Пример 3.4

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{8{,}1}$

Решение

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$. Положим $x=8$, $\Delta x=0{,}1$

Тогда $y(x+\Delta x)\approx y(x)+dy$ Найдем $dy=(\sqrt[3]{x})'\Delta x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x$. Найдем dy при $x=8$, $\Delta x=0{,}1$. $dy=\frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}}\cdot 0{,}1=0{,}008$ и $y(8+0{,}1)\approx y(8)+0.008=2{,}008$

Примеры для самостоятельного решения

1 Найти приращение и дифференциал функции

$y=x^2-3x+2$

2 Найти дифференциал функции

а. $y=x\ln x-x$ **б.** $y=2^x\arcsin x^2$

3.Вычислить приближенно

а. $y=x^3-4x^2+5x+3$ при. $x=1{,}03$ **б.** $y=x^3-7x^2+8$ при $x=5{,}01$

4 . Вычислить приближенно

а. $\sqrt{4{,}41}$ **б.** $\lg 10{,}08$ **(**указание $\ln 10=2{,}30$**)**

Ответы

1. $\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x$ $dy=(2x-3)dx$

2. а. $dy=\ln x\cdot dx$ **б.** $dy=(2^x\ln 2\cdot\arcsin x^2+2^x\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x)dx$

3. а. 5 **б.** $-41{,}95$ **4 . а.** $2{,}1025$ **б.** $1{,}0035$

§ 4 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируем в интервале (a,b). Ее производную y' будем называть производной первого порядка или первой производной. Если $y'(x)$имеет производную, то будем ее называть второй производной функции $y(x)$ и обозначать $y''(x)$, то есть производная от производной первого порядка называется производной второго порядка. Итак,

$$y''(x)=(y'(x))' \quad . \qquad (18)$$

Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка

$y'''(x)=(y''(x))'$ и так далее.

В связи с неудобством употребления четырех и более штрихов для производных принято обозначение y^{IV} четвертая производная y^{V} пятая производная и так далее или $y^{(4)}, y^{(5)}\dots y^{(n)}$ (индекс заключают в скобки, чтобы отличать производную от степени).

Если существует производная $n-1$ порядка $y^{(n-1)}(x)$, то производная порядка n равна

$$y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \qquad (19)$$

Если функция имеем производную порядка n, то она называется n раз дифференцируемой.

Если функция имеет производные всех порядков, то она называется бесконечно дифференцируемой

Справедливы формулы;

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{n}$ **2.** $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$,

3. Формула для вычисления производной порядка n произведения имеет вид

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+...+uv^{(n)} \qquad (20)$$

Пример 4.1

Найти производные порядка n

1. $y=x^3+2x+3$ **2.** $y=e^x$ **3.** $y=\sin x$

Решение

1. $y=x^3+2x+3$. Вычисляя последовательно производные , получим $y'=3x^2+2$ **,** $y''=6x$ **,** $y^{(3)}=6$ **,** $y^{(4)}=y^{(5)}=...0$

2 . $y=e^x$ **.** Последовательно находим $y'=e^x$ **,** $y''=e^x$ **…** $y^{(n)}=e^x$ для любого n

3 $y=\sin x$ **.** Находим $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$**,** $y''=(\sin(x+\frac{\pi}{2}))'=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\frac{\pi}{2})$ **.**

Можно доказать, что $y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$ для любого n.

4 . Найти производные второго порядка

а. $y=e^{-x^2}$ **б.** $y=x^2\sin x$

Решение

1 $y=e^{-x^2}$ **.** Последовательно находим $y'=e^{-x^2}(-2x)$

$y''=-2(e^{-x^2}(-2x)x+e^{-x^2})=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$

2. $y=x^2\sin x$. По формуле (20) производная второго порядка произведения равна

$$y''=(\sin x)''\cdot x^2+2(\sin x)'\cdot(x^2)'+\sin x\cdot(x^2)''=\sin(x+2\frac{\pi}{2})\cdot x^2+2\sin(x+\frac{\pi}{2})\cdot 2x+\sin x\cdot 2=$$

$=-2\sin x\cdot x^2-4\cos x\cdot x+\sin x\cdot 2$ (воспользовались формулой для вычисления производной первого и второго порядка функции $\sin x$)

Дифференциалы высших порядков

Дана функция $y = f(x)$. Существует дифференциал функции $dy = y'(x)dx$. Будем называть его дифференциалом первого порядка.

Определение 3 Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка и обозначается $d^2 y = d(dy)$.

Дифференциалом третьего порядка называется дифференциал от дифференциала второго порядка и обозначается $d^3 y = d(d^2 y)$ и так далее . Если существует порядка $n-1$ то дифференциал порядка n равен

$$d^n y = d\left(d^{(n-1)} y\right) \quad . \qquad (21)$$

Найдем выражения для $d^n y$

а. если x независимая переменная и **б.** если $x = x(t)$ функция аргумента t

а. x - независимая переменная, тогда $dx = \Delta x$ - постоянное и $dy = y'dx$,

$d^2 y = d(y'dx) = dxd\,(y') = dx(y')' dx = y''(dx)^2$ (вынесли постоянный множитель dx за знак дифференциала). Рассуждая аналогично , получим

$$d^n y = y^{(n)} (dx)^n \; . \qquad (22)$$

б. $x = x(t)$ - функция аргумента t Так как дифференциал обладает инвариантностью формы , то $dy = y'dx$, но $\Delta x \neq dx$. Тогда $d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = dy'dx + y'd(dx) = (y')'dx \cdot dx + y'd(dx)$ $= y''(dx)^2 + y'd^2 x(t)$ (воспользовались формулой для дифференциала произведения)

$$d^2 y = y''(dx)^2 + y'd^2 x(t) \; . \qquad (23)$$

Пример 4.2

Найти . $d^3 y$, если $y = \sin^2 x$

Решение

$y = \sin^2 x$ **.** По формуле (22) $d^3 y = y^{(3)} (dx)^3$ **.** Найдем производные

$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$

$y^{(3)} = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$ **.** Тогда дифференциал третьего порядка равен
$d^3 y = -4\sin 2x(dx)^3$

Пример 4.3

Найти $d^2 y$, если $y = 4x^5 - 7x^2 + 1$

а. x независимая переменная **б.** $x = x(t)$

Решение

а. x независимая переменная По формуле (22) $d^2y = y''(dx)^2$. Найдем производные $y' = 20x^4 - 14x$, $y'' = 80x^3 - 14$ и поставим y'' в формулу. Получим $d^2y = (80x^3 - 14)(dx)^2$

б. $x = x(t)$. Подставляя в формулу (23) $d^2y = y''(dx)^2 + y'd^2x(t)$, найденные выше значения производных , получим $d^2y = (80x^3 - 14)(dx)^2 + (20x^4 - 14x)d^2x(t)$

Примеры для самостоятельного решения

1 Найти производные указанных порядков

а. $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$ найти $y^{(4)}$. **б** $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ найти $y^{(2)}$.

в. $y = 2^x$ найти $y^{(n)}$ г. $y = \cos x$ найти $y^{(n)}$

2. Найти d^2y, если $y = x\sqrt{1 + x^2}$

3. $y = \ln\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ Найти d^2y, если

а. x независимая переменная **б.** $x = x(t)$

Ответы

1. а. $y^{(4)} = 72$ **б.** $y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ **в.** $y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$ **г.** $y^{(n)} = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$

2. $d^2y = \dfrac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}(dx)^2$ **3. а.** $d^2y = -4\dfrac{1 + 3x^4}{(1 - x^4)^2}(dx)^2$

б. $d^2y = -4\dfrac{1 + 3x^4}{(1 - x^4)^2}(dx)^2 + \dfrac{-4}{1 - x^4}\cdot d^2x$

§ 5 Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

В этом параграфе рассмотрим применение производной к вычислению пределов. Напомним, что неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$ называется дробь у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю, неопределенностью типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ называется дробь , у которой числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Вместо термина найти предел употребляют термин раскрыть неопределенность соответствующего типа .

Сформулируем правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Теорема 5 Требуется найти $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ или $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$. Пусть в некоторой окрестности точки a, за исключением самой этой точки, существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$. Пусть далее существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ (конечный или бесконечный) . Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$

Замечания

1.Теорема справедлива и для случая $a=\infty$

2.Равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ справедливо, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует. Может оказаться, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, а $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ существует. Это означает, что правило Лопиталя не применимо, и пример надо решать другим способом.

3.При практическом решении примеров знак равенства пишут сразу, а допустимость этого равенства проверяется в процессе выполнения выкладок

4. Правило Лопиталя можно сочетать с элементарными методами раскрытия неопределенностей

5. Если после применения правила Лопиталя опять получится неопределенность, то его можно применить еще раз, и так поступать до тех пор, пока неопределенность не исчезнет или мы убедимся, что правило неприменимо.

Неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ **основные типы неопределенностей**. Другие типы неопределенностей сводятся к неопределенностям этих типов с помощью тождественных преобразований

1. Неопределенности типа $0\cdot\infty$. Найти $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$, где $f(x)\to 0$ **,** $g(x)\to\infty$

Неопределенность сводится к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ с помощью преобразования $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ и к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью преобразования $f(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$

Замечание Так как будем применять правило Лопиталя , то в числителе надо оставить более сложное выражение, а в знаменатель перенести более простое.

2 Неопределенность типа $\infty-\infty$. Найти $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $f(x)\to+\infty$ $g(x)\to+\infty$ или $f(x)\to-\infty$ $g(x)\to-\infty$. Тогда неопределенность сводится к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ с помощью преобразования $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$

3 . Неопределенности 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} . Сводятся к неопределенности типа $0\cdot\infty$ с помощью преобразования

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{\ln(f(x))^{g(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln(f(x))} \quad . \qquad (24)$$

Если $f(x)\to 1$ $g(x)\to\infty$ то $\ln f(x)\to 0$ и $g(x)\ln f(x)$ неопределенность $0\cdot\infty$

Если $f(x)\to 0$ $g(x)\to 0$ то $\ln f(x)\to\infty$ и $g(x)\ln f(x)$ неопределенность $0\cdot\infty$

Если $f(x)\to\infty$ $g(x)\to 0$ то $\ln f(x)\to\infty$ и $g(x)\ln f(x)$ неопределенность $0\cdot\infty$

Таким образом , степенно-показательные неопределенности сводятся к неопределенности типа $\infty\cdot 0$

Пример 5.1

Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$ **2 .** $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{\ln(x^2-4x+3)}{\ln(x-3)}$ **3 .** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4+15x^2}-2-x}{\ln(x^2+5)-\ln(x+7)}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln x}$ **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$

Решение

1. . $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$. Подставляя вместо x предельное значение, получим

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}=(\frac{8-16+8}{8-24+16}=\frac{0}{0})$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$

Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-4x^2+4x)'}{(x^3-12x+16)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=(\frac{3\cdot 4-8\cdot 2+4}{3\cdot 4-12}=\frac{0}{0})$$

Опять получилась неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя еще раз, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-8}{6x}=\frac{12-8}{6\cdot 2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

2. $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{\ln(x^2-4x+3)}{\ln(x-3)}$ Нетрудно проверить, что это неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Применяя правило Лопиталя , получим

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{\ln(x^2-4x+3)}{\ln(x-3)}=\lim_{x\to 3+0}\frac{\frac{2x-4}{x^2-4x+3}}{\frac{1}{x-3}}=\lim_{x\to 3+0}\frac{2(x-2)(x-3)}{x^2-4x+3}$$

Опять получилась неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Можно применить правило Лопиталя, а можно закончить решение примера элементарными методами, разложив знаменатель на множители и сократив на $x-3$.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3+0}\frac{2(x-2)}{x-1}=\frac{2(3-2)}{3-1}=1$$

3 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4+15x^2}-2-x}{\ln(x^2+5)-\ln(x+7)}$. Подставляя $x=2$, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4+15x^2}-2-x}{\ln(x^2+5)-\ln(x+7)}=\left(\frac{\sqrt[3]{4+15\cdot 4}-2-2}{\ln(4+5)-\ln(2+7)}=\frac{0}{0}\right)$$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4+15x^2}-2-x}{\ln(x^2+5)-\ln(x+7)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3}\left(4+15x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 30x-1}{\frac{2x}{x^2+5}-\frac{1}{x+7}}=\frac{10\cdot 2(64)^{-\frac{2}{3}}-1}{\frac{4}{4+5}-\frac{1}{2+7}}=\frac{\frac{20}{16}-1}{\frac{3}{9}}=\left(\frac{5}{4}-1\right)\cdot 3=\frac{3}{4}$$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. Это неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. По правилу Лопиталя (применяя его дважды) подучим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{4x^3-6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{12x^2-6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{24x}=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln x}$. Это неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}3x^3=\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$. Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. По правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x}=0$$

Пример 5.2

Раскрыть неопределенности типа $0\cdot\infty$

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi}{2\cdot}x$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}tg\frac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0+0}x^2\ln x$

Решение

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2\cdot}x$ **.** Это неопределенность типа $0\cdot\infty$. Сведем ее к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя, Тогда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi}{2\cdot}x=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\dfrac{1}{tg\dfrac{\pi}{2}x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\dfrac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}x}\dfrac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}tg\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)$. Это неопределенность типа $\infty\cdot 0$. Сведем ее к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ и

применим правило Лопиталя. Тогда $\lim\limits_{x\to 1}tg\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)=\lim\dfrac{\ln(2-x)}{ctg\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\dfrac{\dfrac{-1}{2-x}}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}x}\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

3. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^2\ln x$. Это неопределенность типа $0\cdot\infty$.Сведем ее к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ и

применим правило Лопиталя **.** Тогда $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim\dfrac{x^2}{-2}=0$

Пример 5.3

Раскрыть неопределенности типа $\infty-\infty$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x)$ **2.** . $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Решение

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x)$. Это неопределенность типа $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ элементарными преобразованиями

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1)=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1}{\dfrac{1}{x}}$. Полученную неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ раскроем по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}\left(-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{6}{x}\right)=2$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.Это неопределенность типа $\infty-\infty$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}$. Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

Пример 5.4

Раскрыть неопределенности типа $1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **2** $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0+\infty}x^{\frac{1}{\ln\left(e^{x}-1\right)}}$

Решение

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Это неопределенность типа 1^{∞} . Сведем ее к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ по формуле (24) . Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}$. Предел показателя найдем по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=-\dfrac{1}{2}$ (воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и тем , что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$)

Следовательно , $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ Это неопределенность типа ∞^{0}. По формуле (24) получим

$\lim\limits_{x\to o+o}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\sin x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0+0}\sin x\ln x}$ **.** Неопределенность типа $0\cdot\infty$ в показателе сведем к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применим правило Лопиталя. Тогда

$$\lim_{x\to 0+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0$$

(так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$)

3. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$. Это неопределенность типа 0^0. По формуле (24) получим

$\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to o+0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}}$. В показателе неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ раскроем по правилу

Лопиталя. Получим $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{e^x x} = 1$**,** поскольку $e^x \underset{x\to 0+0}{\to} 1$ и

$\frac{e^x-1}{x}\underset{x\to 0+0}{\to} 1$ (замечательный предел)**.** Тогда $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = e$

Примеры для самостоятельного решения

1. Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

а. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$ **б.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x^2-3x+1}$

в. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ **г.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2^x}$ **д .** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x+3}{4x^3-x^2+1}$

2. Раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$

а. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot\ln tgx$ **б.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\ln\frac{x+5}{x+2}$ **в.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$

3. Раскрыть неопределенность $\infty-\infty$

а. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$ **б.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

4. Раскрыть степенно показательные неопределенности.

а. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$ **б.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ **в.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

Ответы

1. а. .∞ **б.** -6 **в.** 2 **г.** ∞ **д.** $\frac{1}{4}$ **2. а. -1** **б .** $\ln 3$

3. а. $-\frac{3}{2}$ **б.** -1 **4. а.** $e^{-\frac{1}{2}}$ **б.** $e^{\frac{1}{30}}$ **в.** $e^{-\frac{1}{2}}$

Глава 2. Применение производных к исследованию функций

§ 1 Монотонность функции

Определение 4 Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $\langle a,b \rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a.b \rangle$ таких, что $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $\langle a,b \rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a.b \rangle$ таких , что $x_1 > x_2$, справедливо неравенство. $f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными.**

Сформулируем достаточное условие монотонности функции.

Теорема 5 Пусть функция $y = f(x)$ определена в $\langle a,b \rangle$, дифференцируема в (a,b)

и непрерывна в точках a и b , если они принадлежат $\langle a,b \rangle$. Тогда

а. если $y' > 0$ в (a,b) , то функция возрастает в $\langle a,b \rangle$,

б. если $y' < 0$ в (a,b) , то функция убывает в $\langle a,b \rangle$.

Замечание Условие не является достаточным. Функция $y = x^3$ возрастает на интервале $(-\infty,+\infty)$, а ее производная $y' = 3x^2 \geq 0$

Определение 5 Точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными точками. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими.

Иногда их называют **критическими точками первого рода.**

Сформулируем правило нахождения промежутков **монотонности функции.**

Чтобы найти промежутки монотонности функции, надо найти критические точки функции и нанести их на числовую ось. Этими точками числовая ось будет разбита на интервалы, в каждом из которых производная сохраняет знак. Определяем знак производной в каждом из интервалов (для этого следует определить знак производной в любой точке этого интервала). Тогда, если в интервале производная положительна, то функция возрастает, если производная в интервале отрицательна, то функция убывает в этом интервале.

Пример 1.1

Найти промежутки монотонности функции

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ **2.** $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + x$

3. $y = x + \frac{4}{x}$ **4.** $y = \begin{cases} x^3 + 2, если\ x > 0 \\ -x^2 + 2, если\ x \leq 0 \end{cases}$

Решение

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Функция определена на всей числовой оси. Ее производная равна

$y' = 6x^2 + 6x - 12$. Она определена на всей числовой оси и обращается в ноль при

$x = -2$ и $x = 1$. Эти точки разбивают числовую ось на интервалы $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$, $(1,+\infty)$

Производная -квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом и корнями $x = -2$ и $x = 1$. Поэтому в интервалах $(-\infty,-2)$, $(1,+\infty)$ производная положительна, в интервале $(-2,1)$ отрицательна . Отсюда следует, что в интервалах $(-\infty,-2)$ $(1,+\infty)$ функция возрастает, в интервале $(-2,1)$ убывает. Знаки производной изображены на рис.7

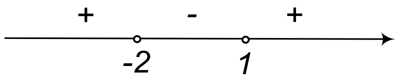

Рис.7

2 $y = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + x$. Функция определена на всей числовой оси. Дифференцируя, получим

$y' = x^{-\frac{1}{3}} + 1 = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Производная равна нулю при $x = -1$ и равна ∞ при $x = 0$.

Точками $x = -1$ и $x = 0$ числовая ось разбивается на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$

Определим знак производной в каждом интервале . Удобно взять точки

$$-8 \in (-\infty,-1)\ ,\ y'(-8) = (-8)^{-\frac{1}{3}} + 1 = \frac{1}{2} > 0,\ -\frac{1}{8} \in (-1,0),\ y'(-\frac{1}{8}) = (-\frac{1}{8})^{-\frac{1}{3}} + 1 = -1 < 0\ ,$$

$$8 \in (0,+\infty)\ ,\ y'(8) = (8)^{-\frac{1}{3}} + 1 = \frac{3}{2} > 0$$

Отсюда следует, что в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(0,+\infty)$ производная положительна, следовательно, функция возрастает. В интервале $(-1,0)$, производная отрицательна, следовательно, функция убывает. Знаки производной изображены на рис.8

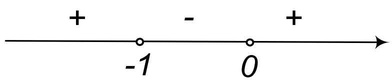

Рис. 8

3. $y = x + \dfrac{4}{x}$. Функция не определена в точке $x = 0$. Дифференцируя , получим

$y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$. Производная не существует в точке $x = 0$ и обращается в ноль в точках

$x = \pm 2$. Разобьем числовую ось на интервалы $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,+2)$, $(2,+\infty)$.

Нетрудно проверить что в интервалах $(-\infty,-2)$ и $(2,+\infty)$ производная положительна (например, вычислив ее значение в точках $x = \pm 3$) . Следовательно, в этих интервалах функция возрастает. В интервалах $(-2{,}0)$ и $(0,+2)$ производная отрицательна (это можно проверить, вычислив ее значение в точках $x = \pm 1$). Следовательно, в этих интервалах функция убывает.

Знаки производной изображены на рис.9.

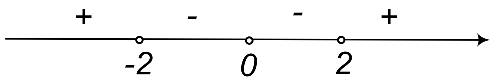

Рис 9

4. $y = \begin{cases} x^3 + 2, если\ x > 0 \\ -x^2 + 2, если\ x \le 0 \end{cases}$ **.** Производная $y' = \begin{cases} 3x^2, если\ x > 0 \\ -2x, если\ x < 0 \end{cases}$ **.** Она не определена в точке $x = 0$. В интервале $(-\infty, 0)$ производная $y' = -2x > 0$. Следовательно, в этом интервале функция возрастает. В интервале $(0, +\infty)$ производная $y' = 3x^2 > 0$. Следовательно, в этом интервале функция возрастает. Знаки производной показаны на рис.10. Итак, функция возрастает на всей числовой оси. В точке $x = 0$ найдем односторонние производные $y'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} y' = \lim\limits_{x \to 0+0} 3x^2 = 0$, $y'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-0} y' = \lim\limits_{x \to 0-0} (-2x) = 0$. Поскольку левосторонняя и правосторонняя производная совпадают, то в точке $x = 0$ функция дифференцируема и ее производная равна нулю.

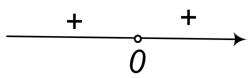

Рис. 10

Примеры для самостоятельного решения

Найти промежутки монотонности функции.

1. $y = x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 5$ **2.** $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ **3.** $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ **4.** $y = (x-3)\sqrt{x}$

Ответы

1. В интервале $(-\infty, 1)$ убывает, в интервале $(1, +\infty)$ возрастает . **2** .Убывает в $(-\infty, 3)$ и $(3, +\infty)$, $x = 3$ - точка разрыва второго рода. **3.** В интервалах $(-\infty, -1)$ $(1, +\infty)$ убывает, в интервале $(-1, 1)$ возрастает . **4**. Область определения функции $[0, +\infty)$, в интервале $(0, 1)$ убывает, в интервале $(1, +\infty)$ возрастает.

§ 2 Экстремум функции

Определение 6 **1**. Точка x_0 называется точкой максимума $(\max)$ функции $y = f(x)$, если $f(x_0) > f(x)$ для всех точек $x \ne x_0$, принадлежащих $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2. Точка x_0 называется точкой минимума $(\min)$ функции $y = f(x)$, если $f(x_0) < f(x)$ для всех точек $x \ne x_0$, принадлежащих $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Точки минимума и максимума называются точками **экстремума функции.**

Сформулируем необходимое условие экстремума.

Теорема 6 В точке экстремума производная равна нулю (если она существует).

Замечание Условие не является достаточным. Производная функции $y = x^3$ равна $y' = 3x^2$. Она равна нулю при $x = 0$, но в этой точке функция не имеет экстремума.

Напомним, что точки в которых производная равна нулю или не существует, называются **критическими**. В этих точках функция может иметь экстремум.

Определение 7 Будем говорить что при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, если $y' > 0$ или $y' < 0$ при $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$,

производная меняет знак

а. с плюса на минус, если $y' > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $y' < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,

б . с минуса на плюс, если $y' < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $y' > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Сформулируем первое достаточное условие экстремума.

Теорема 7 Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за исключением может быть точки x_0 и непрерывна в точке x_0.

1. Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то в этой точке экстремума нет.

2. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак, то в этой точке экстремум есть, а именно:

а. если с плюса на минус, то максимум,

б. если с минуса на плюс, то минимум.

Сформулируем правило нахождения точек **экстремума функции.**

Находим критические точки функции (точки в которых производная равна нулю или не существует), наносим их на числовую ось. Этими точками числовая ось разбивается на интервалы Определяем знак производной в каждом интервале. Отметим, что эта процедура совпадает с процедурой нахождения промежутков монотонности функции .

Далее исследуем критические точки. Если в критической точке функция непрерывна и при переходе через эту точку производная меняет знак, то функция в этой точке имеет экстремум

Сформулируем второе достаточное условие экстремума.

Теорема 8 Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0. Пусть далее $y'(x_0) = 0$ и существует $y''(x_0)$. Тогда

а. если $y''(x_0) < 0$, то в точке x_0 максимум,

б.если $y''(x_0) > 0$, то в точке x_0 минимум,

в.если $y''(x_0) = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 2.1

Найти точки экстремума функции, пользуясь первым достаточным условием экстремума

1. $y=\left(1-x^2\right)^3$ **2.** $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ **3.** $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}x$ **4.** $y=(x+1)\cdot e^x$

Решение

1. $y=\left(1-x^2\right)^3$. Производная $y'=3\left(1-x^2\right)^{2}\cdot(-2x)=-6x\cdot(1-x^2)^2$. Она определена на всей числовой оси и обращается в ноль в точках $x=0$ и $x=\pm1$. Этими точками числовая ось разбивается на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$. Так как $(1-x^2)^2>0$ при $x\neq\pm1$, то при переходе через эти точки производная не меняет знак. Поэтому в точках $x=\pm1$ экстремума нет . Очевидно, что $y'>0$ при $x\in(-\infty,0)$, $y'<0$ при $x\in(0,+\infty)$. Знаки производной показаны на рис.11. При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус , поэтому в точке $x=0$ максимум .

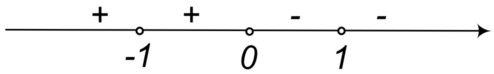

Рис.11

2 . $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$. Функция не определена при $x=1$. Ее производная равна

$$y'=\frac{\left(x^2-x+4\right)'(x-1)-\left(x^2-x+4\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+4\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-x-2x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

. Производная не существует при $x=1$ и равна нулю при $x=-1$ и $x=3$. Этими точками числовая ось разбивается на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,3)$,

$(3,+\infty)$. Нетрудно проверить, что при производная положительна в интервалах $(-\infty,-1)$ и

$(3,+\infty)$ (например вычислив ее значение в точках $x=-2$ и $x=4$). Производная отрицательна в интервалах $(-1,1)$ и $(1,3)$, так как при переходе через точку $x=1$ она не меняет знак и отрицательна при $x=0$. Знаки производной изображены на рис.12.

При переходе через точку $x=-1$ производная меняет знак с плюса на минус. Поэтому в этой точке максимум . При переходе через точку $x=3$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке минимум. При переходе через точку производная не меняет знак.

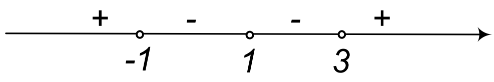

Рис.12

3. $y = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3}x$. В примере 1.1 (4) найдены критические точки и промежутки монотонности.

Знаки производной показаны на рис. 13. При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус, производная в этой точке равна нулю. Поэтому в точке максимум . и график имеет горизонтальную касательную. В точке $x = 0$ производная равна ∞ и при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс . Поэтому в этой точке минимум, и график имеет вертикальную касательную.

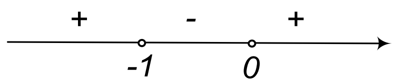

Рис.13

4. $y = (x+1)\cdot e^x$. Производная функции равна $y' = (x+1)\cdot e^x + e^x = e^x(x+2)$. Она определена на всей оси равна нулю при $x = -2$. Эта точка разбивают числовую ось на интервалы $(-\infty,-2)$, $(-2,+\infty)$. Нетрудно проверить, что $y' < 0$ в интервале $(-\infty,-2)$ и $y' > 0$ в интервале $(-2,+\infty)$. Знаки производной показаны на рис. 14 . При переходе через точку $x = -2$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке минимум . График имеет горизонтальную касательную

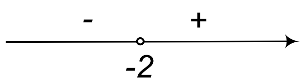

Рис. 14

Пример 2.2

Пользуясь вторым достаточны м условием найти экстремум функции

1. $y = x^3 - 12x + 5$ **2.** $y = x^2 e^{-x}$

3. $y = \dfrac{2}{-3x^4 - 36x^2 + 20x^3}$ **4.** $y = x\ln x$

Решение

1 . $y = x^3 - 12x + 5$. Производная равна $y' = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$. Она определена на всей числовой оси равна нулю при $x = \pm 2$. Производная второго порядка равна $y'' = 6x$.

В точке $x = -2$ имеем $y' = 0$, $y'' = 6\cdot(-2) < 0$. Поэтому в этой точке максимум.

В точке $x = 2$ имеем $y' = 0$, $y'' = 6\cdot 2 > 0$. Поэтому в этой точке минимум

2. $y = x^2 e^{-x}$. Производная $y' = \left(x^2 e^{-x}\right)' = \left(x^2\right)' e^{-x} + x^2\left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}\left(2x - x^2\right)$

Она определена на всей оси и равна нулю при $x = 2$ и $x = 0$. Производная второго порядка равна

$$y''=\left(e^{-x}\left(2x-x^2\right)\right)'=\left(e^{-x}\right)'\left(2x-x^2\right)+e^{-x}\left(2x-x^2\right)'=-e^{-x}\left(2x-x^2\right)+e^{-x}\left(2-2x\right)=e^{-x}\left(-2x+x^2+2-2x\right)=$$
$$=e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)$$

В точке $x=2$ имеем $y'=0$, $y''=e^{-2}(4-4\cdot 2+2)<0$.Поэтому в точке $x=2$ максимум.

В точке $x=0$ имеем $y'=0$, $y''=e^{0}(0-0+2)>0$, поэтому в точке $x=0$ минимум.

3 $y=\dfrac{2}{-3x^4-36x^2+20x^3}$. Ясно, что в точках, в которых знаменатель имеет максимум , дробь имеет минимум и наоборот. Найдем точки экстремума знаменателя $z=-3x^4-36x^2+20x^3$

Производная $z'=-12x^3-72x+60x^2=-12x(x^2-5x+6)$. Производная равна нулю при $x=0$, $x=2$, $x=3$.

Производная второго порядка $z''=-36x^2-72+120x=-12x(x^2-10x+6)$

В точке $x=0$ имеем $z'=0$ $z''=-72<0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция $z(x)$ имеет максимум, поэтому в этой точке функция $y(x)$ имеет минимум

В точке $x=2$ имеем $z'=0$, $z''=-12\cdot(3\cdot 4-10\cdot 2+6)=24>0$. Следовательно , в точке $x=2$ функция $z(x)$ имеет минимум, поэтому в этой точке функция $y(x)$ имеет максимум.

В точке $x=3$ имеем $z'=0$, $z''=-12\cdot(3\cdot 9-10\cdot 3+6)=-36<0$. Следовательно , в точке $x=3$ функция $z(x)$ имеет максимум, Поэтому в этой точке функция $y(x)$ имеет минимум.

4. $y=x\ln x$. Область определения функции $(0,+\infty)$, Производная $y'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+\dfrac{x}{x}=\ln x+1$. Она определена в области определения функции и равен нулю при $\ln x+1=0$ или $\ln x=-1$, $x=e^{-1}$. Производная второго порядка равна $y''=\dfrac{1}{x}$.

В точке $x=e^{-1}$ имеем $y'=0$ $y''=e>0$, поэтому в этой точке функция имеет минимум

Примеры для самостоятельного решения

1. Пользуясь первым достаточным условием найти экстремум функции

а. $y=x^3-12x$ **б** $y=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x}+2$

в. $y=x^2\ln x$ **г.** $y=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. Пользуясь вторым достаточным условием найти экстремум функции.

а. $y=\dfrac{3}{4}x^4-3x^3-9x^2$ **б.** $y=\dfrac{1}{3x^4+8x^3-18x^2+3}$

в. $y=xe^{-x}$ **г.** $y=x^4e^{-x^2}$

Ответы

1. а При $x = -2$ максимум **,** при $x = 2$ минимум **б.** При $x = 0$ максимум,, при $x = 1$ минимум **в.**При $x = -2$ максимум **г.** При $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ минимум

2. а.При $x = 0$ максимум, при $x = -2$ минимум, при $x = 3$ минимум **б .** При $x = -3$ максимум ,при $x = 0$ минимум,при $x = 1$ максимум **в.** При $x = 1$ максимум **г**. При $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ максимум, при $x = 0$ минимум.

§ 3 Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция непрерывна в замкнутом промежутке [a, b], то она

достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего

значения (теорема Вейерштрасса). Наибольшее и наименьшее значение может достигаться либо в критических точках, лежащих внутри промежутка, либо на его концах.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке $[a,b]$, надо вычислить значение функции в критических точках, лежащих в (a, b) и на концах промежутка (то есть в точках $x = a$ и $x = b$). Среди вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание Если функция непрерывна в открытом промежутке или в бесконечном промежутке, то она может не достигать в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значения.

Пример 3.1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных промежутках

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $x \in [1,3]$ **2.** $y = x \cdot \ln x$, $x \in [1,e]$

3 . $y = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in (-\infty,+\infty)$ **4.** $y = x^3 - 3x$,. $x \in [0,+\infty)$

Решение

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $x \in [1,3]$. Производная функции равна $y' = 3x^2 - 6x$. Она определена на всей оси и равна нулю в точках $x = 0$ и $x = 2$. Промежутку $[1,3]$ принадлежит только одна критическая точка $x = 2$. Вычисляя значение функции в этой точке и на концах промежутка, получим $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4$, $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$, $y(3) = 3^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 4$

Тогда наибольшее значение функции равно 4 при $x = 3$, наименьшее значение равно 0 при $x = 2$

2. $y = x \ln x$, $x \in [1,e]$. Область определения функции $x > 0$. Производная равна $y' =' \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Она определена при $x > 0$ и равна нулю при $\ln x = -1$ или $x = \frac{1}{e}$.

Точка $x=\frac{1}{e}$ не принадлежит промежутку. Вычисляя значение функции на концах промежутка, получим $y(1)=1\cdot\ln 1=0$, $y(e)=e\cdot\ln e=e$. Отсюда следует, что наибольшее значение функции равно e, наименьшее значение функции равно 0.

3. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ $x\in(-\infty,+\infty)$. Производная функции равна

$$y'=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Она определена на всей числовой оси и равна нулю в точках $x=1$ и $x=-1$

Обе точки принадлежат $(-\infty,+\infty)$. Вычислим значения функции в точках $x=\pm1$ и найдем

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{1+x^2}$. $y(-1)=\dfrac{-1}{1+(-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$, $y(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, то

отсюда следует, что наибольшее значение функции равно $\frac{1}{2}$ при $x=1$, наименьшее значение равно $-\frac{1}{2}$ при $x=-1$.

4. $y=x^3-3x$, $x\in[0,+\infty)$. Производная функции равна $y'=3x^2-3$. Она определена на всей оси и равна нулю при $x=\pm1$. Промежутку $[0,+\infty)$ принадлежит только точка $x=1$. Вычислим значение функции точках $x=0$, $x=1$ и найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x)$

Имеем $y(0)=0$, $y(1)=1-3=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x)=+\infty$. Отсюда следует , что наименьшее значение функции равно -2 при $x=1$, наибольшее значение не достигается.

Примеры для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных промежутках

1. $y=x^5-5x^3-8$, $x\in[0,2]$ **2 .** $y=x^2\ln x$, $x\in[1,e]$. **3.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

4. $y=xe^{-x}$, $x\in[0,1]$

Ответы

1. Наибольшее значение равно -8 при $x=0$, наименьшее равно $-8-6\sqrt{3}$ при $x=\sqrt{3}$

2.Наименьшее значение равно 0 при $x=1$, наибольшее e^2 при $x=e$

3.Наибольшее значение равно 1 при $x=0$, наименьшее значение не достигается

4. Наименьшее значение 0 при $x=0$, наибольшее $\frac{1}{e}$ при $x=1$

Задачи с геометрическим и физическим содержанием

Некоторые задачи физики, техники, геометрии сводятся к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции в зависимости от аргумента x, а также тех значений x при которых эти значения достигаются.

Для решения таких задач надо, исходя из условия выбрать независимую переменную, выразить через нее исследуемую функцию, найти ее область задания. Методами, рассмотренными выше, найти ее наибольшее и наименьшее значение.

Задача 1 Изгородью длины L огородить прямоугольный участок наибольшей площади, примыкающий одной стороной к стене.

Решение

Из условия задачи следует, что $2BC + CD = L$ (рис.15) . Пусть $BC = x \geq 0$, тогда

$СД = L - 2x \geq 0$ или $x \leq \frac{L}{2}$. Площадь прямоугольника равна $S(x) = BC \cdot CD = x(L - 2x)$.

Требуется найти наибольшее значение функции $S(x)$ на промежутке. $\left[0, \frac{L}{2}\right]$.

Производная функции равна $S'(x) = L - 4x$. Она равна нулю при $x = \frac{L}{4} \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$. Вычисляя

значение функции в этой точке и на концах промежутка , получим $S(\frac{L}{4}) = \frac{L^2}{8}$, $S(0) = S(\frac{L}{2}) = 0$.

Следовательно, при $BC = x = \frac{L}{4}$ площадь прямоугольного участка наибольшая

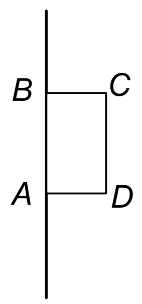

Рис.15

Задача 2 Положительное число **a** представить в виде суммы двух положительных слагаемых так чтобы сумма кубов этих чисел была наименьшей.

Решение

Пусть x-первое число тогда $a - x$ - второе число . Так как числа положительны , то

$x \in [0, a]$. Требуется найти наименьшее значение функции $S(x) = x^3 + (a - x)^3$ на этом

промежутке . Производная $S'(x) = 3x^2 - 3(a - x)^2$. Производная равна нулю, если

$3x^2 = 3(a - x)^2$. Так как числа положительны , то $x = a - x$ или $x = \frac{a}{2}$. Поскольку

$S(0) = S(a) = a^3$, $S(\frac{a}{2}) = \frac{a^3}{8}$, то сумма кубов будет наименьщей, если числа равны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из всех прямоугольников с данным периметром Р найти прямоугольник наибольшей площади.

2 . Положительное число **а** представить в виде суммы двух положительных слагаемых так , чтобы их произведение было наибольшим.

3. В полукруг радиуса R вписать прямоугольник с наибольшим периметром

Ответы

1. Квадрат со стороной $x = \dfrac{a}{4}$. **2.** Числа равны $\dfrac{a}{2}$. **3.** Стороны прямоугольника равны $\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$ и $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}R$

§ 4 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в (a,b). Тогда график функции в каждой точке интервала имеет касательную.

Определение 8 **1**. График функции называется выпуклым в (a,b), если все его точки лежат ниже любой касательной в (a,b) .

2. График функции называется вогнутым в (a,b), если все его точки лежат выше любой касательной в (a,b) .

На рис. 16 график выпуклый, на рис. 17 график вогнутый .

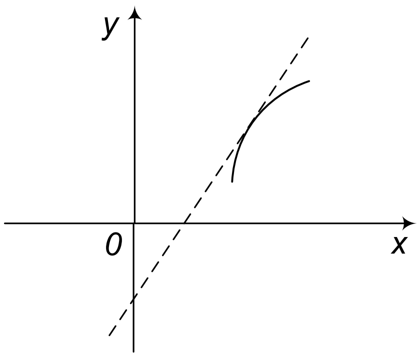

Рис.16

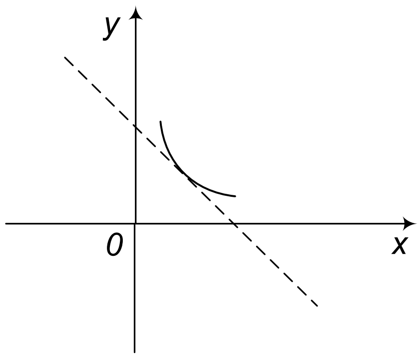

Рис.17

Сформулируем достаточное условие выпуклости и вогнутости графика функции.

Теорема 9 Функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в (a,b), тогда

а. если $y'' < 0$ в (a,b) , то график выпуклый в этом интервале,

б. если $y'' > 0$ в (a,b), то график вогнутый в этом интервале

Определение 9 Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции , если слева и справа от нее график имеет разные направления выпуклости.

Достаточное условие точки перегиба.

Теорема 19 Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба, если при переходе через точку x_0 производная второго порядка меняет знак.

Определение 10 Критическими точками второго рода называются точки, в которых производная второго порядка равна нулю или не существует.

Сформулируем правило нахождения промежутков **выпуклости, вогнутости и точек перегиба** графика функции.

Находим критические точки второго рода, то есть точки, в которых производная второго порядка не существует или обращается в нуль, разбиваем числовую ось этими точками на интервалы, в каждом из которых производная второго порядка сохраняет знак. Определяем этот знак (для этого достаточно определить знак производной второго порядка в какой- либо точке интервала).

На тех интервалах, где $y'' < 0$, график выпуклый , на тех интервалах , где $y'' > 0$, график вогнутый. Если в критической точке второго рода функция определена и при переходе через эту точку производная второго порядка меняет знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Пример 4.1

Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

1. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5$ **2.** $y = \frac{1}{x} + 4x^2$ **3 .** $y = \frac{x-2}{2x-1}$ **4.** $y = \sqrt[3]{x-2}$

Решение

1. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5$. Находим производные первого и второго порядков $y' = 4x^3 - 4x^2$

$y'' = 12x^2 - 8x = 12x(x - \frac{2}{3})$. Производная второго порядка определена на всей числовой оси и равна нулю при $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. Разобьем числовую ось на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$. Нетрудно проверить, что производная второго порядка положительна в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(\frac{2}{3}, +\infty)$ (например, вычислив ее значение в точках $x = \pm 1$). Поэтому в этих интервалах график вогнутый. В интервале $(0, \frac{2}{3})$ производная второго порядка отрицательна (например , ее значение при $x = \frac{1}{3}$ отрицательно). Поэтому в этом интервале график выпуклый.

Знаки y'' показаны на рис. 18. Точки с абсциссами $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$ -точки перегиба графика функции.

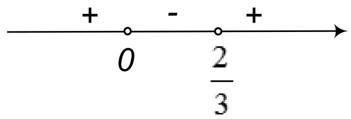

Рис. 18

2. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$. Область определения функции $x \neq 0$. Находим производные первого и второго порядков $y' = -\frac{1}{x^2} + 8x$, $y'' = \frac{2}{x^3} + 8 = 8\frac{\frac{1}{4} + x^3}{x^3}$. Производная второго порядка равна нулю при $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ и не существует при $x = 0$. Числовую ось разобьем на интервалы $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$, $(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0)$, $(0, +\infty)$. Нетрудно проверить, что производная второго порядка положительна в интервалах $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ и $(0, +\infty)$ (например, вычислив ее значение в точках $x = \pm 2$) и отрицательна в интервале $(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0)$ (например , вычислив ее значение в точке $x = -\frac{1}{2}$)
Знаки производной второго порядка показаны на рис.19. Отсюда следует, что в интервалах $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ и $(0, +\infty)$ график вогнутый, в интервале $(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0)$ график выпуклый.

Точка с абсциссой $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ -точка перегиба. Напомним, что в точке $x = 0$ функция не определена (поэтому эта точка н является точкой перегиба)

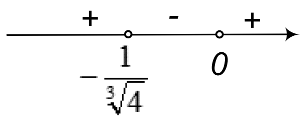

Рис. 19

3. $y = \frac{x+2}{2x-1}$. Область определения функции $x \neq \frac{1}{2}$. Найдем производные первого и второго порядков $y' = \frac{2x-1-2(x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{-5}{(2x-1)^2}$, $y'' = \left(\frac{-5}{(2x-1)^2}\right)' = \frac{20}{(2x-1)^3}$

Ясно, что $y'' = \frac{20}{(2x-1)^3} < 0$ при $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, поэтому в интервале $(-\infty, \frac{1}{2})$ график выпуклый $y'' = \frac{20}{(2x-1)^3} > 0$ в интервале $(\frac{1}{2}, +\infty)$, поэтому в этом интервале график вогнутый . Знаки производной второго порядка показаны на рис .20. Точек перегиба нет, так как при $x = \frac{1}{2}$ функция не определена.

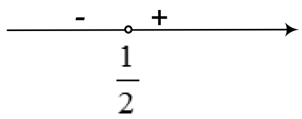

Рис. 20

4. $y = \sqrt[3]{x-2}$. Найдем производные первого и второго порядков $y' = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$,

$y'' = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}$. Производная второго порядка не существует при $x = 2$. Очевидно, что $y'' > 0$ в интервале $(-\infty, 2)$, следовательно, в этом интервале график вогнутый, $y'' < 0$ в интервале $(2, +\infty)$, следовательно, в этом интервале график выпуклый. Знаки производной второго порядка показаны на рис. 21. Точка с абсциссой $x = 2$ точка перегиба графика функции

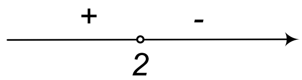

Рис. 21

Примеры для самостоятельного решения

Найти промежутки выпуклости вогнутости и точки перегиба графика функции

1 . $y = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 60x - 5$ **2.** $y = \frac{x}{1+x^2}$ **3.** $y = \frac{x-7}{x+2}$

Ответы

1 . В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0,1)$ график выпуклый, в интервалах $(-2,0)$ и $(1, +\infty)$

график вогнутый. Абсциссы точек перегиба $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$

2. .В интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ $(0, \sqrt{3})$ график выпуклый, в интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ $(\sqrt{3}, +\infty)$ график вогнутый. Абсциссы точек перегиба $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$

3. В интервале $(-\infty, -2)$ график выпуклый, в интервале $(-2, +\infty)$ график вогнутый. Точек перегиба нет.

§ 5 Асимптоты кривой

Определение 10 Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от точки N на кривой до этой прямой стремится к нулю, когда точка N , двигаясь по кривой , бесконечно удаляется от начала координат. На рис.2 $MN \to 0$ если $ON \to \infty$

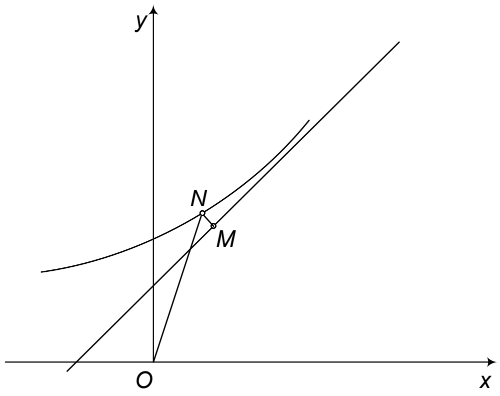

рис.2

Асимптоты бывают трех видов **вертикальные, горизонтальные и наклонные**

1. Вертикальные. Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен бесконечности, то прямая $x=a$ вертикальная асимптота.

2 . Горизонтальные. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, то прямая $y=A$ называется правой горизонтальной асимптотой. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$, то прямая $y=B$ называется левой горизонтальной асимптотой. Если $A=B$, то прямая $y=A$ - горизонтальная асимптота

3. Наклонные. Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=b_1$, то прямая $y=k_1x+b_1$ - правая наклонная асимптота . Если $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=b_2$, то прямая $y=k_2x+b_2$ - левая наклонная асимптота. Если $k_1=k_2=k$ и $b_1=b_2=b$, то прямая $y=kx+b$ наклонная асимптота.

Отметим, что горизонтальная асимптота частный случай наклонной при $k=0$

Пример 5.1

Найти асимптоты кривых

1. $y=\dfrac{2x}{x-4}$ **2**. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **3**. $y=xe^{\frac{1}{x}}$ **4**. $y=\dfrac{1+4x^3}{x}$

Решение

1. $y=\dfrac{2x}{x-4}$. Функция не определена в точке $x=4$. Так как $\lim\limits_{x\to4+0}\dfrac{2x}{x-4}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to4-0}\dfrac{2x}{x-4}=-\infty$, то прямая $x=4$ вертикальная асимптота. Найдем предел функции при $x\to\infty$. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}=2$, то прямая $y=2$ горизонтальная асимптота

2. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$. Функция не определена в точке $x=1$. Так как $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, то прямая $x=1$ вертикальная асимптота. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\pm\infty$, то могут быть наклонные асимптоты. Находим $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1$. Тогда прямая $y=x+1$ наклонная асимптота .

3. $y=xe^{\frac{1}{x}}$. Функция не определена при $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.Тогда $xe^{\frac{1}{x}}$ является неопределенностью типа $0\cdot\infty$. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя, предварительно сведя ее к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Получим

$\lim\limits_{x\to+0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}=0$,

тогда $\lim\limits_{x\to-0}xe^{\frac{1}{x}}=0$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$, то прямая $x=0$-вертикальная асимптота.

Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\pm\infty$. В этом случае график функции может иметь наклонную асимптоту. Находим $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\dfrac{1}{x}}=1$ (воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$) . Тогда прямая $y=x+1$ наклонная асимптота.

4. $y=\dfrac{1+4x^3}{x}$.Функция не определена при $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1+4x^3}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1+4x^3}{x}=-\infty$, то прямая $x=0$ вертикальная асимптота. Найдем предел функции при $x\to\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+4x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left(\dfrac{1}{x^3}+4\right)}{x}=+\infty$. В этом случае график может иметь наклонную асимптоту.

Находим $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\dfrac{1+4x^3}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3\left(\dfrac{1}{x^3}+4\right)}{x^2} = \infty$. Поскольку $k = \infty$, то наклонных асимптот нет.

Примеры для самостоятельного решения

Найти асимптоты кривых

1. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ **2.** $y = xe^x$ **3.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ **4.** $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$

Ответы

1. $x = 3$ вертикальная асимптота, $y = x - 3$ наклонная асимптота . **2.** $y = 0$ левая горизонтальная асимптота. **3.** $y = 0$ горизонтальная асимптота.

4. $y = 3x$ правая наклонная асимптота, $y = x$ левая наклонная асимптота.

§ 6 Общая схема исследования функции

Ранее при исследовании функции и построении графиков использовались элементарные приемы. В этом параграфе будет показано как провести исследование функции методами дифференциального исчисления. Исследовать функцию рекомендуется по следующей схеме.

а. Найти область определения функции
б. Выяснить является ли функция четной, нечетной или функцией общего вида, периодической.
в. Найти корни функции, точки пересечения с осью Y, а также выяснить другие особенности графика функции
г.Исследовать функцию на непрерывность. Если есть разрывы второго рода, то указать вертикальные асимптоты
д. Исследовать поведение функции на границе области определения. Исследовать наличие горизонтальных и наклонных асимптот
Заметим, что эти свойства исследуются без привлечения производной. Рекомендуется полученные результаты исследования нанести на эскиз графика функции
е. Найти производную первого порядка и с ее помощью найти интервалы монотонности. А также точки экстремума, вычислить значения функции в этих точках и нанести их на эскиз графика функции.
ж. Найти производную второго порядка и с ее помощью найти промежутки выпуклости и вогнутости . а также точки перегиба графика функции.
Отметим, что применение этой схемы носит рекомендательный характер.

Примеры 6.1

Исследовать функции и построить их графики

1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ **2.** $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ **3**. $y = x^2 \ln x$

4 . $y = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **5.** $y = \sin x + \cos x$

Решение

1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ Исследование функции проведем по предложенной выше схеме

а. Функции не определена при $x = 1$.
б. Функция общего вида.
в. Корень функции $x = 0$.
г. В примере 5.1 (2) установлено, что в точке $x = 1$ разрыв второго рода и $x = 1$ вертикальная асимптота (рис. 21) .

д. В примере 5.1 (2) установлено, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)} = \pm\infty$ и $y = x+1$ наклонная асимптота (рис. 21).

е. Производная функции равна

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\ .$$

Очевидно, что производная равна нулю при $x = 2$ и $x = 0$, не существует при $x = 1$.
Этими точками числовая ось разбивается не интервалы $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$,$(2,+\infty)$ (рис. 22) . Определяем знак производной в каждом из интервалов.
При $x \in (-\infty,0)$ производная положительна (это можно проверить, вычислив ее значение в точке $x = -1$). При $x \in (0,1)$ и $x \in (1,2)$ производная отрицательна (это можно проверить вычислив ее значение в точках $x = 0.5$ и $x = 1.5$) . При $x \in (2,+\infty)$ производная положительна (это можно проверить , вычисляя ее значение в точке $x = 3$). Знаки производной изображены на рис. 22.

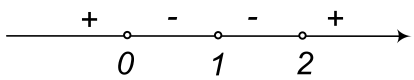

Рис.22

Поэтому в интервалах $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$ функция возрастает, в интервалах $(0,1)$ и $(1,2)$ убывает
В точке $x = 0$ максимум, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус , $y(0) = \dfrac{0}{0-1} = 0$. В точке $x = 4$ минимум , так как при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс , $y(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = 4$ (рис. 22).

ж. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. Производная второго порядка равна $y'' = \left(\dfrac{x^2-2}{(x-1)^2}\right)' = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}$. Сокращая на $x-1$ получим $y'' = \dfrac{2(x-1)^2-(x^2-2x)2}{(x-1)^3} = \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

Производная второго порядка не определена при $x=1$. Ясно, что $y''=\dfrac{1}{(x-1)^3}<0$ при $x\in(-\infty,1)$ (поэтому на промежутке $(-\infty,1)$ график выпуклый), $y''=\dfrac{1}{(x-1)^3}>0$ при $x\in(1,+\infty)$ (поэтому на промежутке $(1,+\infty)$ график вогнутый). Знаки y'' изображены на рис. 23. Точек перегиба нет, так как в точке $x=1$, при переходе через которую производная второго порядка меняет знак, функция не определена.

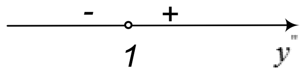

Рис. 23

График функции изображен на рис. 24.

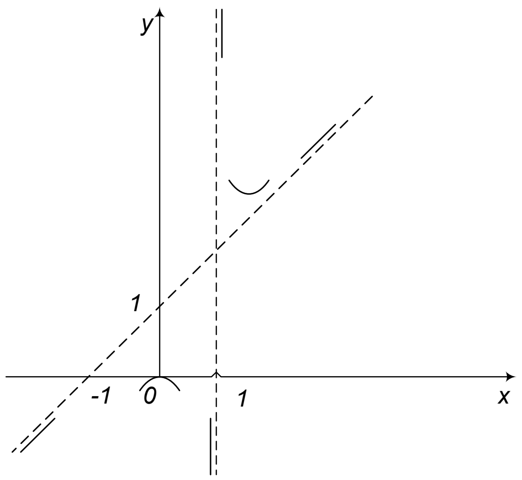

Рис. 21

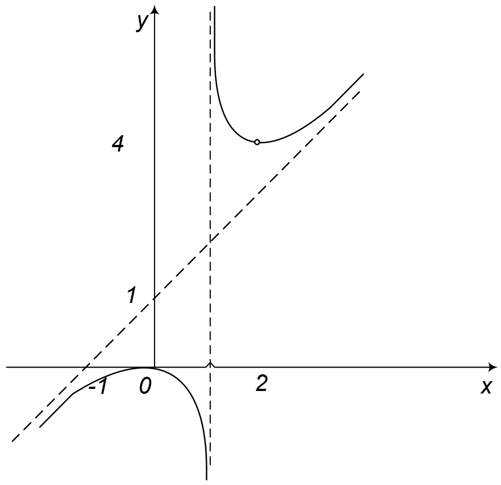

Рис. 24

2. $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$.

Исследование функции проведем по предложенной выше схеме.

а. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси

б. Функция общего вида.

в. Корни функции $x=0$, $x=5$ (рис. 25).

г. Функция непрерывна на всей числовой оси.

д. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-5)x^{\frac{2}{3}}=\pm\infty$, то могут быть наклонные асимптоты. Найдем $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-5)}{x}x^{\frac{2}{3}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)x^{\frac{2}{3}}=+\infty$. Отсюда следует, что наклонных асимптот нет

(рис .25).

е. Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции. Производная функции равна

$$y'=\left((x-5)x^{\frac{2}{3}}\right)'=(x-5)'x^{\frac{2}{3}}+(x-5)\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=x^{\frac{2}{3}}+(x-5)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=$$

$= x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{2(x-5)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3x+2x-10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{5x-10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{5}{3}\dfrac{(x-2)}{x^{\frac{1}{3}}}$. Она равна нулю при $x = 2$ и равна ∞ при $x = 0$. Числовая ось разбивается на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$. Нетрудно проверить, что $y' > 0$ в интервалах $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$ (например, вычисляя значение производной в точках $x = -1$ и $x = 3$). Следовательно, в этих интервалах функция возрастает. При $x = 1 \in (0,2)$ производная отрицательна, поэтому в интервале $(0,2)$ функция убывает. Знаки производной показаны на рис.26,

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, значит в этой точке максимум, $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$. В этой точке график имеет вертикальную касательную (рис.25).

При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс . В этой точке минимум, $y(2) = (2-5)(2)^{\frac{2}{3}} \approx -4{,}8$, $y'(2) = 0$. Следовательно, в этой точке график функции имеет горизонтальную касательную (рис.25).

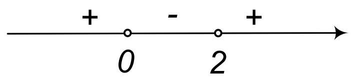

Рис. 26

ж. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. Производная второго порядка равна

$$y'' = \frac{5}{3}\left(\frac{x-2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \frac{5}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}} - (x-2)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}} - \frac{x-2}{3x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{3}\frac{3x-x+2}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{10}{9}\frac{(x+1)}{x^{\frac{4}{3}}}$$

Она равна нулю при $x = -1$ и не существует при $x = 0$ Производная второго порядка отрицательна при $x \in (-\infty,-1)$, следовательно , в интервале $(-\infty,-1)$ график выпуклый. При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знак .Нетрудно проверить, что $y'' > 0$ при $x \in (-1,0)$ и $x \in (0,+\infty)$. Следовательно , график вогнутый в этих интервалах, точка с абсциссой $x = -1$ - точка перегиба , $y(-1) = (-1-5)(-1)^{\frac{2}{3}} \approx -6$. Знаки производной второго порядка показаны на рис .27. График функции изображен на рис. 28.

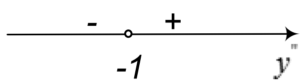

Рис. 27

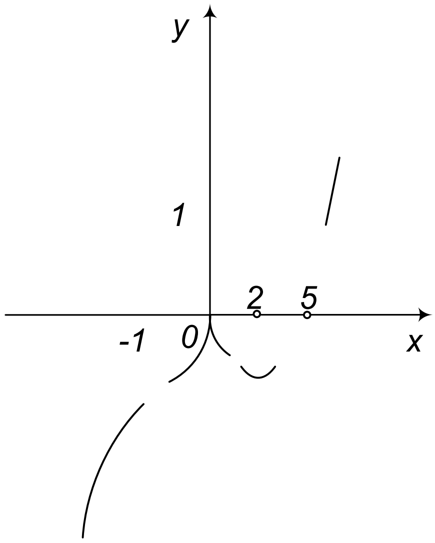

Рис. 25

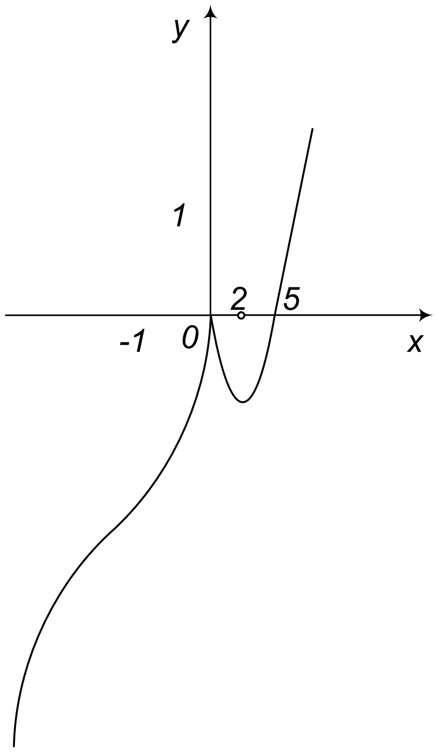

Рис. 28

3. $y = x^2 \ln x$.

а. Функция определена при $x \in (0,+\infty)$.

б. Поведение функции на границе области определения. При $x \to 0+0$ выражение $x^2 \ln x$ представляет собой неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Раскроем ее, предварительно сведя к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$. Получим $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$.

в. Функция $y = x^2 \ln x$ равна нулю при $\ln x = 0$, то есть при $x = 1$ (рис.29).

г. Функция непрерывна при $x \in (0,+\infty)$.

д. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$, то график может иметь наклонную асимптоту . Вычислим $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = +\infty$. Следовательно , наклонных асимптот нет.

е. Промежутки монотонности и точки экстремума функции. Производная функции равна $y' = \left(x^2 \ln x\right)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. Она определена при $x \in (0,+\infty)$ и равна нулю при $2\ln x + 1 = 0$ или $\ln x = -\frac{1}{2}$, $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}6$. Интервал $(0,+\infty)$ разобьем на два интервала $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ (рис .30) Нетрудно проверить что производная отрицательна при

$x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ (например при $x = \frac{1}{e^2}$). Следовательно, в этом интервале функция убывает.

Производная положительна при $x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ (например при $x = e^2$) Следовательно, в этом интервале функция возрастает . В точке $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ минимум , $y(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$. Знаки y' показаны на рис. 30.

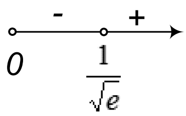

Рис. 30

ж. Найдем промежутки выпуклости вогнутости и точки перегиба графика функции. Производная второго порядка равна $y''(x) = (2x\ln x + 1)' = 2\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = 2(\ln x + 1)$. Производная второго порядка равна нулю при $(\ln x + 1) = 0$ или $x = e^{-1} = 0{,}36$. Разобьем интервал $(0, +\infty)$ на интервалы $(0, \frac{1}{e})$, $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Так как при $x \in (0, \frac{1}{e})$ производная второго порядка отрицательна

(например при $x = e^{-3}$), то в этом интервале график выпуклый . В интервале $(\frac{1}{e}, +\infty)$ производная второго порядка положительна (например при $x = e^3$) , поэтому график вогнутый.

Знаки на y'' показаны на рис.31. Абсцисса точка перегиба $x = \frac{1}{e}$, $y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}\ln e^{-1} = -\frac{1}{e^2} = -0{,}1$ График функции на рис. 32.

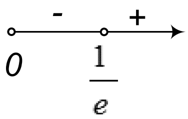

Рис. 31

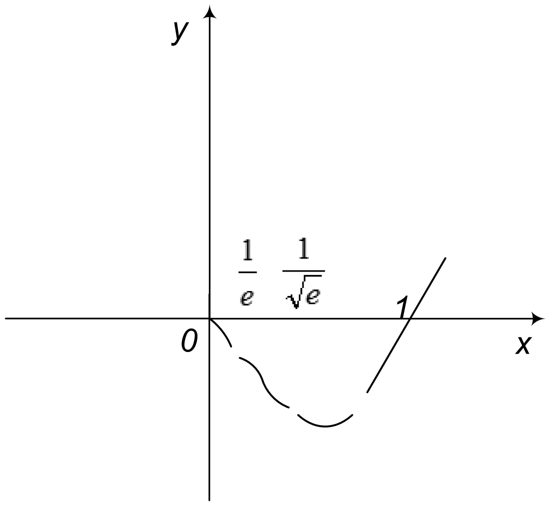

Рис. 29

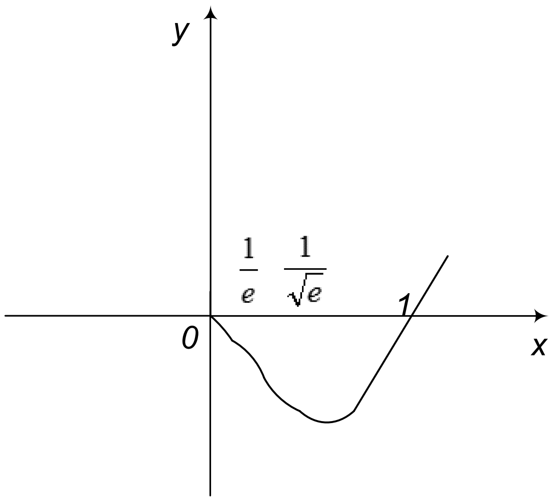

Рис. 32

4. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

а. Так как $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right|\le 1$ при любом x , то область определения функции $(-\infty,+\infty)$.

б. Функция четная.

в. Корни функции $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0$ при $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0$ или $x=\pm 1$, при $x=0$

$y=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$.

г. Функция непрерывна на всей числовой оси

д. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\arcsin\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2(x^{-2}-1)}{x^2(x^{-2}+1)}=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$ **.** Следовательно , $y=-\dfrac{\pi}{2}$ - горизонтальная асимптота (рис. 33).

е. Исследуем монотонность функции и найдем точки экстремума. Производная равна

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{-2x\left(1+x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^2}}{1+x^2}\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{4x}{\sqrt{4x^2}\left(1+x^2\right)}=\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)\cdot 2|x|}=\begin{cases}-\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{если } x>0\\ \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{если } x<0\end{cases}$$

Производная не существует при $x=0$, она положительна, если $x\in(-\infty,0)$

и отрицательна, если $x\in(0,+\infty)$ (рис.34). Следовательно, в интервале $(-\infty,0)$ функция возрастает, в интервале $(0,+\infty)$ убывает. В точке $x=0$ найдем односторонние производные Правосторонняя производная $y'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0} y' = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{-2}{1+x^2}=-2$ и левосторонняя производная $y''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-0} y' = \lim\limits_{x\to 0-0}\frac{2}{1+x^2}=2$. В точке $x=0$ угловой минимум. , $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

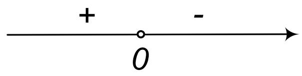

Рис. 34

ж. Промежутки выпуклости и вогнутости

Производная второго порядка равна $y''=\begin{cases}\frac{2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x, если\ x>0\\ -\frac{2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x, если\ x<0\end{cases}$

Ясно, что производная второго порядка положительна при всех $x\neq 0$ (рис.35) Поэтому график вогнутый на всей числовой оси.

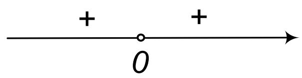

Рис. 35

График функции построен на рис.36.

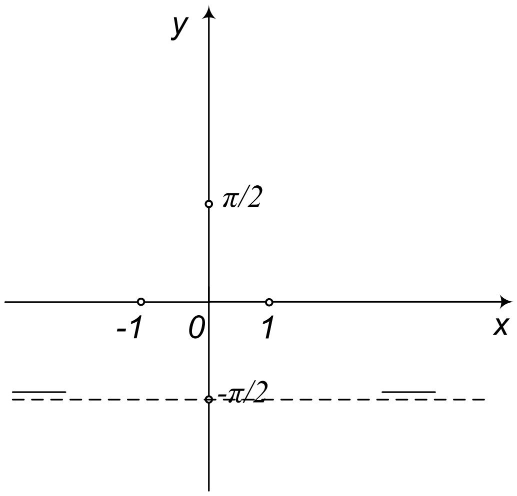

Рис. 33

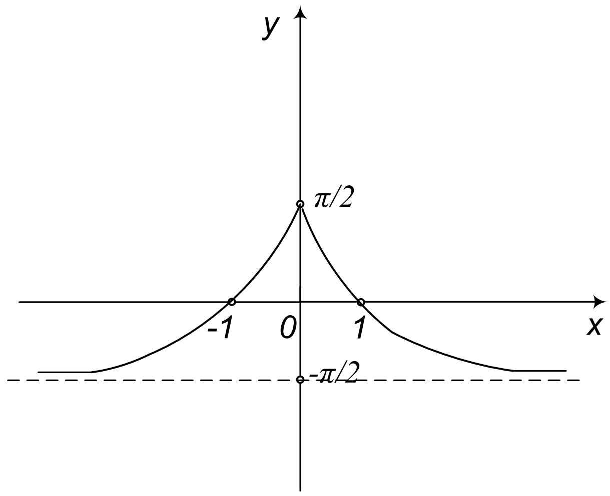

Рис. 36

5. $y=\sin x+\cos x$

а. Функция определена и на всей числовой оси.

б. Функция 2π периодическая как сумма 2π периодических функций. Поэтому достаточно построить ее график на промежутке $[0,2\pi]$

в. Функция непрерывна.

г. $y(0)=\sin 0+\cos 0=y(2\pi)=1$.

д. Корни функции $y=\sin x+\cos x=0$ или $\sin x=-\cos x$. На промежутке $[0,2\pi]$ два корня $x=\frac{3\pi}{4}$ и $x=\frac{7\pi}{4}$ (рис . 37)

е. Промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции. Производная равна $y'=-\sin x+\cos x$. Она равна нулю , если $\sin x=\cos x$ На промежутке $[0,2\pi]$ два корня $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{5\pi}{4}$. Разобьем промежуток $[0,2\pi]$ на интервалы $(0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$, $(\frac{5\pi}{4},2\pi)$ и определим знак производной в каждом из них. $x=\frac{\pi}{8}\in(0,\frac{\pi}{4})$, производная $y'(\frac{\pi}{8})=-\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}>0$, следовательно в $(0,\frac{\pi}{4})$ производная положительна , тогда функция возрастает. Точка $x=\pi\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$, производная $y'(\pi)=-\sin\pi+\cos\pi<0$, следовательно, в $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$ производная отрицательна, тогда функция убывает. Точка $x=\frac{3\pi}{2}\in(\frac{5\pi}{4},2\pi)$, производная $y'(\frac{3\pi}{2})=-\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}>0$,следовательно , в интервале $(\frac{5\pi}{4},2\pi)$ функция возрастает. В точке $x=\frac{\pi}{4}$ максимум, $y(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$. В точке $x=\frac{5\pi}{4}$ минимум . $y(\frac{5\pi}{4})=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}$, Знаки производной показаны на рис 38

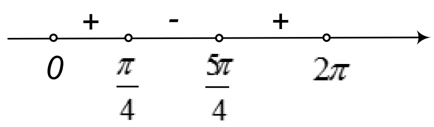

Рис. 38

ж. Найдем промежутки выпуклости вогнутости и точки перегиба графика функции.

$y''=(-\sin x+\cos x)'=-\cos x-\sin x$ На промежутке $[0,2\pi]$ она имеет два корня $x=\frac{3\pi}{4}$ и $x=\frac{7\pi}{4}$

Определим знак производной второго порядка в интервалах $(0,\frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$, $(\frac{7\pi}{4},2\pi)$.

$x=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$, $y''(\dfrac{\pi}{2})=-\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}<0$. В интервале $(0,\dfrac{3\pi}{4})$ производная второго порядка отрицательна , график выпуклый. $x=\pi\in(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4})$, $y''(\pi)=-\sin\pi-\cos\pi>0$. Следовательно, в интервале $(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4})$ производная второго порядка положительна, график вогнутый .Точка $x=\dfrac{15\pi}{8}\in(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$ $y''(\dfrac{15\pi}{8})=-\sin\dfrac{-\pi}{8}-\cos\dfrac{-\pi}{8}=-(\cos\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{\pi}{8})=-\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{8}<0$. В интервале $(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$ производная второго порядка отрицательна, график выпуклый. Точки ***с*** абсциссами $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ точки перегиба $y(\dfrac{3\pi}{4})=y(\dfrac{7\pi}{4})=0$ (рис.39).

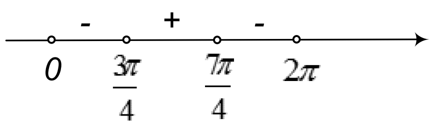

Рис. 39

График функции построен на рис. 40.

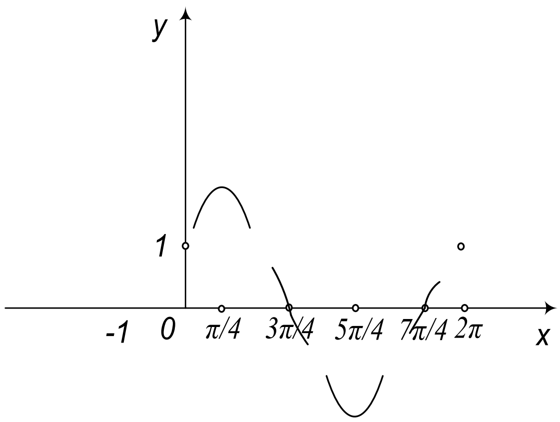

Рис. 37

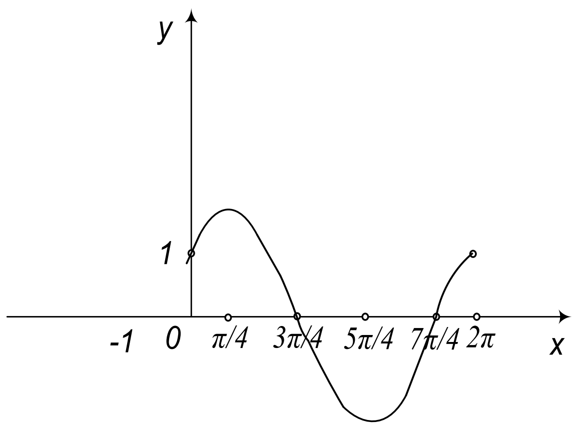

Рис. 40

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать функции и построить их графики

1. $y=x^6-3x^4+3x^2-5$ **2.** $y=xe^{\frac{1}{x}}$ **3.** $y=x\ln x$ **4.** $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Ответы

1. Функция четная. В точке $M(0,-5)$ минимум. Точки с абсциссами $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $x=\pm1$

точки перегиба. **2.** Область определения функции $x \neq 0$. В точке $M(1, e)$ минимум. **3 .** Область определения функции $x \in (0,+\infty)$. В точке $M(\frac{1}{e},-\frac{1}{e})$ минимум. **4.** Область определения функции $x \in (-\infty,+\infty)$ В точке $O(0,0)$ угловой минимум.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа т 1. М.: Наука, 1968., 440 с.

2. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М., 1986.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч 1. М.: Физматлит, 2005,

648 с.

4. Шипачев В. С. Высшая математика. М., 1990.

5. Шипачев В. С. Сборник задач по высшей математике. М., 1994.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Спб.; Профессия, 2001, 416 с

7. Волков В.А., Григорьева А.Н., Ефимова Т.А и др. Задачник – практикум по высшей математике. Множества, функции, предел, непрерывность, производная . Ленинград.: из - во Ленинградского университета, 1988, 224 с.

8. Осипов А.В. Лекции по высшей математике. СПб .: изд – во С.Петербургского университета , 2012, 311с.

9. Осипов А.В. Лекции по высшей математике . СПб .: Лань, 2014, 320с.