

**ОТЗЫВ научного руководителя  
на выпускную квалификационную работу Смирнова Петра Юрьевича  
“Системы доказательств, основанные на диаграммах принятия решений”**

Работа посвящена теории сложности доказательств, активно развивающемуся направлению теоретической информатики и математической логики. Цейтинские формулы являются одним из основных примеров формул, на которых сравнивают системы доказательств, они основаны на том, что сумма степеней всех вершин в неориентированном графе является четной. Однопроходные диаграммы принятия решений (их также называют однопроходными ветвящимися программами, сокращенно 1-ВР) независимо возникали при изучении двух очень непохожих систем доказательств: регулярной резолюции и системы доказательств, основанной на OBDD. Для изучения сложности опровержения цейтинских формул в OBDD-системе важной задачей была оценка сложности однопроходных диаграмм, вычисляющих выполнимую цейтинскую формулу, а для регулярной резолюции - сложность однопроходной ветвящейся программы, которая по набору значений переменных невыполнимой цейтинской формулы находит ложный дизъюнкт. Для невыполнимых цейтинских формул естественно формулируется промежуточная задача, похожая на задачу поиска ложного дизъюнкта, в которой требуется найти вершину графа, в которой нарушается условие четности. Можно показать, что по 1-ВР, вычисляющей выполнимую цейтинскую формулу, размера  $S$  можно построить 1-ВР решающую задачу о поиске вершине невыполнимой цейтинской формулы размера  $O(S \cdot n)$ , где  $n$  - число вершин графа. Также известен пример графов, для которых задача вычисления выполнимой цейтинской формулы и поиск вершины имеют полиномиальные 1-ВР, а все резолюционные доказательства невыполнимой формулы имеют суперполиномиальный размер. В работе решались две задачи: первая состояла в том, чтобы выяснить, насколько сложной для 1-ВР является задача поиска вершины, можно ли сложность этой задачи сравнить со сложностью вычисления выполнимой цейтинской формуле? Второй задачей заключалась в том, чтобы выяснить, соответствует ли 1-ВР для задачи поиска вершины доказательство в какой-нибудь слабой системе доказательств?

Обе эти задачи решены в этой работе. Во-первых, в работе описана простая и понятная структура минимальной 1-ВР, решающей задачу о поиске вершины. Существует ли такая структура заранее было непонятно. Используя полученную структуру, было показано, что 1-ВР для задачи поиска вершины размера  $S$  можно перестроить в 1-ВР, вычисляющую выполнимую цейтинскую формулу размера  $S^{O(\log n)}$ , где  $n$  - число вершин в графе. Во-вторых, также используя полученную структуру для 1-ВР, было показано, что по 1-ВР, решающую задачу поиска вершины размера  $S$  можно построить доказательство

цейтинской формулы  $T$  в системе Фреге константной глубины размера  $\text{poly}(S,|T|)$ . Все упомянутые результаты нетривиальные и требуют преодоления технических трудностей.

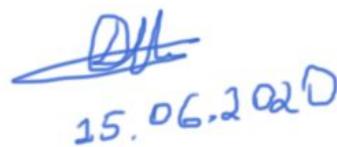
Первый упомянутый результат был получен П.Ю. Смирновым в соавторстве с А.А. Рязановым, я присутствовал во время придумывания этого результата и считаю вклад П.Ю. Смирнова существенным, второй результат (про перестройку диаграммы в доказательство во Фреге) был получен П.Ю. Смирновым полностью самостоятельно.

Первый результат работы был в дальнейшем использован для получения почти точных нижних оценок на сложность регулярных резолюционных опровержений цейтинских формул в терминах древесной ширины графа.

К сожалению, текст выпускной квалификационной работы готовился в последний момент, и не все недостатки работы, которые относятся к оформлению и языку, были исправлены в финальной версии.

Выпускная квалификационная работа П.Ю. Смирнова содержит законченное самостоятельное научное исследование в области теории сложности доказательств, в которой получены новые интересные и нетривиальные результаты. На основании изложенного считаю, что работа заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель  
к.ф.-м.н., доцент СПбГУ  
Ицыксон Дмитрий Михайлович



15.06.2020