Санкт-Петербургский государственный университет

КАРОЛЬ Николай Андреевич

Выпускная квалификационная работа

Длинные циклы в графах

Образовательная программа
бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
Профессор,
Мат-Мех СПбГУ,
Доктор ф.-м. наук,
Д. В. Карпов

Рецензент:
Научный сотрудник,
ПОМИ РАН,
Кандидат ф.-м. наук,
А. В. Пастор

Санкт-Петербург
2020

1 Введение

Вопрос о поиске гамильтонова цикла в графе очень известный и уже хорошо исследован. Помимо классических критериев Дирака и Оре, устанавливающих наличие гамильтонова цикла ограничением на степени вершин графа, стоит упомянуть изложенные в книге Бонди и Мурти [1] теоремы Хватала, дающие критерии гамильтоновости графа на языке его вершинной связности, его замыкания и степенных последовательностей графа. Наряду с этими результатами, ещё есть вопрос о гамильтоновости степеней графа, и здесь есть классические результаты: знаменитая теорема Флейшнера о гамильтоновости квадрата двусвязного графа (изложенная в книге Дистеля [2]) и теорема Чартранда и Капура о гамильтоновости куба связного графа.

Что касается проблемы поиска длинных циклов, сперва приведём классическую теорему Линиала [3], содержащую оценку на длину наибольшего простого цикла в двусвязном графе и дополняющую многочисленные результаты о гамильтоновых циклах, и, в частности, из которой идейно выросла наша работа.

Теорема (N. Linial, 1975) *Пусть G – двусвязный граф, а*

$$m = \min_{xy \notin E(G)} d_G(x) + d_G(y).$$

Тогда длина наибольшего простого цикла графа G не менее, чем $min(m, v(G))$.

Статья Томассена [4] содержит, в числе прочих, критерий наличия в планарном графе цикла со спеиальным условием: все вершины, не входящие в цикл, должны быть независимыми. Наша работа содержит критерий наличия такого цикла в терминах минимальной степени вершин графа.

Теорема: Пусть G – двусвязный граф, $v(G) = n$ и $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$. Тогда в G найдётся такой простой цикл, что множество не входящих в него вершин является независимым.

2 Доказательство основного результата

В доказательстве будем ссылаться на следующую классическую лемму, которая используется в доказательствах критерия Оре и разных теорем Хватала.

Лемма 1: Пусть $m > 2$, $u_1 ... u_m$ – максимальный путь в графе G, причём $d_G(u_1) + d_G(u_m) \geq m$. Тогда в графе G есть цикл длины m.

Доказательство теоремы: Доказательство теоремы длинное, для удобства выделены 5 утверждений.

С самого начала отметим, что почти везде в доказательстве мы будем пользоваться оценкой $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$ и только в паре мест воспользуемся оценкой $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$.

От противного, пусть существует граф, удовлетворяющий всем условиям, но в нём нет такого цикла, что не входящие в него вершины образуют независимое множество.

Сначала разберём случай $n < 6$. В силу двусвязности, $\delta(G) \geq 2$. Если $n = 3$ или $n = 4$, то очевидно из $\delta(G) \geq 2$ следует, что граф имеет цикл, и он подойдёт, множество не входящих в него вершин будет независимо, поскольку оно или пустое или состоит из одной вершины. Если $n = 5$, то граф опять же имеет цикл. Если он длины 4 или 5, то аналогично он нам подходит. Если он длины 3, то обозначим его вершины r_1, r_2, r_3. Обозначим остальные вершины r_4, r_5. Если $r_4r_5 \notin E(G)$, то цикл $r_1r_2r_3$ подходит под все условия. Иначе, $r_4r_5 \in E(G)$. Поскольку граф связный, то есть ребро между множествами вершин $\{r_1, r_2, r_3\}$ и $\{r_4, r_5\}$, не теряя общности, пусть $r_1r_4 \in E(G)$. Поскольку граф двусвязный, то после удалении r_1 граф остаётся связным, значит, есть ребро между множествами вершин $\{r_2, r_3\}$ и $\{r_4, r_5\}$. Пусть конец этого ребра – r_4, не теряя общности, $r_2r_4 \in E(G)$. Тогда есть подходящий нам цикл длины 4 – это $r_1r_4r_2r_3$ (рис. 2а). Если же конец этого ребра – это r_5, не теряя общности, $r_2r_5 \in E(G)$, то тогда есть подходящий нам цикл длины 5 – это $r_1r_4r_5r_2r_3$ (рис. 2б).

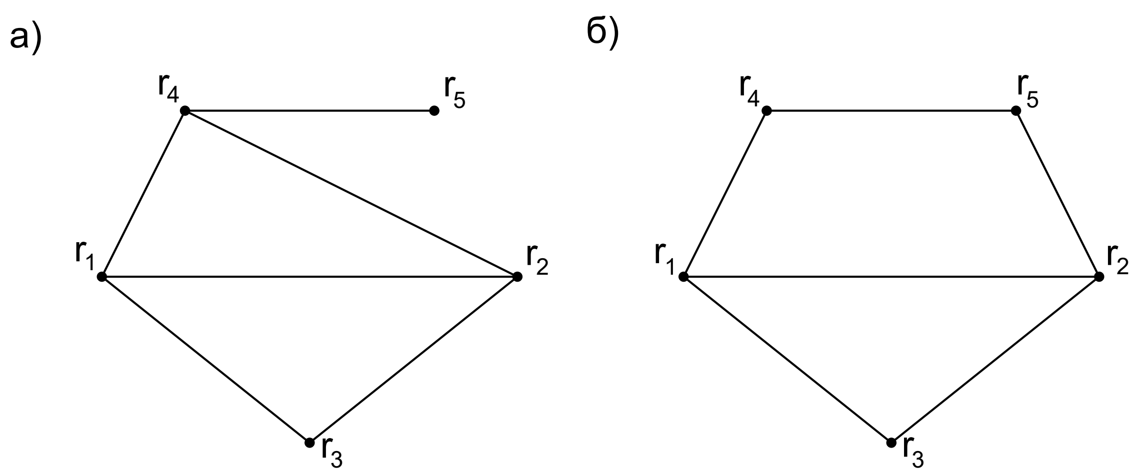

Рис. 1: Иллюстрация разбора случая $n = 5$.

Отныне считаем, что

$$n \geq 6. \tag{1}$$

.

Проделаем с графом следующую процедуру: пока можем, добавим какое-то ребро в граф, если все вышеупомянутые свойства (двусвязность, минимальная степень и отсутствие такого цикла, что не входящие в него вершины образуют независимое множество) после добавления ребра остаются (условия про двусвязность и минимальную степень, конечно, от добавления ребра не нарушатся). Если же никакое ребро в граф добавить не можем, то останавливаем процедуру. Для простоты, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что граф G – это и есть тот граф, который получили после остановки процедуры. Значит, граф G обладает такими свойствами:

а) G двусвязный.

б) $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$.

в) Для любых $d_1, d_2 \in V(G)$ таких, что $d_1 d_2 \notin E(G)$ выполнено следующее свойство: существует такой путь между d_1 и d_2, что не входящие в него вершины независимы.

Условие в) образуется как раз после того, как закончили процедуру. Действительно, если условие в) не выполнено, то это значит, что перед окончанием процедуры мы могли добавить какое-то ребро согласно процедуре, а значит, процедура не была завершена.

Утверждение 1: В G есть гамильтонов путь.

Доказательство:

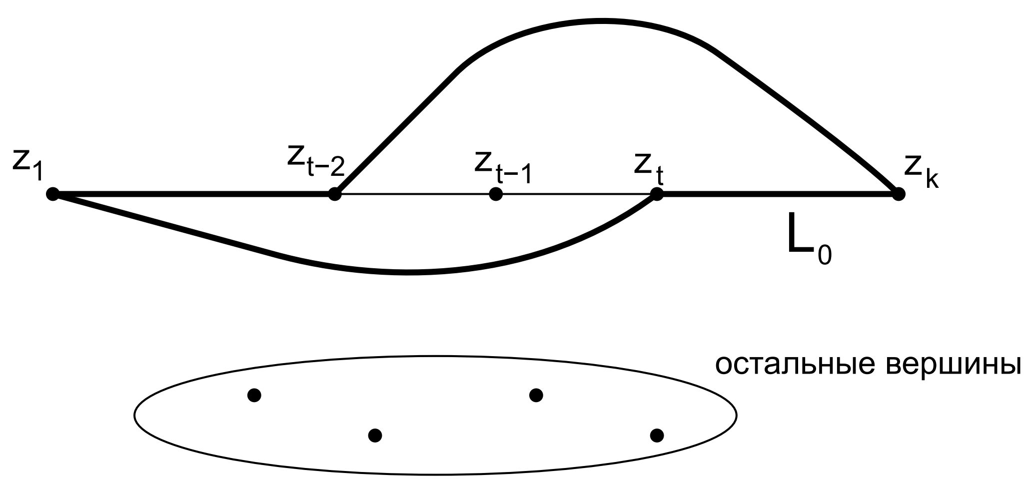

Рис. 2: Если z_t - красная вершина, а z_{t-2} - зелёная, и если $N_G(z_{t-1}) \subseteq L_0$, то тогда цикл $z_1, z_2, ..., z_{t-2}, z_k, z_{k-1}, ..., z_t$ (на рисунке обозначен жирным) подходит.

Будем доказывать от противного. Рассмотрим в графе такой самый длинный путь из тех, что его концы не соединены, и что не входящие в него вершины образуют независимое множество (условие в) гарантирует, что такие пути есть). Обозначим этот путь как L_0. Пусть он не является гамильтоновым, значит, в нём $k < n$ вершин. Пронумеруем их в порядке обхода пути: $z_1, z_2, ..., z_k$. Будем говорить, что вершина z_i находится *справа* от вершины z_j, если $i > j$, и *слева*, если $i < j$. Также назовём вершину *красной*, если она – сосед z_1 и назовём вершину *зелёной*, если она – сосед z_k (никаких проблем с совмещением цветов нет: например, вершина может быть и красной, и зелёной одновременно). Очевидно, что все красные и зелёные вершины лежат в пути L_0, поскольку иначе путь L_0 можно было бы удлинить за счёт красной или зелёной вершины, не лежащей в нём, а оставшееся множество вершин останется независимым. Значит, поскольку $d_G(z_1), d_G(z_k) \geq \frac{n}{3}$, то зелёных и красных вершин в пути L_0 не менее, чем по $\frac{n}{3}$.

Заметим, что никакая красная вершина не может быть соседней через 1 справа от зелёной вершины, то есть для $\forall t$: если z_t – красная вершина, то z_{t-2} не может быть зелёной. От противного: пусть такая ситуация возможна. Рассмотрим множество $N_G(z_{t-1})$. Если $N_G(z_{t-1}) \subseteq L_0$, то тогда образуется цикл длины $k-1$ (рис. 3). Не входящие в этот цикл вершины – это все не входящие в L_0 вершины (это независимое множество) и вершина z_{t-1}. Но поскольку $N_G(z_{t-1}) \subseteq L_0$, то вершина z_{t-1} не имеет соседей среди не входящих в L_0 вершин, а значит, нашёлся такой цикл, что не входящие в него вершины образуют независимое множество. Если же $N_G(z_{t-1}) \nsubseteq L_0$, то обозначим не входящую в L_0 вершину, являющуюся соседом z_{t-1}, через h. Тогда мы нашли путь длины $k+1$, что не входящие в него вершины независимы: $z_1 z_2 ... z_{t-2} z_k z_{k-1} z_{k-2} ... z_t z_{t-1} h$ (рис. 4) – пришли в противоречие с предположением, что L_0 – самый длинный такой путь, что остальные вершины независимы. Множество не входящих в него вершин независимо, потому что это множество не входящих вершин в L_0 (а оно независимо) без вершины h.

Поскольку путь L_0 не гамильтонов, то $k < n$ и существует вершина $y \notin L_0$. Поскольку не входящие в путь L_0 вершины образуют независимое множество, то $N_G(y) \subset V(L_0)$. Обозначим $\mu = |N_G(y)|$ и назовём вершину z_t *чёрной*, если $z_{t+1} y \in E(G)$ (то есть вершина *чёрная*, если она – сосед слева в порядке обхода пути L_0 какого-то соседа y). Поскольку $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$, то $\mu \geq \frac{n}{3}$, а количество чёрных вершин не менее, чем μ (чёрных вершин столько же, сколько соседей y, поскольку z_1 не может быть соседом y, иначе путь L_0 можно было бы очевидно удлинить от $z_1 ... z_k$ до $y z_1 ... z_k$ с сохранением условия про независимость оставшихся вершин).

Также понятно, что чёрная вершина не может быть зелёной (рис. 5).

Сложим вместе все факты про цвета вершин, которые мы поняли:

1) Чёрных, красных и зелёных вершин хотя бы по $\frac{n}{3}$.

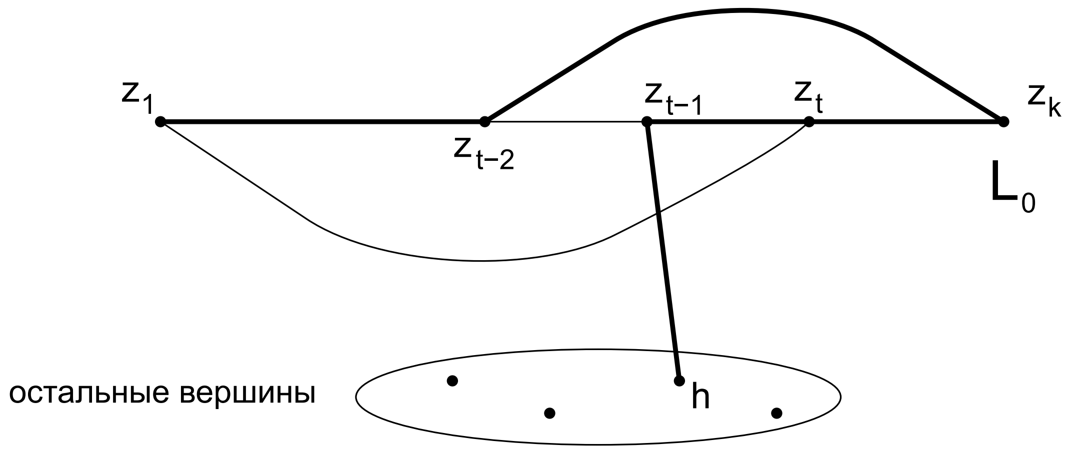

Рис. 3: Если z_t - красная вершина, а z_{t-2} - зелёная, и если $N_G(z_{t-1}) \nsubseteq L_0$, то тогда есть такой путь (на рисунке обозначен жирным), что он длиннее L_0 и вершины, не входящие в него, независимы.

2) Красные могут быть зелёными, но чёрные не могут быть зелёными.

3) Красные не могут быть соседними через 1 от зелёных справа.

Будем называть вершину z_t *блокированной*, если z_{t+2} – это красная вершина. Из факта 3) сразу ясно, что блокированные вершины не могут быть зелёными. Также заметим, что блокированные вершины не могут быть чёрными. Действительно, иначе, пусть z_t – блокированная чёрная вершина. Тогда $z_{t+1}y \in E(G)$, а z_{t+2} – красная вершина, то есть $z_1 z_{t+2} \in E(G)$. Тогда путь $yz_{t+1}z_t z_{t-1}...z_1 z_{t+2} z_{t+3}...z_k$ длиннее пути L_0, а множество остальных вершин независимо (это аналогично тому, что происходит на рис. 5). Заметим, что множество блокированных вершин содержит хотя бы $\frac{n}{3}-1$ вершины. Действительно, каждая красная вершина (а их хотя бы $\frac{n}{3}$) *порождает* блокированную по определению, кроме вершины z_2 (z_1 – не красная, поскольку не является соседом самой себе).

Таким образом, три множества {блокированные вершины}, {чёрные вершины} {зелёные вершины} – попарно непересекающиеся и имеют мощности не менее, чем $\frac{n}{3}-1$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{3}$ соответственно. Поскольку эти 3 множества являются подмножествами $z_1, ..., z_{k-1}$ (очевидно, z_k не является ни блокированной, ни чёрной, ни зелёной), значит, $k-1 \geq \frac{n}{3}-1+\frac{n}{3}+\frac{n}{3} = n-1$. Но $k < n$, поскольку предположили, что путь негамильтонов. Противоречие. $\square$

Итак, в G есть гамильтонов путь. Обозначим его вершины в порядке обхода этого гамильтонова пути: $x_1, x_2, ..., x_n$. Аналогично предыдущему, будем говорить, что вершина x_i находится *справа* от вершины x_j, если $i > j$, и *слева*, если $i < j$. Поскольку $d_G(x_1) \geq \frac{n}{3}$, то существует такой индекс $i \geq \frac{n}{3}+1$, что

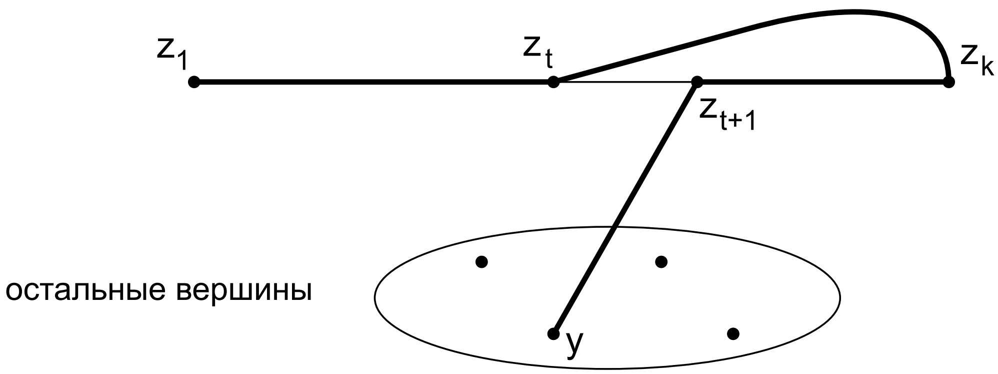

Рис. 4: Если z_t - чёрная и зелёная, то тогда $z_{t+1}y, z_t z_k \in E(G)$. Тогда путь (обозначен жирным на иллюстрации) $z_1 z_2 ... z_t z_k z_{k-1} ... z_{t+1} y$ длины $k+1$, и не входящие в него вершины образуют независимое множество. Противоречие с выбором L_0.

$x_1 x_i \in E(G)$. Заметим, что вершины $x_1 x_2 ... x_i$ (в таком порядке обхода) образуют цикл, а все остальные вершины $x_{i+1} x_{i+2} ... x_n$ образуют путь (в таком порядке обхода) (рис. 6). Таким образом выполнено утверждение: в графе G есть такой цикл длины не менее $\frac{n}{3}+1$, что все остальные вершины образуют путь.

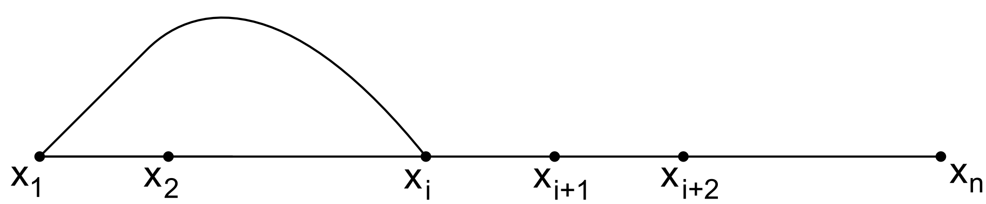

Рис. 5: В графе G есть цикл $x_1 x_2 ... x_i$, для которого все не входящие в него вершины образуют путь $(x_{i+1} x_{i+2} ... x_n)$.

Пусть r — наибольшее такое число, что существует такой цикл длины r (обозначим этот цикл через T), что все остальные вершины образуют путь (обозначим этот путь через H). Только что доказали, что $r \geq \frac{n}{3}+1$. В цикле T всего r вершин, значит, в пути H всего $n-r$ вершин, и в этом пути $n-r-1$ рёбер (рис. 7).

Утверждение 2: $r \geq \frac{n}{2}$.

Доказательство: От противного, пусть $r < \frac{n}{2}$. Обозначим через $x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_f}$

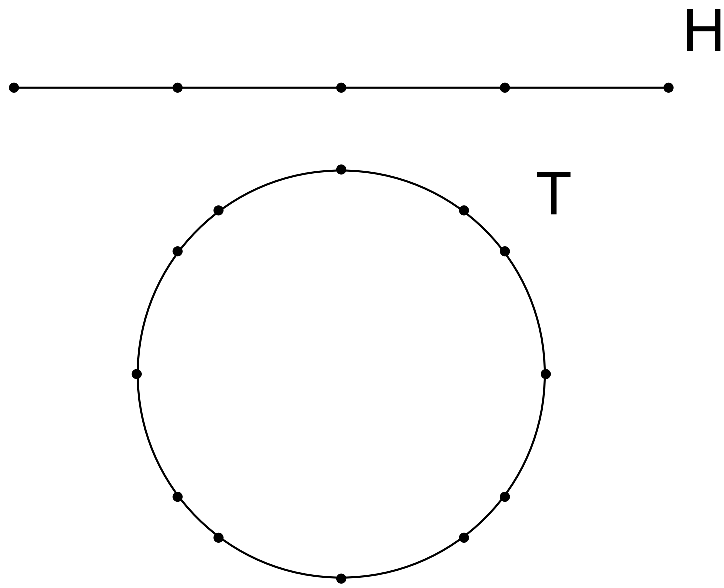

Рис. 6: Вершины графа G разбиваются на 2 непересекающиеся группы: цикл T и путь H.

соседей x_1 и через $x_{\beta_1}, ..., x_{\beta_g}$ соседей x_n. Поскольку $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$, то $f \geq \frac{n}{3}$ и $g \geq \frac{n}{3}$. Заметим, что для любых $1 \leq i \leq f$ и $1 \leq j \leq g$ выполнено, что $\alpha_i - 1 \neq \beta_j + 1$, потому что иначе образуется цикл длиной $n-1$ (он содержит все вершины, кроме $x_{\alpha_i - 1} = x_{\beta_j + 1}$, то есть он такой: $x_1 x_2 ... x_{\beta_j} x_n ... x_{\alpha_i}$), он подходит под то, что ищем, поскольку не входящие в него вершины (а это одна вершина) независимы. Также заметим, что для любых $1 \leq i \leq f$ и $1 \leq j \leq g$ выполнено, что $\alpha_i < \frac{n}{2}$ и $\beta_j > \frac{n}{2}$ (иначе очевидно образуется нужный цикл длины не менее $\frac{n}{2}$, такой, что все остальные вершины образуют путь: он проходит по рёбрам пути H и ребру $x_1 x_{\alpha_i}$ (или $x_{\beta_j} x_n$) соответственно). Рассмотрим вершину $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Только что доказали, что она правее всех соседей x_1 и левее всех соседей x_n. Заметим, что для любых $1 \leq i \leq f$ и $1 \leq j \leq g$ выполнено, что $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} x_{\alpha_i - 1} \notin E(G)$ и $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} x_{\beta_i + 1} \notin E(G)$ (иначе образуется такой цикл длиной не менее $\frac{n}{2}$, что все остальные вершины образуют путь: рис. 8а и 8б соответственно). Поскольку все вершины $x_{\alpha_i - 1}$ и $x_{\beta_i + 1}$ различны, то это означает, что $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ не соединена с не менее, чем $\frac{2n}{3}$ этими различными вершинами, с собой не соединена тоже. Всего вершин n, значит, выходит, что $d_G(x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \leq \frac{n}{3} - 1$. Противоречие с тем, что $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$. $\square$

Вернёмся непосредственно к доказательству теоремы и рассмотрим 2 случая.

1 случай: *Существуют две такие разные вершины цикла T, что одна соединена с одним концом пути H (обозначим его a), а другая - с другим концом*

Рис. 7: Если $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} x_{\alpha_i - 1} \in E(G)$ или $x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} x_{\beta_i + 1} \in E(G)$, то тогда найдётся цикл (отмечен жирным) длины не менее $\frac{n}{2}$, что все остальные вершины образуют путь (на рисунке ψ - это $\lceil \frac{n}{2} \rceil$).

пути H (обозначим его b).

Пусть ρ_a вершин в цикле T соединены с вершиной a, но не с вершиной b (назовём такие вершины *вершинами типа a*) и пусть ρ_b вершин в цикле T соединены с вершиной b, но не с вершиной a (назовём такие вершины *вершинами типа b*) и, наконец, пусть ρ_{ab} вершин в цикле T соединены с вершинами a и b (назовём такие вершины *вершинами типа ab*). Сразу из определения выведем пару простых свойств. Во-первых, никакая вершина цикла T не может быть сразу двух типов, но может быть ни одного из этих типов (если не соединена ни с a, ни с b). Во-вторых, никакие вершины одинакового типа не являются соседними по порядку обхода цикла (иначе цикл можно было бы удлинить за счёт вершины a или вершины b, а оставшиеся вершины образуют путь, или же существует гамильтонов цикл (рис. 9)).

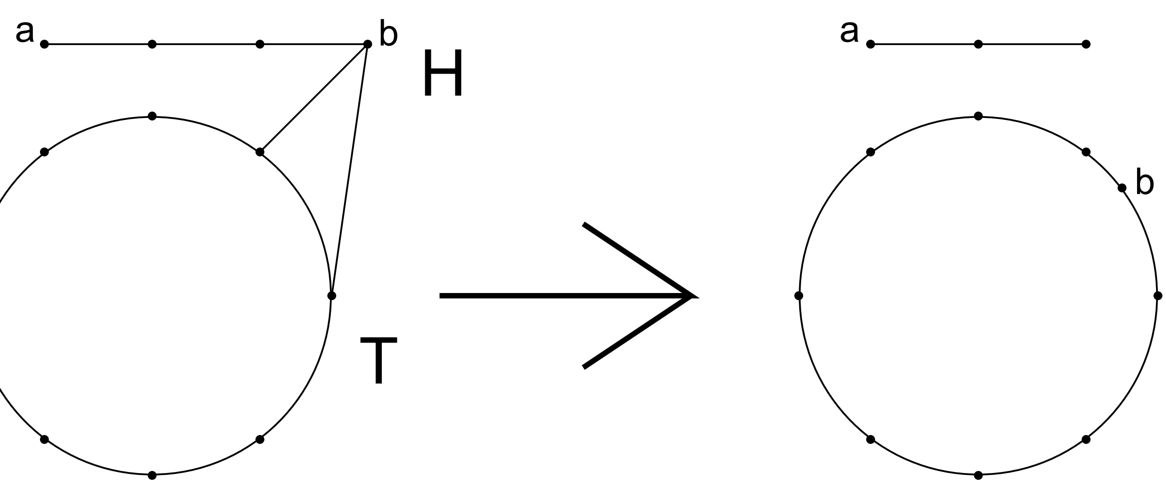

Рис. 8: Если конец пути H (на рисунке - вершина b) соединён с двумя подряд идущими вершинами в порядке обхода цикла T, то цикл T можно было бы удлинить засчёт этого конца, а оставшиеся вершины образуют путь. Противоречие с выбором цикла T.

Заметим, что не может быть таких двух разных вершин цикла T, что одна соединена с a, другая – с b, и между этими вершинами расстояние по рёбрам цикла T не более $n-r$. Действительно, пусть есть такие. Тогда заметим, что найдётся цикл (он идёт по рёбрам большей половины цикла T между этими вершинами, концы вершин соединены с a и b соответственно, и по пути H, рис. 10), такой, что множество не входящих в него вершин образует путь, а количество не входящих в него вершин не более, чем $n-r-1$. Тогда количество вершин в этом цикле не менее, чем $r+1$. Противоречие с определением r: мы нашли цикл, подходящий под все условия для цикла в определении r, но большего размера.

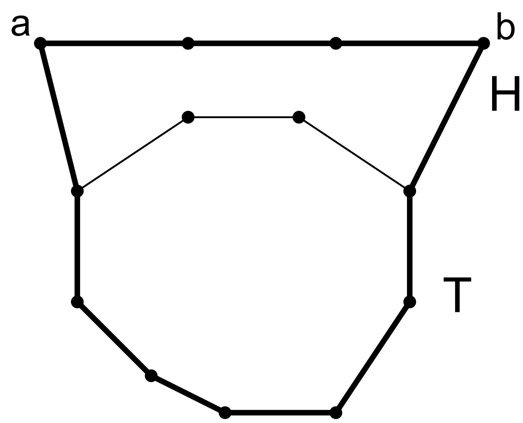

Рис. 9: Если одна из двух разных вершин цикла T соединена с a, а другая с b, и расстояние между этими вершинами по рёбрам цикла T (на рисунке - нежирные рёбра) не более $n-r$, то тогда есть другой цикл (на рисунке обозначен жирным), из которого следует противоречие с определением r.

Значит, если есть такие 2 разные вершины разных типов (или же обе типа ab) цикла T, что одна соединена с a, а другая – с b, то тогда между ними расстояние по рёбрам цикла T не менее, чем $n-r+1$.

Разберём 2 подслучая.

Подслучай 1a: *В цикле T нет вершин типа a и нет вершин типа b.*

То есть в цикле T каждая вершина или соединена и с a, и с b, или же не соединена ни с a, ни с b. Значит, $\rho_a = \rho_b = 0$. Тогда, по формулировке случая 1, в рамках которого находимся, получаем, что $\rho_{ab} \geq 2$.

Вершина a соединена только с ρ_{ab} вершинами цикла T и может быть ещё соединена только с вершинами пути H, не включая себя, то есть всего она соединена не более, чем с $\rho_{ab} + n - r - 1$ вершинами. Поскольку $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$, получаем, что $\rho_{ab} + n - r - 1 \geq \frac{n+2}{3} \Rightarrow \frac{2n-5}{3} + \rho_{ab} \geq r$

Поскольку между любыми двумя вершинами типа ab расстояние по рёбрам цикла T не менее, чем $n-r+1$, то в цикле T не менее, чем $\rho_{ab}(n-r+1)$ рёбер. Поскольку в цикле T ровно r рёбер, то получаем, что $r \geq \rho_{ab}(n-r+1) \Rightarrow (\rho_{ab}+1)r \geq \rho_{ab}(n+1)$. Оценивая r в этом неравенстве оценкой из предыдущего абзаца, получаем, что

$$(\rho_{ab}+1)(\frac{2n-5}{3}+\rho_{ab}) \geq \rho_{ab}(n+1) \Rightarrow \frac{2n-5}{3}\rho_{ab}+\frac{2n-5}{3}+\rho_{ab}^2 \geq n\rho_{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\rho_{ab}^2-5\rho_{ab}-5 \geq (\rho_{ab}-2)n.$$

Заметим, что если $\rho_{ab}=2$, то это неравенство очевидно не выполняется. Тогда, поскольку $\rho_{ab} \geq 2$, получаем, что $\rho_{ab} \geq 3 \Rightarrow \rho_{ab}-2>0$. А тогда получаем, что

$$3\rho_{ab}^2-5\rho_{ab}-5 \geq (\rho_{ab}-2)n \Rightarrow \frac{3\rho_{ab}^2-5\rho_{ab}-5}{\rho_{ab}-2} \geq n.$$

Понятно, что

$$3\rho_{ab}+1 > \frac{3\rho_{ab}^2-5\rho_{ab}-5}{\rho_{ab}-2}.$$

А тогда получаем, что

$$3\rho_{ab}+1 > n \Rightarrow \rho_{ab} > \frac{n-1}{3}.$$

В рамках этого подслучая уже вывели неравенство $r \geq \rho_{ab}(n-r+1)$. Подставляя в него $\rho_{ab} > \frac{n-1}{3}$ (это можно делать, поскольку неравенство $n-r+1 \geq 0$ выполняется, так как иначе выполнено $r=n$, что означает, что цикл T гамильтонов и подходит под то, что ищем), получаем, что

$$r > \frac{n-1}{3}(n-r+1).$$

Очевидно, что $r \leq n$. Тогда $n-r+1>0$. Если $n-r+1=1$, то $r=n$, что значит, что цикл T гамильтонов, что и нужно. Если $n-r+1=2$, то $r=n-1$, что значит, что цикл T содержит все вершины, кроме одной, то есть тоже подходит под то, что ищем. Если же $n-r+1 \geq 3$, то тогда $r > \frac{n-1}{3}(n-r+1) \Rightarrow r > n-1$, что только что разобрано.

Подслучай 1б: *В цикле T есть вершина типа a или типа b.*

Участком типа a называем такой подряд идущий набор вершин в направлении обхода цикла T, образованный всеми лежащими между вершинами типа a вершинами (крайние вершины участка – это вершины типа a), который, во-первых, нельзя увеличить, а во-вторых, в котором нет вершин других типов (участок также может состоять из одной вершины). Аналогичное определение даём для *участка типа b* и *участка типа ab*. Рёбра цикла естественным образом разбиваются на 4 группы: рёбра в участках типа a, рёбра в участках типа b, рёбра в участках типа ab и рёбра между участками. Пусть γ_a - это количество участков типа a, γ_b - это количество участков типа b, γ_{ab} - это количество участков типа ab. Из формулировки подслучая ясно, что хотя бы 2 из 3-х чисел $\rho_a, \rho_b, \rho_{ab}$ положительны (и соответственно, хотя бы 2 из 3-х чисел $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}$ положительны). Значит, $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_{ab} \geq 2$. То есть цикл T не может быть целиком из одного участка.

Из замечания, сформулированного непосредственно перед подслучаем 1a, сразу следует, что между двумя разными участками не менее, чем $n-r+1$ рёбер по обходу цикла. А также рёбер между двумя вершинами типа ab в участке типа ab тоже не менее, чем $n-r+1$. Рассмотрим все рёбра цикла T, не являющихся рёбрами в участках типа a или b. Для этого зафиксируем некоторое направление обхода цикла T. Обходя цикл T по этому направлению обхода, после окончания прохождения участка типа a или b следует не менее $n-r+1$ междуучасточных рёбер, а также после посещения любой вершины типа ab следует не менее $n-r+1$ междуучасточных рёбер или же рёбер участка типа ab. Таким образом, рёбер цикла T, не являющихся рёбрами в участках типа a или b не менее, чем $(n-r+1)(\rho_{ab}+\gamma_a+\gamma_b)$.

Рассмотрим любой участок типа a. Пусть в нём s вершин типа a. Тогда, если $s \geq 2$, то поскольку любая соседняя по обходу цикла вершина к вершине типа a не может быть вершиной типа a или b, то в участке хотя бы $2s-1$ рёбер, а если $s = 1$, то в участке хотя бы $2s-2$ рёбер, то есть для любого s в участке хотя бы $2s-2$ рёбер. Значит, всего внутриучасточных рёбер в участках типа a не менее, чем $2\rho_a - 2\gamma_a$. Аналогично, всего внутриучасточных рёбер в участках типа b не менее, чем $2\rho_b - 2\gamma_b$. Значит, всего внутриучасточных рёбер не менее, чем $2(\rho_a+\rho_b) - 2(\gamma_a+\gamma_b)$.

Итого, всего рёбер в цикле T не менее, чем $(n-r+1)(\gamma_a+\gamma_b+\rho_{ab}) + 2(\rho_a + \rho_b) - 2(\gamma_a+\gamma_b)$. Поскольку в нём ровно r рёбер, то выполнено неравенство

$$r \geq (n-r+1)(\gamma_a+\gamma_b+\rho_{ab}) + 2(\rho_a+\rho_b) - 2(\gamma_a+\gamma_b) \geq$$

$$\geq (n-r-2)(\gamma_a+\gamma_b+\rho_{ab}) + 2(\rho_a+\rho_b) + 3\rho_{ab}.$$

Поскольку $\gamma_a+\gamma_b+\gamma_{ab} \geq 2$ и очевидно, что $\rho_{ab} \geq \gamma_{ab}$, то тогда $\gamma_a+\gamma_b+\rho_{ab} \geq 2$.

Также $n-r-2 \geq 0$, поскольку иначе $r=n$ или $r=n-1$ (тогда цикл T или гамильтонов, или содержит все вершины без одной, то есть подходит под то, что ищем). Из этого следует, что

$$r \geq 2(n-r-2)+2(\rho_a+\rho_b)+3\rho_{ab} \Rightarrow 3r \geq 2(n-2)+2(\rho_a+\rho_b)+3\rho_{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \geq \frac{2}{3}(\rho_a+\rho_b)+\frac{2}{3}n-\frac{4}{3}+\rho_{ab}.$$

Вершина a соединена ровно с $\rho_a+\rho_{ab}$ вершинами цикла T и может быть ещё соединена со всеми вершинами пути H, кроме себя, то есть она соединена не более, чем с $n-r-1+\rho_a+\rho_{ab}$ вершинами. С другой стороны, её степень, по условию, не меньше, чем $\frac{n+2}{3}$. Значит, выполнено неравенство: $\frac{n+2}{3} \leq n-r-1+\rho_a+\rho_{ab}$. Аналогичное для вершины b, получаем, что $\frac{n+2}{3} \leq n-r-1+\rho_b+\rho_{ab}$. Значит, $\frac{n+2}{3} \leq n-r-1+min(\rho_a,\rho_b)+\rho_{ab}$. Таким образом, выполнено неравенство:

$$r \leq \frac{2n-5}{3}+min(\rho_a,\rho_b)+\rho_{ab}.$$

Из этого и предыдущего неравенств следует, что

$$\frac{2n-5}{3}+min(\rho_a,\rho_b)+\rho_{ab} \geq \frac{2}{3}(\rho_a+\rho_b)+\frac{2}{3}n-\frac{4}{3}+\rho_{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow min(\rho_a,\rho_b) \geq \frac{2}{3}(\rho_a+\rho_b)+\frac{1}{3}.$$

Поскольку $\frac{2}{3}(\rho_a+\rho_b) \geq \frac{4}{3}min(\rho_a,\rho_b)$, то получается, что

$$min(\rho_a,\rho_b) \geq \frac{4}{3}min(\rho_a,\rho_b)+\frac{1}{3} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{3}min(\rho_a,\rho_b)+\frac{1}{3}.$$

Это невозможно, противоречие.

2 случай: *Не существует двух таких разных вершин цикла T, что одна соединена с a, а другая - с b).*

Это значит, что или из a, или из b в цикл T выходит не более 1 ребра (потому что в противном случае из a и из b выходит в цикл T минимум по 2 ребра, и тогда a и b соединены с двумя разными вершинами цикла T). Не теряя общности, пусть из a в цикл T выходит не более 1 ребра. Поскольку $d_G(a) \geq \frac{n}{3}$, то тогда из a в путь H выходит не менее, чем $\frac{n}{3}-1$ рёбер. Тогда в пути H, включая a, не менее, чем $\frac{n}{3}-1+1=\frac{n}{3}$ вершин. В пути H ровно $n-r$ вершин, таким образом,

$$n-r \geq \frac{n}{3} \Rightarrow r \leq \frac{2n}{3}. \qquad (2)$$

Утверждение 3: а) Любой конец пути H имеет не более, чем $\frac{r}{3}$ соседей среди вершин цикла T.

б) Если в графе $G(H)$ есть гамильтонов цикл, то любая вершина графа $G(H)$ имеет не более, чем $\frac{r}{3}$ соседей среди вершин цикла T.

Доказательство: а) Сначала докажем для вершины a. От противного, пусть из неё в цикл T ведёт больше, чем $\frac{r}{3}$ рёбер. Поскольку из a в цикл T выходит не более 1 ребра, то получаем, что $1 > \frac{r}{3} \Rightarrow r < 3$. По утверждению 2, $r \geq \frac{n}{2}$. Значит, $3 > \frac{n}{2} \Rightarrow n < 6$, противоречие с (1).

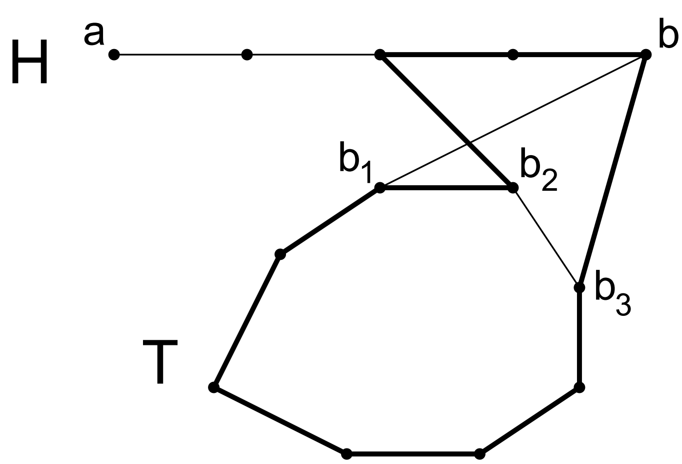

Рис. 10: b_2 не может быть соединена с какой-либо вершиной пути H, иначе образуется цикл (отмечен жирным), существование которого противоречит выбору цикла T.

Теперь докажем для вершины b. Посмотрим на k_b соседей b в цикле T (сохраняя терминологию, называем их *вершинами типа* b). Заметим, что вершины типа b не могут быть соседями в порядке обхода цикла: иначе цикл T можно легко увеличить за счёт вершины b, а оставшиеся вершины будут образовывать путь (это было продемонстрировано в рис. 9). Пусть есть две вершины b_1 и b_3 типа b, которые находятся друг от друга через 1 вершину (назовём её b_2) в порядке обхода цикла T. Только что доказали, что $bb_2 \notin E(G)$. Заметим, что b_2 не соединена ни с одной из вершин пути H (если соединена, то образуется цикл, по размеру больший, чем цикл T, и все вершины, не входящие в цикл, образуют путь – рис. 11). Значит, все соседи b_2 находятся в цикле T. Заметим, что если два соседа b_2 являются соседними в порядке обхода цикла T, то вершину b_2 можно 'вставить' между этими соседями, и тогда образуется цикл, содержащий все вершины T и вершину b (то есть по размеру он больше цикла T), таким образом, все не входящие в цикл вершины образуют путь (рис. 12). Значит, никакие два соседа b_2 не являются соседними в порядке обхода цикла T. В цикле T, кроме b_2 есть $r-1$ вершин, то есть получается, что b_2 соединена не более, чем с $\lceil \frac{r-1}{2} \rceil$ вершинами. Таким образом, так как $d_G(b_2) \geq \frac{n}{3}$, получается, что $\lceil \frac{r-1}{2} \rceil \geq \frac{n}{3} \Rightarrow \frac{r}{2} \geq \frac{n}{3} \Rightarrow r \geq \frac{2n}{3}$. Из (2) получаем, что $r = \frac{2n}{3}$.

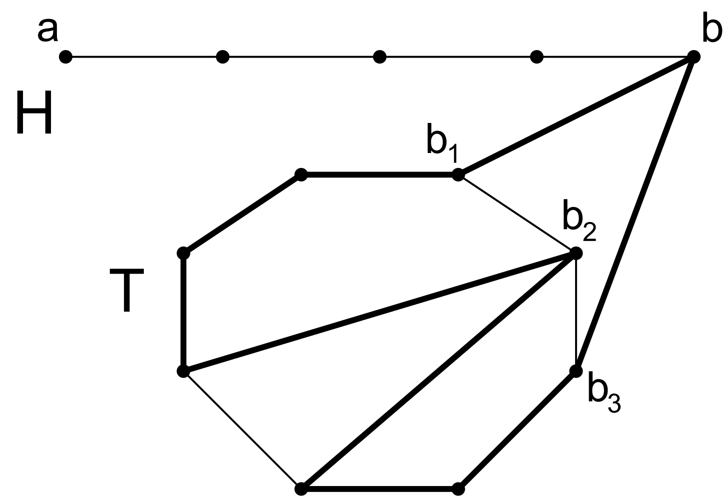

Рис. 11: Если b_2 соединена с двумя подряд идущими в порядке обхода цикла T вершинами, то найдётся цикл (отмечен жирным), существование которого противоречит выбору цикла T.

Поскольку $r = \frac{2n}{3}$, то в пути H ровно $n-r = \frac{n}{3}$ рёбер. Тогда в пути H, помимо вершины a, всего $\frac{n}{3}-1$ вершин. Значит, поскольку $d_G(a) \geq \frac{n}{3}$, то вершина a имеет хотя бы одного соседа среди вершин цикла T. Назовём этого соседа a_1. Тогда $a_1 \neq b_1$ или же $a_1 \neq b_3$, не теряя общности, предположим первое. Тогда a_1 и b_1 - такие 2 различные вершины цикла T, что a_1 соединена с a, а b_1 соединена с b. Противоречие с формулировкой 2-го случая, в рамках которого находимся.

Значит, нет двух соседей b, которые являются друг другу соседями или находятся друг от друга через 1 вершину в порядке обхода цикла T. Но если бы вершина b имела больше, чем $\frac{r}{3}$ соседей среди вершин цикла T, то тогда такие соседи непременно бы нашлись. Противоречие.

б) Если вершины пути H образуют гамильтонов цикл, то любая вершина пути H является концом гамильтонова пути в графе $G(V(H))$. Применяя утверждение 3, пункт а) к этой вершине и к этому гамильтонову пути, получаем нужное. $\square$

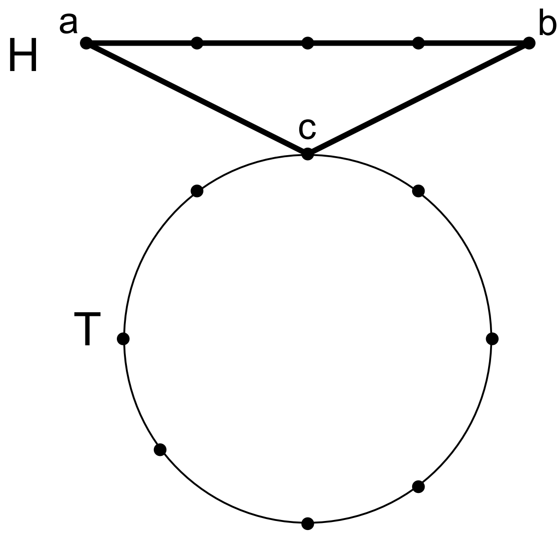

Рис. 12: Путь H с вершиной c образуют такой цикл (отмечен жирным), что не входящие в него вершины образуют путь.

Утверждение 4: Вершины пути H образуют цикл.

Доказательство: Разберём 2 случая.

Случай а: *Из a и из b в цикл T выходит не менее, чем по 1 ребру.*

Тогда, поскольку мы находимся в условиях случая 2: из a и из b выходит в цикл T ровно по 1 ребру, причём эти 2 ребра смежны, назовём их общий конец через c. Рассмотрим подграф $G(H)$. Поскольку из a и из b в цикл T выходит ровно по 1 ребру, то $d_{G(H)}(a) \geq \frac{n}{3} - 1$, $d_{G(H)}(b) \geq \frac{n}{3} - 1$. В графе $G(H)$ есть гамильтонов путь H. Тогда применим лемму 1 к пути H, в котором $n-r$ вершин: если $d_{G(H)}(a) + d_{G(H)}(b) \geq n - r$, то в графе $G(H)$ есть гамильтонов цикл (что и хотим). В противном случае: $n-r > d_{G(H)}(a)+d_{G(H)}(b) \geq \frac{n}{3}-1+\frac{n}{3}-1 = \frac{2n}{3}-2 \Rightarrow r < \frac{n}{3} + 2$. Заметим, что путь H и вершина c образуют цикл размера $n - r + 1$, причём такой, что не входящие в него вершины образуют путь (рис. 13). Тогда, по определению r, получаем: $r \geq n-r+1 \Rightarrow r \geq \frac{n+1}{2}$. Если $r > \frac{n+1}{2}$, то $r \geq \frac{n}{2}+1$. Поскольку $r < \frac{n}{3} + 2$, то получаем $\frac{n}{3} + 2 > \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow n < 6$, противоречие с (1). Если же $r = \frac{n+1}{2}$, то во-первых, n нечётно, а во-вторых, поскольку $r < \frac{n}{3} + 2$, получаем $\frac{n}{3} + 2 > \frac{n+1}{2} \Rightarrow n < 9$. Поскольку n нечётно, и выполнено (1), то $n = 7$, $r = \frac{n+1}{2} = 4$. Из предыдущих рассуждений следует, что в графе есть два цикла размера 4 (назовём их T_1 и T_2), имеющих общую вершину c, причём нет цикла длины 5 такого, что оставшиеся 2 вершины соединены (впрочем, также нет цикла длины 5 такого, что оставшиеся 2 вершины не соединены, иначе это и есть тот цикл, существование которого пытаемся доказать). То есть в графе нет цикла длины 5. Заметим, что при удалении вершины c из двусвязности граф остаётся связным, значит, есть ребро $c_1c_2 \in E(G)$ для неких c_1 и c_2 из разных циклов T_1 и T_2 соответственно (рис. 14). Поскольку T_1 и T_2 – циклы длины 4, то есть пути, длина обоих не менее 2, от c_1 и c_2 до c, проходящие по рёбрам циклов T_1 и T_2 соответственно. Конкатенация этих путей и ребро c_1c_2 образуют цикл длины не менее 5, противоречие. Поскольку в графе нет цикла длины 5, то этот цикл длины 6 или 7, но тогда он гамильтонов или он содержит все вершины, кроме одной, то есть в любом случае подходит под описание цикла из формулировки теоремы.

Случай б: *В паре (a, b) есть вершина, из которой в цикл T не выходит рёбер.*

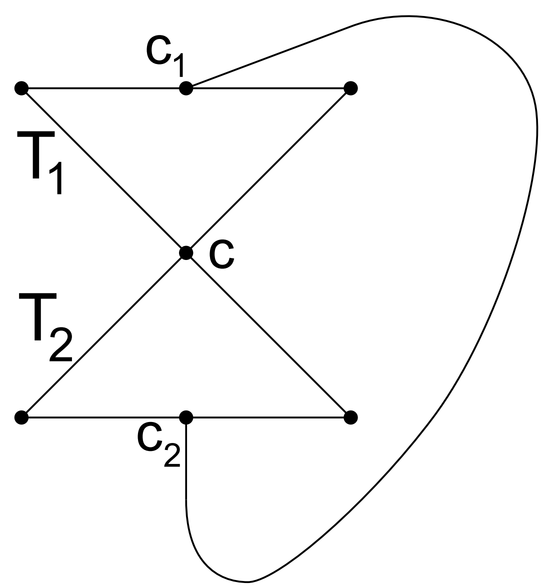

Рис. 13: Разбор случая $n = 7$.

Не теряя общности, пусть из a в цикл T не выходит рёбер. Сохраняем предыдущие обозначения: из b в цикл T выходит k_b рёбер. Рассмотрим подграф $G(H)$. Поскольку из a в цикл T не выходит рёбер, а из b в цикл T выходит ровно k_b рёбер, то $d_{G(H)}(a) \geq \frac{n}{3}$, $d_{G(H)}(b) \geq \frac{n}{3} - k_b$. В графе $G(H)$ есть гамильтонов путь H. Тогда применим лемму 1 к пути H, в котором $n - r$ вершин: если $d_{G(H)}(a)+d_{G(H)}(b) \geq n-r$, то в графе $G(H)$ есть гамильтонов цикл (что и хотим). В противном случае: $n-r > d_{G(H)}(a)+d_{G(H)}(b) \geq \frac{n}{3}+\frac{n}{3}-k_b = \frac{2n}{3}-k_b \Rightarrow k_b > r-\frac{n}{3}$. При этом по утверждению 3, пункт а) выполнено неравенство $k_b \leq \frac{r}{3}$. Таким образом, вывели 2 неравенства: $k_b \leq \frac{r}{3}$ и $k_b > r - \frac{n}{3} \Rightarrow \frac{r}{3} > r - \frac{n}{3} \Rightarrow n > 2r$. Противоречие с утверждением 2. □

Итак, вершины пути H образуют цикл. Отныне будем называть H циклом.

Пусть p и q – такие две вершины H, что между ними кратчайший путь по рёбрам цикла H среди тех пар вершин из H, у которых есть различные соседи в цикле T (такие пары вершин найдутся, поскольку граф G двусвязный). Пусть p_0 и q_0 – соседи p и q соответственно среди вершин цикла T (такие, что $p_0 \neq q_0$). Пусть V_H – множество вершин H. Тогда все вершины V_H - это объединение $V_H = V_{H_1} \cup V_{H_2} \cup \{p\} \cup \{q\}$, где H_1 и H_2 – два участка цикла H, на которые этот цикл делят вершины p и q (рис. 15), а V_{H_1} и V_{H_2} - это множество вершин H_1 и H_2 соответственно. Не теряя общности предположим, что $|V_{H_1}| \leq |V_{H_2}|$. Заметим, что для любой вершины $e \in V_{H_1}$ выполнено $d_{G(V_H)}(e) \geq \frac{n}{3}$. Действительно, иначе, поскольку $d_G(e) \geq \frac{n}{3}$, то у e есть сосед среди вершин T (обозначим его e_1). Тогда $e_1 \neq p_0$ или же $e_1 \neq q_0$, не теряя общности, предположим первое. Тогда у e и p есть два различных соседа в T, значит, путь между p и q – это не кратчайший путь по рёбрам цикла H среди всех пар вершин H, у которых есть различные соседи в цикле T, потому что путь по рёбрам цикла H между e и p короче.

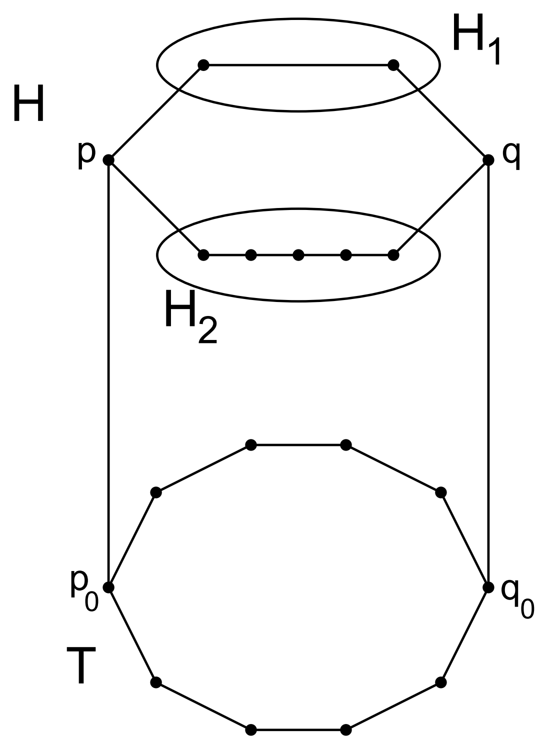

Рис. 14: Разбиение цикла H и его соединение по рёбрам pp_0 и qq_0 с циклом T.

Утверждение 5: В графе $G(V_H)$ существует такой гамильтонов путь, что его концы — это вершины p и q.

Доказательство: Рассмотрим самый длинный путь с концами p и q (назовём его L_2 и пусть в нём η вершин) среди всех таких, для которых если какая-то вершина d не лежит в этом пути, то тогда $d_{G(V_H)}(d) \geq \frac{n}{3}$, причём все вершины H, не лежащие в этом пути, образуют путь (назовём его концы p_1 и q_1 и назовём этот путь L_1). Такой путь L_2 существует, поскольку из ранее доказанного подойдёт путь между p и q, проходящий по участку цикла H_2 (в нём не менее $\frac{n-r}{2}+1$ вершин, значит, $\eta \geq \frac{n-r}{2}+1$). Предположим противное: пусть L_2 не гамильтонов. Тогда в пути L_1 ровно $n-r-\eta \geq 1$ вершин. Поскольку из условия на L_2 выполнено $d_{G(V_H)}(p_1) \geq \frac{n}{3}$, то есть не менее $\frac{n}{3}-(n-r-\eta-1) = r+\eta+1-\frac{2n}{3}$ соседей вершины p_1 среди вершин пути L_2. Заметим, что соседи вершины p_1 не могут быть соседями в порядке обхода пути L_2 (иначе вершину p_1 можно 'вставить' между этими соседями в путь L_2 (рис. 16) — тогда путь L_2 будет длиннее, а все остальные вершины образуют путь и всё ещё их степени в $G(V_H)$ не менее, чем $\frac{n}{3}$, противоречие с максимальностью L_2). Таким образом, $\eta \geq 2(r+\eta+1-\frac{2n}{3})-1 \Rightarrow \eta \leq \frac{4n}{3}-2r-1$.

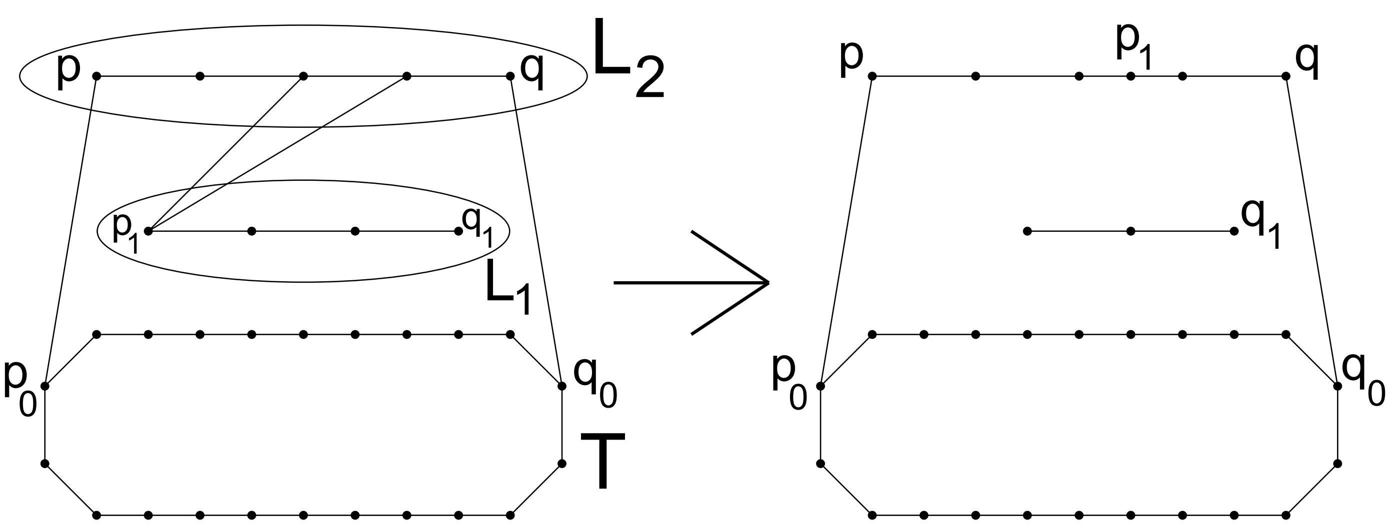

Рис. 15: Разбиение H на 2 пути: L_1 и L_2. Демонстрация того, что p_1 не может иметь двух подряд идущих в порядке обхода пути L_2 соседей.

Докажем, что вершины L_1 образуют цикл. От противного, пусть они не образуют цикл. Разберём сначала случай, когда в L_1 хотя бы 3 вершины. Поскольку в нём ровно $n-r-\eta$ вершин и L_1 — это путь, то по лемме 1 выполнено $d_{G(L_1)}(p_1)+d_{G(L_1)}(q_1) < n-r-\eta$, не теряя общности, $d_{G(L_1)}(p_1) < \frac{n-r-\eta}{2}$. Тогда есть не менее $\frac{n}{3}-\frac{n-r-\eta-1}{2} = \frac{r+\eta+1}{2}-\frac{n}{6}$ соседей вершины q_1 среди вершин пути L_2. Аналогично тому, что выше, соседи q_1 не могут быть соседями в порядке обхода пути L_2, и мы получаем: $\eta \geq 2(\frac{r+\eta+1}{2} - \frac{n}{6}) - 1 \Rightarrow \eta \geq r + \eta - \frac{n}{3} \Rightarrow \frac{n}{3} \geq r$. Противоречие с утверждением 2.

Теперь разберём случай, когда L_1 состоит из одной или двух вершин. Тогда $\eta \geq n - r - 2$, и поскольку $\eta \leq \frac{4n}{3} - 2r - 1$, то получаем $\frac{4n}{3} - 2r - 1 \geq n - r - 2 \Rightarrow r \leq \frac{n}{3} + 1$. Но по утверждению 2, $r \geq \frac{n}{2}$. Тогда $\frac{n}{3} + 1 \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n \leq 6$. Тогда из (1) получаем, что $n = 6$, что означает, что все неравенства в этом абзаце превращаются в равенства, таким образом, $n = 6$, $r = \frac{n}{2} = 3$, $\eta = n - r - 2 = 1$. Но $\eta \geq 2$, так как путь L_2 содержит вершины p и q. Противоречие.

Итак, вершины L_1 образуют цикл, и отныне мы будем называть L_1 циклом.

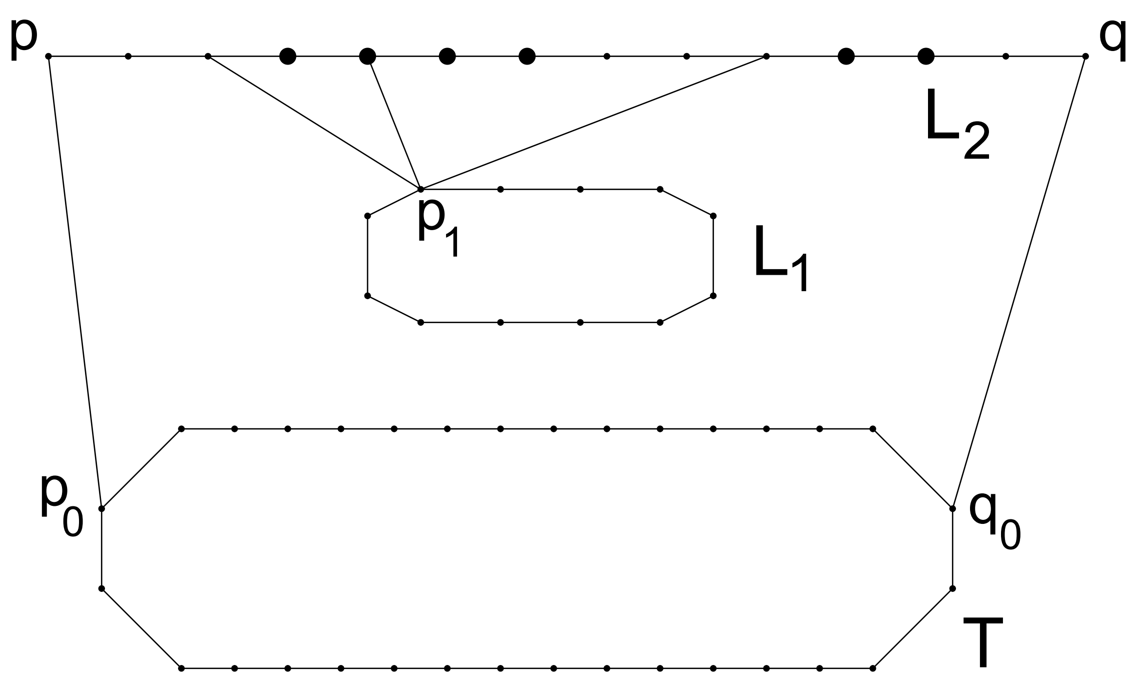

Рис. 16: Для каждого соседа p_1 из пути L_2 отмечаем (на рисунке - более жирным) соседа и вершину, идущую через один.

Теперь докажем, что найдутся две такие вершины пути L_2, что они, во-первых, или соседи, или идут через 1 в порядке обхода пути L_2, а во-вторых, одна из них соединена с p_1, а вторая — с q_1. От противного, пусть таких нет. Зафиксируем какое-то направление обхода пути L_2 (например, от p до q). Рассмотрим всех соседей p_1 среди вершин пути L_2. Напомним, что их хотя бы $r + \eta + 1 - \frac{2n}{3}$. Для каждого из этих соседей *отметим* две вершины, следующие за ним в соответствии с зафиксированным направлением обхода пути L_2 (то есть отмечаем соседа и вершину, идущую через один, рис. 17). Поскольку уже доказали (этому был посвящён рис. 16), что все соседи вершины p_1 не являются соседями в порядке обхода пути L_2, то никакую вершину не отметили дважды, значит, отметили не менее $2(r + \eta + 1 - \frac{2n}{3} - 1)$ вершин (для q не отмечаем ни одной вершины, то есть теряем две, а для соседа q в порядке обхода пути L_2

отмечаем только одну, то есть теряем одну. Значит, всего теряем не более, чем две, так как q и этот сосед q не могут быть одновременно соседями вершины p_1). Поскольку предположили противное, то все соседи q_1 в пути L_2 (а их тоже хотя бы $r + \eta + 1 - \frac{2n}{3}$) не могут быть отмеченными. Таким образом,

$$\eta \geq r + \eta + 1 - \frac{2n}{3} + 2(r + \eta + 1 - \frac{2n}{3} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \geq r + 1 - \frac{2n}{3} + 2r + 2\eta - \frac{4n}{3} \Rightarrow 2n \geq 3r + 2\eta + 1.$$

Поскольку $\eta \geq \frac{n-r}{2}+1$, то получаем $2n \geq 3r+n-r+2+1 \Rightarrow n \geq 2r+3 \Rightarrow r < \frac{n}{2}$. Противоречие с утверждением 2.

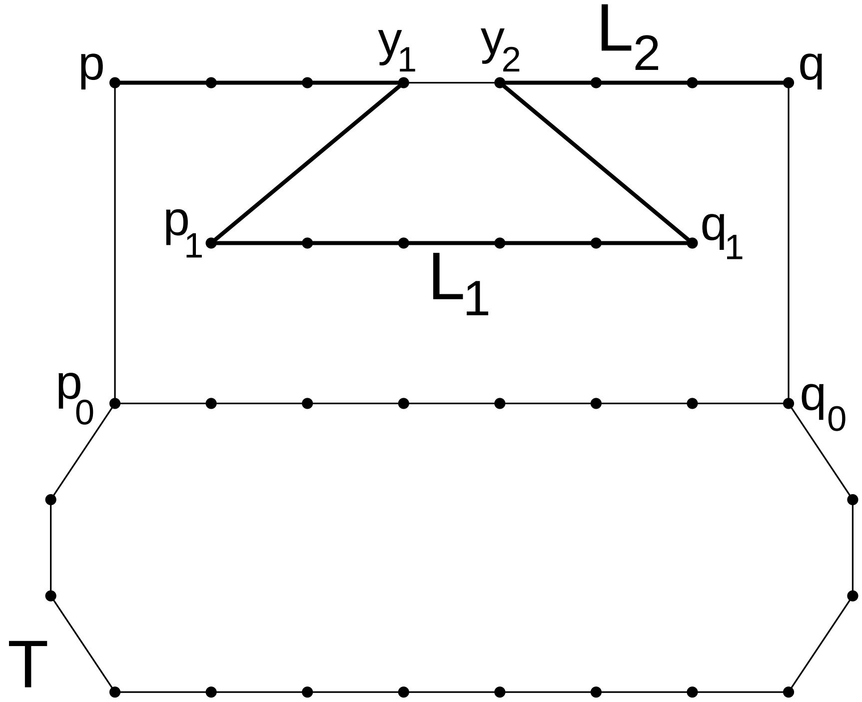

Рис. 17: Найдётся гамильтонов путь в V_H с концами p и q, если y_1 и y_2 - соседи в порядке обхода пути L_2.

Итак, нашли две такие вершины пути L_2, что они, во-первых, или соседи, или идут через 1 в порядке обхода пути L_2, а во-вторых, одна из них соединена с p_1, а вторая — с q_1. Назовём их y_1 и y_2 (пусть y_1 будет ближе в порядке обхода пути L_2 к вершине p, а y_2 — к вершине q и не теряя общности пусть y_1 — сосед p_1, а y_2 — сосед q_1). Заметим, что если y_1 и y_2 — соседи в порядке обхода пути L_2, то мы нашли гамильтонов путь в V_H с концами p и q (рис. 18).

Значит, y_1 и y_2 идут через один в порядке обхода пути L_2, тогда назовём вершину между ними в порядке обхода пути L_2 черех z. Поскольку z — сосед в пути L_2 как вершины y_1, так и вершины y_2, то, как отмечали ранее (этому был посвящён рис. 16), z не может быть соседом p_1 или q_1. Допустим, z – сосед какой-то другой вершины цикла L_1. Тогда заметим, что мы нашли путь с концами p и q, содержащий весь путь L_2 и ещё какие-то вершины (он идёт по L_2 от p до z, затем заходит в цикл L_1, доходит по рёбрам цикла L_1 до вершины q_1, переходит по ребру к вершине y_2 и дальше идёт по рёбрам пути L_2 к вершине q, рис. 19), что противоречит выбору L_2. Значит, вершина z не имеет соседей среди цикла L_1. Заметим, что если z имеет двух подряд идущих соседей в порядке обхода пути L_2, то мы нашли гамильтонов путь в V_H с концами p и q, он выглядит так: идём от вершины p к вершине y_1 по рёбрам L_2, идём по ребру y_1p_1, проходим по рёбрам пути L_1 к вершине q_1, проходим по ребру q_1 к вершине y_2, а затем идём по рёбрам пути L_2 к вершине q, при этом вставляем куда-то в этот путь вершину z между этими соседями (рис. 20). Таким образом, вершина z не имеет двух подряд идущих в порядке обхода пути L_2 соседей среди вершин пути L_2. Пусть в участке пути L_2 от вершины p до вершины y_1 ровно τ_1 вершин, а в участке пути от вершины y_2 до вершины q ровно τ_2 вершин. Тогда $\tau_1 + \tau_2 = \eta - 1$. Поскольку z не имеет двух подряд идущих в порядке обхода пути L_2 соседей среди вершин пути L_2, то на первом участке она имеет не более, чем $\frac{\tau_1+1}{2}$ соседей, а на втором – не более, чем $\frac{\tau_2+1}{2}$, то есть всего не более, чем $\frac{\tau_1+1}{2} + \frac{\tau_2+1}{2} = 1 + \frac{\tau_1+\tau_2}{2} = 1 + \frac{\eta-1}{2} = \frac{\eta+1}{2}$ соседей.

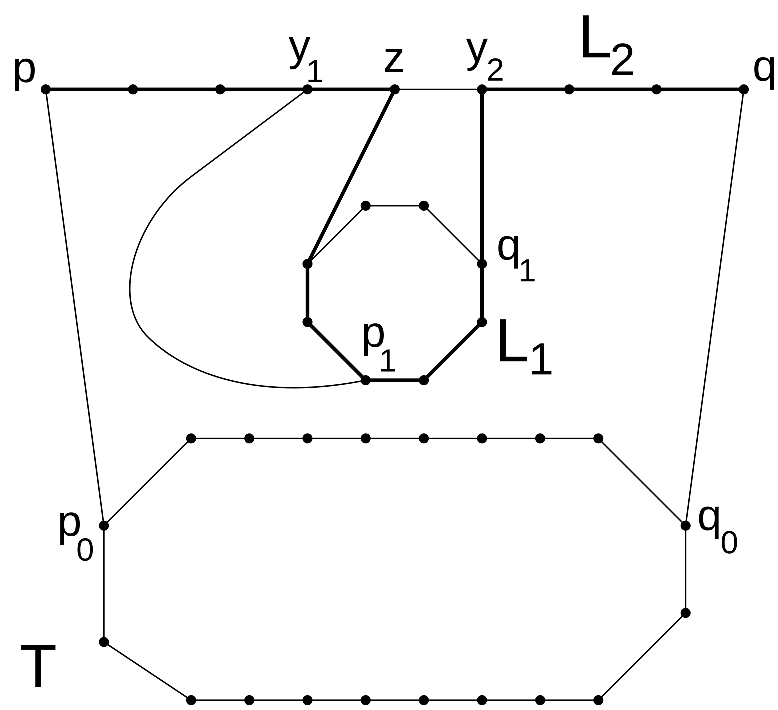

Рис. 18: Если у z есть сосед какой-то вершины цикла L_1, то найдётся путь (отмечен жирным) от p до q, существование которого противоречит выбору L_2.

По утверждению 3, пункт б) вершина z имеет не более, чем $\frac{r}{3}$ соседей в цикле T. Применяя это соображение, получаем, что $d_G(z) \leq \frac{\eta+1}{2} + \frac{r}{3}$. Поскольку $d_G(z) \geq \frac{n+2}{3}$, получаем, что $\frac{n+2}{3} \leq \frac{\eta+1}{2} + \frac{r}{3} \Rightarrow 2n+4 \leq 3\eta+3+2r \Rightarrow \eta \geq \frac{2n}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2r}{3}$. Поскольку $\eta \leq \frac{4n}{3} - 2r - 1$, то $\frac{4n}{3} - 2r - 1 \geq \frac{2n}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2r}{3} \Rightarrow \frac{2n}{3} - \frac{4}{3} \geq \frac{4r}{3} \Rightarrow \frac{n}{2} > r$. Противоречие с утверждением 2. $\square$

Итак, обозначим гамильтонов путь в графе $G(V_H)$ с концами p и q через H_0. Тогда образуется цикл такой: путь H_0, рёбра pp_0 и qq_0 и ещё по рёбрам цикла (по большей половине цикла T) между p_0 и q_0 (рис. 21). Длина у такого цикла – это не менее, чем $\frac{r}{2} + 2 + n - r - 1 = n - \frac{r}{2} + 1$ (2 ребра pp_0, qq_0, большая половина цикла T – это не менее $\frac{r}{2}+2$ рёбер и гамильтонов путь в графе $G(V_H)$; поскольку там ровно $n - r$ вершин, то этот в этом пути будет $n - r - 1$ рёбер). Заметим, что это такой цикл, что все остальные вершины, не входящие в этот цикл, – это одна из половин цикла T, то есть они образуют путь. Тогда, из выбора цикла T, должно быть выполнено: $r \geq n - \frac{r}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3r}{2} > n \Rightarrow r > \frac{2n}{3}$. Противоречие с (2). $\square$

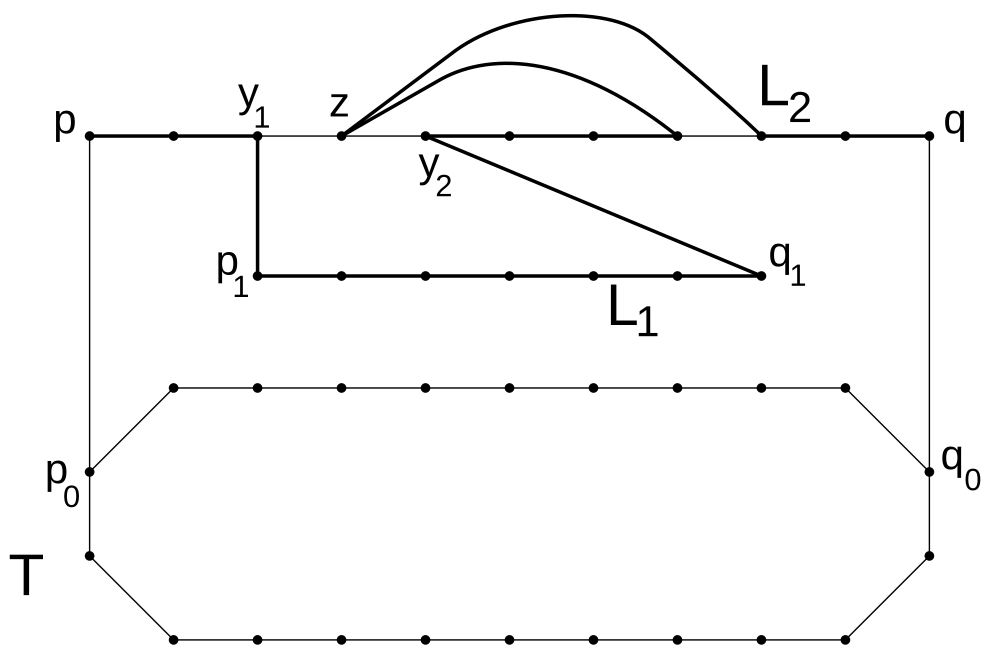

Рис. 19: Если z имеет двух подряд идущих соседей в порядке обхода пути L_2, то есть гамильтонов путь в V_H (отмечен жирным).

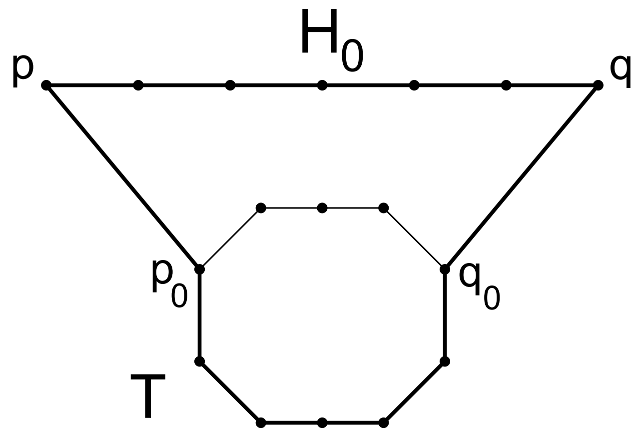

Рис. 20: Из части цикла T и пути H_0 получается цикл (отмечен жирным), существование которого противоречит выбору цикла T.

3 Точность оценки

Утверждение: Оценка $\frac{n+2}{3}$ точна. Точнее, для любого $n \geq 8$ и для любого $2 < \nu < \frac{n+2}{3}$ существует такой двусвязный граф G, что $v(G) = n$ и $\delta(G) = \nu$, и в котором нет такого цикла, что все не входящие в него вершины независимы.

Доказательство:

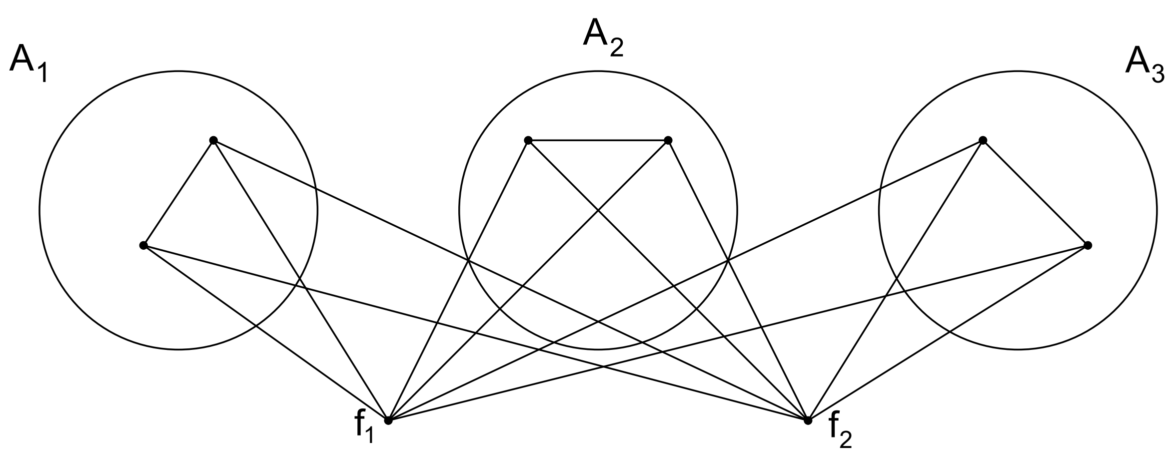

Рис. 21: Пример для $n = 8$, $\nu = 3$.

Возьмём какие-то 2 вершины и назовём их f_1 и f_2, а остальные вершины поделим на 3 группы: в первых двух группах будет ровно по $\nu - 1$ вершин (назовём их A_1 и A_2), а в третьей будет $n - 2\nu$ вершин (назовём её A_3). Рёбра в этом графе будут такие: любые две вершины, лежащие в одной группе, соединены друг с другом, любые две вершины, лежащие в разных группах, не соединены, а вершины f_1 и f_2 соединены со всеми, но не друг с другом (рис. 22). Заметим, что $\delta(G) = \nu$, поскольку если вершина лежит в A_1 или A_2, то её степень ровно ν, степени вершин f_1 и f_2 равны $n - 2 \geq \nu$ (так как $n \geq 3$, то $n - 2 \geq \frac{n}{3} > \nu$) а степень любой вершины в A_3 равна $n - 2\nu + 1 \geq \nu$. Теперь докажем, что граф двусвязный. Действительно, при удалении любой (кроме f_1) вершины любая оставшаяся вершина соединена с f_1 (f_2 же соединена с какой-то вершиной из A_1 или A_2, которая в свою очередь соединена с f_1), таким образом граф без удалённой вершины связный. Если же удалена вершина f_1, то любая оставшаяся вершина соединена с f_2, то есть оставшийся граф связный. Осталось доказать, что в нём нет такого цикла, что оставшиеся вершины независимы. От противного, пусть такой цикл есть. Тогда заметим, что он должен в себе содержать какие-то вершины из всех групп A_1, A_2, A_3 (иначе какая-то вся группа не вошла в цикл, а в любой группе есть рёбра, поскольку в A_1 и A_2 по $\nu - 1 > 1$ вершин, а в A_3 ровно $n - 2\nu > 1$ вершин). Начнём проход рёбер цикла, стартуя с какой-то вершины цикла из A_1. Не теряя общности, проходя по рёбрам цикла, в какой-то момент мы окажемся в вершине из A_2, потом в какой-то момент в вершине из A_3, а затем вернёмся в изначальное положение. При переходе из группы A_i в группу A_j для $i \neq j$ цикл обязан посетить одну из вершин f_1, f_2. Но этих переходов между группами хотя бы 3, то есть какую-то из вершин f_1, f_2 цикл посетил дважды. Противоречие. $\square$

Список литературы

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory With Applications.* Elsevier Science, 1976.

[2] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer, 1997-2016 (издания 1-5).

[3] N. Linial. *A lower bound on the circumference of a graph.* Discrete Math. v.15 (1976) p.297-300.

[4] C. Thomassen. *A theorem on paths in planar graphs.* Journal of Graph Theory, Vol.7 (1983) 169-176.