Санкт-Петербургский государственный университет

Шашков Тимофей Юрьевич

Выпускная квалификационная работа

Интеграл Шнирельмана и аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей

Основная образовательная программа:
бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
заведующий кафедрой высшей алгебры и теории чисел
математико-механического факультета СПбГУ
профессор Востоков Сергей Владимирович

Рецензент:
доцент Санкт-Петербургского филиала федерального
государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Афанасьева Софья Сергеевна

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Введение

1.1 Закон взаимности и его приложение

1.1.1 История закона взаимности

Одной из центральных тем в алгебраической теории чисел является закон взаимности для локальных полей и его приложения.

Первый результат в этом направлении был получен Л. Эйлером и К. Гауссом, известный как квадратичный закон взаимности, связывающий символы Лежандра нечетных простых чисел:

$(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$, где p, q - нечетные простые числа, а $(\frac{p}{q})$ и $(\frac{q}{p})$ - символы Лежандра.

Для конечных расширений поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (обозначим такое поле через E) и сравнений произвольной степени, была получена формула - обобщение квадратичного закона взаимности (начало 20-го века), связывающая произведение степенных вычетов с символами Гильберта:

$(\frac{\alpha}{\beta})_n (\frac{\beta}{\alpha})_n^{-1} = \prod\limits_{p|n\infty} (\frac{\alpha,\beta}{p})_n$, где $(\frac{\alpha,\beta}{p})_n$ - символ Гильберта, а α, β - ненулевые элементы рассматриваемого поля.

Первоначальное определение символа Гильберта было достаточно сложным и возникла потребность в нахождении альтернативного способа (явной формулы) для подсчета символа Гильберта. В 1950 году И. Р. Шафаревич нашел базис в мультипликативной группе локального поля, содержащего все корни p^n-ой степени из 1, в котором символ Гильберта можно считать (он называется базисом Шафаревича), а окончательная формула была получена в 1978 году С. В. Востоковым (см. [7]), что повлекло за собой массу различных приложений.

1.1.2 Приложения 9-ой проблемы Гильберта

Нахождение явной формулы для символа Гильберта оказалось существенным этапом в развитии конструктивной теории полей классов для локальных полей - конечных расширений поля p-адических чисел:

Если G - подгруппа мультипликативной группы поля K^* конечного индекса, $G^\perp$ - ее ортогональное дополнение относительно символа Гильберта. Тогда $G^\perp$ является группой норм в $K(\sqrt[n]{G})/K$. Это является ключевым соображением в построении теории полей классов для локальных полей.

Помимо этого, можно рассматривать формульные группы и модули и изучать для них теорию полей классов. Важным объектом здесь выступают эллиптические кривые, на которых можно завести структуру абелевой группы. В свою очередь, эллиптические кривые сыграли ключевую роль в доказательстве Великой теоремы Ферма.

1.1.3 Связь между законом взаимности и интегральной теоремой Коши

Один из самых важных результатов теории комплексного анализа - Интегральная теорема Коши, связывающая контурный интеграл от мероморфной функции с ее вычетами (точнее ее следствие). Оказывается, для одномерных локальных полей характеристики 0 можно определить аналог контурного интеграла (интеграл Шнирельмана), для которого будет верна формулировка теоремы Коши. Аналог этой теоремы для одномерных локальных полей был доказан С. В. Востоковым и М. А. Ивановым в работе [2]. Это позволило, в свою очередь, найти связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта и, как следствие, получить альтернативный вариант явной формулы для символа Гильберта.

Таким образом существует аналогия между объектами дискретной и непрерывной природы, что позволяет глубже понимать суть вещей и комбинировать методы разной природы для решения задач.

Возникает естественный вопрос о том возможно ли обобщение вышеперечисленных результатов, связанных с интегралом Шнирельмана, с одномерного случая на многомерный. Оказывается, для двумерных полей ответ положительный, и задача этой работы как раз заключается в исследовании интеграла Шнирельмана и его свойств для двумерных локальных полей характеристики 0.

1.2 Цель работы и полученные результаты

Целью настоящей работы является обобщение результатов, связанных с интегралом Шнирельмана и полученных для одномерных локальных полей характеристики 0, на случай двумерных локальных полей нулевой характеристики. В этой работе обобщено понятие интеграла Шнирельмана для полей указанного вида и доказан аналог интегральной теоремы Коши для двумерных полей. Как следствие интегральной теоремы Коши, была получена связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта (рассматриваются поля $K = E\{\{t\}\}$).

2 Общие обозначения и необходимые факты

2.1 Двумерные локальные поля

В работе будем предполагать, что K - двумерное локальное поле характеристики 0, а E - конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Введем основные обозначения, которые будут использоваться в работе дальше.

ζ - корень степени $q = p^m$ (для результатов, связанных с символом Гильберта, будем дополнительно требовать, чтобы ζ был элементом поля K).

ν - двумерный показатель локального поля K (то есть со значениями в группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порядок - лексикографический: сначала сравниваем первую компоненту, а затем в случае равенства - вторую)

ν_1, ν_2 - первая и вторая компоненты показателя соответственно, а ν_E - нормирование в поле E.

O_K - кольцо целых многомерного локального поля K, то есть множество $\{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$

K^{alg} - алгебраическое замыкание локального поля K.

$\overline{K^{alg}}$ - пополнение алгебраического замыкания локального поля K.

$|\cdot|_p$ - p-адическая норма (а точнее одна из класса эквивалентности), а ν_p - p-адический показатель.

Пусть k_0, k_1, k_2 - последовательность полей:

k_0 - конечное поле,

k_{i-1} - поле вычетов для k_i, k_i - полное дискретно нормированное поле, $i = 1, 2$,

$k_2 = K$.

t_1, t_2 - система локальных параметров k, t_i - простой поля k_i. Иногда простой элемент поля K будем обозначать через π (традиционно он так обозначается в случае одномерных локальных полей)

2.2 Классификация двумерных локальных полей

Напомним теорему (Паршина А.Н., [6]) о классификации многомерных локальных полей:

Теорема 1.

Пусть $n \geq 2$. Тогда любое n-многомерное локальное поле либо изоморфно полю $\mathbb{F}_q((t_1))((t_2))...((t_n))$, либо изоморфно полю вида $k((t_1))..((t_{n-1}))$, либо является подполем в поле $k\{\{t_1\}\}...\{\{t_{i-1}\}\}((t_{i+1}))...((t_n))$, где k - конечное расширение поля p-адических чисел, а q - степень простого числа p.

Мы будем работать с двумерными локальными полями характеристики 0, поэтому нам достаточно будет рассматривать случаи $K = E\{\{t\}\}$ и $K = E((t))$, где E - конечное расширение $\mathbb{Q}_p$ а также их подполя. На самом деле достаточно рассматривать только первые 2 случая, поскольку топология подполя будет индуцированной и все утверждения про сходимость после сужения сохранятся.

Нормирование для полей вида $K = E\{\{t\}\}$ устроено так:

$\nu(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i)$ *равно двумерному вектору* $(\nu_1(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i), \nu_2(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i))$, *где* $\nu_1(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i) = min_{i\in\mathbb{Z}}(\nu_E(a_i))$.

Обозначим минимальный индекс i, для которого $\nu_E(a_i) = \nu_1(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i)$, *через i_0.*

Тогда $\nu_2(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i) = i_0$.

Для поля $K = E((t))$ нормирование определяется следующим образом:

$\nu(\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i) = (\nu_1(\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i), \nu_2(\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i))$, *где* $\nu_1(\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i)$ *минимальное* i_{min}, *для которого* $a_{i_{min}} \neq 0$.

Тогда $\nu_2(\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i) = \nu_E(a_{i_{min}})$

2.3 Символ Гильберта

Будем считать здесь, что $K = E\{\{t\}\}$.

T *- подполе инерции для* K. *Оно изоморфно полю частных кольца Витта* $W(k_0)$.

$\mathfrak{v}$ *- кольцо целых для* T.

tr *- оператор следа на* T.

$R = \mathfrak{v}\{\{t\}\}$

$\triangle$ *- автоморфизм Фробениуса.*

Пусть π *- простой, разложим* ζ *как ряд по* π *с коэффициентами из* R. *Тогда можно определить соответствующий ряд* $z(X)$ *из* $R((X))$ *(заменили* π *на* X).

$s(X) = z(X)^q - 1$.

$l = \frac{1}{p}log(\alpha^{p-\triangle})$. *Этот ряд корректно задан для* α *из* $R\{\{X\}\}$ *со значениями в* $R\{\{X\}\}$.

$\delta_i(\alpha) = \alpha^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial t_i}$, *где* $i = 1, 2$.

$\eta_i(\alpha) = \delta_i(\alpha) - \frac{\partial}{\partial t_i}l(\alpha)$, *где* $i = 1, 2$.

$D_1 = det(\begin{pmatrix} \eta_1(\alpha_2) & \eta_2(\alpha_2) \\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3) \end{pmatrix}), D_2 = det(\begin{pmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1) \\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3) \end{pmatrix}), D_3 = det(\begin{pmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1) \\ \delta_1(\alpha_2) & \delta_2(\alpha_2) \end{pmatrix})$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *- элементы* K^*. *Тогда* $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = l(\alpha_1)D_1 - l(\alpha_2)D_2 + l(\alpha_3)D_3$.

$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \zeta^{tr(\frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{s})}$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *- ненулевые элементы* K.

$K_2^M(K)$ *-* K *- функтор Милнора (абелева группа с образующими* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $(\alpha_i \in K^*)$ *с соотношениями: 1 - линейность, 2 -* $\{\alpha, 1-\alpha\} = 1$ *при* $\alpha \neq 1$).

μ_q *- группа корней* q *- ой степени из 1.*

$k_q^M(K) = K_2^M(K)/(K_2^M(K))^q$

$(\cdot,\cdot)_q : k_q^M(K) \times K^*/(K^*)^q \to \mu_q$ *- символ Гильберта.*

2.4 Комментарии

Замечания. 1. *Для упрощения записей в работе периодически двумерный показатель будет сравниваться с* 0*. В этом случае под* 0 *понимается на самом деле* $(0,0)$.

2. *В кольце* $R\{\{X\}\}$ $\triangle$ *действует на переменные* t_1, X *как возведение в р-ю степень, а на коэффициенты - как обычный автоморфизм Фробениуса в подполе инерции.*

3. *Для удобства будем обозначать элементы* K^* *и соответствующие ряды с коэффициентами из* R (*раскладываем по простому элементу* π) *одной буквой.*

4. *Обозначения определялись для двумерных полей, но для* n *- мерных полей все определяется абсолютно аналогично.*

В работе [1] *был получен результат, связывающий символ Гильберта с отображением* Γ. (*Результат был получен для* n *- мерного поля, но в нашем случае достаточен только случай* $n = 2$).

Теорема 2. *Если* α_1, α_2, y *- ненулевые элементы двумерного локального поля* $K = E\{\{t\}\}$.

Тогда $(\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, y) = \zeta^{tr(\frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,y)}{s})}$.

3 Вспомогательные топологические свойства двумерных локальных полей

Прежде, чем формулировать и доказывать интегральную теорему Коши необходимо будет зафиксировать несколько важных топологических свойств K *и определить интеграл Шнирельмана для двумерных локальных полей.*

3.1 Топология двумерных локальных полей и базовые окрестности 0 для полей $E\{\{t\}\}$ и $E((t))$

Прежде всего напомним, как устроена база окрестностей 0 *поля* K.

Пусть V_i *- база окрестностей* 0 *в поле* E (*можно считать, что* $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$), *где* m_i *- целое или* $-\infty$ (*что соответствует случаю, когда окрестность совпадает со всем полем* E).

Разберем 2 *основных случая:*

Случай 1. $K = E\{\{t\}\}$

База окрестностей нуля в рассматриваемом случае определяется так (см. [4], [5]):

Пусть $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ - последовательность базовых окрестностей 0 в E такая, что:

1. *Существует число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что множество $\{x \in E : \nu_E(x) \geq c\}$ лежит в V_i для всех целых i.*

2. *Для любого целого $l \in \mathbb{Z}$ множество $\{x \in E : \nu_E(x) \geq l\}$ лежит в V_i для достаточно больших i.*

Пусть $U_{V_i} = \{\sum b_i t^i : b_i \in V_i\}$.

Тогда все множества U_{V_i} образуют базу окрестностей 0 в K.

Случай 2. $K = E((t))$

Согласно [4] и [5] в этом случае база окрестностей нуля задается следующим образом:

Как и в случае $K = E\{\{t\}\}$ предполагаем, что V_i - база окрестностей нуля в поле E с 2 условиями:

1. Для любого целого j $V_{j-1} \subset V_j$

2. Для достаточно больших j $V_j = E$

Тогда, как и в первом случае, точки базовой окрестности будут иметь вид $\sum a_i t^i$, где $a_i \in V_i$.

Топология для подполей - индуцированная топология.

Для двумерных локальных полей верны следующие утверждения (см. [4], например):

Предложение 1. *Пусть K - двумерное локальное поле. Тогда*

1. *K - полное топологическое пространство.*

2. *Умножение на ненулевую константу - гомеоморфизм.*

3. *$+$ - непрерывная операция, а $*$ - секвенциально непрерывная, то есть если $a_n \to a$, а $b_n \to b$, то тогда $a_n b_n \to ab$ и, кроме того, если $b_n, b \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Сформулируем и докажем одну важную для доказательства основной теоремы лемму:

Лемма. *Пусть K - двумерное локальное поле (вида $E\{\{t\}\}$ или $E((t))$), где E - конечное расширение $\mathbb{Q}_p$.*

Тогда

1. *если $\nu(x) > 0$, то последовательность $x^n \to 0$ при $n \to +\infty$*

2. *если a_n - последовательность элементов из K, такая, что $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$, а b_n - ограниченная последовательность элементов из E, то*

есть такая, что последовательность чисел $\nu_E(b_n)$ ограничена снизу конечным целым числом. Тогда последовательность $a_nb_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

3. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится и $a_i = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k}t^k$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_i = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k})t^k$.*

(в случае $K = E((t))$ считаем, что почти все коэффициенты при отрицательных степенях равны 0)

4. *Пусть последовательность элементов из K $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится.*

Докажем эту лемму:

Доказательство. Первый случай: $K = E\{\{t\}\}$

Докажем сначала первое утверждение леммы.

Пусть U_{V_i} - базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует $N > 0$ такое, что для любого $n \geq N$ $x^n \in U_{V_i}$.

Разберем 2 случая:

1. Первая координата $x > 0$ ($x = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_it^i$, где $min(\nu_E(a_i)) > 0$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$).

Тогда $\nu_1(x^n) = n\nu_1(x) \geq n$. Поскольку по первому свойству U_{V_i} существует n, что все коэффициенты лежат в V_i, для достаточно больших n $x^n \in U_{V_i}$ - то, что нужно.

2. $\nu_1(x) = 0$, $\nu_2(x) > 0$

$x = \pi \sum\limits_{j=-\infty}^{0} b_jt^j + t^i \sum\limits_{j=0}^{+\infty} c_jt^j$, $i > 0$, $c_0 \neq 0$, b_j и $c_j \in O_E$ (т.е. $\nu_E(b_j) \geq 0$ и $\nu_E(c_j) \geq 0$), а π - простой элемент.

По свойству 1 базы окрестности существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что для любого целого j множество $\{x : \nu_E(x) \geq k\}$ лежит в U_j. Поскольку $\nu_E(a_i) \to +\infty$ при $i \to -\infty$ (такое требование накладывается в определении ряда из $E\{\{t\}\}$), то существует целое число M_1, что для любого $m \leq M_1$ $\nu_E(a_m) \geq k$. Считаем для удобства, что $M_1 < 0$.

Разобьем ряд для x на 3 суммы:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_it^i = \sum_{m=-\infty}^{M_1} a_it^i + \sum_{m=-M_1+1}^{0} a_it^i + \sum_{m=1}^{+\infty} a_it^i.$$

Поскольку для любого целого числа i нормирование $\nu_E(a_i) \geq 0$, нетрудно понять, что после раскрытия (при возведении в степень n суммы вида

$(a+b+c)$, где a соответствует первому ряду разбиения, b - второму и c - третьему) слагаемые, которые содержат множитель a будут, очевидно, лежать в множестве U_{V_i} (так как их первая координата нормирования будет хотя бы k).

Значит из замкнутости U_{V_i} относительно суммы достаточно проверять наше утверждение в предположении, что $a = 0$.

Таким образом можно считать, что

$x = \pi \sum\limits_{j=-m}^{0} b_j t^j + t^i \sum\limits_{j=0}^{+\infty} c_j t^j, i > 0, c_0 \neq 0$, b_j, $c_j \in O_E$ для любого j, где m - целое неотрицательное число.

По второму свойству определения базовых окрестностей $\{x \in E : \nu_E(x) \geq 0\} \subset U_j$ для достаточно больших j (больших, скажем, числа M').

Пусть M - натуральное число, большее, чем $\frac{k(i+m)+M'}{i}$.

Возьмем $n \geq M$. После раскрытия скобок $(b+c)^n$ у нас получится сумма слагаемых вида $b^l c^{n-l}$, где $0 \leq l \leq n$. Покажем, что каждое слагаемое лежит в рассматриваемой базовой окрестности 0. Заметим, что если $l \geq k$, тогда это верно по выбору k. Значит достаточно доказывать это для $l < k$.

Пусть $b^l c^{n-l} = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} s_j t^j$. Покажем, что для любого $s < M'$ $s_j = 0$. Ясно, что этого будет достаточно по выбору M'.

Нетрудно видеть, что минимальная степень, при которой коэффициент не равен 0, будет не меньше, чем $-ml + i(n-l)$. Оценим это число снизу:

$-ml+i(n-l) = in-l(i+m) > iM-k(i+m) > k(i+m)+M'-k(i+m) = M'$.

Значит действительно для любого $j < M'$ $s_j = 0$.

Отсюда действительно следует, что для любого $n \geq M$ x^n лежит в базовой окрестности 0. Значит по определению предела $x^n \to 0$ при $n \to +\infty$ при $\nu(x) > 0$. Первое утверждение леммы для случая $K = E\{\{t\}\}$ доказано.

Докажем второе утверждение:

Пусть последовательность рядов $a_n = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_{n,i} t^i$ сходится к 0. Также рассмотрим U_{V_i} - окрестность 0, где $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$. Понятно, что для достаточно больших n $a_{n,i} \in \{x : \nu_E(x) \geq m_i - c\}$, где c такое целое число, что $\nu_E(b_n) \geq c$. Тогда $\nu_E(a_{n,i} b_n) \geq m_i$ для больших n. Отсюда сразу следует, что $a_n b_n$ попало в базовую окрестность => есть сходимость к 0.

Докажем утверждение 3. Поскольку ряд сходится, то существует последовательность $b_i \in E$, такая, что $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k t^k$.

Покажем, что $b_k = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}$ для любого целого k.

Заметим, что из сходимости ряда следует, что для любой окрестности нуля

U в поле E элемент $b_k - \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,k} \in U$ для достаточно больших n и любого k. Это значит, что b_k - предел частичных сумм ряда $a_{i,k}$ по i. Тогда по определению суммы ряда получаем требуемое, что и доказывает утверждение 3.

Наконец, докажем 4-е утверждение.

Поскольку K - полное топологическое пространство (предложение 1, первое утверждение), достаточно проверить сходимость ряда в себе.

Фиксируем окрестность U_{V_i}. Поскольку $a_n \to 0$ сразу получаем, что $a_n \in U_{V_i}$. Тогда из замкнутости базовых окрестностей относительно сложения тоже верно и для конечных сумм, то есть сходимость в себе есть, а, следовательно, и сходимость ряда.

Таким образом в случае $K = E\{\{t\}\}$ лемма полностью доказана.

Теперь второй случай: $K = E((t))$

Докажем утверждение 1.

Фиксируем базовую окрестность нуля U_{V_i}.

1. Пусть $\nu_1(x) > 0$. Тогда $x = t^m \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, где $m > 0$, тогда ясно, что для любого натурального n первые $n-1$ коэффициентов ряда от t для x^n равны 0 (и, следовательно, лежат в U_j), тогда для больших n будет верна импликация: $b_i \neq 0 \Rightarrow U_i = E$ (где $x^n = \sum b_i t^i$). Значит x^n лежит в выбранной окрестности, начиная с некоторого n.

2. Пусть $\nu_1(x) = 0$. Значит $x = a_0 + t^m \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a'_k t^k$, где $m > 0$ и $\nu_E(a_0) > 0$.

Дальнейшие рассуждения проводятся как в первом случае.

Утверждения $2-4$ утверждения доказываются абсолютно аналогично.

Доказали полностью лемму. $\square$

3.2 Равномерная сходимость и ее свойства

Еще два естественные аналитические понятия пригодятся для осуществления предельных переходов в доказательстве теоремы Коши:

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится к $f(X)$ на множестве S, если для любой U - окрестности 0 существует число $M \in \mathbb{N}$ такое, что для любого элемента $x \in S$ $(f_m - f)(x) \in U$ для любого целого $m \geq M$.*

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится в себе на множестве S, если для любой U - окрестности 0 существует число $M \in \mathbb{N}$ такое, что для любого элемента $x \in S$ $(f_m - f_n)(x) \in U$ и для любых целых чисел $m, n \geq M$.*

Обозначение. *Если последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится к $f(X)$, будем писать $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$.*

Замечание. *Равномерную сходимость достаточно проверять на базовых окрестностях.*

Сформулируем еще одно несложное, но полезное утверждение, которое будет использоваться в доказательстве основной теоремы:

Утверждение. *Пусть дана последовательность функций $f_m(X)$ и функция $f(X)$, такие, что $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$,*

а функция $g(x) \in E$ для любого x, причем $\nu(g(x))$, где $x \in \{x : \nu(x-x_0) = \nu(r)\}$ - конечное число, не зависящее от x.

Тогда $f_m(X)g(X) \rightrightarrows f(X)g(X)$ на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$

Доказательство. Не умаляя общности можем считать, что $\nu(g(x)) = 0$ для всех x (иначе поделим на константу, которая никак не влияет на сходимость). Кроме того, для удобства будем считать, что $x_0 = 0$ и $f(X) = 0$.

Первый случай: $K = E\{\{t\}\}$

Нужно показать, что для любой окрестности нуля U_{V_i} существует целое M, что для любого $m \geq M$ $f_m(X)g(X) \in U_{V_i}$. Такое свойство верно для последовательности $f_m(X)$. Если $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$, где a_i - какое-то целое число, а ν_E - нормирование в E, то тогда умножение на любой элемент $g(x)$ не выводит $f_m(X)g(X)$ за пределы окрестности (поскольку для любого x - это элемент из E с нормированием, равным 0). Отсюда получается, что требуемое свойство выполнены и для последовательности $f_m(X)g(X)$.

Случай, когда $K = E((t))$ разбирается точно так же.

Значит домножение на функции такого вида сохраняют равномерную сходимость. □

Замечание. *Условие утверждения можно ослабить, предполагая равномерную ограниченность $g(x)$ на множестве $\{\nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ и требуя попрежнему, чтобы $g(x) \in E$ для всех x.*

Сформулируем еще одно интересное и важное свойство равномерной сходимости рядов.

Предложение 2. *Пусть последовательность функций $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ на множестве $r\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$ (все элементы домножаются на r), где элементы r, $a \in K$, причем $\nu(a) \neq \nu(r)$.*

Тогда $\frac{f_m(X)}{(X-a)} \rightrightarrows \frac{f(X)}{(X-a)}$

Доказательство. Пусть $K = E\{\{t\}\}$.

Во-первых можно считать, что $r = 1$ (иначе поделим на r). Тогда $x \in E$ и $\nu(x) = 0$.

Первый случай: $\nu(a) > 0$.

Рассмотрим базовую окрестность нуля U_{V_i}. Не умаляя общности можно считать, что V_i - возрастающая последовательность.

Перепишем разность последовательностей:

$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X}\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$ - первый множитель, очевидно, не влияет на равномерную сходимость, можно его дальше не рассматривать.

Нетрудно понять, что

$\frac{1}{(1-\frac{a}{X})} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{a}{X})^j$.

Действительно, $\sum\limits_{j=0}^{m}(\frac{a}{X})(1 - \frac{a}{X}) = 1 - (\frac{a}{X})^{m+1}$. Тогда из 3 свойства предложения 1 и утверждения 1 леммы следует нужное равенство.

Покажем, что $\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$ стремится к 0 равномерно.

Пусть $f_m(X) - f(X) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(X)t^k$, а $a^n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k}t^k$.

Пусть $x \in E$, $\nu_E(x) = 0$, тогда имеем:

$\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}((f_m - f)(x))$ можно переписать так: $(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k)(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{a}{x})^j) = (\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k)(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{a_{j,k}}{x^j}))t^k) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(\sum\limits_{i=-\infty}^{k} f_{m,i}(x)\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j,k-i}}{x^j})t^k$. Здесь мы воспользовались утверждением 3 из леммы.

Поскольку $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ существует такое натуральное M, что для любого $m \geq M$, любого целого k и любого x (из рассматриваемого множества) $f_{m,k}(x) \in V_k$.

Докажем, что $\frac{f_m(x)}{(x-a)} - \frac{f(x)}{(x-a)} \in U_{V_i}$ для любого x и целого $m \geq M$. Для этого достаточно показать, что для любого x и целого k $(\sum\limits_{i=-\infty}^{k} f_{m,i}(x)\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j,k-i}}{x^j}) \in V_k$. Ясно, что достаточно показать, что $f_{m,i}(x)\frac{a_{j,k-i}}{x^j} \in V_k$, но это очевидно, поскольку $\nu_E(\frac{a_{j,k-i}}{x^j}) \geq 0$.

Второй случай: $\nu(a) < 0$

Действуем так же, как и в первом случае:

$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = -\frac{1}{a}\frac{1}{(1-\frac{X}{a})}(f_m(X) - f(X))$.

Далее, проводя рассуждения как в первом случае, можно доказать равномерную сходимость.

Пусть $K = E((t))$, $\nu(a) > 0$.

Тогда $a = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$

Как и в первом случае распишем разность:

$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X}\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$

Опять же первый множитель не влияет на равномерную сходимость.

Разность $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$ равна $(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k)(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{a}{x})^j) = (\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k)(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{a}{x})^j) = (\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k)(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i t^i)^j x^{-j})$

Заметим, что существует целое n и целое M, что для любого $m \geq M$ любого x из рассматриваемого множества и любого $N < n$ $f_{m,N}(x) = 0$. Действительно, пусть не так. Тогда диагональным методом можно построить базовую окрестность, в которую не попадет никакой элемент из последовательности (для некоторых элементов), что будет противоречить равномерной сходимости.

Таким образом можно было с самого начала считать, что для всех $m, k < n$ и x $f_{m,k}(x) = 0$.

Тогда ясно из равномерной сходимости, что для наперед заданного числа k существует M, что $m > M$, что в разложении ряда $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$ все коэффициенты при всех степенях, меньших k равны 0, и тогда несложно отсюда вывести утверждение предложение 3.

Случай $\nu(a) < 0$ разбирается аналогично.

Утверждение полностью доказано. □

Важным частным случаем равномерной сходимости, который нам пригодится в дальнейшем будет являться равномерная сходимость степенного ряда на множестве. В следующем подпункте будет доказано 2 важных результата, которые будут ключевыми в доказательстве интегральной теоремы Коши.

3.3 Равномерная сходимость рядов

Предложение 3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_i$, *где* $a_i \in K$ *сходится. Тогда степенной ряд* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится равномерно на множестве* $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$.

Доказательство. 1. Будем, как обычно, считать, что $K = E\{\{t\}\}$ (случай $K = E((t))$ разбирается аналогично)

Заметим, что такой степенной ряд сходится поточечно:

Пусть $a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k$.

Согласно первому утверждению предложения 1 K - полное топологическое пространство, значит достаточно проверять сходимость последовательности частичных сумм в себе. Как обычно, зафиксируем окрестность U_{V_i}. Заметим, что последовательность частичных сумм изначального ряда также сходится в себе => $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Таким образом, существует M, такое, что для любого $n \geq M$ $a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k \in U_{V_i}$, то есть $a_{n,k} \in V_i$. Пусть теперь $n \geq m \geq M$. Тогда имеем:

$\sum\limits_{j=m}^{n} a_j x^j = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} (\sum\limits_{j=m}^{n} a_{j,i} x^j) t^i$. Поскольку $a_{n,j} \in V_j$ для любого j и $i \geq M$, и, кроме того, для любого $j \in \mathbb{Z}$ $x^j \in E$ и $\nu_E(x) = 0$, получаем, что $\sum\limits_{j=m}^{n} a_j x^j \in V_j$.

Значит ряд сходится в себе => сходится поточечно.

Проверим равномерную сходимость ряда на рассматриваемом множестве. (с теми же U_{V_i}) и M

По утверждению 3 леммы имеем:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i) t^k$.

Докажем, что для любого целого k и любого натурального $n \geq M$ $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i \in V_k$. Это сразу видно для $a_{i,k} x^i$. Раз это верно для каждого слагаемого, то, разумеется и для суммы ряда.

Значит по определению равномерной сходимости наш ряд сходится равномерно на множестве $\{x : x \in E, \nu_E(x) = 0\}$.

□

Следствие. *Пусть ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится для какого-то* x_0 *вида* rq_0*, где* $r \in K$ *и не равен* 0*, а* $q_0 \in E$*, причем* $\nu_E(q_0) = 0$*.*

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится равномерно на множестве* $\{x : x = rq, q \in E\}$ *(на множестве представимых в таком виде элементов).*

Доказательство.

Пусть $b_i = a_i x_0^i$.

Тогда ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i$ сходится $=>$ по предложению 2 ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$ равномерно сходится на множестве $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$. Перепишем ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ через b_i:

$\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x_0^i (\frac{x}{x_0})^i = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i (\frac{q}{q_0})^i$.

Отсюда ясно, что $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ сходится равномерно на рассматриваемом множестве, что и требовалось доказать. $\square$

4 Определение интеграла Шнирельмана

Определение 3. *Последовательность многочленов* $g_1(X), ..., g_n(X), ... \in \mathbb{Z}[X]$ *называется допустимой, если*

1. *Для любого* j *многочлен* $g_j(X)$ *не имеет кратных корней в* $\mathbb{Q}_p^{alg}$
2. $g_j(X) = X^{n_j} + c_{j,1} X^{n_{j,1}} + ... + c_{j,\mu} X^{n_{j,\mu}} + c_0$, *где* $c_{j,i}$ *и* $c_0 \in \mathbb{Z}$
3. $|n_j|_p = 1$
4. $\nu(c_0) = 0$
5. $n_j - n_{j,1} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$
6. $n_{j,\mu} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$

Определение 4. *Интеграл Шнирельмана функции* $f(X) : U \to \overline{K^{alg}}$ *(*U *- какое-то подмножество* $\overline{K^{alg}}$*) с центром в* $x_0 \in \overline{K^{alg}}$ *и радиусом* $r \in \overline{K^{alg}}$ *по определению равен*

$\int_{x_0,r,g} f(x) = \lim\limits_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i)$,

где сходимость понимается в смысле топологии двумерного локального поля,

а α_i *- корни многочлена* g_j *(их ровно* n_j *в силу того, что многочлен рассматривается в алгебраическом замыкании и у него нет кратных корней), лежат в* $\mathbb{Q}_p^{alg}$ *(т.е. не зависят от* t*).*

Определение 5. *При тех же обозначениях будем говорить, что функция* f *интегрируема на множестве* $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$*, если интеграл в соответствующем круге корректно задан. Из теоремы Коши будет следовать, что интегрируемость не зависит от выбора подходящей последовательности многочленов* $g_j(X)$*.*

Замечания. 1. *Это определение действительно обобщает интеграл Шнирельмана для одномерного случая (определение для одномерных локальных полей см. в [2]).*

2. *Мы рассматриваем такой интеграл только при условии, что многочлен $f(X)$ задан в соответствующих точках и предел определен*

3. *В этих определениях нигде, по существу, не использовался вид двумерного локального поля, поэтому определение годится для произвольного двумерного локального поля. Более того, дословно так же можно определить интеграл Шнирельмана для произвольного n - мерного локального поля и таким образом предполагается дальнейшее обобщение полученных ниже результатов для произвольных многомерных полей.*

4. *Из определения допустимой последовательности многочленов сразу следует, что $\nu(\alpha_i) = 0$ для всех i.*

Действительно, если $\nu(\alpha_i) > 0$, то $\nu(g_j(\alpha_i)) = \nu(c_0) = 0$ - что не так.

Если же $\nu(\alpha_i) < 0$, то нетрудная проверка показывает, что $\nu(g_j(\alpha_i)) = n_j\nu(\alpha_i) < 0$. Снова приходим к противоречию.

Таким образом, единственный вариант - это $\nu(\alpha_i) = 0$.

5 Простейшие свойства интеграла

Перед доказательством основной теоремы этой работы сформулируем и докажем несколько простых, но важных свойств интеграла.

Будем использовать те же обозначения, что и в предыдущем пункте.

Будем считать, что $K = E\{\{t\}\}$ или $K = E((t))$.

Свойство 1. *Интеграл линеен, то есть для любых функций $f(x)$, $g(x)$ и элемента поля c*

1.$\int_{x_0,r,g}(f(x)+g(x)) = \int_{x_0,r,g} f(x) + \int_{x_0,r,g} g(x)$.

2.$\int_{x_0,r,g} cf(x) = c\int_{x_0,r,g} f(x)$

Доказательство. Следует из линейности предела. □

Свойство 2. *Пусть $f_m(X)$ - последовательность интегрируемых на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ функций, и последовательность $f_m(X)$ сходится равномерно на $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ к функции $f(X)$, которая тоже интегрируема на этом множестве. Тогда*

$\int_{x_0,r,g} f_m(x) \to \int_{x_0,r,g} f(x)$.

Доказательство. Прежде всего можно считать $f(X) = 0$ (линейность интеграла), а точку $x_0 = 0$.

Пусть U_{V_i} - базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует целое M такое, что для любого $m > M$ $\int_{0,r,g} f_m(x) \in U_{V_i}$.

$\int_{0,r,g} f_m(x) = \lim\limits_{j \to +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i)$. Множитель r никак не влияет не зависит от j и m и не влияет на сходимость к 0, поэтому его можно не учитывать. Пусть $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$, где a_i - какое-то целое число, а ν_E - нормирование в E. Ясно, что $\nu(\frac{\alpha_i}{n_j}) = 0$ и если $f_m(x) \in U_{V_i}$ для любого $x \in \{x : \nu(x) = \nu(r)\}$ (здесь пользуемся равномерной сходимостью функций), то $\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i) \in U_{V_i}$. Тогда и интеграл $\int_{0,r,g} f_m(x)$ тоже лежит в этой окрестности. Значит последовательность интегралов действительно сходится к нулю, свойство 2 доказано.

□

Замечание. *На самом деле в формулировке свойства 2 интегрируемость f необязательно требовать - она следует из равномерной сходимости интегрируемых функций автоматически.*

Доказательство. Считаем, как обычно, $x_0 = 0$.

Заметим, что последовательность интегралов $\int_{0,r,g} f_m(x)$ сходится.

Действительно, фиксируем базовую окрестность нуля U и пользуемся тем, что последовательность f_m равномерно сходится в себе. Тогда ясно, что домножение на $\frac{\alpha_i}{n_j}$ и взятие суммы не нарушает это свойство. Отсюда несложно вывести, что последовательность интегралов равномерно сходится в себе. Тогда из полноты рассматриваемой топологии последовательность интегралов сходится.

Используя равномерную сходимость функций к f легко получить, что $\lim\limits_{j \to +\infty} \sum_{g(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_{0,r,g} f_m(X)$, что и означает интегрируемость f. □

Далее в работе будут сформулированы и доказаны 2 результата - аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей и связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта.

6 Интегральная теорема Коши для двумерных локальных полей

Зафиксируем элементы $x_0, r \in K$.

Теорема 3. *Пусть* $P(X) \in K[[X]]$ *сходится на множестве* $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$*, а многочлен* $Q(X) \in K[X]$ *не имеет корней на множестве* $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$.

Тогда:

1. $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *корректен не зависит от последовательности допустимых многочленов* g_j.

2. $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *равен сумме вычетов функции* $\frac{P(X)}{Q(X)}$ *по всем полюсам внутри множества* $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$

3. *Пусть* $P(X)$ *как и выше, а* $Q(X) = X^m(1 - R(X))$*, где* $R(X) \in K[[X]]$*, такой, что* $\nu(R(x)) > 0$ *для любого* $x \in \{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$*. Кроме того, предположим, что* $\nu(r) > 0$.

Тогда для дроби $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ *верны утверждения* $1 - 2$ *теоремы Коши.*

Таким образом из этих трех предложений получаем корректность определения и даже метод подсчета интеграла.

Следствие. *Можно опускать индексы и считать последовательность многочленов ("контур") такой:*

$g_j = X^{n_j} - 1$, $(n_j, p) = 1$, $n_j \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$

Докажем сперва следствие, предполагая, что предложения 1-2 верны:

Доказательство. Нужно проверить только, что последовательность $g_j = X^{n_j} - 1$, $(n_j, p) = 1$, $n_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$ допустимая (то есть 5 условий)

1. Посчитаем производную: $g_j'(X) = n_j X^{n_j - 1}$ - взаимно проста с $g_j(X)$.
2. Очевидно
3. Следует из того, что $(n_j, p) = 1$
4. Очевидно
5. Следует из того, что $n_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$

Следствие доказано. $\square$

Теперь будем доказывать теорему 3:

Доказательство. Сперва нетрудно понять, что можно считать, что $x_0 = 0$ (т.е. предполагая, что из этого случая легко выводится общий случай). Для удобства обозначим $\widetilde{f}(y) := f(x_0 + y)$

Действительно, по определению

$\int_{x_0,r,g} f(x) = \lim\limits_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i) = \lim\limits_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} \widetilde{f}(r\alpha_i) = \int_{0,r,g} \widetilde{f}(x)$

Далее, $\int_{0,r,g} \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$ = сумма вычетов $\frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$ по всем полюсам внутри множества $\{x : \nu(x) > \nu(r)\}$ $(res_a(\frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}) = \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a)^{n-1} f(z) = \lim\limits_{z\to a+x_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a-x_0)^{n-1} f(z+x_0-x_0) = res_{x_0+a}(\frac{P(x)}{Q(x)}))$.

Значит можно с самого начала считать, что $x_0 = 0$.

Дальнейшее доказательство мы будем проводить в несколько этапов (случаев).

1. Пусть $f(X) = X^k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$\int_{0,r,g} f(x) = \lim\limits_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i)$.

Заметим, что

$\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \frac{1}{n_j} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} (r\alpha_i)^{k+1}$.

Разберем 3 случая:

1.1 $k \geq 0$.

По теореме Виета коэффициенты многочлена g_j при степенях $1, ..., k+1$ равны 0 при достаточно больших j (так как $n_{j,\mu} \to +\infty$). Тогда ясно, что и сумма стремится к 0.

Из линейности сразу получаем, что интеграл от любого многочлена равен 0.

1.2 $k = -1$. Поскольку корней у g_j ровно n_j получаем, что $\int_{0,r,g} \frac{1}{x} = 1$.

1.3 $k < -1$. Пусть $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$. Тогда нетрудно понять, что рассматриваемая сумма - это многочлен от сумм $\beta_1 + ... + \beta_n$, $\beta_1\beta_2 + ... + \beta_{n-1}\beta_n$ и так далее от $\beta_1\beta_2...\beta_k + ... + \beta_{n-k+1}...\beta_n$ - из условия $n_j - n_{j,1} \to +\infty$ при $j \to +\infty$ следуют, что рано или поздно все эти симметрические функции станут равны 0.

Таким образом при $k < -1$ $\int_{0,r,g} \frac{1}{x^k} = 0$.

2. Пусть $f(X) = \frac{P(X)}{X-a}$, $P(X) \in K[X]$, $\nu(a) > \nu(r)$. Из теоремы Безу и 1 пункта доказательства получаем, что достаточно доказывать для $P(X) = 1$.

$\frac{1}{X-a} = \frac{1}{X} \frac{1}{1-\frac{a}{X}} = \frac{1}{X} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\frac{a}{r\frac{X}{r}})^k$.

Ясно, что $q = \frac{X}{r} \in E$. По утверждению 4 леммы ряд сходится поточечно для $x = rq$ и => по предложению 3 ряд сходится на множестве $\{x = rq\}$

равномерно.

По предложению 2 получаем, что последовательность частичных сумм $\frac{1}{X}\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{a}{r\frac{X}{r}})^k$ сходится равномерно к бесконечной сумме и тогда по свойству 2 интегралов получаем, $\int_{0,r,g}\frac{1}{X}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{a}{r\frac{X}{r}})^k = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{0,r,g}\frac{1}{X}\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{a}{r\frac{X}{r}})^k$. Тогда из случаев 1.2 и 1.3 получаем, что этот предел равен 1.

Аналогично, используя случаи 1.1-1.3 разбираются случаи:

3. $f(X) = \frac{P(X)}{X-a}, P(X) \in K[X], \nu(a) < \nu(r)$.

4. Случай $Q(X) = (X-a)^n$, $\nu(a) \neq \nu(r)$.

5. Теперь разберем случай, когда $P(X) \in K[[X]]$, а $Q(X) = (X-a)^n$ и $\nu(a) > \nu(r)$.

$P(X)$ сходится на множестве $\{x : \nu(x) \geq \nu(r)\}$, значит последовательность многочленов $P_m(X)$ сходится $P(X)$, где P_m - сумма первых m членов ряда $P(X)$. По предложению 3 получаем, что $P_m(X)$ сходится равномерно к $P(X)$ на множестве $\{x : x = rq, q \in E\}$. Тогда по предложению 2 получаем, что $\frac{P_m(X)}{(X-a)} \rightrightarrows \frac{P(X)}{(X-a)}$. По свойству 2 интегралов Шнирельмана получаем, что $\int_{0,r,g}\frac{P_m(X)}{(X-a)^n} \to \int_{0,r,g}\frac{P(X)}{(X-a)^n}$.

Заметим, что отсюда немедленно последует требуемое: $\int_{0,r,g}\frac{P_m(X)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n-1)!}P_m^{(n-1)}(a) \to \frac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(a) = res_a f(X)$ (при $m \to +\infty$). Тогда ясно, что и $\int_{0,r,g}\frac{P(X)}{(x-a)^n} = res_a f(X)$.

Из всего сказанного выше следует нужная сходимость.

Доказательство случая, когда $\nu(a) < \nu(r)$ принципиально ничем не отличается. Важно, только, что $\nu(a) \neq \nu(r)$.

7. Общий случай. Пусть знаменатель $Q(X) = (X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2}...(X-a_n)^{\alpha_n}$, тогда по линейному разложению НОД существуют многочлены $A(X)(X-a_1)^{\alpha_1} + B(X)(X-a_2)^{\alpha_2}...(X-a_n)^{\alpha_n} = 1$. Пользуясь этим можно свести подсчет исходного интеграла к подсчету интегралов от функций, у знаменателей которых количество различных корней на 1 меньше, чем было многочленов. В итоге получим интегралы из 6 случая и нетрудная аккуратная проверка показывает, что искомое равенство верно.

Утверждения 1-2 проверены.

Осталось 3 утверждение.

Ряд $\frac{1}{1-R(X)} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}R(X)^k$ (поскольку $\nu(R(X)) > 0$).

Тогда по секвенциальной непрерывности произведения получаем, что

$\frac{P(X)}{X^m(1-R(X))} = \frac{1}{X^m} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X)R(X)^k$

Применяя случай 1 получаем, что после раскрытия скобок и приведения подобных все слагаемые ряда $P(X)R(X)^k$ обнулятся (когда от них возьмем интеграл), кроме слагаемого при степени -1. Из курса анализа мы знаем, что коэффициент при степени -1 будет соответствовать вычету в 0. Кроме того, ясно, что на множестве $\{x : \nu(x) \geq \nu(r)\}$ у функции $f(X)$ особенность есть только в 0.

Таким образом, в этом случае действительно имеет место утверждение теоремы Коши.

Утверждение 3 проверено. □

Замечания. *1. Таким образом можно опускать индекс g под интегралом.*

2. Результат теоремы 2 является дискретным аналогом интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей.

7 Связь интеграла Шнирельмана с символом Гильберта

Из интегральной теоремы Коши получаем следствия, которые связывают интеграл Шнирельмана с символом Гильберта для двумерных локальных полей.

Будем здесь считать, что поле K вида $E\{\{t\}\}$, где E - конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$.

Следствие 1. $\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{s} = res_X(\frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{s})$

Доказательство. Ряд $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ сходится на множестве $\{x : \nu(x) \geq 0\}$ (см. [1]).

Чтобы применить утверждение 3 теоремы 2 нужно убедиться, что $Q(X)$ имеет вид, как в теореме (с ненулевым константным множителем).

Рассмотрим знаменатель $s(X) = z(X)^q - 1$. Пусть $z(X) = z_0(X) + 1$.

Тогда $s(X) = (z_0(X)+1)^q - 1 = z_0(X)(z_0(X)^{q-1} + ... + q)$ (Бином Ньютона).

Пусть $\zeta = 1 + \zeta_0$. Тогда имеем $(1 + \zeta_0)^q = 1$ и, очевидно, $\zeta_0 \neq 0$.

Раскроем по Биному Ньютона: $(1 + \zeta_0)^q = 1 + \binom{q}{1}\zeta_0 + \binom{q}{2}\zeta_0^2 + ... + \zeta_0^q = 1$. Учитывая, что $\zeta_0 \neq 0$ получаем, что $\binom{q}{1} + \binom{q}{2}\zeta_0^1 + ... + \zeta_0^{q-1} = 0$. Отсюда сразу следует, что $\nu(\zeta_0) > 0$ и, учитывая неархимедовость нормирования ν имеем равенство:

$n\nu(p) = (p^n - 1)\nu(\zeta_0) > 0$.

Тогда ясно, что $z_0(X)$ имеет нужный вид. Осталось это проверить для второго множителя (в знаменателе дроби).

Поскольку $\nu(p) > 1$ получаем, что $\nu(z_0^{q-1} + ... + z_0\binom{q}{2}) > \nu(q)$.

Тогда можно отсюда вывести, что $Q(X) = aX^m(1 - R(X))$, где a - ненулевой множитель, а $R(X)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Применяя утверждение 3 теоремы 2, получаем в точности требуемое, следствие доказано. $\square$

Из теоремы 1 получаем нужную связь:

Следствие 2. $(\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \zeta^{tr(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})}$.

Доказательство. $(\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \zeta^{tr(\frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})} = \zeta^{tr(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})}$. $\square$

8 Использованная литература

Список использованной в работе литературы:

[1]. С. В. Востоков, Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, том 49, выпуск 2, 283–308

[2]. С. В. Востоков, М. А. Иванов, Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, том 154, книга 2, 73–82

[3]. М. А. Иванов, Произведение символов p^n-х степенных вычетов как абелев интеграл, Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 2, 120–129

[4]. Igor Zhukov, Geometry Topology Monographs Volume 3: Invitation to higher local fields Part I, section 1, pages 5–18

[5]. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, Алгебра и анализ, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118

[6]. Паршин А. Н. Поля классов и алгебраическая K-теория.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 253—254.

[7]. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1288—1321.