Санкт-Петербургский государственный университет

МИХАЙЛОВ Илья Тимофеевич

Выпускная квалификационная работа

Многомерные аналоги пуассоновских моделей телетрафика

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: CB.5000.2016 «Математика»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
д.ф.-м.н., профессор
Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение

Математическое моделирование систем обслуживания является популярной темой более семидесяти лет. В последнее время особый интерес вызывало моделирование трафика в коммуникационных системах. Построенные в этой области модели нашли применение и в других сферах - биологии, медицине, экологии. Среди математиков, которые проводили исследования в данной области, большой вклад внесли Rosenblatt, Taqqu, Mandelbrot, Brillinger, Parzen и другие. При моделировании систем особый интерес представляет поведение нагрузки на систему.

Многие современные модели систем обслуживания строятся на базе пуассоновских случайных мер. Важнейшие характеристики системы, такие как нагрузка, записываются в виде интегралов от этих мер, что открывает путь к их асимптотическому исследованию [7, 8, 5, 9, 3].

В настоящей работе рассматривается обобщение на многомерный случай дискретных моделей обслуживания [9, 8, 3, 10], которые называются пуассоновскими моделями с бесконечным числом источников. Такие обобщенные модели можно использовать для моделирования беспроводных сетей, пористых сред или загрязнений окружающей среды.

В этой работе мы представляем модель именно в терминах экологии, потому что соответствующий язык наиболее нагляден и указывает на одну из возможных сфер применения изучаемой модели (см. Раздел 2).

Е. Аззо [6] уже рассматривала обобщение на многомерный случай дискретной модели обслуживания, представленное в данной работе, но с другими предположениями о параметрах модели, что приводит к совершенно другим математическим результатам (предельным теоремам).

1 Предварительные сведения

1.1 Пуассоновское поле

Рассмотрим семейство случайных величин $X(t)$, $t \in T$, определенных на общем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где T - параметрическое пространство. Если T подмножество действительной прямой, то t называется временем, а $X(t)$ - *случайным процессом.* Если T подмножество многомерного пространства, то $X(t)$ называется *случайным полем.*

Случайное множество в данной работе понимается как функция, заданная на некотором вероятностном пространстве, со значениями в счетных подмножествах пространства состояний. Распределение случайного множества есть вероятностная мера на пространстве счетных подмножеств пространства состояний.

Пусть S - пространство состояний, в котором лежит случайное множество. Обычно S является подмножеством евклидового пространства некоторой размерности d.

Определение: *пуассоновским процессом* на пространстве состояний S называется случайное подмножество $\mathbf{\Pi}$ в S с *мерой контроля* μ, такое что

1. Для любых непересекающихся измеримых подмножеств $A_1, \dots, A_n$ в S случайные величины $N(A_1), \dots, N(A_n)$ независимы, где $N(A) = \#\{\mathbf{\Pi} \cap A\}$;
2. $N(A)$ имеет распределение Пуассона $\mathcal{P}(\mu(A))$. Случайный процесс $N(A)$ при этом задан на множестве $\{A \subset S \,|\, \mu(A) < \infty\}$.

1.2 Случайные меры и стохастические интегралы

Центрированная случайная мера с некоррелированными значениями

Определение: пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой. Определим на нем класс множеств конечной меры $\mathbf{A} := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \mu(A) < \infty\}$. Семейство случайных величин $\{X(A),\, A \in \mathbf{A}\}$ называется *центрированной случайной мерой с некоррелированными значениями*, если выполнены условия

1. $\mathbb{E}X(A) = 0, \quad A \in \mathbf{A}$,
2. $Cov(X(A_1), X(A_2)) = \mu(A_1 \cap A_2), \quad A_1, A_2 \in \mathbf{A}$.

Можно определить интегралы от измеримых функций класса $L_2(\mathcal{R}, \mu)$ по случайной мере

$$I_f := \int\limits_{\mathcal{R}} f dX,$$

причем

$$\mathbb{E}I_f = 0, \quad \mathbb{D}I_f = \int\limits_{\mathcal{R}} f^2 d\mu,$$

и для $f, g \in L_2(\mathcal{R}, \mu)$ будет верно

$$\mathbb{E}I_f I_g = \int\limits_{\mathcal{R}} fg d\mu.$$

Случайная мера с независимыми значениями

Определение: пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ - множество с выделенной сигма-алгеброй. Семейство случайных величин $\{X(A),\, A \in \mathcal{A}\}$ называется *случайной мерой с независимыми значениями*, если для любых непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$, где $A_i \in \mathcal{A}$, случайные величины $X(A_1), \ldots, X(A_n)$ независимы и $X(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} X(A_i)$ п.н.

Пуассоновская случайная мера

Определение: пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой, определим на нем класс множеств конечной меры $\mathbf{A} := \{A \in \mathcal{A} \,|\, \mu(A) < \infty\}$. Семейство случайных величин $\{N(A),\, A \in \mathbf{A}\}$ называется *пуассоновской случайной мерой* или *пуассоновской точечной мерой*, если каждая величина $N(A)$ имеет распределение Пуассона $\mathcal{P}(\mu(A))$ и $N(.)$ является случайной мерой с независимыми значениями. Семейство случайных величин $\{\tilde{N}(A) := N(A) - \mu(A),\, A \in \mathbf{A}\}$ называется *центрированной пуассоновской случайной мерой.*

Замечание. Пуассоновскую случайную меру можно представлять себе как случайное "локально конечное" подмножество $\mathcal{R}$, то есть такую случайную конфигурацию точек $\{x_j\}$, что $N(A) = \#\{j \,|\, x_j \in A\}$.

Аналогично случаю некоррелированных случайных мер, пуассоновские меры позволяют строить интегралы от измеримых функций (см. [2, стр. 125]), за тем отличием, что интегралы по нецентрированной пуассоновской мере определены для функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathcal{R}} \min(|f|, 1) d\mu < \infty,$$

а интеграл по центрированной мере будет корректно определен при выполнении условия

$$\int_{\mathcal{R}} \min(|f|^2, |f|) < \infty.$$

$$I_f := \int\limits_{\mathcal{R}} f dN, \quad \tilde{I}_f := I_f - \int\limits_{\mathcal{R}} f d\mu.$$

Характеристики интегралов по пуассоновской мере задаются формулами

$$\mathbb{E} I_f = \int\limits_{\mathcal{R}} f d\mu, \quad \mathbb{E} \tilde{I}_f = 0,$$

$$\mathbb{D} I_f = \int\limits_{\mathcal{R}} f^2 d\mu, \quad \mathbb{D} \tilde{I}_f = \int\limits_{\mathcal{R}} f^2 d\mu,$$

и определены, если выражения в правых частях конечны.

Более того, если $f, g \in L_2(\mathcal{R}, \mu)$, то верна формула для ковариации

$$Cov\Big(\int\limits_{\mathcal{R}} f dN, \int\limits_{\mathcal{R}} g dN\Big) = Cov\Big(\int\limits_{\mathcal{R}} f d\tilde{N}, \int\limits_{\mathcal{R}} g d\tilde{N}\Big) = \int\limits_{\mathcal{R}} f g d\mu.$$

Лемма 1.1. *Пусть N – мера Пуассона на пространстве $(\mathcal{R}, \mu)$, $\tilde{N}$ – соответствующая центрированная мера. Пусть $f : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{R}$ – такая функция, что при некотором $\gamma \in (1, 2)$ верно*

$$\mu\{|f| \geq v\} \leq C\, v^{-\gamma} \qquad \forall v > 0.$$

Тогда

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N}\right| \geq r\right) \leq C_1 r^{-\gamma} \qquad \forall r > C_2,$$

где $C_1 = \left(\frac{4(4-\gamma)}{2-\gamma} + 1\right) C$, $C_2 = \left(\frac{2C\gamma}{\gamma-1}\right)^{1/\gamma}$.

Доказательство. Обозначим

$$J_r := \mathbb{E} \int_{|f|>r} f dN = \int_{|f|>r} f d\mu.$$

Заметим прежде всего, что при $r > C_2$ верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |J_r| &= \left|\int_{|f|>r} f d\mu\right| \leq \int_{|f|>r} |f| d\mu \\ &= r\mu\{|f| \geq r\} + \int_r^\infty \mu\{|f| \geq v\} dv \leq C r^{1-\gamma} + C \int_r^\infty v^{-\gamma}\, dv \\ &= \frac{C\gamma}{\gamma - 1}\, r^{1-\gamma} \leq r/2. \end{aligned}$$

Запишем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N} &= \int_{\mathcal{R}} f 1_{|f|\leq r} d\tilde{N} + \int_{\mathcal{R}} f 1_{|f|>r} d\tilde{N} \\ &= \int_{\mathcal{R}} f 1_{|f|\leq r} d\tilde{N} + \int_{\mathcal{R}} f 1_{|f|>r} dN - J_r := I_1 + I_2 - J_r. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N}\right| \geq r\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left|I_1\right| \geq r/2\right) + \mathbb{P}\left(I_2 \neq 0\right) \leq \frac{\mathbb{D} I_1}{(r/2)^2} + \mathbb{P}(I_2 \neq 0) \\ &\leq \frac{(4-\gamma) C r^{2-\gamma}}{(2-\gamma)(r^2/4)} + \mu(|f| > r) \\ &\leq \frac{4(4-\gamma) C r^{-\gamma}}{2-\gamma} + C r^{-\gamma} = C_1 r^{-\gamma}, \end{aligned}$$

где оценка дисперсии

$$\mathbb{D} I_1 = \int_{|f|\leq r} f^2 d\mu \leq \frac{(4-\gamma) C r^{2-\gamma}}{2-\gamma}$$

взята из [2, стр. 145]. □

1.3 Сходимость случайных векторов

Сходимость по распределению для случайных векторов определяется в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Пусть* (X_k) *и* X *- некоторые* $\mathbb{R}^n$*- значные случайные векторы. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

1. *Для любого замкнутого множества* $B \subset \mathbb{R}^n$ *верно*
$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\{X_k \in B\} \le \mathbb{P}\{X \in B\}.$$

2. *Для любого открытого множества* $V \subset \mathbb{R}^n$ *верно*
$$\liminf_{k\to\infty} \mathbb{P}\{X_k \in V\} \ge \mathbb{P}\{X \in V\}.$$

3. *Для любого измеримого множества* $A \subset \mathbb{R}^n$*, удовлетворяющего условию регулярности относительно вектора* X*, то есть* $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$*, верно*
$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{X_k \in A\} = \mathbb{P}\{X \in A\}$$

4. *Для любой непрерывной и ограниченной функции* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *верно*
$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}f(X_k) = \mathbb{E}f(X).$$

Если любое из условий $1) - 4)$ выполнено, говорят, что последовательность случайных векторов (X_k) *сходится по распределению* или *слабо сходится* к X, и пишут $X_k \Rightarrow X$.

Теорема 1.3. *Пусть* $(X_k), X$ *— случайные векторы в* $\mathbb{R}^n$*. Обозначим через* X_j^k j*-ую компоненту вектора* X_k*. Предположим, что для каждого* k *компоненты* $(X_j^k)_{j=1}^n$ *независимы и что имеется покомпонентная слабая сходимость, то есть для* $j = 1, \dots, n$ *верно*

$$X_j^k \Rightarrow X_j, \quad k \to \infty.$$

Тогда
$$X_k \Rightarrow X, \;\; k \to \infty,$$
причем компоненты предельного вектора X *независимы.*

Теорема 1.4. *Пусть* (X_k) *и* (Y_k) *— две последовательности случайных векторов и пусть* $X_k \Rightarrow X, Y_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$*. Тогда* $X_k + Y_k \Rightarrow X$*.*

1.4 Сложные пуассоновские величины

Пусть $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ - набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F_R и конечным математическим ожиданием, а N - независимая от них случайная величина, которая имеет распределение Пуассона с параметром λ. Тогда случайная величина

$$W = \sum_1^N R_i$$

называется *сложной пуассоновской величиной с параметром* λ. Формула для характеристической функции W (см. [2, стр. 37]) имеет вид

$$\varphi_W(t) = \mathbb{E}e^{itW} = \exp\{\lambda \int (e^{itr} - 1)\, F_R(dr)\},$$

а математическое ожидание записывается как

$$\mathbb{E}W = \lambda\, \mathbb{E}R.$$

1.5 Устойчивые величины

Пусть $1 < \alpha < 2$. Будем говорить, что величина $\mathcal{S}$ *строго устойчива* с параметром α, если для некоторых вещественных c_+, c_- формула для характеристической функции $\mathcal{S}$ имеет вид

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E}\, e^{it\mathcal{S}} = \exp\Big\{\int (e^{itu} - 1 - itu) \frac{c(u)du}{|u|^{\alpha+1}}\Big\},$$

где

$$c(u) = \begin{cases} c_+, & u > 0 \\ c_-, & u < 0 \end{cases}$$

В этом случае будем писать $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}(c_+, c_-, \alpha)$.

Отметим важное свойство устойчивых величин. Если $k > 0$, то

$$k\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}(k^\alpha c_+, k^\alpha c_-, \alpha),$$

$$-k\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}(k^\alpha c_-, k^\alpha c_+, \alpha).$$

2 Моделирование загрязненной среды

2.1 Описание модели

Будем моделировать загрязнение в евклидовом пространстве. Модель загрязнения будет двухуровневой - на первом уровне выделяются области загрязнения (гранулы) - случайные множества в пространстве. На втором уровне в каждой грануле строится случайное поле точек загрязнения.

Гранулы генерируются как $(s_j + u_j B(0,1))$, где $s_j \in \mathbb{R}^d$ рассматривается как случайное место расположения области загрязнения (гранулы), называемое опорной точкой, $u_j \in \mathbb{R}_+$ рассматривается как размер области загрязнения, а $B(0,1)$ - единичный шар в $\mathbb{R}^d$.

Внутри каждой гранулы с номером j может иметься несколько точек нагрузки. Каждая точка нагрузки описывается случайным местом $X_{jk} \in \mathbb{R}^d$ (расположение X_{jk} отсчитывается в относительной системе координат с началом в опорной точке s_j гранулы) и концентрацией загрязнений $R_{jk} \in \mathbb{R}_+$. При этом X_{jk} и ее метки - случайные величины R_{jk} - независимы и имеют одинаковые распределения. Предположим, что каждое из случайных множеств $\{X_j\}$, $\{R_j\}$ является пуассоновским процессом с мерами контроля $\lambda_2\, dx$ и $F_R(dr)$. Пару (X_{jk}, R_{jk}) можно рассматривать как случайную точку в пространстве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Все случайные точки, вместе взятые, образуют случайное подмножество. По теореме о маркировке (см [1, Гл. 5]), это случайное подмножество является пуассоновским процессом на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, с мерой интенсивности

$$v(dx, dr) = \lambda_2\, dx\, F_R(dr).$$

Пуассоновское случайное подмножество можно рассматривать как случайный элемент пространства конфигураций, которое мы обозначим $\mathcal{T}$, а его распределение, меру в $\mathcal{T}$, обозначим Q.

2.2 Формализация модели

Мы описали идею нашей модели. Ее формализация, основанная на пуассоновских случайных мерах, выглядит следующим образом.

Положим $\mathcal{R} := (s, u, z) = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{T}$. Пространство $\mathcal{R}$ называется *пространством областей загрязнения*. Каждая точка (s, u, z) соответствует грануле (области загрязнения) с опорной точкой гранулы s, размером гранулы u и конфигурацией точек нагрузки z внутри гранулы.

Система характеризуется следующими параметрами:

- $\lambda_1 > 0$ - интенсивность опорных точек. Среднее число гранул, чьи опорные точки лежат в произвольном пространственном множестве единичного объема;
- $F_U(du)$ - распределение размера гранулы;
- λ_2 - интенсивность точек нагрузки. Среднее число точек нагрузки на единицу объема внутри каждой гранулы;
- $F_R(dr)$ - распределение величины нагрузки в каждой точке загрязнения.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds, du, dz) = \lambda_1\, ds\, F_U(du)\, Q(dz).$$

Пусть N - соответствующая пуассоновская случайная мера. Назовем ее *пуассоновской мерой системы*, и пусть $\tilde{N}$ - ее центрированная версия.

Таким образом, можно рассматривать реализации случайной меры N (множество триплетов (s, u, z), где каждый триплет соответствует единичному шару $B(0,1)$, масштабированному в u раз, сдвинутому в опорную точку s и заполненному конфигурацией точек загрязнения z) как варианты конфигураций системы.

Интегральной нагрузкой на множествах $A \subset \mathbb{R}^d$ назовем случайное поле

$$W(A) := \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} r 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}} dz(x,r) dN(s,u,z).$$

Введем также обозначение для величины

$$S(A) := \int_{\mathcal{R}} |\,(s + uB(0,1)) \cap A|\, dN(s,u,z),$$

равной суммарной площади пересечения каждой из гранул с множеством A.

Суммарное число точек нагрузки, попавших в множество A, обозначим через

$$N(A) := \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}} dz(x,r) dN(s,u,z).$$

Отметим, что $N(A)$ есть сумма независимых пуассоновских величин с суммарным параметром $\lambda_2 S(A)$, то есть имеет условное распределение $\mathcal{P}(\lambda_2 S(A))$.

2.2.1 Вычисление математического ожидания нагрузки

Чтобы найти математическое ожидание нагрузки, предположим, что

$$\mathbb{E}(U^d) = \int u^d F_U(du) < \infty,$$
$$\mathbb{E}R = \int r F_R(dr) < \infty.$$

Эти условия мы будем неявно предполагать и дальше.

Обозначим $V_d := |B(0,1)|$ - объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$.

Получим выражение

$$\begin{aligned}\mathbb{E}W(A) &= \mathbb{E} \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} r 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}} dz(x,r) dN(s,u,z) \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} r 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}} dz(x,r)\, Q(dz)\, F_U(du)\, ds.\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} r 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}} dz(x,r)\, Q(dz) &= \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} r F_R(dr) 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}}\, dx \\ &= \lambda_2\, \mathbb{E}(R) \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x \in A\}}\, dx.\end{aligned}$$

Подставляя это выражение, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W(A) &= \lambda_1\lambda_2\ \mathbb{E}(R)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}\,dx\,F_U(du)\,ds\\
&= \lambda_1\lambda_2\ \mathbb{E}(R)\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{s+x\in A\}}\,ds\,dx\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\lambda_2\ \mathbb{E}(R)\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{s\in A\}}\,ds\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}\,dx\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\lambda_2\ \mathbb{E}(R)\ |A|\ V_d\int_{R_+} u^d\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\lambda_2\ \mathbb{E}(R)\ |A|\ V_d\ \mathbb{E}(U^d).
\end{aligned}$$

2.2.2 Вычисление математического ожидания $S(A)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S(A) &= \int_{\mathcal{R}}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{y\in uB(0,1)\}}1_{\{s+y\in A\}}dy\,dN(s,u,z)\\
&= \lambda_1\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{s+y\in A\}}\,ds\,1_{\{y\in uB(0,1)\}}\,dy\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\ |A|\ \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{y\in uB(0,1)\}}dy\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\ |A|\ V_d\ \int_{\mathbb{R}_+} u^d\,F_U(du)\\
&= \lambda_1\ |A|\ V_d\ \mathbb{E}(U^d).
\end{aligned}$$

2.2.3 Вычисление математического ожидания $N(A)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}N(A) &= \mathbb{E}\int_{\mathcal{R}}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}dz(x,r)dN(s,u,z)\\
&= \lambda_1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}dz(x,r)\,Q(dz)\,F_U(du)\,ds.
\end{aligned}$$

Аналогично случаю $W(A)$, имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}dz(x,r)\,Q(dz) &= \lambda_2\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}\,dx\\
&= \lambda_2\ \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}1_{\{s+x\in A\}}\,dx.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}N(A) &= \lambda_1\lambda_2 \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{s+x\in A\}}\, dx\, F_U(du)\, ds \\
&= \lambda_1\lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{s+x\in A\}}\, ds\, dx\, F_U(du) \\
&= \lambda_1\lambda_2 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{s\in A\}}\, ds \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{x\in uB(0,1)\}}\, dx\, F_U(du) \\
&= \lambda_1\lambda_2\ |A|\ V_d \int_{\mathbb{R}_+} u^d\, F_U(du) \\
&= \lambda_1\lambda_2\ |A|\ V_d\ \mathbb{E}(U^d) \\
&= \lambda_2\ \mathbb{E}S(A).
\end{aligned}
$$

2.2.4 Сильная и слабая зависимость

Предельное поведение процесса нагрузки зависит от предположений, которые мы делаем о размерах гранул и величине точечных нагрузок. Относительно R мы делаем предположение

$$\mathbb{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{u^\alpha},\ \ r \longrightarrow \infty,\ \ c_R > 0, \tag{1}$$

где $1 < \alpha < 2$.

Относительно U мы делаем одно из двух предположений:

- Слабая зависимость. Она формально характеризуется условием $\mathbb{E}(U^{2d}) < \infty$. Из этого условия следует, что большие гранулы не играют роли в предельном поведении процесса нагрузки и, следовательно, нагрузки в удаленных друг от друг областях пространства практически независимы.

- Сильная зависимость. Формально сильная зависимость описывается параметрическим условием

  $$\mathbb{P}(U > u) \sim \frac{c_U}{u^{d\gamma}},\ \ u \longrightarrow \infty,\ \ c_U > 0, \tag{2}$$

  где $\alpha < \gamma < 2$ - параметр, определяющий степень зависимости (в случае слабой зависимости формально полагают $\gamma = 2$).

  Это условие означает, что мы имеем достаточно много гранул большого размера, которые порождают сильную зависимость между нагрузкой в удаленных областях пространства.

Отметим, что условие (2) дает оценку сверху на интеграл $\int\limits_b^\infty u^d\, F_U(du)$ для произвольного положительного b. Действительно, используем тот факт, что для всех $u > 0$ из (2) следует оценка

$$\mathbb{P}(U^d > u) \le \frac{c}{u^\gamma},$$

и придем к следующей цепочке неравенств

$$\begin{aligned}
\int\limits_b^\infty u^d\, F_U(du) &= \int\limits_{b^d}^\infty v\, F_V(dv) \\
&= b^d \overline{F}_V(b^d) + \int\limits_{b^d}^\infty \overline{F}_V(v) dv \\
&\le \frac{c}{b^{d\gamma-d}} + c \int\limits_{b^d}^\infty \frac{dv}{v^\gamma} \\
&= c\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) b^{d(1-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем оценку

$$\int\limits_b^\infty u^d\, F_U(du) \le c\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) b^{d(1-\gamma)}. \tag{3}$$

3 Основные результаты

3.1 Нормировка интегральной нагрузки

Основная задача, которую мы ставим перед собой в этой работе — представить исследование макроскопического поведения нашей модели в $\mathbb{R}^d$. Нас будет интересовать изменение нагрузки $W(A)$ на макроскопическом уровне.

Чтобы получить осмысленный предел, необходимо выполнить следующие предварительные операции:

- отнормировать исследуемую область;
- центрировать процесс нагрузки;
- отнормировать нагрузку, разделив ее на подходящий множитель.

Для первого пункта возможны две ситуации - увеличение и уменьшение исследуемой области. Чтобы проанализировать макроскопические свойства интегральной нагрузки, нужно уменьшить масштаб на больших областях пространства.

Центрирование и нормирование на соответствующий множитель b приводят к процессу нормированной интегральной нагрузки

$$\begin{aligned} Z_a(A) :&= \frac{W(aA) - \mathbb{E}W(aA)}{b} \\ &= \frac{W(aA) - \lambda_2\,\mathbb{E}(R)\,\mathbb{E}S(aA)}{b}. \end{aligned}$$

Здесь нормирующий множитель $b = b(a, \lambda_1, \lambda_2)$ зависит от параметров интенсивности λ_1, λ_2 и параметра масштабирования исследуемой области a. В дальнейшем мы будем исследовать макроскопическое поведение $Z_a(.)$, полагая $a \to \infty$.

3.2 Предельная теорема для интегральной нагрузки

Теорема 3.1. *Пусть распределения R и U удовлетворяют условиям* (1) *и* (2). *Предположим, что*

$$a \to \infty, \tag{4}$$

$$a^d\,\lambda_1\lambda_2 \to \infty, \tag{5}$$

$$a^d\,\lambda_1\lambda_2^{\frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha-\gamma}} \to \infty. \tag{6}$$

Пусть A — ограниченное измеримое множество. Определим нормирующий множитель по формуле

$$b(a)^\alpha := c_R\,a^d\,\alpha\,\frac{\mathbb{E}N(A)}{|A|} = c_R\,a^d\,\alpha\,\lambda_1\lambda_2\,V_d\,\mathbb{E}U^d. \tag{7}$$

Тогда

$$Z_a(A) \Rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(|A|, 0, \alpha).$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, нам потребуется следующий вспомогательный факт.

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнены условия* (4), (5) *и* (6). *Тогда*

$$(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\alpha} (S(aA) - \mathbb{E}S(aA)) \Rightarrow 0.$$

Доказательство. Будем применять лемму 1.1 к пространству $\mathcal{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, мере $\mu = ds F_U(du)$ и функции

$$f(s,u) = (a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma} |(s+uD) \cap (aA)|.$$

Заметим, что неравенство

$$f(s,u) \geq v \Leftrightarrow |(s+uD) \cap (aA)| \geq v(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\gamma}$$

влечёт

$$a^d|A| = |aA| \geq |(s+uD) \cap (aA)| \geq v(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\gamma},$$

откуда $v \leq a^{d(1-1/\gamma)}|A|(\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma}$. Следовательно,

$$\mu\{f \geq v\} = 0 \qquad \text{при } v > a^{d(1-1/\gamma)}|A|(\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma}.$$

Далее будем рассматривать только

$$v \leq a^{d(1-1/\gamma)}|A|(\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma}. \tag{8}$$

Запишем неравенство

$$\mu\{f \geq v\} \leq \mu\{f \geq v, u \leq a\} + \mu\{f > 0, u \geq a\}. \tag{9}$$

Будем считать, что множество A ограничено, т.е. $A \subset a_0 + \rho D$. Тогда для второго слагаемого в (9) имеем

$$\begin{aligned}
\mu\{f > 0, u \geq a\} &= \mu\{u \geq a, s \in aA + uD\} \\
&\leq \mu\{u \geq a, s \in aa_0 + (a\rho + u)D\} \\
&\leq \mu\{u \geq a, s \in aa_0 + (1+\rho)uD\} \\
&= \lambda_1 V_d \int_a^\infty (1+\rho)^d u^d F_U(du) \\
&\leq \lambda_1 V_d (1+\rho)^d c \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) a^{d-\gamma d} \\
&= \lambda_1 V_d (1+\rho)^d c \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) \left(a^{d-d/\gamma}\right)^{-\gamma} \\
&\leq \lambda_1 V_d (1+\rho)^d c \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha}} |A|^\gamma v^{-\gamma} \\
&= V_d (1+\rho)^d c \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) \lambda_2^{\alpha-1} |A|^\gamma v^{-\gamma}
\end{aligned}$$

как и требуется в условии леммы. В последнем переходе мы воспользовались соотношением (8).

Для первого слагаемого в (9) верны оценки

$$\begin{aligned}
\mu\{f \geq v, u \leq a\} &\leq \mu\{u^d \geq v(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\gamma}/V_d, u \leq a, s \in aA + uD\} \\
&\leq \lambda_1 \int_{v^{1/d}(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/d\gamma}/V_d^{1/d}}^{a} |aA + uD| F_U(du) \\
&\leq \lambda_1 \int_{v^{1/d}(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/d\gamma}/V_d^{1/d}}^{\infty} F_U(du) |aA + aD| \\
&\leq c\lambda_1 \left(v^{1/d}(a^d \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/d\gamma}/V_d^{1/d}\right)^{-d\gamma} a^d |A + D| \\
&= c\lambda_1 v^{-\gamma} a^{-d} (\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{-1} V_d^\gamma a^d |A + D| = c\lambda_2^{\alpha-1} V_d^\gamma |A + D| v^{-\gamma},
\end{aligned}$$

как и требуется в условии леммы.

Таким образом, лемма позволяет нам заключить, что

$$\mathbb{P}\left((a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma}|S(aA)-\mathbb{E}S(aA)|\geq r\right)\leq C_1 r^{-\gamma}\qquad \forall r>C_2,$$

и если $\gamma>\alpha$, то для любого $r>0$ при достаточно больших a верно

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left((a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\alpha}|S(aA)-\mathbb{E}S(aA)|\geq r\right)=\\&=\mathbb{P}\left((a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\gamma}|S(aA)-\mathbb{E}S(aA)|\geq r(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha-1/\gamma}\right)\\&\leq C_1 r^{-\gamma}(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{1-\gamma/\alpha}=:M.\end{aligned}$$

Поясним, почему можно пользоваться оценкой из леммы. Требуется, чтобы для фиксированного r при всех достаточно больших a имело место $r(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha-1/\gamma}>C_2=\tilde{c}\lambda_2^{(\alpha-1)/\gamma}$. Для этого нужно потребовать, чтобы $(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha-1/\gamma}\lambda_2^{(1-\alpha)/\gamma}\to\infty$. Упростив это выражение, получаем

$$\begin{aligned}\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha}\right)^{1/\alpha-1/\gamma}\lambda_2^{(1-\alpha)/\gamma}&=\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha}\lambda_2^{\frac{1-\alpha}{\gamma(1/\alpha-1/\gamma)}}\right)^{1/\alpha-1/\gamma}\\&=\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{\frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha-\gamma}}\right)^{1/\alpha-1/\gamma}\to\infty,\end{aligned}$$

что совпадает с нашим предположением.

Далее, необходимо понять, почему $M\to\infty$. Действительно, с точностью до фиксированных констант, имеем

$$\begin{aligned}M&=C_1 r^{-\gamma}\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha}\right)^{1-\gamma/\alpha}\\&\approx\lambda_2^{\alpha-1}r^{-\gamma}\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha}\right)^{1-\gamma/\alpha}\\&=r^{-\gamma}\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha}\lambda_2^{\frac{\alpha-1}{1-\gamma/\alpha}}\right)^{1-\gamma/\alpha}\\&=r^{-\gamma}\left(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{\frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha-\gamma}}\right)^{1-\gamma/\alpha}\to 0,\end{aligned}$$

что снова совпадает с наложенным условием.

Следовательно,

$$(a^d\,\lambda_1\lambda_2^{1-\alpha})^{-1/\alpha}\left(S(aA)-\mathbb{E}S(aA)\right)\Rightarrow 0.$$

$\square$

Доказательство теоремы. Для начала отметим, что $W(A)$ можно записать как

$$W(A)=\sum_{1}^{N(A)}R_i,$$

где величины R_i независимы.

Рассмотрим модифицированную нормированную нагрузку $\tilde{Z}_a(A)$ с нормирующим множителем

$$\tilde{b}(a)=|A|^{1/\alpha}b(a)=(c_R\,a^d\,\alpha\,\lambda_1\lambda_2\,V_d\,\mathbb{E}U^d\,|A|)^{1/\alpha}.$$

Наша цель — показать, что

$$\tilde{Z}_a(A) \Rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(1, 0, \alpha).$$

Учитывая, что величина $N(A)$ имеет условное пуассоновское распределение с параметром $\lambda_2 S(A)$, и используя формулу для условного математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_{W(A)}(t) &= \mathbb{E}\, e^{itW(A)} = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\,\{e^{itW(A)} \,|\, S(A)\} \\
&= \mathbb{E}\exp\{\lambda_2 S(A) \int (e^{itr} - 1)\, F_R(dr)\}.
\end{aligned}$$

Теперь уже можно выписать формулу для характеристической функции центрированного процесса нагрузки

$$\begin{aligned}
\varphi_{W(A)-\mathbb{E}W(A)}(t) &= \mathbb{E}\, e^{it(W(A)-\mathbb{E}W(A))} \\
&= \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 S(A) \int (e^{itr} - 1)\, F_R(dr) - it\,\mathbb{E}R\,\lambda_2\,\mathbb{E}\,S(A)\Big\} \\
&= \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 S(A) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_R(dr) + \\
&\qquad\qquad + it\,\mathbb{E}R\,\lambda_2 S(A) - \mathbb{E}\,S(A)\Big\} \\
&= \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 \mathbb{E}\,S(A) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_R(dr) + \\
&\qquad + \lambda_2 (S(A) - \mathbb{E}\,S(A)) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_R(dr) + \\
&\qquad\qquad + it\,\mathbb{E}R\,\lambda_2 S(A) - \mathbb{E}\,S(A)\Big\} \\
&= \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 \mathbb{E}\,S(A) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_R(dr) + \\
&\qquad\qquad + \lambda_2 (S(A) - \mathbb{E}S(A)) \int (e^{itr} - 1)\, F_R(dr)\Big\}.
\end{aligned}$$

Характеристическая функция $\tilde{Z}_a(A)$ тогда примет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{\tilde{Z}_a}(t) &= \mathbb{E}\, e^{it(W(aA)-\mathbb{E}W(aA))/\tilde{b}(a)} \\
&= \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 \mathbb{E}\,S(aA) \int (e^{itr/\tilde{b}(a)} - 1 - itr/\tilde{b}(a))\, F_R(dr) + \\
&\qquad\qquad + \lambda_2 (S(aA) - \mathbb{E}S(aA)) \int (e^{itr/\tilde{b}(a)} - 1)\, F_R(dr)\Big\} \\
&=: D_1 \cdot D_2,
\end{aligned}$$

где

$$D_1 = \exp\Big\{\lambda_2 \mathbb{E}\,S(aA) \int (e^{itr/\tilde{b}(a)} - 1 - itr/\tilde{b}(a))\, F_R(dr)\Big\},$$

$$D_2 = \mathbb{E}\exp\Big\{\lambda_2 (S(aA) - \mathbb{E}S(aA)) \int (e^{itr/\tilde{b}(a)} - 1)\, F_R(dr)\Big\}.$$

Таким образом, осталось изучить асимптотику этих двух множителей. Для начала разберемся с D_1.

$$\begin{aligned}
D_1 &= \exp\Big\{\lambda_2 \mathbb{E}\, S(aA) \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1 - itr/\tilde b(a))\, F_R(dr)\Big\}\\
&= \exp\Big\{a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d) \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1 - itr/\tilde b(a))\, F_R(dr)\Big\}\\
&= \exp\Big\{a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d) \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1 - itr/\tilde b(a))\, F_R(dr)\Big\}.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $r \mapsto r/\tilde b(a)$, обозначив новую меру через $F_{R,\tilde b(a)}(dr)$.

$$D_1 = \exp\Big\{a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_{R,\tilde b(a)}(dr)\Big\}.$$

Используя [5, стр. 539, Лемма 2], получаем

$$\begin{aligned}
&a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d) \int (e^{itr} - 1 - itr)\, F_{R,\tilde b(a)}(dr) \sim\\
&\quad \sim a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d)\, \alpha\, \overline{F}_{R,\tilde b(a)}(1) \int (e^{itr} - 1 - itr) \frac{dr}{r^{\alpha+1}}\\
&\quad \sim a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d)\, \alpha\, \frac{c_R}{c_R\, a^d\, \lambda_1\lambda_2\, |A|\, V_d\, \mathbb{E}(U^d)\, \alpha} \int (e^{itr} - 1 - itr) \frac{dr}{r^{\alpha+1}}\\
&\quad = \int (e^{itr} - 1 - itr) \frac{dr}{r^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к изучению асимптотики D_2. Для начала отметим, что соотношение

$$\lambda_2 \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1)\, F_R(dr) = \lambda_2 \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1 - itr/\tilde b(a))\, F_R(dr) + it\lambda_2 \mathbb{E} R/\tilde b(a),$$

а также условие $a^d\, \lambda_1\lambda_2 \to \infty$ с учетом только что изученной сходимости для D_1 дает нам асимптотику

$$\lambda_2 \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1)\, F_R(dr) \sim \frac{ic}{(a^d\, \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha}}, \ \ a \to \infty,$$

где

$$c = \frac{t \mathbb{E}\, R}{(c_R\, \alpha\, V_d\, \mathbb{E}\, U^d\, |A|)^{1/\alpha}}.$$

Отметим, что лемма 3.2 дает нам

$$\frac{S(aA) - \mathbb{E}\, S(aA)}{(a^d\, \lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha}} \Rightarrow 0.$$

Запишем

$$\begin{aligned}
D_2 &= \mathbb{E} \exp\Big\{\lambda_2 (S(aA) - \mathbb{E} S(aA)) \int (e^{itr/\tilde b(a)} - 1)\, F_R(dr)\Big\}\\
&= \mathbb{E} \exp\left\{ i (K_1 \cdot K_2) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$K_1 = \left(\lambda_2 \int (e^{itr/\tilde{b}(a)} - 1)\, F_R(dr)\right) / \left(\frac{ic}{(a^d\,\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha}}\right),$$

$$K_2 = \left(\frac{c}{(a^d\,\lambda_1 \lambda_2^{1-\alpha})^{1/\alpha}}\right)(S(aA) - \mathbb{E}S(aA)).$$

Учитывая, что

$$K_1 \to 1, \quad K_2 \Rightarrow 0,$$

заключаем

$$D_2 \to 1.$$

Собрав воедино асимптотики множителей D_1 и D_2, получаем, что

$$\varphi_{\tilde{Z}_a(A)}(t) = D_1 \cdot D_2 \to \int (e^{itr} - 1 - itr)\frac{dr}{r^{\alpha+1}},$$

то есть

$$\tilde{Z}_a(A) \Rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(1, 0, \alpha).$$

Используя свойство устойчивых величин, приходим к требуемой сходимости

$$Z_a(A) = |A|^{1/\alpha}\tilde{Z}_a(A) \Rightarrow |A|^{1/\alpha}\tilde{\mathcal{S}}(1, 0, \alpha) = \tilde{\mathcal{S}}(|A|, 0, \alpha).$$

□

Замечание.

1. Поговорим немного о *непрерывной* версии нашей модели. В непрерывном случае загрязнение внутри гранулы формируется как равномерно распределенный заряд величины R, так что для любого подмножества A гранулы сила загрязнения в A равна $|A| \cdot R$.

   Сама модель в терминах пуассоновских мер и интегралов определяется следующим образом. Рассматривается мера

   $$d\nu(s, u, r) = \lambda_c ds\, F_U(du)\, F_R(dr)$$

   на пространстве

   $$\mathcal{R}_c = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

   берется соответствующая ей пуассоновская мера N_c, и определяется нагрузка на множестве A через интеграл

   $$\begin{aligned} W_c(A) &= \int_{\mathcal{R}_c} \int_{\mathbb{R}^d} r \mathbf{1}_{\{y \in uB(0,1)\}} \mathbf{1}_{\{s+y \in A\}}\, dN_c(s, u, r) \\ &= \int_{\mathcal{R}_c} r |(s + uB(0,1)) \cap A|\, dN_c(s, u, r). \end{aligned}$$

   Интересное наблюдение состоит в том, что полученный нами результат в случае $d = 1$, $\lambda_1 = \lambda_c$, $\lambda_2 = 1$ совпадает с аналогичным утверждением для непрерывной модели, см. [2, Теорема 13.6].

2. Отметим, что мы, вообще говоря, не использовали условие (2) на хвост U, отдав предпочтение оценке (3). Условия, которые мы реально использовали: (1), (3), (4), (5) и (6).

   В непрерывной же версии (в случае $d = 1$) накладываются только условия (1), (4) и (5), а также используются оценка (3) и асимптотика
$$\mathbb{P}(RU > y) \sim c_R \, \mathbb{E}(U^\alpha) \, y^{-\alpha}.$$

   Остается заключить, что аналогом данной асимптотики в нашем (дискретном) случае служит условие (6).

3.3 Сходимость конечномерных распределений

Теорема 3.3. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ - непересекающиеся шары в $\mathbb{R}^1$, а также выполнены условия теоремы 3.1. Предположим для простоты, что λ_1, λ_2 - фиксированные константы. Тогда имеет место сходимость*

$$(Z_a(A_1), \ldots, Z_a(A_m)) \Rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}(|A_1|, 0, \alpha), \ldots, \tilde{\mathcal{S}}(|A_m|, 0, \alpha)),$$

причем компоненты предельного вектора являются независимыми случайными величинами.

Доказательство. Идея доказательства: представить вектор $(Z_a(A_1), \ldots, Z_a(A_m))$ в виде суммы двух векторов X_a, Y_a так, что компоненты вектора X_a были независимы, а $Y_a \Rightarrow 0$. Тогда теоремы 1.3 и 1.4 дадут требуемую сходимость.

Пусть $A = B(0,1) = [-1,1]$ — шар единичного радиуса (приведенные ниже рассуждения с незначительными изменениями верны и для шара произвольного радиуса). Представим величину $W(aA)$ в виде суммы

$$W(aA) = W_+(aA) + W_-(aA),$$

где в первом слагаемом рассматриваются только $s \in aA$, а во втором только $s \notin aA$. Наша цель - показать, что

$$a^{-1/\alpha}\mathbb{E}W_-(aA) \to 0.$$

Возьмем большое число u_0 (в дальнейшем оно будет зависеть от a). Разобьем $\mathbb{E}W_-(aA)$ в сумму двух интегралов

$$\mathbb{E}W_-(aA) =: \lambda_1 \lambda_2 \, \mathbb{E}R \, (I_1 + I_2),$$

где в I_1 рассматриваются только $u > u_0$, а в I_2 значения $u \leqslant u_0$. Сперва оценим интеграл I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s-x \in aB(0,1)\}} 1_{\{u>u_0\}} 1_{\{s \notin aB(0,1)\}} \, ds \, dx \, F_U(du) \\ &\leqslant 2a \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{u>u_0\}} \, dx \, F_U(du) \\ &=: J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где

$$J_1 = 2a \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|>2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}} \, dx \, F_U(du),$$

$$J_2 = 2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du).$$

Напишем

$$J_1 = 2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|>2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du)$$
$$\leqslant 4\,a \int u 1_{\{u>2a\}}\, F_U(du) \leqslant \tilde{C} a^{(2-\gamma)}.$$

$$J_2 = 2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du)$$
$$= 2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) +$$
$$+ 2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du).$$

Первое слагаемое оценивается так же, как J_1. Для второго слагаемого имеем

$$2a \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) \leqslant$$
$$\leqslant 8a \int u 1_{\{u>u_0\}}\, F_U(du) \leqslant \tilde{C} a u_0^{1-\gamma}$$

Теперь оценим интеграл I_2.

$$I_2 = \int\int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{s-x\in aB(0,1)\}} 1_{\{u\leqslant u_0\}} 1_{\{s\notin aB(0,1)\}}\, ds\, dx\, F_U(du)$$
$$\leqslant 4u_0 \int u F_U(du) \leqslant \tilde{C} u_0.$$

Таким образом, имеем оценку

$$a^{-1/\alpha} W_-(aA) \leqslant \tilde{C}(a^{2-\gamma-1/\alpha} + a^{1-1/\alpha} u_0^{1-\gamma} + a^{-1/\alpha} u_0).$$

Показатель степени первого слагаемого отрицателен в силу неравенства

$$2-\gamma-1/\alpha < 2-\gamma-1/\gamma \leqslant 0.$$

Положим $u_0 = a^{1/\alpha-\varepsilon}$. Тогда, чтобы второе слагаемое стремилось к нулю, достаточно взять

$$\varepsilon < \frac{\gamma-\alpha}{\alpha(\gamma-1)}.$$

Следовательно, имеем

$$a^{-1/\alpha}(W_-(aA) - \mathbb{E}W_-(aA)) \Rightarrow 0.$$

□

Теорема 3.4. *Пусть $A_1, \dots, A_m$ - непересекающиеся шары в $\mathbb{R}^2$, а также выполнены условия теоремы 3.1. Предположим для простоты, что λ_1, λ_2 - фиксированные константы и что выполнено условие*

$$(\alpha-1)(\gamma-1) < \gamma - \alpha.$$

Тогда имеет место сходимость

$$(Z_a(A_1), \dots, Z_a(A_m)) \Rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}(|A_1|, 0, \alpha), \dots, \tilde{\mathcal{S}}(|A_m|, 0, \alpha)),$$

причем компоненты предельного вектора являются независимыми случайными величинами.

Доказательство. Идея доказательства аналогична предыдущей теореме.

Пусть $A = B(0,1)$ — шар единичного радиуса (приведенные ниже рассуждения с незначительными изменениями верны и для шара произвольного радиуса). Представим величину $W(aA)$ в виде суммы

$$W(aA) = W_+(aA) + W_-(aA),$$

где в первом слагаемом рассматриваются только $s \in aA$, а во втором только $s \notin aA$. Наша цель - показать, что

$$a^{-2/\alpha} \mathbb{E} W_-(aA) \to 0.$$

Зафиксируем большое число u_0 (в дальнейшем оно будет зависеть от a). Разобьем $\mathbb{E}W_-(aA)$ в сумму двух интегралов

$$\mathbb{E}W_-(aA) =: \lambda_1\lambda_2\, \mathbb{E}R(I_1 + I_2),$$

где в I_1 рассматриваются только $u > u_0$, а в I_2 значения $u \leqslant u_0$. Сперва оценим интеграл I_1.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{s-x \in aB(0,1)\}} 1_{\{u>u_0\}} 1_{\{s \notin aB(0,1)\}}\, ds\, dx\, F_U(du) \\
&\leqslant V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) \\
&=: J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

где

$$J_1 = V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|>2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du),$$

$$J_2 = V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du).$$

Напишем

$$\begin{aligned}
J_1 &= V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|>2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) \\
&\leqslant V_2^2\, a^2 \int u^2 1_{\{u>2a\}}\, F_U(du) \leqslant \tilde{C} a^{2(2-\gamma)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) \\
&= V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u>2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) + \\
&+ V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x \in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается так же, как J_1. Для второго слагаемого имеем

$$V_2\, a^2 \int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{|x|\leqslant 2a\}} 1_{\{u\leqslant 2a\}} 1_{\{u>u_0\}}\, dx\, F_U(du) \leqslant$$
$$\leqslant V_2^2\, a^2 \int u^2 1_{\{u>u_0\}}\, F_U(du) \leqslant \tilde{C}(a u_0^{1-\gamma})^2$$

Теперь оценим интеграл I_2.

$$I_2 = \int\int\int 1_{\{x\in uB(0,1)\}} 1_{\{s-x\in aB(0,1)\}} 1_{\{u\leqslant u_0\}} 1_{\{s\notin aB(0,1)\}}\, ds\, dx\, F_U(du)$$
$$\leqslant V_2^2(u_0^2 + u_0 a)\int u^2 F_U(du).$$

Таким образом, имеем оценку

$$a^{-2/\alpha} W_-(aA) \leqslant \tilde{C}(a^{2(2-\gamma-1/\alpha)} + (a^{1-1/\alpha}u_0^{1-\gamma})^2 + a^{-2/\alpha}(u_0^2 + u_0 a)).$$

Показатель степени первого слагаемого отрицателен в силу неравенства

$$2-\gamma-1/\alpha < 2-\gamma-1/\gamma \leqslant 0.$$

Положим $u_0 = a^{1/\alpha-\varepsilon}$. Тогда, чтобы оставшиеся слагаемые стремились к нулю, нужно потребовать

$$1-1/\alpha + (1/\alpha-\varepsilon)(1-\gamma) < 0, \qquad \varepsilon > 1-1/\alpha.$$

Преобразуя, получаем

$$1-1/\alpha < \varepsilon < \frac{\gamma-\alpha}{\alpha(\gamma-1)}.$$

Существование решения данной системы неравенств гарантируется условием

$$(\alpha-1)(\gamma-1) < \gamma-\alpha.$$

Остается заключить, что имеет место сходимость

$$a^{-2/\alpha}(W_-(aA) - \mathbb{E}W_-(aA)) \Rightarrow 0.$$

□

4 Планы дальнейших исследований

1. По аналогии с непрерывной версией модели (см. [2]), можно сформулировать аналог теоремы 3.3 при произвольном значении d и без дополнительных предположений на параметры λ_1 и λ_2.

2. В более общей постановке, вместо $W(A)$ мы могли бы определить случайный функционал $W(\varphi)$ для $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\alpha(\mathbb{R}^d)$ как интеграл

$$W(\varphi) := \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} r 1_{\{x \in uB(0,1)\}} \varphi(s+x) dz(x,r) dN(s,u,z)$$

и изучать предельное поведение нормированной нагрузки

$$Z_a(\varphi) := \frac{W(\varphi(\frac{\cdot}{a})) - \mathbb{E}W(\varphi(\frac{\cdot}{a}))}{b}.$$

Принимая во внимание результаты для непрерывной модели (см. [4, 5]), можно сформулировать аналоги теорем 3.1 и 3.3 с заменой $Z_a(A)$ на $Z_a(\varphi)$ и $\tilde{\mathcal{S}}(|A|, 0, \alpha)$ на *интеграл функции φ по α-устойчивой случайной мере* (см. [2, стр. 133]).

5 Заключение

В работе описана основная идея многомерной дискретной системы обслуживания. Введено формальное определение такой модели через пуассоновские меры и интегралы. Затем было изучено макроскопическое поведение нагрузки на систему — сформулирована и доказана основная теорема о существовании и виде предельной случайной величины, а также при дополнительных предположениях изучена сходимость конечномерных распределений нормированной нагрузки в случае $d = 1$ и $d = 2$.

Список литературы

[1] Кингман Дж. Пуассоновские процессы. Под редакцией А.М. Вершика. МЦНМО, Москва, 2007.

[2] Лифшиц М.А. Случайные процессы - от теории к практике. Лань, 2016.

[3] Kurtz Th.G. Limit Theorems for Workload Input Models, 1996.

[4] Breton J.-C., Dombry C. Functional macroscopic behavior of weighted random balls model. ALEA: Lat. Amer. J. Probab. Math. Statist., **8** (2011), 177-196.

[5] Kaj I., Leskelä L., Norros I., Schmidt V. Scaling limits for random fields with long-range dependence, Ann. Appl. Probab. 35 (2) (2007) 528-550.

[6] Е. Аззо. О многомерных вариантах систем обслуживания с дискретной нагрузкой. ВКР магистра, СПбГУ, 2019.

[7] Biermé H., Estrade A. Poisson random balls: self-similarity and X-ray images, Adv. Appl. Probab. 38 (2006) 1-20.

[8] Caglar M. A long-range dependent workload model for packet data trafic. Mathematics of Operations Research, 29(1):92-105, 2004.

[9] Kaj I., Taqqu M.S. Convergence to fractional Brownian motion and to the telecom process: the integral representation approach. In: In and Out of Equilibrium 2, 383-427. Springer, 2008.

[10] Rosenkrantz W.A., Horowitz J. et al. The infinite source model for internet trafic: statistical analysis and limit theorems. Methods and applications of analysis, 9(3):445-462, 2002.