

**ОТЗЫВ научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
Алексеева Ильи Сергеевича
по теме «New classes of minimal knot diagrams»**

Представленная Ильей работа в основной своей части относится к классической теории узлов и зацеплений, хотя ее исходная мотивировка пришла из вопросов геометрической теории групп (и к ней же относится часть полученных результатов).

В работе доказываются серия связанных результатов о минимальных диаграммах узлов и зацеплений, о диаграммах с минимальным числом окружностей Зейферта, а также о минимальных диаграммах кос или, в других терминах, о геодезических путях в группах кос. Полученные результаты существенны и новы, они находятся на передовом крае развития теории, имеют мировой уровень.

Наиболее ярким результатом работы является описание нового обширного класса минимальных (в классическом смысле, т.е. по числу перекрестков) диаграмм узлов и зацеплений. Открытый Илеей класс имеет довольно сложное устройство и описание и для ознакомления с ним требуется определенная работа. Кратко можно охарактеризовать его как класс, состоящих из тех однородных диаграмм, у которых при разбиении на косы слои составляющих кос в определенном смысле достаточно сильно перекручены. Несмотря на сложность описания, класс этот сравнительно велик и уже среди простейших диаграмм часты представители этого класса.

До работы Ильи, насколько мне известно, удалось обнаружить лишь следующие классы «зрительно распознаваемых» минимальных диаграмм:

(А) неприводимые альтернированные и (обобщающие их) адекватные диаграммы,

(Р) диаграммы, являющиеся Александеровскими замыканиями некоторых специальных достаточно сильно перекрученных положительных (и отрицательных) кос, а также

(М) приведенные монтесиносовские диаграммы.

Доказательство минимальности неприводимых альтернированных диаграмм (первая гипотеза Тейта) и последующее обобщение этого результата на адекватные диаграммы представляют собой важнейшую веху в развитии теории узлов. Гипотеза оставалась открытой почти столетие, а доказательство является одним из самых известных применений полиномиальных инвариантов к геометрической части теории узлов. Эти результаты вдохновили множество исследований по структуре минимальных диаграмм и, в частности, попыток найти новые классы минимальных диаграмм, но до настоящего удалось это только для довольно узких вышеуказанных сугубо специальных классов (Р) и (М). Новый класс, открытый Илеей – прорыв в этом направлении, случившийся после длительной паузы. Этот класс весьма богат – по асимптотическим размерам он вполне конкурирует с классом альтернированных и выглядит намного более широким, чем вышеупомянутые классы (Р) и (М). Даже относительно небольшой в сравнении со всем открытым Илеей классом его подкласс, состоящий из замыканий локально перекрученных однородных кос, можно рассматривать как существенное, качественное расширение класса (Р).

Уже одного этого результата более чем достаточно для того, чтобы оценить представленную работу на «отлично».

В дополнение отмечу, что полученное Илеей доказательство минимальности обсуждаемого класса диаграмм весьма сложно, – оно базируется на многоступенчатых построениях из недавних работ о числе окружностей Зейферта в альтернированных диаграммах, усовершенствует эти построения и экстраполирует их на более труднодоступный класс диаграмм. По всей видимости, Илье удастся еще более развить и усилить полученные результаты: с одной стороны, им найдены потенциальные возможности для ослабления некоторых определяющих рассматриваемый класс условий,

ведущие к расширению класса, а с другой, – в одной из связанных работ (речь о работе Y. Diao, G. Hetyei, P. Liu, The braid index of reduced alternating links, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2019: <https://doi.org/10.1017/S0305004118000907>) нами были обнаружены неточности, и верификация проделанных в этой работе построений также может привести к изменениям в конфигурации найденного класса минимальных диаграмм.

Подчеркну, что и сам новый обсуждаемый класс диаграмм, и доказательство его минимальности были найдены Ильей самостоятельно.

«11» июня 2020 г.



Подпись

Малютин А.В.
ФИО