

Санкт-Петербургский государственный университет

МИЛЛЕР Алексей Юрьевич

Выпускная квалификационная работа

Графы преобразований узлов

Образовательная программа бакалавриат «Математика»

Направление и код: 01.03.01 «Математика»

Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
профессор СПбГУ,
доктор ф.-м. наук,
Малютин Андрей Валерьевич

Рецензент:
ведущий научный сотрудник,
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
доктор ф.-м. наук,
Дынников Иван Алексеевич

Санкт-Петербург
2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Введение	1
§2. Определения и обозначения	3
2.1. Основные определения	3
2.2. Локальные преобразования зацеплений	4
2.3. Примеры локальных преобразований	6
2.4. Ориентированные локальные преобразования зацеплений	8
2.5. Вспомогательные определения и обозначения	9
§3. Вложенные перестройки	11
3.1. Предварительные сведения	11
3.2. Основные результаты о вложенных перестройках	12
§4. Торические вложенные перестройки	18
4.1. Торические вложенные перестройки и тэта-кривые на торе	19
4.2. Флип-преобразования и триангуляция Фарей	21
4.3. Граф вложенных перестроек вдоль торических лент	24
§5. (#)-преобразования	29
5.1. Предварительные сведения	29
5.2. Теорема о (#)-преобразованиях	30
§6. $\mathcal{O}(n)$ -преобразования	33
Список литературы	38

Аннотация

Работа относится к теории узлов. Изучаются преобразования узлов и зацеплений. Основными объектами исследования являются Гордиевы графы преобразований. Доказывается ряд утверждений, описывающих локальные и глобальные свойства $H(2)$ -Гордиевого графа и $(\#)$ -Гордиевого графа. Получено описание Гордиева графа торических вложенных перестроек. Вводятся и исследуются новые локальные преобразования узлов. Вводится новый тип преобразований узлов, исследуется граф одного из преобразований этого типа.

Ключевые слова: Узел, локальные преобразования узлов, Гордиев граф, Гордиево расстояние, $H(2)$ -преобразование, $(\#)$ -преобразование.

§1. Введение

Основной целью данной работы является исследование преобразований классических зацеплений с помощью анализа так называемых Гордиевых графов¹ этих преобразований. Гордиевым графом преобразования δ на множестве зацеплений M называется граф, вершинами которого являются зацепления из множества M и две вершины соединены ребром, если одно из соответствующих этим вершинам зацеплений получается из другого с помощью δ . Этот метод даёт новый взгляд на свойства и структуру преобразования, позволяя формулировать задачи о преобразованиях в альтернативных, нередко более удобных для исследования терминах. Так, например, задачи, связанные с лернейскими узлами [27], формулируются в терминах Гордиева графа вложенных перестроек. Гордиевы графы и сопутствующие им конструкции представляют интерес не только в качестве инструмента переформулировки задач теории узлов. В последнее время активно развиваются методы исследования кратчайших в Гордиевых графах [13, 15, 20, 30, 42], изучаются Гордиевы комплексы (стандартное пополнение Гордиева графа до симплициального комплекса) [8, 35, 36, 44, 43], в недавней работе [12] исследуется гиперболичность Гордиевых графов некоторых локальных преобразований.

В настоящей работе изучаются локальные и глобальные свойства Гордиевых графов различных преобразований: получены результаты о связности некоторых подграфов $H(2)$ -Гордиева графа на множестве всех узлов

¹По легенде царь Фригии Гордий завязал на ярме своей повозки невероятно сложный узел. Сумевшему его распутать пророчилась власть над всей Азией, и предсказание сбылось после того, как Гордиев узел был разрублен Александром Македонским.

и устройстве множества смежных вершин произвольной вершины $H(2)$ -Гордиева графа на множестве всех зацеплений, описана асимптотическая структура на бесконечности для $H(2)$ -Гордиева графа на множестве всех узлов и для $(\#)$ -Гордиева графа на множестве всех ориентированных узлов, получено описание Гордиева графа торических вложенных перестроек на множестве торических узлов, введён новый класс локальных преобразований, названных $\mathcal{O}(n)$ -преобразованиями, и исследованы его свойства, введён новый тип преобразований и определено $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразование, являющееся естественным обобщением $\mathcal{O}(n)$ -преобразований, доказано, что диаметр $\mathcal{O}(\infty)$ -Гордиева графа равен единице.

Перейдём к более подробному описанию содержания и результатов работы по параграфам.

В параграфе 2 приведены используемые определения и обозначения. В первом разделе этого параграфа даны определения некоторых стандартных объектов теории узлов. Второй, третий и четвёртый разделы параграфа 2 посвящены конструкциям, относящимся к локальным и ориентированным локальным преобразованиям. Основные преобразования, изучаемые в настоящей работе, определены в терминах тэнглов. Во втором разделе параграфа 2 подробно обсуждается понятие Гордиева графа преобразования и сопутствующие конструкции. Пятый раздел параграфа 2 содержит различные вспомогательные определения и обозначения.

Параграф 3 посвящён $H(2)$ -преобразованиям, также называемым вложенными перестройками. Одними из основополагающих работ в теории вложенных перестроек считаются, в первую очередь, работы [24] и [9] (в [9] вложенная перестройка рассматривается как частный случай $H(n)$ -преобразования при $n = 2$). Различные свойства вложенных перестроек и сопутствующие конструкции активно изучаются в последнее десятилетие. Так, в работах [14, 16, 17, 19] изучается связь вложенных перестроек с полиномиальными инвариантами, в [5, 13, 15, 20, 41] изучается метрика вложенных перестроек, в [1, 2, 3, 4, 18, 29] — инвариант расстояния (в метрике вложенных перестроек) до тривиального узла, в [25, 31] — связь вложенных перестроек с линзовыми пространствами, вложенные перестройки расслоенных узлов изучаются в [6], косметические перестройки — в [10], графы и комплексы, ассоциированные с вложенными перестройками — в [12, 43, 44], а приложения в биологии — в [11] и [32]. В параграфе 3 получены следующие результаты: связность и бесконечный диаметр графа Γ_k — Гордиева графа вложенных перестроек на множестве всех узлов, а также связность различного рода подграфов этого графа (теоремы 1 и 5), существование бруннова зацепления в множестве смежных вершин произвольной вершины Гордиева графа вложенных перестроек на множестве

всех зацеплений и существование бесконечного набора обмоток заданного узла в множестве смежных вершин для этого узла в том же графе (теоремы 3 и 4). Также описана асимптотическая структура графа Γ_k на бесконечности, а именно, доказано, что среди компонент связности дополнения шара в графе Γ_k только одна имеет бесконечный диаметр (теорема 2). Результаты теорем 4 и 5 были включены в работу «Лернейские узлы и вложенные перестройки» (Ю. С. Белоусов, М. В. Карев, А. В. Малютин, А. Ю. Миллер, Е. А. Фоминых).

В параграфе 4 изучается граф Γ_{Tor} — Гордиев граф торических вложенных перестроек на множестве торических узлов (вложенная перестройка торического узла, расположенного на крае незаузленного полнотория, называется торической, если лента, вдоль которой производится перестройка, лежит на том же торе, что и сам узел). Получено описание этого графа, опирающееся на подробно изложенную в [7, 28] связь флип-преобразований тэта-кривых на торе и триангуляции Фарей гиперболической плоскости.

Параграф 5 посвящён исследованию Гордиева графа ($\#$)-преобразований на множестве всех ориентированных узлов, а именно — его асимптотической структуры на бесконечности. Доказано, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе существует не более двух компонент с бесконечным диаметром (теорема 7). ($\#$)-Преобразования исследовались в работах [33, 34].

Параграф 6 состоит из двух частей. В первой части приведены некоторые свойства введённых в настоящей работе $\mathcal{O}(n)$ -преобразований, а во второй — описан новый тип преобразований узлов — тор-преобразования. Идея тор-преобразования является обобщением идеи локального преобразования и заключается в замене одного тор-тэнгла, образованного узлом, на другой (тор-тэнглом, по аналогии с тэнглом, называется незаузленный полноторий, содержащий дуги, концы которых лежат на крае этого полнотория). Определено тор-преобразование, являющееся естественным обобщением $\mathcal{O}(n)$ -преобразований — $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразование. Описан Гордиев граф, соответствующий $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразованиям на множестве всех узлов, а именно доказано, что его диаметр равен единице.

§2. Определения и обозначения

2.1. Основные определения. Для начала определим некоторые базовые объекты и конструкции теории узлов, которые необходимы для дальнейшей работы.

Определение 1. *Зацеплением* называется кусочно гладкое вложение несвязного объединения конечного числа окружностей в ориентированную

трехмерную сферу S^3 и образ этого вложения, рассматриваемый с точностью до объемлемой изотопии.

Замечание 1. Все зацепления предполагаются неориентированными, если оговорено обратное.

Определение 2. *Узлом* называется однокомпонентное зацепление.

Определение 3. Зацепление $L \subset S^3$ называется *тривиальным*, если оно лежит на некоторой вложенной двумерной сфере $S^2 \subset S^3$.

Определение 4. Нетривиальное зацепление L называется *брунновым*, если результат удаления любой его компоненты является тривиальным зацеплением.

Определение 5. *Диаграммой* зацепления называют набор замкнутых кривых общего положения, являющийся проекцией зацепления на плоскость или на двумерную сферу и снабженный дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы).

2.2. Локальные преобразования зацеплений. Далее нам потребуются понятие локального преобразования зацеплений и некоторые сопутствующие конструкции. Различные локальные преобразования изучались в работах [9, 39, 40, 43].

Определение 6. *Тэнглом на n нитях* или *n -ниточным тэнглом* называется пара $B_A = (B, A)$, где B — ориентированный трехмерный шар, а A — множество из n дизъюнктивных вложенных в B дуг, таких что граничная сфера ∂B шара B пересекается с каждой дугой в конечных точках этой дуги и только в них. Компоненты связности множества A будем называть *нитьями* тэнгла B_A .

Аналогично случаю зацеплений определяются *диаграммы* тэнглов. На рис. 1 приведены примеры диаграмм некоторых тэнглов.

Определение 7. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а B — шар в S^3 . Тогда пару n -ниточных тэнглов (B_A, B_C) , будем называть *шаблоном локального преобразования*, если множество концов нитей первого тэнгла совпадает с множеством концов нитей второго тэнгла.

Определение 8. Пусть L_1 и L_2 — два зацепления в S^3 , B — шар в S^3 , а $\delta = (B_A, B_C)$ — некоторый шаблон локального преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью *локального δ -преобразования*, если существуют такие зацепления L'_1 и L'_2 в S^3 , что зацепление L'_1 объемлемо изотопно зацеплению L_1 , зацепление L'_2

объемлемо изотопно зацеплению L_2 , зацепления L'_1 и L'_2 совпадают вне внутренней шара B и пара $((B, B \cap L'_1), (B, B \cap L'_2))$ совпадает с шаблоном δ .

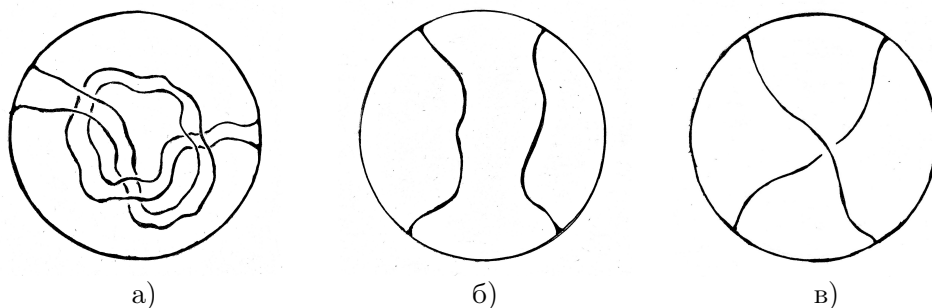


Рис. 1. Примеры диаграмм тэнглов.

Определение 9. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, а M — произвольное множество зацеплений. Будем обозначать через $G(\delta, M)$ граф, вершинами которого являются зацепления из множества M , а пара вершин соединена ребром, если зацепление в одной вершине — результат локального δ -преобразования зацепления в другой. Такой граф называется (δ, M) -Гордиевым графом.

Определение 10. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, а M — произвольное множество зацеплений. Шаблон δ будем называть *развязывающим* шаблоном для множества M (или относительно множества M), если для любого зацепления $L \in M$ в графе $G(\delta, M)$ существует конечный путь, соединяющий вершину² L и вершину, соответствующую тривиальному узлу.

Определение 11. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений, а K и Z — произвольные зацепления из множества M . Тогда (δ, M) -Гордиевым расстоянием между зацеплениями K и Z называется длина кратчайшего пути в графе $G(\delta, M)$ между вершинами K и Z . Будем обозначать это число через $d_{(\delta, M)}(K, Z)$ (если вершины K и Z лежат в разных компонентах линейной связности графа $G(\delta, M)$, то положим по определению $d_{(\delta, M)}(K, Z) = \infty$).

²Здесь и далее зацепление и соответствующая ей вершина Гордиева графа будут обозначаться одинаково.

Определение 12. Пусть M — произвольное множество зацеплений, δ — произвольный развязывающий шаблон для множества M , а L — произвольное зацепление из множества M . Тогда число $d_{(\delta, M)}(L, U)$, где U — тривиальный узел, называется δ -Гордиевой длиной зацепления L . Будем обозначать это число через $u_{(\delta, M)}(L)$.

Определение 13. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений. Подмножество $W \subset M$ будем называть *связным относительно шаблона δ и множества M* , если индуцированный подграф³ в графе $G(\delta, M)$, соответствующий множеству W , связан.

2.3. Примеры локальных преобразований.

Определение 14. На рис. 2 приведен некоторый шаблон локального преобразования, содержащий два 2-ниточных тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через X . Локальное преобразование с этим шаблоном называется X -преобразованием.

Замечание 2. Хорошо известно, что шаблон X -преобразования является развязывающим шаблоном относительно множества всех узлов (см. [21]).

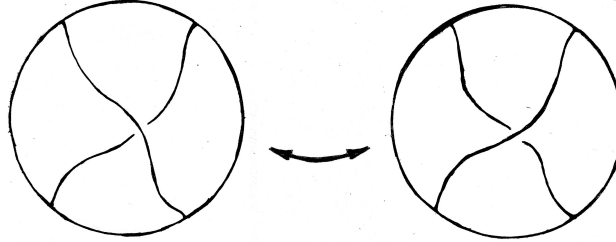


Рис. 2. X -преобразование.

Определение 15. Пусть L — зацепление в S^3 , I — отрезок $[0, 1]$, а отображение $b: I \times I \rightarrow S^3$ — вложение, такое что $b(I \times I) \cap L = b(I \times \partial I)$. Зацепление

$$M = (L \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$$

называется результатом *вложенной перестройки* зацепления L вдоль ленты $b(I \times I)$ (см. рис. 3).

³Подграф Γ' графа Γ называется *индуцированным*, если Γ' образован некоторым подмножеством вершин графа Γ и всеми теми ребрами графа Γ , которые соединяют вершины из этого подмножества.

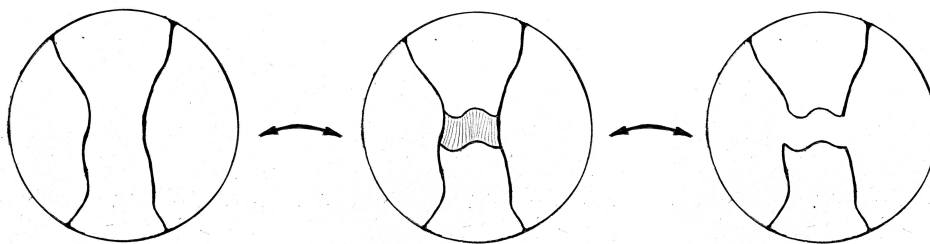
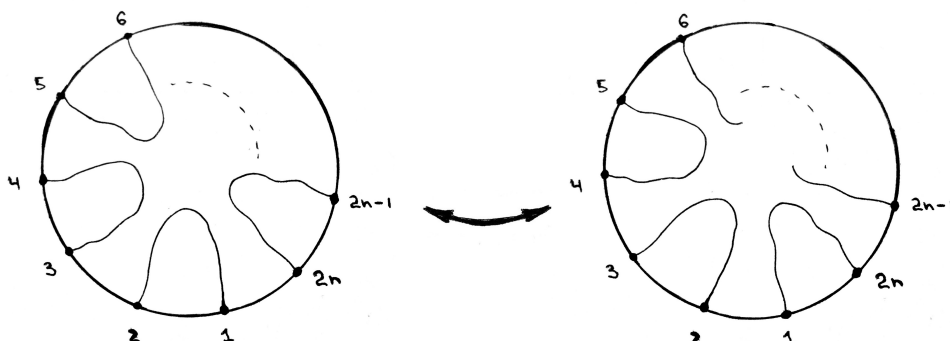


Рис. 3. Вложенная перестройка.

Определение 16. На рис. 4 приведен шаблон локального преобразования, содержащий два n -ниточных тэнгла. Локальное преобразование с этим шаблоном называется $H(n)$ -преобразованием.

Замечание 3. Несложно заметить, что вложенная перестройка является локальным преобразованием, а именно — частным случаем $H(n)$ -преобразования для $n = 2$. Следуя обозначениям из [9], будем обозначать шаблон вложенной перестройки через $H(2)$.

Рис. 4. $H(n)$ -преобразование.

Определение 17. На рис. 5 приведен шаблон локального преобразования, содержащий два $(n + 2)$ -ниточных тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через $\mathcal{O}(n)$. Локальное преобразование с шаблоном $\mathcal{O}(n)$ будем называть $\mathcal{O}(n)$ -преобразованием.

Замечание 4. Заметим, что $\mathcal{O}(0)$ -преобразование это вложенная перестройка. В целом идея введения $\mathcal{O}(n)$ -преобразования заключается в своего рода

обобщении вложенной перестройки — $\mathcal{O}(n)$ -преобразование удобно воспринимать как вложенную перестройку по ленте с n проколами, причём через каждый прокол ленты проходит ровно одна дуга зацепления.

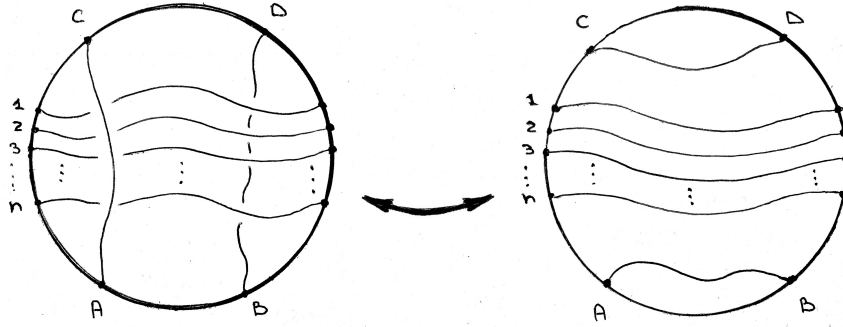


Рис. 5. $\mathcal{O}(n)$ -преобразование.

2.4. Ориентированные локальные преобразования зацеплений.

Определение 18. *Ориентированным тэнглом на n нитях* будем называть n -ниточный тэнгл, все нити которого ориентированы. Если γ — ориентированная нить ориентированного тэнгла, то будем обозначать через $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ начальную и конечную точки этой нити соответственно.

Определение 19. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а B — шар в S^3 . Тогда пару ориентированных n -ниточных тэнглов (B_A, B_C) , будем называть *ориентированным шаблоном локального преобразования*, если множество начальных точек нитей первого тэнгла совпадает с множеством начальных точек нитей второго тэнгла и множество конечных точек нитей первого тэнгла совпадает с множеством конечных точек нитей второго тэнгла.

Определение 20. Пусть L_1 и L_2 — два ориентированных зацепления в S^3 , B — шар в S^3 , а $\delta = (B_A, B_C)$ — некоторый ориентированный шаблон локального преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью *ориентированного локального δ -преобразования*, если существуют такие ориентированные зацепления L'_1 и L'_2 в S^3 , что зацепление L'_1 объемлемо изотопно зацеплению L_1 , зацепление L'_2 объемлемо изотопно зацеплению L_2 , зацепления L'_1 и L'_2 совпадают вне внутренней части шара B и пара $((B, B \cap L'_1), (B, B \cap L'_2))$ совпадает с шаблоном δ .

Замечание 5. Для ориентированного шаблона δ и множества ориентированных зацеплений M конструкции ориентированного (δ, M) -Гордиевого графа, ориентированного (δ, M) -Гордиевого расстояния, развязывающего ориентированного шаблона и ориентированной (δ, M) -Гордиевой длины определяются по аналогии с неориентированным случаем.

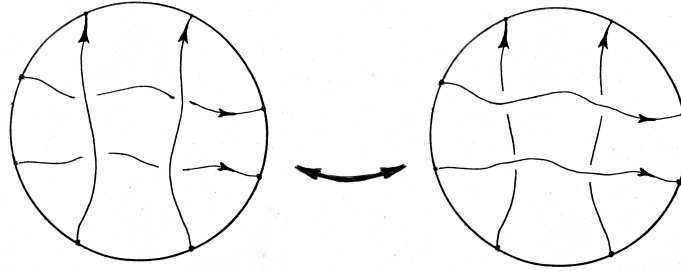


Рис. 6. $(\#)$ -преобразование.

Определение 21. На рис. 6 приведён некоторый ориентированный шаблон локального преобразования, содержащий два 4-ниточных ориентированных тэнгла. Будем обозначать этот ориентированный шаблон через $(\#)$. Ориентированное локальное преобразование с этим шаблоном называется $(\#)$ -преобразованием.

2.5. Вспомогательные определения и обозначения.

Определение 22. Нетривиальный узел Z называют *обмоткой* узла K , если узел Z объемлемо изотопен узлу на крае трубчатой окрестности узла K , но не объемлемо изотопен узлу K .

Определение 23. На краевом торе ∂V любого вложенного в S^3 полнотория V имеется два выделенных изотопических класса простых нестягиваемых (на ∂V) замкнутых кривых — класс меридианов и класс параллелей. Фиксируем какие-нибудь меридиан m и параллель ℓ и ориентируем их произвольным образом. Тогда любой простой нестягиваемой (на ∂V) замкнутой ориентированной кривой γ на ∂V можно сопоставить так называемый *наклон* — элемент p/q множества $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, где целые p и q таковы, что для гомологических классов $[\gamma]$, $[m]$ и $[\ell]$ кривой γ , меридиана m и параллели ℓ , соответственно, выполнено равенство

$$[\gamma] = p[\ell] + q[m].$$

Заметим, что ориентация кривой на ее наклон не влияет, а при замене ориентации на параллели или меридиане наклон меняет знак, сохраняя абсолютное значение. Это означает, что абсолютное значение наклона определено и для неориентированных кривых на ∂V .

Определение 24. Будем говорить, что узел W в S^3 является *связной суммой узлов* K и Z в S^3 , если в S^3 существуют такие узлы K', Z', W' и шар B , что узлы K, Z и W объемлемо изотопны узлам K', Z' и W' соответственно, узел K' лежит в шаре B , узел Z' лежит в дополнении $S^3 \setminus \text{Int}(B)$, пересечением узлов K' и Z' является дуга γ , лежащая на крае ∂B и $W' = (K' \cup Z') \setminus \text{Int}(\gamma)$.

Определение 25. Будем говорить, что ориентированный узел W в S^3 является *связной суммой ориентированных узлов* K и Z в S^3 , если в S^3 существуют такие ориентированные узлы K', Z', W' и шар B , что узлы K, Z и W объемлемо изотопны узлам K', Z' и W' соответственно, узел K' лежит в шаре B , узел Z' лежит в дополнении $S^3 \setminus \text{Int}(B)$, пересечением ориентированных узлов K' и Z' является дуга γ , лежащая на крае ∂B и $W' = (K' \cup Z') \setminus \text{Int}(\gamma)$, причём ориентации дуг $K' \setminus \text{Int}(\gamma)$ и $Z' \setminus \text{Int}(\gamma)$ совпадают с ориентацией на W' .

Замечание 6. Заметим, что в общем случае связная сумма неориентированных узлов K и Z определена неоднозначно.

Замечание 7. В дальнейшем будут использоваться общеизвестные понятия, такие как коса, замыкание Александра косы и унарная коса (определения можно найти в работе [26]).

Обозначение 1. Будем обозначать через \mathcal{K} множество всех узлов, через \mathcal{K}° — множество всех ориентированных узлов, а через \mathcal{L} — множество всех зацеплений. Будем обозначать через U тривиальный узел (если не оговорено иное).

Обозначение 2. Пусть K — произвольный узел в S^3 . Тогда p -листное накрытие S^3 , разветвленное над K будем обозначать $\Sigma_p(K)$ (определение можно найти в работе [37]).

Обозначение 3. Пусть K — произвольный узел в S^3 . Тогда минимальное число образующих группы первых гомологий пространства $\Sigma_p(K)$ с коэффициентами в \mathbb{Z} будем обозначать $tg(K, p)$.

Обозначение 4. Пусть K — произвольный узел в S^3 . Тогда сигнатуру узла K будем обозначать через $\sigma(K)$ (определение можно найти в работе [37]).

Обозначение 5. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений, n — натуральное число, а K — произвольное зацепление из множества M . Множество всех таких зацеплений $Z \in M$, для которых выполнено равенство $d_{(\delta, M)}(K, Z) = n$, то есть сферу радиуса n с центром в K в графе $G(\delta, M)$, будем обозначать через $S_{(n, \delta, M)}(K)$. Множество всех таких зацеплений $Y \in M$, для которых выполнено неравенство $d_{(\delta, M)}(K, Y) \leq n$, то есть шар радиуса n с центром в K в графе $G(\delta, M)$, будем обозначать через $B_{(n, \delta, M)}(K)$. Если из контекста ясно, о каком именно Гордиевом графе идет речь, то допускаются более удобные обозначения $S_n(K)$ и $B_n(K)$. Аналогичные обозначения будут использоваться и в ориентированном случае.

Обозначение 6. Граф $G(H(2), \mathcal{K})$ будем обозначать через Γ_k , а граф $G(H(2), \mathcal{L})$ — через Γ_ℓ . $H(2)$ -Гордиеву длину узла K в графе Γ_k будем обозначать через $u_2(K)$. $H(2)$ -Гордиево расстояние между узлами K и Z в графе Γ_k будем обозначать через $d_2(K, Z)$.

§3. Вложенные перестройки

3.1. Предварительные сведения. Прежде чем перейти к доказательствам основных результатов, приведём некоторые технические леммы. В работе [9] (теорема 4 при $p = 2$ и $n = 2$) доказана основная нижняя оценка на $H(2)$ -Гордиеву длину для узлов в графе Γ_k :

Лемма 1. *Для произвольного узла K верна оценка*

$$u_2(K) \geq tg(K, 2).$$

Лемма 2. *Если узел W является связной суммой узлов K и Z , то верно равенство*

$$tg(W, 2) = tg(K, 2) + tg(Z, 2).$$

Доказательство. Из конструкции двулистного накрытия следует, что $\Sigma_2(W)$ является связной суммой двулистных накрытий $\Sigma_2(K)$ и $\Sigma_2(Z)$. Таким образом выполнено равенство

$$H_1(\Sigma_2(W), \mathbb{Z}) = H_1(\Sigma_2(K), \mathbb{Z}) \oplus H_1(\Sigma_2(Z), \mathbb{Z}),$$

а минимальное число образующих⁴ прямой суммы групп это сумма минимальных чисел образующих в слагаемых (будем считать, что у тривиальной группы 0 образующих), откуда следует требуемое. \square

⁴Следуя изложению работы [9], будем использовать термин минимальное число образующих.

Лемма 3. Пусть Q — это трилистник, то есть узел Z_1 в обозначениях Рольфсена. Тогда

$$u_2(Q) = \text{tg}(Q, 2) = 1.$$

Доказательство. Заметим, что разрешение перекрёстка в диаграмме узла может быть реализовано с помощью одной вложенной перестройки (см. рис. 7). Хорошо известно, что существует такая диаграмма D узла Q и такой перекрёсток в ней, что разрешение этого перекрёстка превращает диаграмму D в диаграмму тривиального узла. Это означает, что $H(2)$ -Гордиева длина узла Q равна 1,

В работе [37] (глава 10. D) вычисляются группы $H_1(\Sigma_k(Q), \mathbb{Z})$. В том числе показано, что группа $H_1(\Sigma_2(Q), \mathbb{Z})$ изоморфна группе Z_3 . Отсюда следует, что $\text{tg}(Q, 2) = 1$, что и требовалось. \square

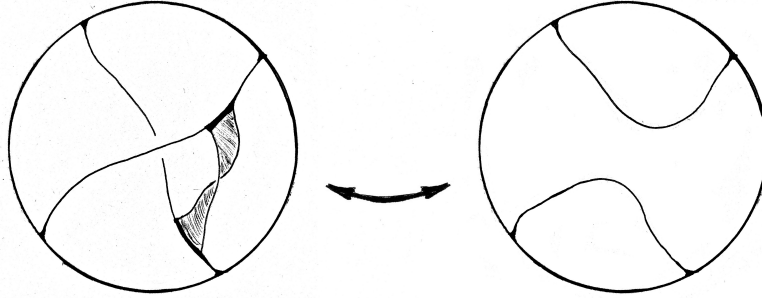


Рис. 7. Реализация разрешения перекрёстка диаграммы с помощью вложенной перестройки.

3.2. Основные результаты о вложенных перестройках.

Теорема 1. Граф Γ_k связан и имеет бесконечный диаметр.

Доказательство теоремы 1. Пусть Q — это трилистник. Из лемм 2 и 3 следует, что $H(2)$ -Гордиева длина узла, являющегося связной суммой n трилистников, равна n , откуда следует бесконечность диаметра.

На рис. 8 представлена реализация X -преобразования с помощью двух вложенных перестроек. Из возможности такой реализации и того факта, что шаблон X -преобразования является развязывающим для множества \mathcal{H} , следует связность графа Γ_k . \square

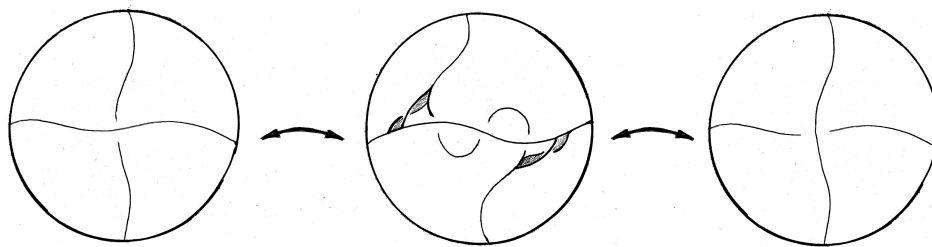


Рис. 8. Реализация X -преобразования с помощью двух вложенных перестроек.

Следующая теорема описывает асимптотическую структуру Гордиева графа Γ_k на бесконечности, а именно утверждает, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе только одна имеет бесконечный диаметр.

Теорема 2. Пусть r — произвольное натуральное число, а K и Z — два произвольных узла, для которых $u_2(K) \geq 2r$ и $u_2(Z) \geq 2r$. Тогда в графе Γ_k существует путь, соединяющий вершины K и Z и не пересекающий шара $B_{r-1}(U)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть K и Z — такие узлы в S^3 , что выполнено условие $u_2(K) \geq 2r$, $u_2(Z) \geq 2r$, где $r \in \mathbb{N}$. Пусть Q — это трилистник в S^3 , а Q^n — это узел в S^3 , являющийся связной суммой n копий трилистника. Из лемм 2 и 3 следует, что $u_2(Q^n) = n$.

Лемма 4. Пусть K_1 и K_2 — смежные вершины графа Γ_k , а W — произвольный узел в S^3 . Тогда существуют такие смежные вершины W_1 и W_2 графа Γ_k , что узел W_1 является связной суммой узлов W и K_1 , а узел W_2 является связной суммой узлов W и K_2 .

Доказательство. Пусть W_1 — произвольная связная сумма узлов W и K_1 . Тогда найдётся такой замкнутый шар $B \subset S^3$, что пара $(B, B \cap W_1)$ образует однониточный тэнгл, заузленный в узел W . При факторизации по шару B узел W_1 переходит в узел K_1 . Вершины K_1 и K_2 смежны в графе Γ_k , поэтому для узла K_1 найдётся лента, перестройка по которой переводит его в узел K_2 . При этом можно подобрать ленту таким образом, чтобы она не содержала точку, отвечающую шару B . Отсюда следует, что для узла W_1 найдётся лента, не пересекающая B , перестройка по которой переведёт его в некоторый узел W_2 , являющийся связной суммой узлов W и K_2 . \square

Замечание 8. Пусть W — произвольный узел, γ — некоторый путь в графе Γ_k , $\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ — множество вершин пути γ и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — множество ребер пути γ , причем ребро e_i инцидентно вершинам V_i и V_{i-1} , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Последовательное применение леммы 4 к каждому ребру пути γ позволяет получить новый путь $\gamma(W)$ с множеством вершин $\{W_0, W_2, \dots, W_n\}$ и множеством ребер $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, где вершина W_i соответствует связной сумме узлов W и V_i для $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, а ребро f_j инцидентно вершинам W_j и W_{j-1} для $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть τ — путь в графе Γ_k , соединяющий тривиальный узел и узел K (такой путь существует в силу связности графа Γ_k). Из замечания выше следует, что существует путь $\tau(Q^{2r})$, соединяющий узел Q^{2r} и узел K_Q , который является связной суммой узлов K и Q^{2r} . При этом из построения вытекает, что любой узел S , отвечающий вершине пути $\tau(Q^{2r})$, либо объемлемо изотопен узлу Q^{2r} , либо содержит узел Q^{2r} в качестве слагаемого, то есть по лемме 2 верна оценка $u_2(S) \geq 2r$. Это означает, что путь $\tau(Q^{2r})$ не пересекается с шаром $B_{r-1}(U)$.

В графе Γ_k существует ребро, соединяющее узел Q и тривиальный узел (в силу леммы 3). Из леммы 4, применённой к этому ребру и узлу Q , следует, что существует ребро, соединяющее узел Q и узел Q^2 . Продолжим применять лемму 4 к получающимся ребрам и узлу Q , пока не будет построен путь β с множеством вершин $\{U = Q^0, Q^1, \dots, Q^{2r}\}$ и множеством ребер $\{h_1, h_2, \dots, h_{2r}\}$, где ребро h_m инцидентно вершинам Q^m и Q^{m-1} для $m \in \{1, 2, \dots, 2r\}$. Путь β соединяет тривиальный узел и узел Q^{2r} .

Из замечания выше следует, что существует путь $\beta(K)$, соединяющий узлы K и K_Q . Заметим, что любой узел отвечающий вершине пути $\beta(K)$, является связной суммой узлов K и Q^m , где $m \in \{0, 1, \dots, 2r\}$ (будем обозначать связную сумму узлов K и Q^m через K_m , тогда $K_0 = K$ и $K_{2r} = K_Q$). Если $m \geq r$, то по лемме 2 выполнено неравенство $u_2(K_m) \geq r$, так как узел K_m содержит в качестве слагаемого узел Q^m . Если $m < r$, то для $H(2)$ -Гордиева расстояния между узлами K и K_m выполнено неравенство $d_2(K, K_m) < r$, так как подпуть пути $\beta(K)$ соединяющий K и K_m имеет длину m по построению. Предположим, что $u_2(K_m) < r$ при $m < r$. Из определения $H(2)$ -Гордиевой длины сразу следует неравенство

$$2r = u_2(K) \leq u_2(K_m) + d_2(K, K_m) < r + r.$$

Противоречие. Это означает, что для любого узла Y , отвечающего вершине пути $\beta(K)$, верна оценка $u_2(Y) \geq r$, то есть множество вершин пути $\beta(K)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

При конкатенации путей $\tau(Q^{2r})$ и $\beta(K)$ получается путь α_1 , соединяющий узлы K и Q^{2r} . Аналогичным способом можно построить путь α_2 ,

соединяющий узлы Z и Q^{2r} . Путь, являющийся конкатенацией путей α_1 и α_2 , соединяет узлы K и Z , причём, в силу построений, этот путь не пересекается с шаром $B_{r-1}(U)$, что и требовалось. \square

Теорема 3. Для произвольного узла K подмножество $S_1(K)$ вершин графа Γ_ℓ содержит некоторое брунново зацепление.

Доказательство теоремы 3. Как известно из [26], любой узел K в S^3 может быть представлен в виде замыкания Александера некоторой унарной косы B_K в S^3 . Расположим ленту в S^3 так, как указано в примере на рис. 9, соединив ей первую и последнюю нити косы B_K . Результатом вложенной перестройки узла K вдоль этой ленты является брунново зацепление, что и требовалось. \square

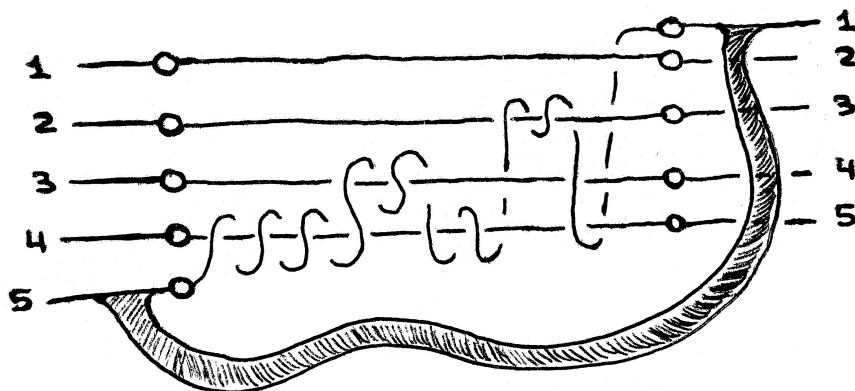


Рис. 9

Теорема 4. Для произвольного узла K множество вершин $S_1(K)$ графа Γ_k содержит все те обмотки узла K , у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{ \frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|} \mid i, j \in \mathbb{Z}; i \geq 0 \right\}$.

Доказательство теоремы 4. Пусть K — это узел в S^3 , V — его трубчатая окрестность, а T — лежащая на торе ∂V обмотка узла K , абсолютное значение наклона которой равно $(3 + 2i)/2$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$. Зафиксируем на торе ∂V такие меридиан t и параллель ℓ , что t пересекает T ровно в $3 + 2i$ точках, ℓ пересекает T ровно в двух точках и ℓ пересекает t ровно в одной точке, причём $\ell \cap t \cap T = \emptyset$. Параллель ℓ делится точками пересечения с обмоткой T на две дуги. Обозначим через

J ту из этих дуг, которая не пересекает m . Пусть $b: I \times I \rightarrow \partial V$ — такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\} \times I) = J$ и

$$b(I \times \{0\}) \cup b(I \times \{1\}) = b(I \times I) \cap T.$$

Перестройка обмотки T вдоль ленты $b(I \times I)$ дает кривую T' , не пересекающуюся с ℓ и пересекающуюся с m только в тех же $3 + 2i$ точках, что и T . Поскольку $3 + 2i$ — нечетно, это означает, что кривая T' нестягиваема на ∂V и изотопна параллели ℓ , которая, в свою очередь, изотопна узлу K . Таким образом, узел T лежит в множестве $S_1(K)$.

Пусть теперь Z — это какая-нибудь лежащая на торе ∂V обмотка узла K , абсолютное значение наклона которой равно $\frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|}$ для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}, i \geq 0$. Ясно, что на торе ∂V найдется такая обмотка S узла K , что ее абсолютное значение наклона равно $(3 + 2i)/2$, а $|j|$ -кратное скручивание Дена тора ∂V по меридиану m переводит обмотку S в обмотку S_D , изотопную обмотке Z . Заметим, что параллель ℓ при таком скручивании переходит в кривую ℓ_D , тоже изотопную узлу K . Не умаляя общности можно считать, что лента $b(I \times I)$ не пересекается с окрестностью меридиана m , в которой проводится скручивание, а значит, вдоль этой ленты можно перестроить и обмотку S_D . Легко заметить, что результатом такой перестройки будет кривая ℓ_D , изотопная узлу K . Следовательно, узел S_D лежит в множестве $S_1(K)$, а так как обмотка S_D изотопна обмотке Z , то и Z лежит в $S_1(K)$. Тем самым мы показали, что множество $S_1(K)$ содержит все те обмотки узла K , у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{ \frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|} \mid i, j \in \mathbb{Z}; i \geq 0 \right\}$. Теорема доказана. \square

Теорема 5. *Следующие множества связны по отношению к вложенным перестройкам и множеству \mathcal{K} :*

- (1) множество нетривиальных узлов,
- (2) любое коконечное подмножество в множестве всех узлов,
- (3) множество составных узлов,
- (4) множество альтернированных узлов,
- (5) множество торических узлов⁵ (включая тривиальный узел),
- (6) множество итерированных торических узлов (включая тривиальный узел),
- (7) множество всех узлов, содержащих произвольный заданный узел в качестве слагаемого (включая заданный узел).

Доказательство п. (7) теоремы 5. Пусть узел Z в S^3 является связной суммой узлов K и K_0 . Это значит, что в S^3 найдется такой замкнутый

⁵Определение см. в [37].

шар B , что пара $(B, B \cap Z)$ — одниточный тэнгл, заузленный в узел K . Тогда при факторизации по шару B узел Z переходит в узел K_0 . Из связности графа Γ_k следует, что для узла K_0 найдется набор лент, перестройки по которым переводят его в тривиальный. При этом можно подобрать ленты таким образом, чтобы ни одна из них не содержала точку, отвечающую шару B . Отсюда следует, что для узла Z найдется набор лент, не пересекающих B , последовательные перестройки по которым переведут узел Z в узел K . Кроме того, из теоремы Шуберта [38] о единственности разложения узла на простые составляющие следует, что каждый узел, отвечающий вершине из пути от Z до K , либо объемлемо изотопен узлу K , либо содержит K в качестве слагаемого. Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

Доказательство п. (2) теоремы 5. Пусть X — произвольное конечное множество узлов. Заметим, что множество $S_1(U)$, где U — тривиальный узел, бесконечно (к примеру, потому что в $S_1(U)$ входят все двухниточные обмотки всех нетривиальных узлов, см. также [43]). Следовательно, в $S_1(U)$ найдется такой узел K , что множество $[K]$, состоящее из узла K и всех узлов, содержащих K в качестве слагаемого, не пересекает множества X . В силу доказанного выше п. (7) $[K]$ связно. Кроме того, пользуясь техникой из доказательства того же п. (7), несложно заметить, что (поскольку $K \in S_1(U)$) для произвольного узла Z существует вложенная перестройка, переводящая Z в узел, являющийся связной суммой узлов Z и K . Отсюда следует, что любое множество узлов, содержащее $[K]$, связно. В частности, связно и дополнение $\mathcal{K} \setminus X$, где \mathcal{K} — множество всех узлов. Это доказывает искомое утверждение. \square

Доказательство п. (1) теоремы 5. Прямо следует из доказанного выше пункта (2). \square

Доказательство п. (3) теоремы 5. В силу доказанного выше пункта (7) для любого узла K множество $[K]$ (состоящее из узла K и всех узлов, содержащих K в качестве слагаемого) связно. Отсюда следует требуемое, поскольку для любых двух (в интересующем нас в настоящий момент случае — составных) узлов A и B множества $[A]$ и $[B]$ пересекаются. \square

Доказательство п. (4) теоремы 5. Ясно, что разрешение перекрестка в альтернированной диаграмме всегда даёт альтернированную диаграмму с меньшим числом перекрестков. Отсюда, учитывая, что разрешение перекрестка в диаграмме реализуется одной вложенной перестройкой, очевидным образом следует требуемое. \square

Доказательство п. (5) теоремы 5. Пусть V — незаузленный полноторий в S^3 , а T — произвольный узел, лежащий на ∂V . Минимальное количество точек пересечения простой замкнутой кривой на ∂V с меридианом, взятое по всем меридианам на ∂V , будем называть *индексом* кривой. Пусть $p := p(T)$ — индекс узла T . Если $p \leq 1$, то узел T тривиален. В случае, если $p \geq 2$, зафиксируем на ∂V меридиан m , пересекающий T ровно в p точках. Обозначим через J любую из дуг, на которые точки пересечения узла T с меридианом m делят m . Пусть $b: I \times I \rightarrow \partial V$ такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\} \times I) = J$ и

$$b(I \times \{0\}) \cup b(I \times \{1\}) = b(I \times I) \cap T.$$

Обозначим через T_1 зацепление, полученное при перестройке узла T вдоль ленты $b(I \times I)$. Из предположения о минимальности числа точек в множестве $m \cap T$ следует, что T_1 есть узел, а не двухкомпонентное зацепление. Заметим, что узел T_1 пересекает меридиан m ровно в $p - 2$ точках, так что T_1 имеет меньший индекс, чем T .

Из проведенного рассуждения следует, что для нетривиального торического узла T типа (p, q) , где $p \geq 2$, найдется вложенная перестройка, переводящая его либо в тривиальный узел, либо в торический узел типа (p_1, q_1) с $p_1 < p$. Отсюда индукцией по p получаем требуемое. \square

Доказательство п. (6) теоремы 5. Тривиальный узел будем называть *итерированным торическим узлом степени 0*. При $n \geq 1$ назовем узел K *итерированным торическим узлом степени n* , если K является обмоткой некоторого итерированного торического узла степени $(n - 1)$.

Пусть T — произвольный итерированный торический узел степени $n \geq 1$. Тогда узел T является обмоткой некоторого итерированного торического узла T_{n-1} степени $n - 1$, и можно считать, что T расположен на крае трубчатой окрестности V узла T_{n-1} . Применяя рассуждение из доказательства пункта (5) к случаю узла T и полнотория V , мы видим, что существует последовательность вложенных перестроек (с лентами, вложенными в ∂V), переводящая узел T либо в тривиальный узел, либо в узел, объемлемо изотопный узлу T_{n-1} . Отсюда индукцией по n получаем требуемое. \square

§4. Торические вложенные перестройки

В этом параграфе пошагово описывается граф Γ_{Tor} , то есть Гордиев граф торических вложенных перестроек на множестве торических узлов (вложенная перестройка торического узла, расположенного на крае незаузленного полнотория, называется торической, если лента, вдоль которой производится перестройка, также расположена на крае этого полнотория).

4.1. Торические вложенные перестройки и тэта-кривые на торе.

Пусть V — незаузленный вложенный в S^3 полноторий. На краевом торе ∂V полнотория V имеется два выделенных изотопических класса простых нестягиваемых (на ∂V) замкнутых кривых — класс меридианов и класс параллелей. Зафиксируем какие-нибудь меридиан и параллель и ориентируем их произвольным образом. Заметим, что наклон (см. определение 23) простой нестягиваемой (на ∂V) замкнутой кривой на торе с фиксированными ориентациями меридиана и параллели не зависит от ориентации самой кривой.

Пусть T — произвольная простая нестягиваемая (на ∂V) замкнутая кривая, лежащая на ∂V , а $b: I \times I \rightarrow \partial V$ — такое вложение квадрата, что

$$b(I \times \partial I) = b(I \times I) \cap T.$$

Образ $b(I \times I)$ при таком вложении будем называть *торической лентой*, правильно расположенной по отношению к кривой T .

Пусть (T, b) и (K, c) — такие пары, что T и K — простые нестягиваемые замкнутые кривые, лежащие на торе ∂V , а $b(I \times I)$ и $c(I \times I)$ — торические ленты, правильно расположенные по отношению к T и K соответственно. Пары (T, b) и (K, c) будем называть эквивалентными, если существует такая изотопия $f_t: S^1 \rightarrow \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $f_0(S^1) = T$, $f_1(S^1) = K$, и существует такая изотопия $g_t: I \times I \rightarrow \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $g_0(I \times I) = b(I \times I)$, $g_1(I \times I) = c(I \times I)$ и для любого $t \in [0, 1]$ выполнено условие

$$g_t(I \times \partial I) = g_t(I \times I) \cap f_t(S^1).$$

Класс эквивалентности пары (T, b) будем обозначать через $[(T, b)]$.

Пусть ψ — это такое отображение, которое каждой паре (T, b) сопоставляет вложенную в тор ∂V тэта-кривую⁶ θ_γ с выделенной дугой γ и невыделенными дугами α и β , где $\alpha \cup \beta = T$ и $\gamma = b(\{1/2\} \times I)$, то есть $\psi((T, b)) = \theta_\gamma$. Две тэта-кривые θ_γ и ζ_σ с выделенными дугами γ и σ и невыделенными дугами α, β и μ, ν соответственно будем называть эквивалентными, если существует такая изотопия $h_t: S^1 \rightarrow \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $h_0(S^1) = \alpha \cup \beta$, $h_1(S^1) = \mu \cup \nu$, и существует такая изотопия $s_t: I \rightarrow \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $s_0(I) = \gamma$, $s_1(I) = \sigma$ и для любого $t \in [0, 1]$ выполнено условие

$$s_t(\partial I) = s_t(I) \cap h_t(S^1).$$

Класс эквивалентности тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ будем обозначать через $[\theta_\gamma]$.

⁶Тэта-кривой называется кусочно-гладкий граф из двух вершин и трех рёбер, гомотопный окружности с диаметром. Вложенная в ∂V тэта-кривая задаётся своими дугами, соответствующими ребрам.

Тогда классу $[(T, b)]$ можно сопоставить класс $[\psi((T, b))]$. Это корректно заданное отображение на классах пар (двум эквивалентным парам сопоставляются эквивалентные тэта-кривые, ведь в качестве изотопии для выделенной дуги подойдёт сужение исходной изотопии ленты) и биекция (если две пары переводятся в эквивалентные тэта-кривые, то изотопию выделенных дуг можно продолжить до изотопии лент, откуда следует инъективность, а в силу кусочной гладкости для любой тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ существует такая лента $b(I \times I)$, что $b(\{1/2\} \times I) = \gamma$, откуда следует сюръективность). Это отображение будем обозначать через Θ , полагая

$$\Theta([(T, b)]) = [\psi((T, b))].$$

Простая нестягиваемая замкнутая кривая T , лежащая на торе ∂V , является узлом в S^3 , поэтому определено отображение φ , сопоставляющее паре (T, b) результат вложенной перестройки узла T по ленте $b(I \times I)$, то есть некоторое зацепление $\varphi((T, b))$, также лежащее на торе ∂V .

При этом очевидно, что эквивалентные пары переводятся в изотопные⁷ зацепления, а значит, корректно определено сопоставление классу $[(T, b)]$ изотопического класса $[\varphi((T, b))]$ зацеплений на торе ∂V .

Несложный перебор показывает, что класс $[\varphi((T, b))]$ является классом неоднocomпонентных зацеплений в том и только в том случае, когда для любой тэта-кривой $\theta \in [\psi((T, b))]$ дополнение $\partial V \setminus \theta$ несвязно. В дальнейшем мы будем говорить только о тэта-кривых, чье дополнение в торе связно (назовём такие тэта-кривые невырожденными), и, соответственно, только о таких парах (T, b) , для которых зацепление $\varphi((T, b))$ однокомпонентно, то есть является простой нестягиваемой⁸ замкнутой кривой на торе ∂V .

Напомним, что

$$\varphi((T, b)) = (T \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I),$$

а значит, лента $b(I \times I)$ правильно расположена также и относительно кривой $\varphi((T, b))$. Тогда определено отображение χ , переводящее пару (T, b) в пару $(\varphi((T, b)), b)$. При этом если пары (T, b) и (K, c) эквивалентны, то эквивалентны и пары $\chi(T, b)$ и $\chi(K, c)$ — в качестве изотопии между кривыми $\varphi((T, b))$ и $\varphi((K, c))$ можно взять имеющуюся изотопию между кривыми T и K и доопределить её на соответствующих отрезках имеющейся изотопией между лентами $b(I \times I)$ и $c(I \times I)$ (по тому же принципу строится

⁷Здесь и далее в этом параграфе под изотопией зацеплений подразумевается изотопия на торе ∂V , а не в S^3 , если не оговорено обратное.

⁸Если бы кривая $\varphi((T, b))$ была стягиваема, то дополнение $\partial V \setminus \varphi((T, b))$ было бы несвязным, что невозможно, поскольку $\varphi((T, b))$ однокомпонентно, противоречие.

и новая изотопия между лентами). Тогда классу $[(T, b)]$ можно сопоставить класс $[\chi((T, b))]$ и это корректно задаёт отображение на классах пар. Будем обозначать получившееся отображение через Ω , полагая

$$\Omega([(T, b)]) = [\chi((T, b))].$$

Отображение Ω является инволюцией на множестве классов пар, так как (по определению φ) верно равенство

$$\chi(\chi((T, b))) = (T, b).$$

Заметим, что композиция $\Theta \circ \Omega \circ \Theta^{-1}$ является инволюцией на множестве классов тэта-кривых с выделенной дугой. Преобразование, соответствующее этой композиции, называется *флип-преобразованием тэта-кривой на торе* (см. рис. 10).

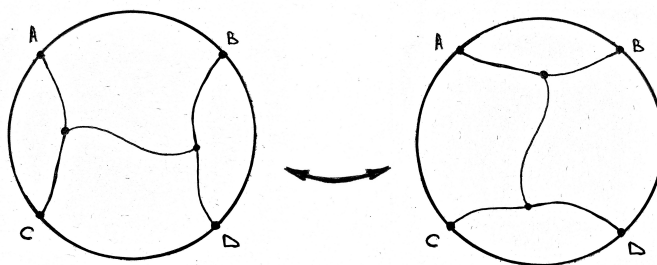


Рис. 10. Флип-преобразование.

Итогом этого раздела является сведение задачи преобразования торических узлов с помощью вложенных перестроек вдоль ленты, лежащей на торе, к задаче преобразования тэта-кривых с выделенной дугой на торе с помощью флип-преобразований.

4.2. Флип-преобразования и триангуляция Фарей. В работах [7, 28] описана связь флип-преобразований тэта-кривых на торе с идеальной⁹ триангуляцией Фарей гиперболической плоскости. В настоящем разделе мы приведём некоторые конструкции и результаты этих работ, используемые в дальнейших рассуждениях.

Пусть \mathbb{H}^2 — гиперболическая плоскость. Будем работать с моделью гиперболической плоскости в верхней полуплоскости, то есть на множестве $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Эта полуплоскость ограничена окружностью $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Пусть \mathbb{F} — такая идеальная триангуляция плоскости

⁹Под идеальной триангуляцией подразумевается разбиение на идеальные треугольники.

\mathbb{H}^2 , вершинами которой являются точки множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$, а две вершины a/b и c/d соединены ребром тогда и только тогда, когда для них выполнено равенство $|ad - bc| = 1$ (под ребрами подразумеваются геодезические в \mathbb{H}^2). В дальнейшем нам понадобится другое представление плоскости и триангуляции, а именно изображённый на рис. 11 образ плоскости \mathbb{H}^2 и триангуляции \mathbb{F} при отображении $z \rightarrow (z - i)/(z + i)$.

Напомним, что любой простой нестягиваемой замкнутой кривой на торе ∂V можно сопоставить её наклон, то есть некоторый элемент p/q множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$. Это сопоставление задаёт биекцию между множеством классов изотопности простых нестягиваемых замкнутых кривых на торе ∂V и множеством вершин триангуляции \mathbb{F} .

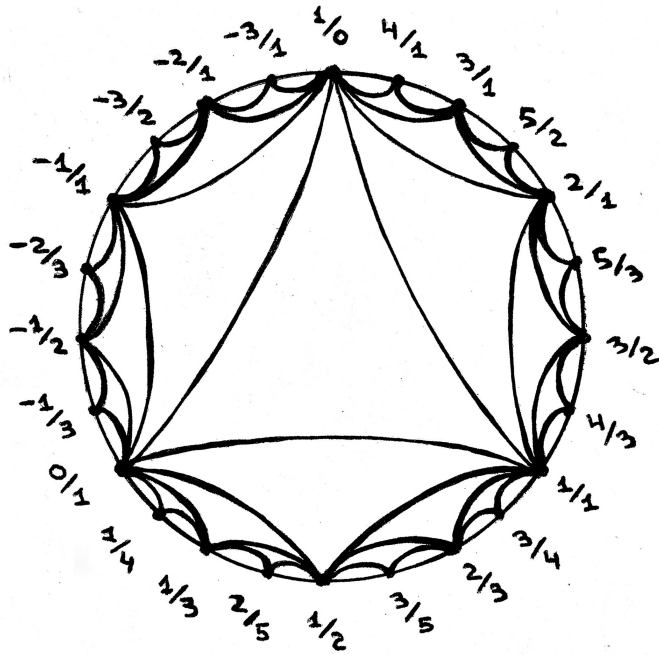


Рис. 11. Триангуляция Фарей гиперболической плоскости.

При этом невырожденной тэта-кривой на ∂V с дугами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ можно сопоставить тройку наклонов $(p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3)$ содержащихся в ней кривых $\theta_1 \cup \theta_2, \theta_2 \cup \theta_3$ и $\theta_1 \cup \theta_3$ соответственно. Известно (см. [28]), что любая такая тройка наклонов является тройкой вершин некоторого треугольника триангуляции \mathbb{F} , а двум изотопным тэта-кривым сопоставляется одна

и та же тройка. Также из [28] известно, что такое сопоставление задаёт биекцию между множеством классов изотопности невырожденных тэта-кривых на ∂V и множеством треугольников триангуляции \mathbb{F} .

Для того, чтобы произвести флип-преобразование тэта-кривой, необходимо выбрать ту дугу, которую нужно преобразовать, то есть для любой тэта-кривой на торе ∂V существует ровно три флип-преобразования, каждое из которых преобразует одну из дуг этой тэта-кривой. Под флип-преобразованием тэта-кривой с выделенной дугой будем понимать флип-преобразование, преобразующее выделенную дугу. Флип-преобразование тэта-кривых с выделенной дугой задаёт инволюцию на множестве классов эквивалентности тэта-кривых с выделенной дугой.

Пусть флип-преобразование тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ переводит её в некоторую тэта-кривую ζ_σ с выделенной дугой σ . Пусть α и β — две невыделенные дуги тэта-кривой θ_γ , а μ и ν — две невыделенные дуги тэта-кривой ζ_σ . Заметим, что любое флип-преобразование можно производить локально (изотопией переведём преобразуемую дугу в достаточно малый диск на торе), откуда следует, что неупорядоченная пара наклонов, соответствующих кривым $\alpha \cup \gamma$ и $\beta \cup \gamma$, совпадает с неупорядоченной парой наклонов, соответствующих кривым $\mu \cup \sigma$ и $\nu \cup \sigma$. Это означает, что изотопические классы тэта-кривых θ_γ и ζ_σ соответствуют треугольникам триангуляции \mathbb{F} , имеющим общее ребро.

Пусть λ — это отображение, переводящее тэта-кривую θ_γ с выделенной дугой γ и невыделенными дугами α и β в пару $((V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\gamma}, V_{\beta\gamma}), V_{\alpha\gamma}V_{\beta\gamma})$, состоящую из треугольника триангуляции \mathbb{F} с вершинами $V_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\gamma}$ и $V_{\beta\gamma}$ (вершины соответствуют наклонам кривых, образованных парами дуг тэта-кривой), и выделенного ребра этого треугольника. Заметим, что эквивалентные (в смысле предыдущего раздела) тэта-кривые с выделенной дугой под действием отображения λ переходят в одну и ту же пару из треугольника и ребра, что даёт отображение на классах эквивалентности, которое мы будем обозначать через Υ , полагая

$$\Upsilon([\theta_\gamma]) = \lambda(\theta_\gamma).$$

Из биективности указанного выше отображения из множества классов изотопности тэта-кривых в множество треугольников триангуляции \mathbb{F} прямо следует биективность отображения Υ .

Композиция $\Upsilon \circ \Theta \circ \Omega \circ \Theta^{-1} \circ \Upsilon^{-1}$ является инволюцией на множестве треугольников триангуляции \mathbb{F} с выделенным ребром.

Итогом этого раздела является сведение задачи преобразования тэта-кривых с выделенной дугой с помощью флип-преобразований к задаче

преобразования треугольников триангуляции Фарея с выделенным ребром.

4.3. Граф вложенных перестроек вдоль торических лент. Пусть (T, b) — пара, состоящая из простой нестягиваемой замкнутой кривой T , лежащей на торе ∂V , и торической ленты $b(I \times I)$, правильно расположенной по отношению к кривой T . Из построений следует, что вершина треугольника из пары $\Upsilon(\Theta([(T, b)]))$, противоположная выделенному ребру, имеет значение (соответствующий ей элемент множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$), равное наклону кривой T .

Пусть K — кривая из пары $\chi((T, b))$, то есть результат вложенной перестройки кривой T по ленте b . Наклон кривой K равен значению в той вершине треугольника $\Upsilon(\Theta(\Omega([(T, b)])))$, которая противоположна выделенному ребру (тому же самому, что и у треугольника $\Upsilon(\Theta([(T, b)]))$). То есть две простые нестягиваемые замкнутые кривые на торе ∂V связаны вложенной перестройкой вдоль торической ленты тогда и только тогда, когда для двух вершин триангуляции Фарея, соответствующих наклонам этих кривых, существует два треугольника этой триангуляции с общим ребром, каждый из которых содержит по одной из этих двух вершин в качестве вершины, противоположной общему ребру. Это соображение позволяет явно представить граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин триангуляции \mathbb{F} , а две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда кривые, соответствующие этим вершинам, связаны вложенной перестройкой вдоль торической ленты. Будем обозначать этот граф через Γ_τ .

Приведём некоторые известные вспомогательные конструкции, которые помогут показать, что граф Γ_τ является лесом.

Добавим к множеству рациональных чисел со стандартным порядком элементы $-1/0$ и $1/0$ в качестве наименьшего и наибольшего элементов соответственно и обозначим полученное упорядоченное множество через Q . Везде далее при работе с рациональными числами из множества Q будем считать, что выбраны несократимые представители. Тогда упорядоченный набор $[-1/0, 0/1, 1/1, 1/0]$ элементов множества Q будем называть *набором 1-го уровня*, а *набором k -го уровня* — упорядоченный набор элементов множества Q , который состоит из

- всех элементов набора $(k - 1)$ -го уровня,
- всех медиант соседних элементов набора $(k - 1)$ -го уровня,

где медиантой пары $a/b, c/d \in Q$ называется элемент $(a + c)/(b + d) \in Q$. Например, набор 2-го уровня это

$$[-1/0, -1/1, 0/1, 1/2, 1/1, 2/1, 1/0].$$

Хорошо известно, что любое рациональное число, содержится в наборе k -го уровня для некоторого натурального числа k . При этом если для $a/b, c/d \in Q$ выполнено неравенство $a/b < c/d$, то выполнено и неравенство

$$a/b < (a + c)/(b + d) < c/d.$$

Отсюда следует, что если два элемента являются соседями в наборе $(k + 1)$ -го уровня, то один из них является элементом набора k -го уровня, а другой — не является. Легко видеть, что любому элементу p/q из множества Q соответствует некоторая вершина $[p/q]$ триангуляции \mathbb{F} (рациональному числу — вершина с соответствующим наклоном, а элементам $-1/0$ и $1/0$ — вершина $1/0$). Если для вершины a/b существует элемент набора k -го уровня $p/q \in Q$, для которого $[p/q] = a/b$, то будем называть вершину a/b *вершиной k -го уровня*, а множество всех вершин k -го уровня будем обозначать через V_k . Если для $a/b, c/d \in Q$ выполнено равенство $|ad - bc| = 1$, то тройка $([a/b], [(a + c)/(b + d)], [c/d])$ является тройкой вершин некоторого треугольника триангуляции \mathbb{F} .

Лемма 5. *Граф Γ_τ является лесом из трех деревьев.*

Доказательство. Проведём индукцию по подграфам γ_k графа Γ_τ , где γ_k — подграф, порожденный множеством вершин V_k . Докажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ подграф γ_k является лесом из трех деревьев.

База. Подграф γ_1 состоит из вершин $0/1, 1/1$ и $1/0$ и не имеет ни одного ребра. Подграф γ_2 состоит из вершин $-1/1, 0/1, 1/2, 1/1, 2/1$ и $1/0$ и ребер $(1/0, 1/2), (1/1, -1/1)$ и $(0/1, 2/1)$.

Шаг. Пусть подграф γ_k , где $k > 1$, является лесом из трех деревьев. Пусть p/q — такая вершина триангуляции \mathbb{F} , что $p/q \in V_{k+1} \setminus V_k$. Это условие означает, что вершина p/q не совпадает с вершиной $1/0$. Тогда у элемента¹⁰ p/q в наборе $(k + 1)$ -го уровня имеется два соседа — элементы a/b и c/d множества Q . Будем считать, что $a/b < c/d$. Из определения наборов и приведённых выше свойств медиант следует, что элемент p/q является медиантой элементов a/b и c/d . При этом элементы a/b и c/d являются соседними элементами набора k -го уровня, а значит, не умаляя общности, элемент a/b является элементом $(k - 1)$ -го уровня, а элемент c/d — не является. Тогда у элемента a/b в наборе $(k - 1)$ -го уровня есть такой соседний элемент e/f , что элемент c/d является медиантой элементов a/b и e/f . Заметим, что вершины $[a/b]$ и $[e/f]$ не могут одновременно совпадать с вершиной $1/0$. Это означает, что элементам $a/b, p/q, c/d$ и e/f

¹⁰Если вершина не совпадает с вершиной $1/0$, то ей отвечает ровно один элемент множества Q . Далее оба этих объекта будем обозначать через p/q , при необходимости уточняя, вершина это или элемент множества Q .

набора $(k + 1)$ -го уровня соответствуют четыре различные вершины триангуляции \mathbb{F} . Из свойств медиант следует, что тройки $([a/b], [p/q], [c/d])$ и $([a/b], [c/d], [e/f])$ соответствуют двум треугольникам с общим ребром, то есть вершины p/q и $[e/f]$ соединены ребром в графе γ_{k+1} .

Обозначим через Δ треугольник с вершинами $([a/b], [p/q], [c/d])$. Пусть $(m/n, t/s, p/q)$ — тройка вершин некоторого треугольника триангуляции \mathbb{F} . Заметим, что вершины $[a/b]$ и $[c/d]$ делят окружность $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на две замкнутые дуги A и B , где $\partial A = \partial B = \{[a/b], [c/d]\}$. Не умаляя общности предположим, что вершина $p/q \in A$. Тогда вершины $m/n, t/s$ принадлежат A , поскольку в противном случае ребра треугольников Δ и $(m/n, t/s, p/q)$ пересекались бы. Очевидно, что множество вершин V_{k+1} разбивает окружность $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на такие замкнутые дуги, что если v/w и y/z — два произвольных соседних элемента набора $(k + 1)$ -го уровня, то вершины $[v/w]$ и $[y/z]$ соединены дугой. Известно, что a/b и p/q — соседние элементы набора $(k + 1)$ -го уровня, то есть вершины $[a/b]$ и p/q соединены такой дугой в окружности $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, на которой нет других вершин из V_{k+1} . Аналогичное соображение верно и для элементов c/d и p/q . Заметим, что дуга A является объединением дуг, полученных для пар $([a/b], [p/q])$ и $([c/d], [p/q])$. Тогда вершины m/n и t/s содержатся в множестве $\{[a/b], [c/d]\}$, то есть треугольник $(m/n, t/s, p/q)$ совпадает с треугольником Δ .

Это означает, что валентность вершины p/q в графе γ_{k+1} равна единице, а единственное ребро, инцидентное вершине p/q , соединяет её с вершиной подграфа γ_k . То есть подграф, порожденный множеством вершин $V_k \cup p/q$ всё ещё остается лесом из трех деревьев. Из произвольности выбора p/q следует требуемое. \square

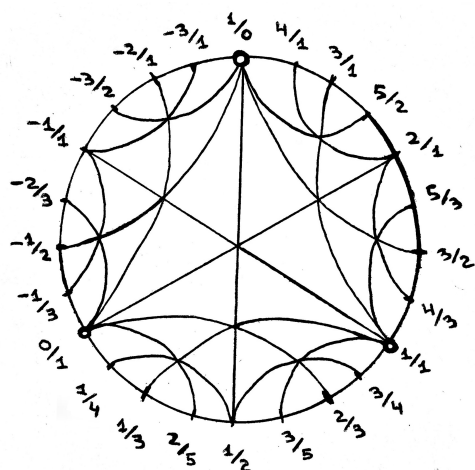
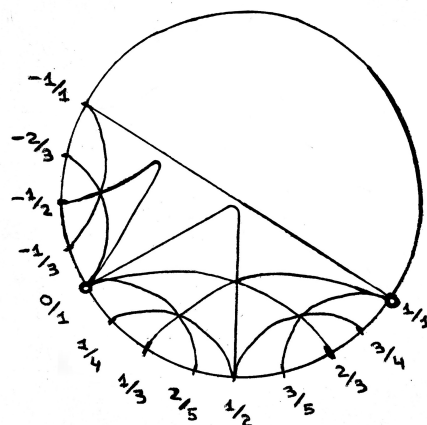
Из предыдущих рассуждений очевидно (см. рис. 12):

Лемма 6. *Граф Γ_τ состоит из трех изоморфных деревьев; каждая из вершин этого графа имеет бесконечную валентность.*

Замечание 9. Известно, что кривые с наклонами p/q и q/p представляют один и тот же узел. Как нетрудно видеть, из построения следует, что вершины a/b и c/d графа Γ_τ соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины b/a и c/d .

Обозначим через Γ_h граф, получающийся при отождествлении вершин во всех парах вида $(a/b, b/a)$ в графе Γ_τ . Пусть M — множество таких вершин p/q графа Γ_τ , что $|p| > |q|$.

Лемма 7. *Граф Γ_h получается из графа Γ_τ удалением всех вершин множества M и добавлением рёбер, соединяющих пары вершин $(0/1, -1/2)$ и $(0/1, 1/2)$.*

Рис. 12. Граф Γ_τ .Рис. 13. Граф Γ_h .

Доказательство. Будем называть ребро графа Γ_τ внутренним, если обе его вершины лежат в множестве M и внешним, если ровно одна из его вершин лежит в множестве M . Из замечания 9 следует, что граф Γ_h получается из графа Γ_τ путём удаления всех вершин множества M , которые не инцидентны никакому внешнему ребру, и отождествления всех пар вершин вида $(a/b, b/a)$. Это тоже самое, что удалить из графа Γ_τ все вершины множества M и для каждого внешнего ребра $(a/b, c/d)$ графа Γ_τ , вершина a/b которого лежит в множестве M , добавить в полученный после удаления граф ребро $(b/a, c/d)$. Покажем, что в графе Γ_τ только четыре внешних ребра: $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$. Очевидно, что эти четыре ребра являются внешними. Пусть найдётся ребро $(a/b, c/d)$ графа Γ_τ , вершина a/b которого лежит в множестве M , не совпадающее с ребрами $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$ и являющееся внешним. Заметим, что вершины $-1/1$, $-2/1$, $1/0$, $2/1$ и $1/1$ разбивают полуокружность окружности $\mathbb{R} \cup \infty$ на четыре дуги. Не умаляя общности будем считать, что вершина a/b лежит на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$ (также она могла бы лежать на дуге, соединяющей вершины $-1/1$ и $-2/1$, вершины $-2/1$ и $1/0$ или вершины $2/1$ и $1/1$, см. рис. 11). Если в графе Γ_τ вершина a/b соединена с вершиной c/d ребром, то найдутся такие вершины e/f и g/h , что тройки вершин $(a/b, e/f, g/h)$ и $(c/d, e/f, g/h)$ являются тройками вершин треугольников триангуляции Фарея. Заметим, что вершины e/f и g/h должны лежать на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$, так как в противном случае ребра треугольника $(a/b, e/f, g/h)$ будут пересекать ребро $(1/0, 2/1)$. Аналогичные рассуждения показывают, что и

вершина c/d должна лежать на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$, что невозможно, поскольку ребро $(a/b, c/d)$ внешнее. Таким образом только рёбра $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$ являются внешними, а из рассуждений выше известно, что после удаления всех вершин множества M из графа Γ_τ необходимо добавить ребра вида $(b/a, c/d)$ для каждого внешнего ребра $(a/b, c/d)$. Следовательно нужно добавить рёбра $(0/1, 1/2)$ и $(0/1, -1/2)$. \square

Замечание 10. Легко видеть, что граф Γ_h является лесом из двух деревьев.

Известно, что кривая с наклоном p/q представляет тривиальный узел тогда и только тогда, когда хотя бы одно число из пары $|p|, |q|$ равно единице. Множество вершин графа Γ_h , соответствующих таким кривым, будем обозначать через S . Тогда граф, который получается при отождествлении в графе Γ_h всех вершин множества S , является графом Γ_{Tor} (см. рис. 14, вершины на левой полуокружности соответствуют отрицательным рациональным числам). Из предыдущих рассуждений очевидно:

Теорема 6. *Граф Γ_{Tor} является деревом, каждая из вершин которого имеет бесконечную валентность.*

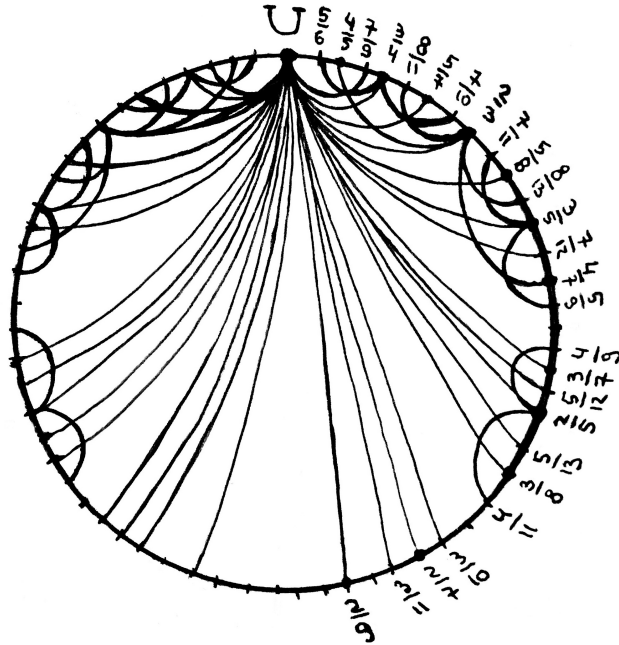


Рис. 14. Граф Γ_{Tor} .

Из описания графа Γ_{Tor} вытекает

Следствие 1. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существуют такие числа $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq n$, что выполнено равенство $u_2(T_{p,q}) = 1$, где $T_{p,q}$ — торический узел типа (p, q) . В том числе для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $u_2(T_{2n+1, 2n+3}) = 1$.*

§5. (#)-преобразования

5.1. Предварительные сведения. Прежде чем перейти к основному результату этого параграфа, приведём некоторые технические леммы. В работе [33] была доказана нижняя оценка на (#)-Гордиево расстояние для узлов в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$:

Лемма 8. *Пусть K и Z — ориентированные узлы в S^3 . Тогда выполнено неравенство*

$$d_{((\#), \mathcal{K}^\circ)}(K, Z) \geq 1/6 |\sigma(K) - \sigma(Z)|.$$

Будем обозначать (#)-Гордиеву длину ориентированного узла K относительно множества всех ориентированных узлов \mathcal{K}° через $u_{(\#)}(K)$. Лемма выше, определение Гордиевой длины и тот факт, что сигнатура тривиального узла равна нулю (см. [37]), влечёт следующий результат:

Следствие 2. *Пусть K — ориентированный узел в S^3 . Тогда выполнено неравенство*

$$u_{(\#)}(K) \geq 1/6 |\sigma(K)|.$$

В работе [37] (глава 8.E) доказаны некоторые свойства сигнатуры:

Лемма 9. *Пусть K и Z — два узла в S^3 , W — узел, являющийся связной суммой узлов K и Z , а $-K$ — зеркальное отражение узла K . Тогда выполнены равенства*

$$\sigma(W) = \sigma(K) + \sigma(Z), \quad \sigma(-K) = -\sigma(K).$$

Если Q — левосторонний, а $-Q$ — правосторонний трилистник¹¹ в S^3 , то выполнены равенства:

$$\sigma(Q) = 2, \quad \sigma(-Q) = -2.$$

¹¹Трилистник является хиральным узлом, то есть не объемлемо изотопен своему зеркальному отображению. Соответственно, можно определить два различных узла — левосторонний трилистник и правосторонний трилистник. В предыдущих рассуждениях, где шла речь о трилистнике, не имело значения, рассматривается левосторонний или правосторонний трилистник.

Лемма 10. Пусть Q и $-Q$ — произвольно ориентированные левосторонний и правосторонний трилистники. Тогда выполнены равенства

$$u_{(\#)}(Q) = 1, \quad u_{(\#)}(-Q) = 1.$$

Доказательство. На рис. 15 изображено $(\#)$ -преобразование, переводящее узел Q в тривиальный (для других ориентаций и зеркального отражения соответствующее $(\#)$ -преобразование строится аналогично). \square

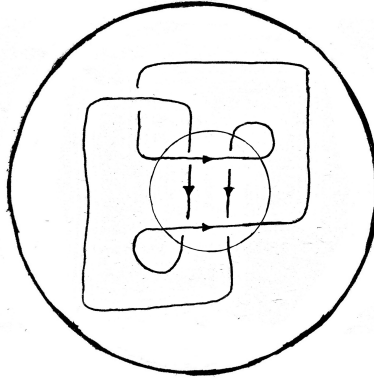


Рис. 15

5.2. Теорема о $(\#)$ -преобразованиях.

Лемма 11. Граф $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$ связан.

Доказательство. В работе [33] (лемма 3.1) доказано, что ориентированный шаблон $(\#)$ является развязывающим относительно множества \mathcal{K}° , откуда следует требуемое. \square

Следующая теорема описывает асимптотическую структуру Гордиева графа $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$ на бесконечности, а именно утверждает, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе существует не более двух компонент с бесконечным диаметром.

Теорема 7. Пусть r — произвольное натуральное число, а K и Z — два произвольных ориентированных узла, для которых выполнены условия

$$u_{(\#)}(K) \geq 4r, \quad u_{(\#)}(Z) \geq 4r, \quad |\text{sign}(\sigma(K)) - \text{sign}(\sigma(Z))| \leq 1,$$

где через $\text{sign}(z)$ обозначается знак числа $z \in \mathbb{Z}$. Тогда в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$ существует путь, соединяющий вершины K и Z и не пересекающий шара $B_{(r-1, (\#), \mathcal{K}^\circ)}(U)$.

Доказательство теоремы 7. Будем обозначать шар $B_{(r-1,(\#),\mathcal{K}^\circ)}(U)$ через $B_{r-1}(U)$. Пусть K и Z — ориентированные узлы, удовлетворяющие условиям теоремы. Из условия

$$|\text{sign}(\sigma(K)) - \text{sign}(\sigma(Z))| \leq 1,$$

следует, что числа $\sigma(K)$ и $\sigma(Z)$ либо одновременно неотрицательны, либо одновременно неположительны. Пусть сначала оба эти числа неотрицательны. Пусть Q — это произвольно ориентированный левосторонний трилистник в S^3 , а Q^n — это узел, являющийся связной суммой n копий ориентированного узла Q . Из леммы 8 и леммы 9 следует, что

$$u_{(\#)}(Q^n) \geq n/3.$$

Лемма 12. Пусть K_1, K_2 и W — произвольные ориентированные узлы в S^3 , а W_i — связная сумма узлов W и K_i , где $i \in \{1, 2\}$. Тогда, если в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$ вершины K_1 и K_2 смежны, то и вершины W_1 и W_2 смежны.

Доказательство. Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 4, достаточно вместо вложенной перестройки рассматривать $(\#)$ -преобразование. \square

Замечание 11. Можно провести рассуждение, аналогичное рассуждению из замечания 8. Пусть W — произвольный ориентированный узел, γ — некоторый путь в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$, $\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ — множество вершин пути γ и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — множество ребер пути γ , причем ребро e_i инцидентно вершинам V_i и V_{i-1} , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Последовательное применение леммы 12 к каждому ребру пути γ позволяет получить новый путь $\gamma(W)$ с множеством вершин $\{W_0, W_2, \dots, W_n\}$ и множеством ребер $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, где вершина W_i соответствует связной сумме узлов W и V_i для $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, а ребро f_j инцидентно вершинам W_j и W_{j-1} для $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть τ — путь в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$, соединяющий тривиальный узел и узел K (такой путь существует в силу связности графа $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$). Пусть $\{U = K_0, K_1, \dots, K_{p-1}, K_p = K\}$ — множество вершин пути τ . Обозначим через m число

$$m := 3r + \max_{0 \leq i \leq p} |\sigma(K_i)|.$$

Из замечания 11 следует, что существует путь $\tau(Q^m)$, соединяющий узел Q^m и узел K_{Q^m} , который является связной суммой узлов K и Q^m . Из построения следует, что любой узел V , отвечающий вершине пути $\tau(Q^m)$, является связной суммой узлов Q^m и K_i для некоторого $0 \leq i \leq p$. Пользуясь этим фактом и леммами 8 и 9 получим оценку:

$$u_{(\#)}(V) \geq \frac{|\sigma(Q^m) + \sigma(K_i)|}{6} \geq \frac{|6r + 2(\max_{0 \leq j \leq p} |\sigma(K_j)|) + K_i|}{6} \geq r$$

Это значит, что множество вершин пути $\tau(Q^m)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

В графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$ существует ребро, соединяющее узел Q и тривиальный узел (в силу леммы 10). Из леммы 12, применённой к этому ребру и узлу Q , следует, что существует ребро, соединяющее узел Q и узел Q^2 . Продолжим применять лемму 12 к получающимся ребрам и узлу Q , пока не будет построен путь β с множеством вершин $\{U = Q^0, Q^1, \dots, Q^m\}$ и множеством рёбер $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$, где ребро h_n инцидентно вершинам Q^n и Q^{n-1} для $n \in \{1, 2, \dots, m\}$. Путь β соединяет тривиальный узел и узел Q^m .

Из замечания 11 следует, что существует путь $\beta(K)$, соединяющий узлы K и K_{Q^m} . Заметим, что любой узел отвечающий вершине пути $\beta(K)$, является связной суммой узлов K и Q^n , где $n \in \{0, 1, \dots, m\}$ (будем обозначать связную сумму узлов K и Q^n через K_{Q^n}). Если $n \geq 3r$, то лемма 8, лемма 9 и неотрицательность числа $\sigma(K)$ влекут неравенство $u_{(\#)}(K_{Q^n}) \geq r$. Если $n < 3r$, то для $(\#)$ -Гордиева расстояния между узлами K и K_{Q^n} выполнено неравенство

$$d_{((\#), \mathcal{K}^\circ)}(K, K_{Q^n}) \leq n,$$

так как подпуть пути $\beta(K)$ соединяющий вершины K и K_{Q^n} имеет длину n по построению. По условию теоремы $u_{(\#)}(K) \geq 4r$. Предположим, что выполнено неравенство $u_{(\#)}(K_{Q^n}) < r$. Из определения $(\#)$ -Гордиевой длины сразу следует неравенство

$$4r \leq u_{(\#)}(K) \leq u_{(\#)}(K_{Q^n}) + d_{((\#), \mathcal{K}^\circ)}(K, K_{Q^n}) < r + n$$

Противоречие. Это означает, что для любого узла S , отвечающего вершине пути $\beta(K)$, верна оценка $u_{(\#)}(S) \geq r$, то есть множество вершин пути $\beta(K)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

При конкатенации путей $\tau(Q^m)$ и $\beta(K)$ получается путь α_1 , соединяющий узлы K и Q^m . Аналогичным способом можно построить путь α_2 , соединяющий узел Z и узел Q^l , где $l \geq 3r$. Повторяя конструкцию, используемую для построения пути β , можно построить путь α_3 , соединяющий узлы Q^m и Q^l , причём множество вершин пути α_3 будет состоять из узлов вида Q^k , где $k \geq 3r$, а следовательно не будет пересекаться с множеством $B_{r-1}(U)$. Путь, являющийся конкатенацией путей α_1, α_3 и α_2 , соединяет узлы K и Z , причём, в силу построений, множество вершин этого пути не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$, что и требовалось.

Если числа $\sigma(K)$ и $\sigma(Z)$ неположительны, то нужно провести все изложенные выше рассуждения, заменив узел Q на узел $-Q$. \square

Замечание 12. Предположим, что для любого натурального числа n существует такой ориентированный узел $K(n)$, для которого выполнены условия $u_{(\#)}(K(n)) = n$ и $\sigma(K(n)) = 0$. Из верности этого предположения сразу следовало бы усиление предыдущей теоремы, а именно, что для произвольного натурального числа r и любых двух ориентированных узлов K и Z , для которых выполнены условия

$$u_{(\#)}(K) \geq 4r, u_{(\#)}(Z) \geq 4r,$$

существует такой путь в графе $G((\#), \mathcal{K}^\circ)$, соединяющий вершины K и Z , множество вершин которого не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

§6. $\mathcal{O}(n)$ -преобразования

В данном параграфе исследованы свойства Гордиевых графов определенных ранее $\mathcal{O}(n)$ -преобразований, введён новый тип преобразований узлов и изучено одно из преобразований такого типа, являющееся «предельным» случаем $\mathcal{O}(n)$ -преобразований и названное $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразованием.

Лемма 13. *Если зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью однократного применения $\mathcal{O}(n)$ -преобразования, где n — неотрицательное целое число, то зацепление L_2 получается из зацепления L_1 и с помощью однократного применения $\mathcal{O}(n+1)$ -преобразования, иными словами, граф $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$ является подграфом графа $G(\mathcal{O}(n+1), \mathcal{K})$.*

Доказательство. На рис. 16 изображено $\mathcal{O}(n+1)$ -преобразование, которое реализует заданное $\mathcal{O}(n)$ -преобразование. \square

Следствие 3. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ граф $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$ связан.*

Доказательство. Из леммы выше следует, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ граф Γ_k является подграфом графа $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$, причём множества вершин этих графов совпадают. По теореме 1 граф Γ_k связан, откуда следует требуемое. \square

Лемма 14. *Для $\mathcal{O}(1)$ -Гордиевой длины произвольного узла K выполнено неравенство*

$$u_{(\mathcal{O}(1), \mathcal{K})}(K) \leq \min(u_2(K), u_{(X, \mathcal{K})}(K)).$$

Иными словами, граф $G(\mathcal{O}(1), \mathcal{K})$ содержит графы Γ_k и $G(X, \mathcal{K})$ в качестве подграфов.

Доказательство. Несложно заметить, что X -преобразование может быть реализовано с помощью одного $\mathcal{O}(1)$ -преобразования. Из возможности такой реализации и леммы 13 следует, что выполняется требуемое неравенство. \square

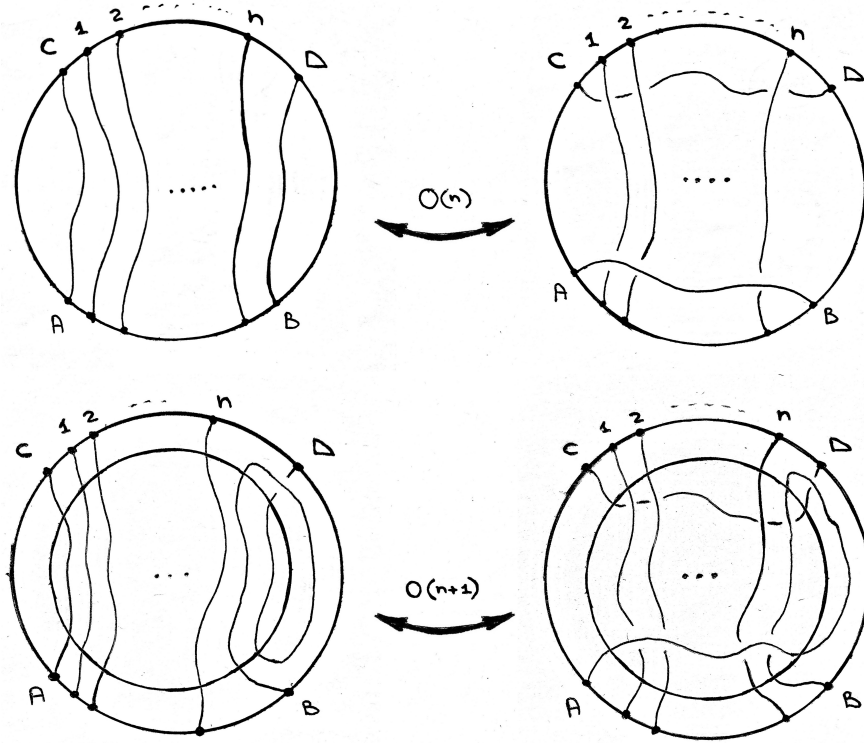


Рис. 16

Замечание 13. Для узла 7_5 в обозначениях Рольфсена верно, что

- $u_{(\mathcal{O}(1), \mathcal{K})}(7_5) = 1$ (см. рис. 17),
- $u_2(7_5) = 2$ (см. [15]),
- $u_{(X, \mathcal{K})}(7_5) = 2$ (см. [23]).

Отсюда следует, что граф $G(\mathcal{O}(1), \mathcal{K})$ не совпадает с объединением подграфов, соответствующих графам Γ_k и $G(X, \mathcal{K})$ (см. лемму 14). Объединение этих подграфов будем обозначать через $G(X + H(2), \mathcal{K})$. Расстояние между узлами K и Z в графе $G(X + H(2), \mathcal{K})$ будем обозначать через $d_{(X, H(2))}(K, Z)$.

Замечание 14. Пусть δ — шаблон локального преобразования, состоящий из двух тривиальных n -ниточных тэнглов (n -ниточный тэнгл называется тривиальным, если существует изотопия шара, переводящая нити тэнгла в параллельные отрезки). Доказательство теоремы 4 из работы [9] обобщается на любой шаблон, состоящий из двух тривиальных n -ниточных тэнглов, следовательно для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство

$$(n - 1)d_{(\delta, \mathcal{K})}(K, Z) \geq |mg(K, 2) - mg(Z, 2)|.$$

Из замечания 14 и того факта, что шаблон X состоит из двух тривиальных двуниточных тэнглов, следует

Лемма 15. *Для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство*

$$d_{(X, \mathcal{K})}(K, Z) \geq |mg(K, 2) - mg(Z, 2)|.$$

Из замечания 14 доказательства теоремы 4 работы [9] следует

Лемма 16. *Для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство*

$$d_{(X+H(2))}(K, Z) \geq |mg(K, 2) - mg(Z, 2)|.$$

Теорема 8. *Для любого натурального числа n граф $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$ имеет бесконечный диаметр.*

Доказательство теоремы 8. Из определения $\mathcal{O}(n)$ -преобразования и леммы 16 следует, что для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство

$$d_{(\mathcal{O}(n))}(K, Z) \geq \frac{d_{(X+H(2))}(K, Z)}{n + 1} \geq \frac{|mg(K, 2) - mg(Z, 2)|}{n + 1},$$

что и влечёт бесконечность диаметра. \square

В качестве обобщения локальных преобразований можно рассмотреть следующую конструкцию:

Определение 26. *Тор-тэнглом на n нитях или n -ниточным тор-тэнглом* будем называть пару $V_A = (V, A)$, где V — произвольный незаузленный полноторий в S^3 , а A — множество из n дизъюнктивных вложенных в V дуг, таких что граничный тор ∂V полнотория V пересекается с каждой дугой в концевых точках этой дуги и только в них. Компоненты связности множества A будем называть *нитями* тор-тэнгла V_A .

Определение 27. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а V — незаузленный полноторий в S^3 . Тогда пару n -ниточных тор-тэнглов (V_A, V_C) , будем называть *шаблоном тор-преобразования*, если множество концов нитей первого тэнгла совпадает с множеством концов нитей второго тэнгла.

Определение 28. Пусть L_1 и L_2 — два зацепления в S^3 , V — незаузленный полноторий в S^3 , а $\omega = (V_A, V_C)$ — некоторый шаблон тор-преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью ω -тор-преобразования, если существуют такие зацепления L'_1 и L'_2 в S^3 , что зацепление L'_1 объемлемо изотопно зацеплению L_1 , зацепление L'_2 объемлемо изотопно зацеплению L_2 , зацепления L'_1 и L'_2 совпадают вне внутренней полнотория V и пара $((V, V \cap L'_1), (V, V \cap L'_2))$ совпадает с шаблоном ω .

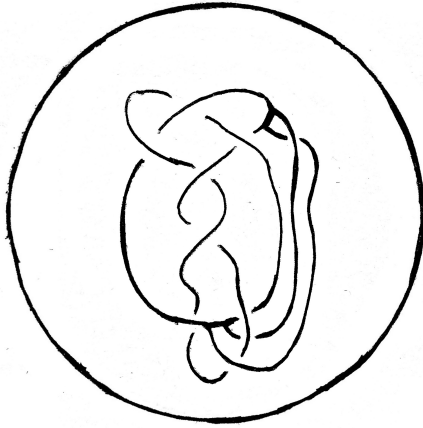
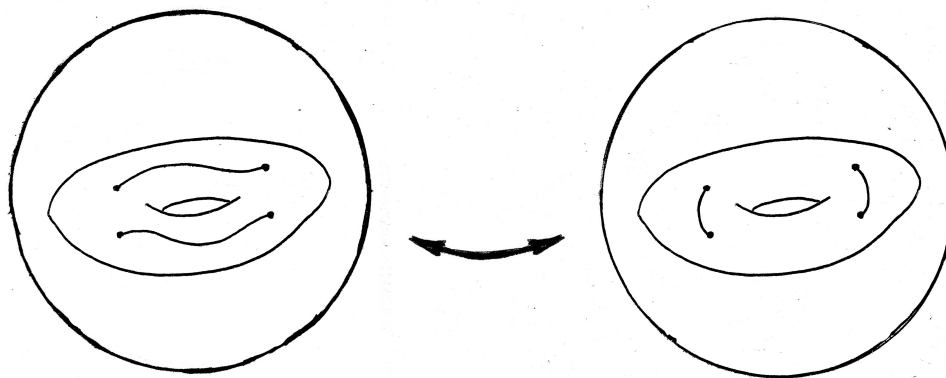


Рис. 17

Замечание 15. Для шаблона тор-преобразования ω и множества зацеплений M конструкции (ω, M) -Гордиевого графа, (ω, M) -Гордиевого расстояния, развязывающего шаблона и (ω, M) -Гордиевой длины определяются по аналогии со случаем локальных преобразований.

Определение 29. На рис. 18 приведен шаблон тор-преобразования, содержащий два 2-ниточных тор-тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через $\mathcal{O}(\infty)$, а тор-преобразование, соответствующее этому шаблону, будем называть $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразованием.

Рис. 18. $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразование.

Идея введения этого преобразования заключается в обобщении идеи $\mathcal{O}(n)$ -преобразований — $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразование можно воспринимать как вложенную перестройку по ленте, число проколов в которой не ограничено.

Теорема 9. Диаметр $(\mathcal{O}(\infty), \mathcal{K})$ -Гордиева графа равен единице.

Доказательство теоремы 9. Идея доказательства видна из примера на рис. 19. Пусть K и Z — произвольные узлы в S^3 . Как известно из [26], любой узел может быть представлен в виде замыкания Александера некоторой унарной косы. Пусть B_K в S^3 — унарная коса на n нитях, представляющая узел K , а B_Z в S^3 — унарная коса на m нитях, представляющая узел Z , и $n \geq m$ (как на рис. 19). Дополним косу B_K справа тривиальной косой и расположим замыкание Александера получившейся унарной косы B_{K+} в S^3 . Пусть γ — это дуга в S^3 , дублирующая ведущую нить косы B_{K+} (под ведущей нитью унарной косы подразумевается та её нить, которая обходит остальные параллельные друг другу нити). Концы дуги γ лежат на ведущей нити косы B_{K+} (точки B и D на рис. 19). Пусть β — это дуга в S^3 , которая идёт параллельно косе B_{K+} до того момента, пока все нити косы B_{K+} не станут параллельны друг другу, после чего дуга β вместе с нижними $m - 1$ нитями косы B_{K+} образуют косу B_Z , причём дуга β соответствует ведущей нити этой косы. Концы дуги β лежат на ведущей нити косы B_{K+} (точки A и C на рис. 19). Пусть α_{AB} и α_{CD} — дуги, лежащие на ведущей нити косы B_{K+} и соединяющие точки A, B и C, D соответственно. Дуги $\gamma, \beta, \alpha_{AB}$ и α_{CD} образуют незаузленную окружность в S^3 .

Пусть V — незаузленный полноторий, содержащий эту окружность, причём точки A, B, C и D лежат на крае ∂V . Полноторий V можно выбрать таким образом, чтобы V и дуги $\gamma, \beta, \alpha_{AB}$ и α_{CD} образовывали шаблон $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразования. Соответствующее $\mathcal{O}(\infty)$ -преобразование переведёт узел K в узел Z . \square

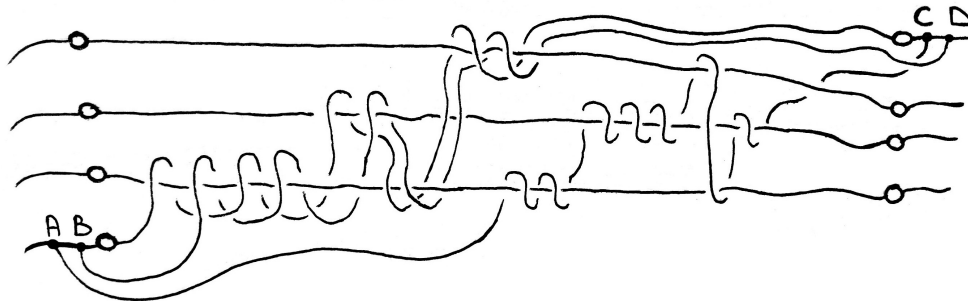


Рис. 19

Замечание 16. Теорема 8 утверждает, что для любого натурального числа n граф $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$ имеет бесконечный диаметр. Из леммы 13 следует, что с увеличением числа n количество ребер графа $G(\mathcal{O}(n), \mathcal{K})$ как минимум не уменьшается, а в «предельном графе» $G(\mathcal{O}(\infty), \mathcal{K})$ существуют все возможные ребра.

Список литературы

- [1] Abe T., Hanaki R., Higa R., *The unknotting number and band-unknotting number of a knot*, Osaka J. Math. **49** (2012), № 2, 523–550.
- [2] Abe T., Kanenobu T., *Unoriented band surgery on knots and links*, Kobe J. Math. **31** (2014), № 1-2, 21–44.
- [3] Bao Y., *$H(2)$ -unknotting operation related to 2-bridge links*, Topology Appl. **159** (2012), № 8, 2158–2167.
- [4] Bao Y., *A note on knots with $H(2)$ -unknotting number one*, Osaka J. Math. **51** (2014), № 3, 585–596.
- [5] Buck D., Ishihara K., *Coherent band pathways between knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), № 2, 1550006, 21 pp.
- [6] Buck D., Ishihara K., Rathbun M., Shimokawa K., *Band surgeries and crossing changes between fibered links*, J. Lond. Math. Soc. (2) **94** (2016), № 2, 557–582.
- [7] Fominykh E. A., *Dehn surgeries on the figure eight knot: an upper bound for complexity*, Sibirsk. Mat. Zh. **52** (2011), № 3, 680–689.

-
- [8] Hirasawa M., Uchida Y., *The Gordian complex of knots*, Knots 2000 Korea, Vol. 1 (Yongpyong). *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), № 3, 363–368.
- [9] Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K., *Unknotting operations involving trivial tangles*, *Osaka J. Math.* **27** (1990), № 3, 555–566.
- [10] Ichihara K., Jong I. D., *Cosmetic banding on knots and links. With an appendix by Hidetoshi Masai*, *Osaka J. Math.* **55** (2018), № 4, 731–745.
- [11] Ishihara K., Shimokawa K., Vazquez M., *Site-specific recombination modeled as a band surgery: applications to Xer recombination*, *Discrete and topological models in molecular biology*, Nat. Comput. Ser., Springer, Heidelberg, 2014, 387–401.
- [12] Jabuka S., Liu B., Moore A. H., *Knot graphs and Gromov hyperbolicity*, (2019), preprint arXiv:1912.03766.
- [13] Kanenobu S., Kanenobu T., *Oriented Gordian distance of two-component links with up to seven crossings*, *J. Knot Theory Ramifications* **24** (2015), № 10, 1540013, 14 pp.
- [14] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links*, *J. Knot Theory Ramifications* **19** (2010), № 12, 1535–1547.
- [15] Kanenobu T., *$H(2)$ -Gordian distance of knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), № 6, 813–835.
- [16] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links, II*, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), № 9, 1250086, 22 pp.
- [17] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links, III*, *J. Knot Theory Ramifications* **25** (2016), № 10, 1650056, 12 pp.
- [18] Kanenobu T., Miyazawa Y., *$H(2)$ -unknotting number of a knot*, *Commun. Math. Res.* **25** (2009), № 5, 433–460.
- [19] Kanenobu T., Moriuchi H., *Links which are related by a band surgery or crossing change*, *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)* **20** (2014), № 2, 467–483.
- [20] Kanenobu T., Moriuchi H., *Coherent band-Gordian distances between knots and links with up to seven crossings*, *Topology Appl.* **264** (2019), 233–250.
- [21] Kawachi A., *A survey of knot theory.*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [22] Kim P. K., Tollefson J. L., *Splitting the PL involutions of nonprime 3-manifolds*, *Michigan Math. J.* **27** (1980), № 3, 259–274.
- [23] Kirby R., *Problems in Low-Dimensional Topology*, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, Geometric Topology (Athens, GA, 1993). Providence, RI: Amer. Math. Soc., pp. 35–473, 1997.
- [24] Lickorish W. B. R., *Unknotting by adding a twisted band*, *Bull. London Math. Soc.* **18** (1986), № 6, 613–615.

-
- [25] Lidman T., Moore A. H., Vazquez M., *Distance one lens space fillings and band surgery on the trefoil knot*, *Algebr. Geom. Topol.* **19** (2019), № 5, 2439–2484.
- [26] Makanin G. S., *On an analogue of the Alexander–Markov theorem*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **53** (1989), № 1, 200–210.
- [27] Malyutin A. V., *On the question of genericity of hyperbolic knots*, *International Mathematics Research Notices* (2018), <https://doi.org/10.1093/imrn/rny220>.
- [28] Martelli Bruno., Petronio C., *Complexity of geometric three-manifolds*, *Geom. Dedicata* **108** (2004), 15–69.
- [29] McDonald C., *Band number and the double slice genus*, *New York J. Math.* **25** (2019), 964–974.
- [30] Miyazawa Y., *Gordian distance and polynomial invariants*, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), № 6, 895–907.
- [31] Moore A. H., Vazquez M., *A note on band surgery and the signature of a knot*, (2018), preprint arXiv:1806.02440.
- [32] Moore A. H., Vazquez M. H., *Recent advances on the non-coherent band surgery model for site-specific recombination*, *Topology and geometry of biopolymers*, 101–125, *Contemp. Math.*, 746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2020]
- [33] Murakami H., *Some metrics on classical knots* *Math. Ann.* **270** (1985), № 1, 35–45.
- [34] Nakamura T., Nakanishi Y., *Notes on sharp moves for knots.*, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), № 7, 1250068, 20 pp.
- [35] Nakanishi Y., Ohya Y., *The Gordian complex with pass moves is not homogeneous with respect to Conway polynomials.*, *Hiroshima Math. J.* **39** (2009), № 3, 443–450.
- [36] Ohya Y., *The C_k -Gordian complex of knots.*, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), № 1, 73–80.
- [37] Rolfsen D., *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003.
- [38] Schubert H., *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, *Sitz.ber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Nat.wiss. Kl.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1949.
- [39] Taniyama K., Yasuhara Akira., *Clasp-pass moves on knots, links and spatial graphs*, *Topology Appl.* **122** (2002), № 3, 501–529.
- [40] Taniyama K., Yasuhara A., *Local moves on spatial graphs and finite type invariants*, *Pacific J. Math.* **211** (2003), № 1, 183–200.
- [41] Torisu I., *The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), № 5, 1565–1571.

-
- [42] Zeković A., *Computation of Gordian distances and $H(2)$ -Gordian distances of knots*, Yugosl. J. Oper. Res. **25** (2015), № 1, 133–152.
- [43] Zhang K., Yang Z., *A note on the Gordian complexes of some local moves on knots*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), № 9, 1842002, 6 pp.
- [44] Zhang K., Yang Z., Lei F., *The $H(n)$ -Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), № 13, 1750088, 7 pp.