

Санкт-Петербургский государственный университет

**АЗАНГУЛОВ Искандер Фаритович**  
**Выпускная квалификационная работа**  
**Распределение флуктуации  $P$ -таблиц схемы**  
**Бернулли**  
**при соответсии  $RSK$**

Образовательная программа бакалавриат «Математика»

Направление и код: 01.03.01 «Математика»

Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:  
главный научный сотрудник,  
Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН,  
Доктор ф.-м. наук,  
Вершик Анатолий Моисеевич

Рецензент: доцент  
Академический университет  
им. Ж.И. Алферова,  
Кандидат ф.-м. наук  
Горячко Евгений Евгеньевич

Санкт-Петербург

2020 год

## Аннотация

В данной работе исследуются флуктуации случайной  $P$ -таблицы при  $RSK$ -кодировании обычной схемы Бернулли. Доказано, что нормированное распределение последнего элемента первой строки сходится к экспоненциальному распределению.

**Ключевые слова:** Алгоритм  $RSK$ , таблицы Юнга, схема Бернулли, центральная предельная теорема.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Определения</b>	<b>4</b>
2.1	Диаграммы Юнга . . . . .	4
2.2	Задача о наибольшей возрастающей подпоследовательности . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Оценка распределения последнего элемента первой строки случайной стандартной таблицы</b>	<b>6</b>
3.1	Комбинаторная лемма . . . . .	6
3.2	Верхняя оценка математического ожидания . . . . .	7
3.3	Нижняя оценка математического ожидания . . . . .	8
3.4	Асимптотика моментов . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Флуктуации первой строки при <math>RSK</math> кодировании</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Приложение А</b>	<b>13</b>

# 1 Введение

Обобщенный алгоритм  $RSK$ , введенный в работе [12], осуществляет кодирование схемы Бернулли при помощи последовательности пар таблиц Юнга одинаковой формы. При данном кодировании каждому элементу  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  бесконечномерного единичного куба  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  с мерой Бернулли  $\mu$  специального вида сопоставляется две последовательности  $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  – нумерующих и записывающих таблиц соответственно. Индуцируемые при этом кодировании меры на бесконечных таблицах Юнга, в последствии названные мерами Вершика-Керова, в точности совпадают со множеством всех эргодических центральных мер на графе Юнга (см. [12], [2], [18], [17]). В дальнейшем в работах [17] и [18] было показано, что проекция на последовательность  $\{Q_n\}$  является изоморфизмом пространств с мерой между  $([0, 1]^{\mathbb{N}}, \mu)$  и пространством бесконечных стандартных таблиц Юнга с соответствующей мере  $\mu$  мерой Вершика-Керова. В этой работе мы сосредоточимся на малоисследованном вопросе асимптотических свойств проекции на последовательность  $\{P_n\}$  поставленном в [3]. Мы рассматриваем случай, когда  $\mu$  – равномерная мера Лебега на  $[0, 1]$ .

Как было доказано А.М. Вершиком и С.В. Керовым [4], а также независимо Б. Логаном и Л. Шеппом [14], последовательность диаграмм формы  $\{P_n\}$  после естественной нормировки сходится к предельной форме. В дальнейшем Грибов А.Б. [5] доказал сформулированное А.М. Вершиком предложение, что предельная форма есть и у самих таблиц. А.М. Вершиком автору был поставлен вопрос о предельных флуктуациях содержимого клеток последовательности  $\{P_n\}$ .

Основным результатом данной работы является доказательство того, что нормированное распределение последнего элемента первой строки сходится к экспоненциальному распределению.

**Теорема.** Пусть  $l_n(x)$  равно значению последнего элемента первой строки  $P$ -таблицы  $P_n(x)$  для реализации  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  верно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(1 - l_n(x)) \leq \alpha) = e^{-\alpha}$$

Уже после получения данного результата вышел близкий по тематике препринт (см. следствие 1.2 и 1.3 в [15]) Р. Śniady, в соавторстве с Ł. Maślanka, М. Marciniak, что подчеркивает актуальность результата.

Для доказательства использован метод моментов. Для каждого момента найдено комбинаторное выражение, позволяющее свести вычисления к интегрированию некоторой предельной функции, используя подход, предложенный С.В. Керовым [11].

Идеи данной работы частично использовались в общей с Г. Овечкиным работе [1] о верхней оценке времени попадания координаты в первый столбец таблицы Юнга при  $RSK$  кодировании. В частности, с небольшими изменениями, в ней содержится параграф 3.1.

Примером применения основной теоремы данной работы является квалификационная работа Г. Овечкина [6]. Он в своей работе уточняет результат заметки [1]. Используя основную теорему этой работы, Г. Овечкин получает нижнюю оценку времени попадания координаты в первый столбец таблицы Юнга при  $RSK$  кодировании асимптотически совпадающую с верхней.

Также отметим, что величина  $l_n(x)$  играет особую роль в проблеме Улама. Данная величина является последним элементом наибольшей возрастающей подпоследовательности с наименьшим

последним элементом случайной последовательности  $x^n$  сформированной первыми  $n$  координатами  $x$ .

## 2 Определения

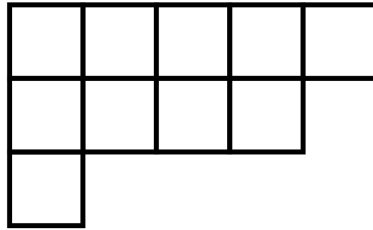
В данном параграфе мы дадим обзор асимптотических свойств таблиц Юнга, а также проясним связь между задачей о нахождении наибольшей возрастающей подпоследовательности и первой строкой таблицы Юнга.

### 2.1 Диаграммы Юнга

**Определение 1.** Разбиением натурального числа  $n$  называется последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  натуральных чисел такая, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  и  $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$  (записывается как  $\lambda \vdash n$ ).

**Определение 2.** Диаграмма Юнга – это конечный набор клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность.

Каждое разбиение  $\lambda$  естественным образом отождествляется с диаграммой Юнга, длины строк которой равны  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Например, разбиению  $(5, 4, 1)$  соответствует диаграмма



**Определение 3.** Полустандартной таблицей Юнга формы  $\lambda$  называется заполнение диаграммы  $\lambda$  вещественными числами, таким образом, что числа нестрого возрастают в каждой строчке и строго в каждом столбце. Полустандартная таблица Юнга называется стандартной, если она заполнена натуральными числами от 1 до  $|\lambda|$  без повторов.

**Определение 4.** Через  $\dim \lambda$  обозначим количество стандартных таблиц Юнга формы  $\lambda$ . Существует комбинаторный способ вычисления  $\dim \lambda$ . Для клетки  $(i, j) \in \lambda$ , находящейся на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца, крюком  $H(i, j)$  называется множество клеток  $(a, b) \in \lambda$  таких, что  $a = i$  и  $b \geq j$  или  $a \geq i$  и  $b = j$ . Длина крюка  $h(i, j)$  определяется, как количество клеток в  $H(i, j)$ .

**Теорема 1** (Формула Крюков[19]).

$$\dim \lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)}$$

Существует способ подсчета  $\dim \lambda$  через координаты Фробениуса.

**Определение 5.** Координатами Фробениуса диаграммы  $\lambda$  называется набор  $(q_1, \dots, q_d | p_1, \dots, p_d)$ , где  $p_i = \lambda_i - i$ ,  $q_i = \lambda'_i - i$ , а  $d$  – количество клеток на главной диагонали таблицы  $\lambda$ .

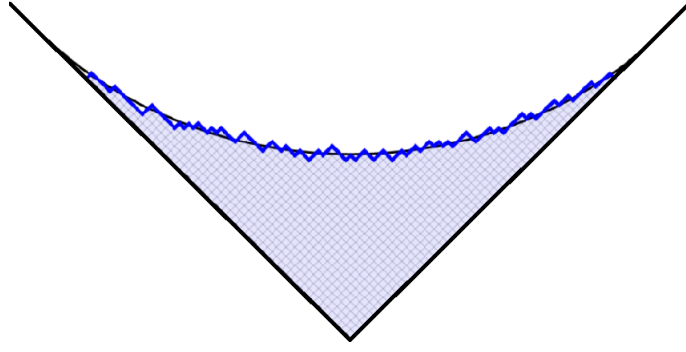


Рис. 1: Предельная кривая и типичная диаграмма Юнга.

**Теорема 2** (Формула Крюков в координатах Фробениуса [16], [19]). Пусть  $\lambda$  – диаграмма Юнга из  $n$  клеток, и её координаты Фробениуса равны  $(q_1, \dots, q_d | p_1, \dots, p_d)$ , тогда

$$\frac{\dim \lambda}{n!} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq d} (p_i - p_j)(q_i - q_j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq d} (p_i + q_j + 1) \prod_{1 \leq i \leq d} (p_i! q_i!)}$$

Ключевой комбинаторной операцией, которая понадобится нам неоднократно, является вставка Шенстеда, определенная ниже.

**Определение 6.** Пусть  $T$  – таблица Юнга, а  $x$  – произвольное вещественное число. Таблица  $T \leftarrow x$  получается из таблицы  $T$  вставкой  $x$  следующим способом.

Заведём переменную  $y$ , изначально равную  $x$ , и объявим первую строчку текущей. Вставка описывается следующим псевдокодом:

1. Если текущая строка пустая или все её элементы меньше чем  $y$ , то  $y$  приписывается в конец строки и на этом вставка завершается. Иначе алгоритм переходит к шагу 2.
2. Среди всех клеток текущей строки ищется клетка с наименьшим номером такая, что в ней находится число больше чем  $y$ . Обменивается значение  $y$  и содержимое найденной клетки. Алгоритм возвращается к шагу 1, считая текущей строкой следующей.

Алгоритм  $RSK$ [19] осуществляет биекцию между  $\mathbb{R}^n$  и множеством пар  $(P, Q)$  – таблиц размера  $n$  одинаковой формы, где  $Q$  стандартная, а  $P$  произвольная. В частности,  $S_n$  – множество перестановок, при  $RSK$ -соответствии оказывается в биекции с парами стандартных таблиц размера  $n$  одинаковой формы. Сопоставив каждой перестановке форму таблиц, полученных при  $RSK$ -соответствии, мы получаем, что мера Планшереля  $\mathcal{M}_n$  на таблицах размера  $n$ , заданная по формуле  $\mathcal{M}_n(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$ , является вероятностной.

Асимптотическое поведение диаграмм Юнга активно изучается последние 60 лет. Далее будут приведены некоторые результаты, которые будут активно использоваться.

Сопоставим каждой диаграмме Юнга  $\lambda$  кривую  $\phi_\lambda(u)$ . Сожмём диаграмму в  $\sqrt{|\lambda|}$  раз в каждом из направлений, а также повернём её на  $135^\circ$ . Ограничивающая кривая продолженная графиком модуля  $|u|$  за область определения будет искомым  $\phi_\lambda(u)$ . (см. Рис. 1)

Определим кривую  $\Omega(u)$  по следующей формуле:

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (u \sin^{-1}(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2 - u^2}) & |u|, \leq \sqrt{2}; \\ |u|, & |u| \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

**Теорема 3** (Kerov-Vershik-Logan-Shepp). Пусть  $\lambda$  – случайная диаграмма по мере  $\mathcal{M}_n$ . Тогда, для любого  $\varepsilon > 0$  верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left((1 - \varepsilon)\Omega < \phi_\lambda < (1 + \varepsilon)\Omega\right) = 1$$

Введем обозначение  $p'_i := n^{1/3}\left(\frac{p_i}{\sqrt{n}} - 2\right)$

**Теорема 4** (Baik-Deift-Johansson[8],[9]). Пусть  $\lambda$  – случайная по  $\mathcal{M}_n$  диаграмма Юнга, тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$  совместное распределение  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_k)$  стремится к распределению первых  $k$  элементов ансамбля Эйри.

Нам понадобятся два очевидных следствия из этой теоремы:

**Следствие 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(2 - \varepsilon < \frac{p_1}{\sqrt{n}} < 2 + \varepsilon) \rightarrow 1$  при  $n$  стремящемся к бесконечности.

**Следствие 2.** Для любого  $N > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(p_1 - p_2 > N) = 1$$

## 2.2 Задача о наибольшей возрастающей подпоследовательности

Следующая теорема является прямым следствием устройства алгоритма RSK и описывает первую строку  $P$ -таблицы с точки зрения задачи о наибольшей возрастающей подпоследовательности.

**Теорема 5.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $(P(x), Q(x))$  – пара таблиц, соответствующая  $x$  при RSK-соответствии. Обозначим через  $\lambda$  форму  $P(x)$ , тогда для любого  $k \leq \lambda_1$  в клетке  $(1, k)$  таблицы  $P(x)$  находится наименьшее число, являющееся концом возрастающей подпоследовательности  $x$  длины  $k$ .

## 3 Оценка распределения последнего элемента первой строки случайной стандартной таблицы

**Определение 7.** Пусть  $\sigma \in S_n$  перестановка длины  $n$ . Обозначим через  $L_n(\sigma)$  последний элемент таблицы  $P(\sigma)$ .

Обозначим через  $\sigma_n$  случайную перестановку, распределенную равномерно на  $S_n$ , а  $\mu_n$  обозначает распределение величины  $\sigma_n$ .

Целью последующих двух параграфов является нахождение предельного распределения величины  $\frac{n - L_n(\sigma)}{\sqrt{n}}$ . В теореме 6 будет доказано, что предельное распределение является экспоненциальным с интенсивностью 1.

### 3.1 Комбинаторная лемма

**Определение 8.** Пусть  $\lambda \vdash n$ , обозначим через  $gr_1(\lambda)$  диаграмму Юнга из  $n + 1$  клетки, отличающуюся от диаграммы  $\lambda$  ровно на одну клетку в первой строке.

**Лемма 1.** Математическое ожидание величины  $L_n(\sigma)$  вычисляется по формуле

$$\mathbb{E}_{\mu_n}(L_n) = n + 1 - \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_1(\lambda).$$

*Доказательство.* По определению меры  $\mu_n$

$$(n+1)! - n!E_{\mu_n}(L_n) = \sum_{\sigma} n+1 - L_n(\sigma).$$

А значит, достаточно показать, что

$$\sum_{\sigma} n+1 - L_n(\sigma) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_1(\lambda).$$

Для этого покажем, что следующие три множества находятся в биективном соответствии:

1. Пары  $(\sigma, k+1/2)$ , где  $\sigma \in S_n$ , а  $k \in [n]$  и  $k+1/2 > L_n(\sigma)$ .
2. Пары таблиц Юнга  $(P, Q)$ , где таблица  $P$  состоит в точности из элементов  $\{1, 2, \dots, n, k+1/2\}$ , причем элемент  $k+1/2$  стоит на последнем месте первой строки, а таблица  $Q$  состоит из элементов  $[n+1]$ , причем элемент  $n+1$  стоит в первой строке.
3. Пары стандартных таблиц Юнга  $(P, Q)$ , причем элемент  $n+1$  стоит в первой строке  $Q$ -таблицы.

Построим отображение из первого множества во второе. Произвольный элемент  $\sigma$  задает пару таблиц  $(P(\sigma), Q(\sigma))$ , элемент  $k+1/2$  после вставки Шенстеда обязательно встанет в конец первой строки на свободное место. Значит,  $Q$ -таблица теперь будет содержать элемент  $n+1$  в первой строке. Обратное отображение получается посредством применения обратного алгоритма  $RSK$ . Несложно видеть, что это взаимно обратные отображения.

Построим биекцию между вторым и третьим множеством. Рассмотрим пару таблиц  $(P_2, Q_2)$  из второго множества. Последний элемент первой строки  $P_2$  равен  $k+1/2$ , для некоторого  $k \in [n]$ . Обозначим, через  $P_3$  таблицу полученную применением к каждой клетке таблицы  $P_2$  функции  $f_k$ , описанной ниже:

$$f_k(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq k; \\ k+1, & \text{если } x = k+1/2; \\ x+1 & \text{если } x \geq k+1; \end{cases}$$

Тогда паре таблиц  $(P_2, Q_2)$  сопоставляется пара  $(P_3, Q_3)$ , где  $Q_3 = Q_2$ .

Каждому  $\sigma \in S_n$  соответствует ровно  $n+1 - L_n(\sigma)$  пар из первого множества. А значит мощность первого множества равна  $\sum_{\sigma} n+1 - L_n(\sigma)$ . Мощность третьего множества равна количеству пар стандартных таблиц Юнга из  $n+1$  клетки, где  $Q$ -таблица содержит элемент  $n+1$  в первой строке. Их количество равно  $\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_1(\lambda)$ .

Приравняв мощности, получим требуемое равенство.  $\square$

**Замечание 1.**  $E_{\mu_n}(L_n) = n+1 - \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda} = n+1 - E_{\mathcal{M}_n} \frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda}$ , где  $\mathcal{M}_n$  – мера Планшереля на диаграммах Юнга из  $n$  клеток.

## 3.2 Верхняя оценка математического ожидания

**Утверждение 1.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \mu_n \frac{n - L_n}{\sqrt{n}} \leq 1$$

*Доказательство.* По неравенству КБШ:

$$\sum_{\lambda \vdash n} \frac{\dim \lambda \dim gr_1(\lambda)}{n!} \leq \sqrt{\left(\sum_{\lambda \vdash n} \frac{\dim \lambda^2}{n!}\right) \left(\sum_{\lambda \vdash n} \frac{\dim gr_1(\lambda)^2}{n!}\right)} = \sqrt{(n+1) \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\dim gr_1(\lambda)^2}{(n+1)!}} \leq \sqrt{n+1}$$

Подставив в лемму 1 и сгруппировав слагаемые, получим требуемое неравенство.

### 3.3 Нижняя оценка математического ожидания

**Утверждение 2.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \mu_n \frac{n - L_n}{\sqrt{n}} \geq 1.$$

*Доказательство.* Пользуясь замечанием 1, достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \mathcal{M}_n \frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda}}{\sqrt{n}} \geq 1.$$

Пусть  $\delta > 0, N > 0$ . Обозначим через  $A_n(N, \delta)$  множество, состоящее из таких диаграмм  $\lambda$  размера  $n$ , что

$$\sup_{x \in [-\sqrt{2}+\delta, \sqrt{2}-\delta]} \left| \frac{\Omega(x) - x}{(\sqrt{2} - x)^2} - \frac{\phi_\lambda(x) - x}{\left(\frac{p_1+1}{\sqrt{2n}} - x\right)^2} \right| < \frac{\delta}{4\sqrt{2}}, \quad p_1 - p_2 > N, \quad (2 - \delta)\sqrt{n} < p_1 < (2 + \delta)\sqrt{n}.$$

Комбинируя теорему 1.5, лемму 1.4 и следствие 1.2 получаем, что  $\mathcal{M}_n(A_n(N, \delta))$  стремится к 1 при  $n$  стремящемся к бесконечности.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $A_n = A_n(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$ . Так как  $\frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda} > 0$  и  $\mathcal{M}_n(A_n) \rightarrow 1$ , то достаточно доказать, что  $\frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda} \geq \sqrt{n}f(\varepsilon)$  при достаточно большом  $n$ , где  $f(\cdot)$  – функция не зависящая от  $n$ , такая что  $f(\varepsilon) \rightarrow 1$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Пусть координаты Фробениуса  $\lambda$  равны  $(p_1, \dots, p_d | q_1, \dots, q_d)$ , тогда координаты  $gr_1(\lambda)$  равны  $(p_1 + 1, \dots, p_d | q_1, \dots, q_d)$ . Следовательно, по формуле крюков в координатах Фробениуса мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\dim gr_1(\lambda)}{(n+1) \dim \lambda} &= \frac{1}{p_1 + 1} \frac{\prod_2^d (p_1 + 1 - p_i) \prod_1^d (p_1 + q_i + 1)}{\prod_2^d (p_1 - p_i) \prod_1^d (p_1 + q_i + 2)} = \frac{1}{p_1 + 1} \prod_2^d \left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) \prod_1^d \left(1 - \frac{1}{p_1 + q_i + 2}\right) = \\ &= \frac{1}{p_1 + 1} e^{\sum_2^d \ln(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}) - \sum_1^d \ln(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 2})}. \end{aligned}$$

Оценим показатель экспоненты, начиная с первой суммы. Напомним, что  $\phi_\lambda$  – кривая, соответствующая  $\lambda$  при сжатии и повороте, следовательно  $\phi_\lambda$  – непрерывна и почти всюду дифференцируема, причем при  $x \geq 0$  выполнено

$$\phi'_\lambda(x) = \begin{cases} -1, & \exists i \ x \in \left(\frac{p_i}{\sqrt{2n}}, \frac{p_i+1}{\sqrt{2n}}\right); \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как  $\int_a^b \frac{1}{c-x} = \ln(c-a) - \ln(c-b) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{c-b}\right)$ , то

$$\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) = \int_0^{\frac{p_2+1}{\sqrt{2n}}} \frac{1}{\frac{p_1+1}{\sqrt{2n}} - x} \frac{1 - \phi'_\lambda(x)}{2} dx$$

Введём следующие сокращения:  $a = \frac{p_2+1}{\sqrt{2n}}, b = \frac{p_1+1}{\sqrt{2n}}$  и возьмем интеграл по частям:

$$\int_0^a \frac{1 - \phi'_\lambda(x)}{b-x} dx = \frac{x - \phi_\lambda(x)}{b-x} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{\phi_\lambda(x) - x}{(b-x)^2} dx =$$



$$= \frac{a - \phi_\lambda(a)}{b - a} - \frac{\phi_\lambda(0)}{b} + \int_0^a \frac{\phi_\lambda(x) - x}{(b - x)^2} dx.$$

Так как  $a = p_2 + 1$ , то  $a - \phi_\lambda(a) = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , а значит  $\frac{a - \phi_\lambda(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2n}}} = \frac{1}{p_1 - p_2} < \varepsilon$ , в силу выбора  $A_n$ . Следовательно,

$$\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) > -\frac{\phi_\lambda(0)}{2b} - \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^a \frac{\phi_\lambda(x) - x}{2(b - x)^2} dx.$$

Теперь оценим вторую сумму в экспоненте.

При  $x < 0$  выполнено

$$\phi'_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \exists i x \in \left(\frac{-q_i - 1}{\sqrt{2n}}, \frac{-q_i}{\sqrt{2n}}\right); \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, аналогично получаем, что

$$-\sum_1^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 1}\right) = \int_{\frac{-q_1 - 1}{\sqrt{2n}}}^0 \frac{1}{\frac{p_1 + 1}{\sqrt{2n}} - x} \frac{1 + \phi'_\lambda(x)}{2} dx.$$

Введём следующие сокращения:  $a = \frac{-q_1 - 1}{\sqrt{2n}}$ ,  $b = \frac{p_1 + 1}{\sqrt{2n}}$  и возьмем интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^0 \frac{1 + \phi'_\lambda(x)}{b - x} dx &= \frac{x + \phi_\lambda(x)}{b - x} \Big|_a^0 + \int_a^0 \frac{x + \phi_\lambda(x)}{(b - x)^2} dx = \\ &= \frac{\phi_\lambda(0)}{b} - \frac{a + \phi_\lambda(a)}{b - a} + \int_a^0 \frac{x + \phi_\lambda(x)}{(b - x)^2} dx. \end{aligned}$$

Заметим, что  $a = -\phi_\lambda(a)$ , а значит

$$-\sum_1^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 1}\right) = \frac{\phi_\lambda(0)}{2b} + \int_a^0 \frac{x + \phi_\lambda(x)}{2(b - x)^2} dx.$$

Складывая обе оценки получаем,

$$\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) - \sum_1^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 1}\right) > \int_{\frac{-q_1 - 1}{\sqrt{2n}}}^{\frac{p_2 + 1}{\sqrt{2n}}} \frac{\phi_\lambda(x) - |x|}{2\left(\frac{p_1 + 1}{\sqrt{2n}} - x\right)^2} dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно, то при уменьшении области интегрирования интеграл только уменьшится. В силу выбора  $A_n$  верно, что  $\frac{p_2 + 1}{\sqrt{2n}} > \sqrt{2} - \varepsilon$  и  $\frac{-q_1 - 1}{\sqrt{2n}} > -\sqrt{2} + \varepsilon$ , следовательно

$$\int_{\frac{-q_1 - 1}{\sqrt{2n}}}^{\frac{p_2 + 1}{\sqrt{2n}}} \frac{\phi_\lambda(x) - |x|}{\left(\frac{p_1 + 1}{\sqrt{2n}} - x\right)^2} dx > \int_{-\sqrt{2} + \varepsilon}^{\sqrt{2} - \varepsilon} \frac{\phi_\lambda(x) - |x|}{2\left(\frac{p_1 + 1}{\sqrt{2n}} - x\right)^2} dx$$

В силу выбора  $A_n$  интеграл больше чем

$$\int_{-\sqrt{2} + \varepsilon}^{\sqrt{2} - \varepsilon} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

По лемме 2 из приложения А

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx = 2 \ln(2).$$

Пусть  $f'(\varepsilon) = \ln(2) - \int_{-\sqrt{2} + \varepsilon}^{\sqrt{2} - \varepsilon} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx$ . Так как интегрируемое выражение больше 0 и интеграл на всем отрезке  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  сходится к  $\ln(2)$ , то  $f'(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . А значит для всех  $\lambda \in A_n$  мы получаем оценку

$$\frac{\dim gr_1(\lambda)}{\dim \lambda} > \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{e^{\ln(2) - \varepsilon - f'(\varepsilon)}}{(2 + \sqrt{2}\varepsilon)}.$$

А так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(2) - \varepsilon - f'(\varepsilon)}}{(2 + \sqrt{2\varepsilon})} = 1,$$

то лемма доказана  $\square$

**Следствие 3.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \mu_n \frac{n - L_n}{\sqrt{n}} = 1$$

### 3.4 Асимптотика моментов

**Утверждение 3.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \mu_n \left( \frac{n - L_n}{\sqrt{n}} \right)^m \rightarrow m!$$

*Доказательство.* Индукция по  $m$ . База индукции для  $m = 1$  доказана в следствии 3.

Индукционный переход. Пусть утверждение верно для всех  $k \leq m - 1$ , докажем его для  $m$ .

Построим биекцию трёх множеств аналогичную пункту 3.1:

1. Наборы  $(\sigma, k_1 + \frac{1}{m+1}, k_2 + \frac{2}{m+1}, \dots, k_m + \frac{m}{m+1})$ , где  $\sigma \in S_n$ , а  $k_i \in [n]$  и  $L_n(\sigma) < k_1 + \frac{1}{m+1} < k_2 + \frac{2}{m+1} < \dots, k_m + \frac{m}{m+1}$ ;
2. Пары таблиц Юнга  $(P, Q)$ , где таблица  $P$  состоит из элементов  $1, 2, \dots, n, k_1 + \frac{1}{m+1}, k_2 + \frac{2}{m+1}, \dots, k_m + \frac{m}{m+1}$ , причем все элементы  $k_1 + \frac{1}{m+1}, k_2 + \frac{2}{m+1}, \dots, k_m + \frac{m}{m+1}$  стоят в первой строке. А  $Q$  состоит из чисел  $1, \dots, n + m$ , причем  $n + 1, \dots, n + m$  стоят в первой строке.
3. Пары стандартных таблиц Юнга  $(P, Q)$ , причем в  $Q$ -таблице числа  $n + 1, \dots, n + m$  стоят в первой строке.

Построим отображение из первого множества на второе. Элемент  $\sigma$  задает пару таблиц  $(P(\sigma), Q(\sigma))$ . Последовательно вставкой Шенстеда вставим элементы  $k_1 + \frac{1}{m}, \dots, k_m + \frac{m}{m+1}$ . Они последовательно вставятся в первую строку. Несложно увидеть, что обратное отображение получается применением обратного  $RSK$  к паре таблиц  $(P, Q)$ .

Построим биекцию между вторым и третьим множеством. Паре таблиц  $(P_2, Q_2)$  из второго множества сопоставим пару  $(P_3, Q_3)$ , где  $Q_3 = Q_2$ , а таблица  $P_3$  получается из таблицы  $P_2$  заменой находящихся в ней чисел на их порядковые номера. Пример сопоставления приведен ниже.

1	3	$2 + \frac{1}{4}$	$2 + \frac{2}{4}$	$4 + \frac{3}{4}$	↔	1	5	3	4	6
2	5					2	7			
4						5				

Отметим, что биекция, построенная в доказательстве леммы 1, является частным случаем описанной выше биекции при  $m = 1$ .

Заметим, что каждому элементу  $\sigma \in S_n$  сопоставляются все возможные наборы натуральных чисел, где  $L_n(\sigma) \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n$ . Методом шаров и перегородок получаем, что число описанных

ранее наборов равно  $\binom{m+n-L_n}{m} = \frac{\prod_{i=1}^m (n-L_n+i)}{m!}$ . А значит общее количество элементов в первом множестве равно  $\sum_{\sigma} \frac{\prod_{i=1}^m (n-L_n(\sigma)+i)}{m!}$ .

С другой стороны, мощность третьего множества равна количеству пар стандартных таблиц Юнга, таких что  $Q$  содержит элементы  $n+1, \dots, n+m$  в первой строке. А значит, если мы обозначим через  $gr_m(\lambda)$  диаграмму Юнга отличающуюся от  $\lambda$  добавлением  $m$  клеток в первую строку, то количество таких таблиц равно  $\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)$ .

Приравняв мощности, получим:

$$\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda) = \sum_{\sigma} \frac{\prod_{i=1}^m (n-L_n(\sigma)+i)}{m!}.$$

$$\frac{\prod_{i=1}^m (n-L_n(\sigma)+i)}{m!} = \frac{(n-L_n(\sigma))^m}{m!} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \frac{(n-L_n(\sigma))^k}{m!},$$

где  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  – некоторые натуральные числа, не зависящие от  $\sigma$ . Следовательно,

$$\frac{m!}{\sqrt{n}^m} \frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{n!} = E_{\mu_n} \left( \frac{n-L_n(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^m + \sum_{k=1}^m a_k \frac{E_{\mu_n} \left( \frac{n-L_n(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^k}{\sqrt{n}^{m-k}}.$$

Заметим, что по предположению индукции

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E_{\mu_n} \left( \frac{n-L_n(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^k}{\sqrt{n}^{m-k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k!}{\sqrt{n}^{m-k}} = 0.$$

А значит задача сводится к доказательству следующего равенства:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{\sqrt{n}^m n!} = 1$$

**Утверждение 4.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{\sqrt{n}^m n!} \leq 1$

*Доказательство.* По неравенству КБШ:

$$\frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{\sqrt{n}^m n!} \leq \frac{1}{\sqrt{n}^m} \sqrt{\left( \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \right) \left( \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim gr_m(\lambda))^2}{n!} \right)} = \frac{1}{\sqrt{n}^m} \sqrt{\sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim gr_m(\lambda))^2}{n!}} \leq \prod_{i=1}^m \sqrt{\frac{n+i}{n}}$$

Устремляя  $n$  к бесконечности получим требуемое неравенство.  $\square$

**Замечание 2.**

$$\frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{\sqrt{n}^m n!} = \frac{1}{\sqrt{n}^m} E_{\mathcal{M}_n} \frac{\dim gr_m(\lambda)}{\dim \lambda}.$$

**Утверждение 5.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \dim gr_m(\lambda)}{\sqrt{n}^m n!} \geq 1.$$

*Доказательство.* По замечанию выше достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^m} E_{\mathcal{M}_n} \frac{\dim gr_m(\lambda)}{\dim \lambda} \geq 1$$

Координаты Фробениуса диаграммы  $gr_m(\lambda)$  равны  $(p_1+m, \dots, p_d|q_1, \dots, q_d)$ . Следовательно, по теореме 2 получаем:

$$\frac{\dim gr_m(\lambda)}{(n+1)(n+2)\dots(n+m) \dim \lambda} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_1+i} \frac{\prod_2^d (p_1+m-p_i) \prod_1^d (p_1+q_i+1)}{\prod_2^d (p_1-p_i) \prod_1^d (p_1+q_i+1+m)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_1 + i} \prod_2^d \left(1 + \frac{m}{p_1 - p_i}\right) \prod_1^d \left(1 - \frac{m}{p_1 + q_i + m + 1}\right) = \\
&= \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_1 + i} \prod_2^d \left(1 + \frac{m(q_i + 1 + p_i)}{(p_1 - p_i)(p_1 + q_i + m + 1)}\right) \left(1 - \frac{m}{p_1 + q_i + m + 1}\right) = \\
&= \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_1 + i} \left(1 - \frac{m}{p_1 + q_i + m + 1}\right) e^{\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{m(q_i + 1 + p_i)}{(p_1 - p_i)(p_1 + q_i + m + 1)}\right)}.
\end{aligned}$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Определим  $A_n = A_n(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$  как в параграфе 3.3. В силу выбора  $A_n$ , раскладывая логарифм в ряд Тейлора, при достаточно большом  $n$  для любого  $i$  получаем:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{m(q_i + 1 + p_i)}{(p_1 - p_i)(p_1 + q_i + m + 1)}\right) &> (m - \varepsilon) \ln\left(1 + \frac{(q_i + 1 + p_i)}{(p_1 - p_i)(p_1 + q_i + 2)}\right) = \\
&= (m - \varepsilon) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Суммируя по всем  $i$ , из доказательства утверждения 2, получаем:

$$\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{m(q_i + 1 + p_i)}{(p_1 - p_i)(p_1 + q_i + m + 1)}\right) > (m - \varepsilon) \left(\sum_2^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - p_i}\right) - \sum_2^d \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 + q_i + 2}\right)\right) > m \ln(2) - \delta(\varepsilon),$$

где  $\delta(\varepsilon)$  стремится к 0 при  $\varepsilon$  стремящемся к нулю.

А значит,

$$E_{\mathcal{M}_n} \frac{\dim gr_m(\lambda)}{\dim \lambda} \geq (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{m}{p_1 + q_1 + m + 1}\right) e^{m \ln(2) - \delta(\varepsilon)} \prod_{i=1}^m \frac{n + i}{p_1 + i} > (1 - \delta_2(\varepsilon)) \sqrt{n}^m,$$

где  $\delta_2(\varepsilon)$  стремится к 0 при  $\varepsilon$  стремящемся к 0, а  $n$  достаточно велико. Устремляя  $\varepsilon$  к нулю получаем требуемое неравенство.  $\square$ .

Два последних утверждения завершают индукционный переход и доказательство утверждения 3.  $\square$  Главным результатом данного параграфа является, то что случайная величина  $\frac{n - L_n(\sigma)}{\sqrt{n}}$  с ростом  $n$  сходится по распределению к экспоненциальному распределению с интенсивностью 1. Точнее,

**Теорема 6.** Для любого  $\alpha > 0$  верно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1 - L_n(x)}{\sqrt{n}} \leq \alpha\right) = e^{-\alpha}$$

*Доказательство.* Из утверждения 3 следует, что моменты случайной величины  $\frac{1 - L_n(x)}{\sqrt{n}}$  сходятся к моментам экспоненциального распределения. Заметим, что распределение с моментами равными  $k!$  единственно, так как для последовательность  $\{k!\}$  выполнено условие Карлемана. Единственность предела и сходимост моментов влечёт сходимость по распределению.  $\square$ .

## 4 Флуктуации первой строки при $RSK$ кодировании

Пусть  $X = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  – последовательность независимых случайных величин одинаково распределенных по мере Лебега на отрезке  $[0, 1]$ . Обозначим через  $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  случайный вектор реализации первых  $n$  экспериментов. Пусть  $P_n(X) = P(X^n)$  – случайная таблица, полученная при  $RSK$  кодировании первых  $n$  результатов.

В данном параграфе изучаются предельные флуктуации элементов первой строки таблиц  $P_n(X)$ . Доказанные выше утверждения позволяют легко доказать теорему, анонсированную во введении. Напомним её формулировку.

**Теорема.** Пусть  $l_n(x)$  равно значению последнего элемента первой строки  $P$ -таблицы  $P_n(x)$  для реализации  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  верно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(1 - l_n(x)) \leq \alpha) = e^{-\alpha}$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 6, достаточно показать сходимость  $k$ -ого момента величины  $\sqrt{n}(1 - l_n(x))$  к  $k!$ . С вероятностью 1 все  $X_i$  различны. Рассмотрим отображение  $\Sigma_n$ , сопоставляющее каждой последовательности  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$  перестановку из порядковых номеров координат  $x$ .  $\Sigma_n(X^n)$  индуцирует равномерное распределение на  $S_n$ . Заметим, что

$$P(l_n(X) | \Sigma_n(x) = \sigma) = P(X_{L_n(\sigma)} | \Sigma(X) = \sigma) \sim B(L_n(\sigma), n - L_n(\sigma) + 1)$$

так как распределение  $k$ -ой статистики  $X^n$  совпадает с распределением  $B(k, n - k + 1)$ .

Так как  $k$ -ый момент распределения  $B(\alpha, \beta)$  равен  $\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sqrt{n}(1 - l_n(x)))^k &= n^{k/2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \int_0^1 (1-x)^k dP(X_{L_n(\sigma)} | \Sigma(X) = \sigma) = n^{k/2} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \int_0^1 (1-x)^k dB(L_n(\sigma), n+1-L_n(\sigma)) = \\ &= \frac{n^{k/2}}{n!} \sum_{\sigma} \int_0^1 x^k dB(n+1-L_n(\sigma), L_n(\sigma)) = \frac{n^{k/2}}{n!} \sum_{\sigma} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n - L_n(\sigma) + 1 + i}{n + 1 + i} = \frac{n^{k/2}}{n!} \sum_{\sigma} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n + 1 - L_n(\sigma) + i}{n + 1 + i}. \end{aligned}$$

Устремляя  $n$  к бесконечности получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\sqrt{n}(1 - l_n(x)))^k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{k/2}}{n!} \sum_{\sigma} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n + 1 - L_n(\sigma) + i}{n + 1 + i} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \left( \frac{n - L_n(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mu_n} \left( \frac{n - L_n(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^k = k! \square \end{aligned}$$

## 5 Приложение А

**Лемма 2.**

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx = 2 \ln(2)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx &= [\sqrt{2}y = x, \sqrt{2}dy = dx] = \int_{-1}^1 \frac{\Omega(\sqrt{2}y) - \sqrt{2}|y|}{2(\sqrt{2} - \sqrt{2}y)^2} \sqrt{2}dy = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\frac{2}{\pi}(y \sin^{-1}(y) + \sqrt{1-y^2}) - |y|}{2(1-y)^2} dy = \\ &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{\frac{2}{\pi}(x \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}) - |x|}{2(1-x)} \Big|_{y=-1}^{y=1} - \int_{-1}^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(y) - \text{sign}(y)}{2(1-y)} dy \end{aligned}$$

По правилу Лопитала

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{\pi}(y \sin^{-1}(y) + \sqrt{1-y^2}) - |y|}{2(1-y)} &= \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(-1) + 1}{-2} = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\pi}(y \sin^{-1}(y) + \sqrt{1-y^2}) - |y|}{2(1-y)} &= \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(1) - 1}{-2} = 0 \end{aligned}$$

Следовательно внеинтегральные члены равны 0, а так как  $\sin^{-1}(x) - \text{sign}(x) = -(\sin^{-1}(-x) - \text{sign}(-x))$ , то интересующий нас интеграл равен:

$$\int_0^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1}{1+x} dx$$

Возьмем каждое из слагаемых по частям. Так как  $\lim_{x \rightarrow +0} \ln(x)\sqrt{x} = 0$  и  $\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1 = -\frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1)}{1-x} dx &= -\ln(1-x) \left( \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1 \right) \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= [x = \sin \phi, dx = \cos \phi] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin \phi) d\phi \\ \int_0^1 \frac{(\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1)}{1+x} dx &= \ln(1+x) \left( \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1 \right) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= [x = \sin \phi, dx = \cos \phi] = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin \phi) d\phi \end{aligned}$$

Сложим результаты:

$$\int_0^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(x) - 1}{1+x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 \phi) d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \ln(\cos \phi) d\phi$$

Пусть  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos \phi) d\phi$ . Заметим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos \phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \phi) d\phi$$

и следовательно

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos \phi) d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2\phi\right) d\phi = \\ &= -\ln(2) \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2\phi) d\phi = -\ln(2) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin \phi) d\phi = -\ln(2) \frac{\pi}{2} + I \end{aligned}$$

Получаем, что  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \ln(\cos \phi) d\phi = 2 \ln(2)$  и следовательно

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\Omega(x) - |x|}{2(\sqrt{2} - x)^2} dx = 2 \ln(2). \square$$

## Список литературы

- [1] И. Ф. Азангулов, Г. В. Овечкин, “Оценка времени попадания координаты схемы Бернулли в первый столбец таблицы Юнга”, *Функц. анализ и его прил.*, **54:2** (2020), 78–84.
- [2] Вершик А.М. (2019). Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций, Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, **305**, МИАН, М., 71–85; Proc. Steklov Inst. Math., **305**, 63–77
- [3] А.М. Вершик (2020). Комбинаторное кодирование схемы Бернулли и асимптотика таблиц Юнга. — *Функц. Анал. и его Прил.*, **54:2**, 3-24.

- [4] А. М. Вершик, С. В. Керов (1977). Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга, *Докл. АН СССР*, 233:6, 1024–1027
- [5] Грибов А.Б. (1986). Предельная относительно меры Планшереля таблица Юнга. *Вест. Лен. Унив.*, сер. мат., вып. 2, 100–102.
- [6] Г.В. Овечкин (2020). Распределение флуктуации  $P$ -таблиц схемы Бернулли при соответствии RSK. Оценка времени попадания координаты схемы Бернулли в первый столбец таблицы Юнга. Выпускная квалификационная работа. СПбГУ.
- [7] D. Aldous, P. Diaconis (1995). Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Theory Related Fields* **103**, No. 2, 199–213.
- [8] Baik J., Deift P., Johansson K. (1999). On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, **12**, 1119–1178.
- [9] Borodin A., Okunkov A., Olshanski G. (2000). Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups. *J. Amer. Soc.*, **13**, 491–515.
- [10] Fulton W. (1997). Young tableaux with application to representation theory and geometry. Cambridge university press.
- [11] S. V. Kerov (1996). A Differential Model Of Growth Of Young Diagrams, *Proceedings of St.Petersburg Mathematical Society*
- [12] Kerov S., Vershik A. (1986). The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm. — *SIAM J. Alg. Discr. Methods* **7**, No. 1 116–123.
- [13] Knuth D. (1970). Permutations, matrices and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, **34**, No. 3, 709–727.
- [14] Logan B. F., and Shepp L. A (1977). A variational problem for random Young tableaux. *Adv. Math.*, **26**, 206–222
- [15] Ł. Maślanka, M. Marciniak, P. Śniady (2020). Poisson limit of bumping routes in the Robinson–Schensted correspondence. *arXiv:2005.13824*
- [16] Romik D. (2014). The surprising mathematics of longest increasing subsequences. Cambridge university press.
- [17] Romik D., Śniady P. (2015). Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. — *Ann. Probab.*, **43**, No. 2, 682–737.
- [18] Śniady P. (2016). Robinson–Schensted–Knuth Algorithm, Jeu de Taquin, and Kerov–Vershik Measures on Infinite Tableaux. — *SIAM J. Alg. Discr. Methods* **28**, No. 2, 598–630.
- [19] Stanley R. (1999). Enumerative combinatorics. Vol 2. Cambridge university press.