Санкт-Петербургский государственный университет

ГУБКИН Павел Васильевич

Выпускная квалификационная работа

Асимптотическое поведение решений системы Крейна

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
доцент
Факультет математики
и компьютерных наук СПбГУ
кандидат ф.-м. наук
Бессонов Роман Викторович

Рецензент:
старший научный сотрудник
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
кандидат ф.-м. наук
Демченко Максим Николаевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Введение

В 1955 году М. Г. Крейном было положено начало теории, позволяющей использовать методы теории ортогональных многочленов при решении спектральных задач для дифференциальных операторов. В работе [6] Крейн сформулировал и доказал спектральную версию классической теоремы Сеге о асимптотическом поведении ортогональных многочленов на окружности. Настоящая работа связана с уточнением теоремы Крейна, основанном на граничной асимптотике ортогональных многочленов на окружности, полученной в 1991 году Мате, Неваем и Тотиком в работе [8]. Для формулировки основного результата нам понадобятся несколько определений.

Системой Крейна называется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}P(r,\lambda) = i\lambda P(r,\lambda) - \overline{a(r)}P_*(r,\lambda), & P(0,\lambda)=1, \\ \frac{\partial}{\partial r}P_*(r,\lambda) = -a(r)P(r,\lambda), & P_*(0,\lambda)=1. \end{cases}$$

Функцию $a \in L^1_{loc}([0,+\infty))$ будем называть коэффициентом системы Крейна. Комплексное число λ является спектральным параметром. В настоящей работе рассматриваются системы Крейна, спектральная мера σ которых лежит в классе Сеге на вещественной прямой, то есть удовлетворяет условию

$$\frac{\log \sigma'(x)}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}),$$

где σ'– плотность абсолютно непрерывной части меры σ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$. В первой части настоящей работы доказывается наличие усредненной сходимости функций $P_*(r,\lambda)$ для всех λ в верхней полуплоскости, то есть сходимости функций

$$F_r(\lambda) = \frac{1}{r}\int_0^r P_*(\rho,\lambda)\,d\rho, \qquad \mathrm{Im}(\lambda) > 0,$$

в случае вещественного коэффициента в системе Крейна. Вторая часть посвящена доказательству аналога теоремы Мате-Невая-Тотика. Доказывается, что для почти всех вещественных λ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_0^r |P(\rho,\lambda)|^2 d\rho = (2\pi\sigma'(\lambda))^{-1}.$$

1.1 Ортогональные многочлены на окружности

Теория ортогональных многочленов на окружности обширна и подробно изложена в книгах Г. Сеге [10] и Б. Саймона [9]. Рассмотрим вероятностную борелевскую меру μ на единичной окружности

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}.$$

Будем говорить, что мера μ нетривиальна, если носитель μ не является конечным набором точек. Пусть мера μ нетривиальна, тогда набор функций $1, z, z^2, \dots$ образует линейно независимую систему в гильбертовом пространстве $L^2(\mu)$. Для нее можно проделать ортогонализацию Грама-Шмидта и получить последовательность ортогональных в $L^2(\mu)$ многочленов Φ_n. Такой набор многочленов имеет массу удивительных свойств, нам наиболее интересны будут рекурсивные соотношения и асимптотическое поведение. Обозначим

$$\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(1/\overline{z})}.$$

Теорема Верблюнского утверждает, что для любой нетривиальной вероятностной меры μ существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ комплексных чисел в круге

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\},$$

такая, что семейства многочленов Φ_n и Φ_n^* удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(z) &= z\Phi_n(z) - \overline{\alpha_n}\Phi_n^*(z), \quad \Phi_0(z) = 1, \\ \Phi_{n+1}^*(z) &= \Phi_n^*(z) - \alpha_n z\Phi_n(z), \quad \Phi_0^*(z) = 1. \end{aligned}$$

Доказательство этого факта можно найти в Теореме 1.5.2 в [9]. Последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть коэффициентами рекурсии меры μ, они полностью определяют последовательности многочленов Φ_n, Φ_n^* и саму меру μ. Для удобства, определим ортонормированные многочлены

$$\varphi_n = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|_{L^2(\mu)}}, \quad \varphi_n^* = \frac{\Phi_n^*}{\|\Phi_n^*\|_{L^2(\mu)}}.$$

Будем говорить, что мера μ лежит в классе Сеге, если

$$\int_0^{2\pi} \log w(e^{i\theta}) d\theta > -\infty, \tag{1}$$

где w - плотность абсолютно непрерывной части меры μ относительно меры Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Следующая теорема показывает многогранность теории ортогональных многочленов.

Теорема A (Г. Сеге, Теорема 2.7.15, [9])**.** *Пусть μ – вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, тогда следующие условия равносильны:*

(a) *Мера μ лежит в классе Сеге.*

(b) *Для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{D}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(z_0)|^2 < \infty.$$

(c) *Для всех $z \in \mathbb{D}$ у последовательности $\varphi_n^*(z)$ существует равномерный на компактах в $\mathbb{D}$ предел $\Pi(z)$, и функция Π является аналитической в $\mathbb{D}$.*

(d) *Многочлены не плотны в пространстве $L^2(\mu)$.*

(e) *Коэффициенты рекурсии удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Дополнительно можно отметить, что если выполнены равносильные условия теоремы Сеге, то имеют место следующие соотношения на коэффициенты рекурсии и на предельную функцию:

$$\Pi(z) = \exp\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log(w(e^{i\theta}))\, d\theta\right], \tag{2}$$

$$|\Pi(0)|^{-2} = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1-|\alpha_j|^2\right) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(w(e^{i\theta}))\, d\theta\right].$$

1.2 Системы Крейна. Обзор известных результатов

Континуальные аналоги ортогональных многочленов на вещественной прямой впервые были рассмотрены М. Г. Крейном в работе [6]. Для наиболее подробного анализа связанной с ними теории можно обратиться к статье С. Денисова [3].

Пусть $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ – комплекснозначная функция. Напомним, что системой Крейна называется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}P(r,\lambda) = i\lambda P(r,\lambda) - \overline{a(r)}P_*(r,\lambda), & P(0,\lambda) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial r}P_*(r,\lambda) = -a(r)P(r,\lambda), & P_*(0,\lambda) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Комплексное число λ – спектральный параметр. Функции P и P_* называются континуальными аналогами ортогональных многочленов на окружности. Можно заметить, что это целые функции экспоненциального типа не выше r. Тип соответствует степени многочлена в случае ортогональных многочленов на окружности. В [3] доказывается, что для любого коэффициента $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ существует мера σ на $\mathbb{R}$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(x)}{1+x^2} < \infty, \tag{4}$$

и отображение

$$\mathcal{U}_\sigma : f \mapsto \int_0^\infty f(r)P(r,\lambda)\,dr,$$

заданное на плотном подмножестве пространства $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda)$, состоящем из измеримых простых функций, продолжается до изометрии пространств $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda)$ и $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Эта мера называется спектральной мерой системы (3). Обозначим через σ' функцию на $\mathbb{R}$, равную производной функции $\tilde{\sigma}(t) = \int_0^t d\sigma(x)$ там, где эта производная существует, и $\sigma' = 0$, там, где производная не определена. Понятно, что эта функция почти всюду по мере Лебега совпадает с плотностью абсолютно непрерывной части σ относительно меры Лебега. Аналогично (1) будем говорить, что мера σ лежит в классе Сеге на вещественной прямой, если она удовлетворяет условию (4) и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log \sigma'(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty. \tag{5}$$

Ключевая теорема в теории континуальных аналогов ортогональных многочленов – теорема Крейна. Она была изначально сформулирована М. Г. Крейном в работе [6] с небольшими неточностями, впоследствии исправленными А. Тепляевым в статье [11]. Теорема соединяет свойства сразу нескольких объектов, связанных с системой Крейна, ее полное доказательство можно найти в параграфе 8 статьи С. Денисова [3].

Теорема B (М. Г. Крейн)**.** *Пусть σ – мера на вещественной прямой, удовлетворяющая условию* (4)*, и являющаяся спектральной мерой некоторой системы Крейна (3). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) *Мера σ лежит в классе Сеге.*

(b) *Для некоторой точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+ = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ выполнено*

$$\int_0^\infty |P(r,\lambda_0)|^2 dr < \infty.$$

(*c*) *Существуют аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция Π и последовательность положительных вещественных чисел $r_n \to \infty$, такие, что*

$$\Pi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} P^*(r_n, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Более того, сходимость равномерна на компактах в $\mathbb{C}_+$.

(*d*) *Изометрия $\mathcal{U}_\sigma \colon L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda) \to L^2(\mathbb{R}, \sigma)$ не является сюръекцией.*

Если выполнены равносильные условия теоремы Крейна, то, как и в случае с (2), для функции Π есть явная формула.

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\lambda} - \frac{s}{s^2+1}\right)\log\sigma'(s)ds\right], \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6}$$

Если выполнено условие (5), функция $|\Pi|$ получается взятием экспоненты от интеграла Пуассона для функции $-\log\sigma'$. Кроме того, функция $[(\lambda+i)\Pi(\lambda)]^{-1}$ лежит в пространстве Харди H^2 в верхней полуплоскости, поэтому Π имеет некасательные граничные значения почти всюду по мере Лебега на вещественной оси, то есть для всех $x \in \mathbb{R}$ и для любого конуса

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C}_+ \colon |\operatorname{Re}(z-x)| \leqslant c|\operatorname{Im}(z-x)|\}$$

существует предел $\Pi(z)$ для $z \in \mathcal{K}, z \to x$. Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|\Pi(x)|^2 = |2\pi\sigma'(x)|^{-1}. \tag{7}$$

Теорема Крейна в такой формулировке неполна в смысле отсутствия равносильного условия, похожего на условие (*e*) теоремы Сеге, то есть условия в терминах функции a. В работах [2] и [1] сформулированы и доказаны критерии, частично восполняющие этот пробел. Для полноты картины приведем ключевые результаты. Будем говорить, что функция a лежит в классе Штуммеля, если

$$\sup_{x\geqslant 0}\int_x^{x+1}|a(t)|^2dt < \infty.$$

Обозначим через $\tilde{a}$ продолжение функции a нулем на отрицательную полуось.

Теорема C (С. А. Денисов, Теорема 2, [2])**.** *Предположим, функция a лежит в классе Штуммеля. Условия теоремы Крейна выполнены тогда и только тогда, когда $\tilde{a}$ лежит в пространстве распределений, преобразование Фурье которых лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-1}d\lambda)$.*

Следующая теорема является частным случаем Теоремы 1 в [1], ее вывод можно найти в приложении 4.1.

Теорема D. *Пусть a - вещественнозначная функция на $\mathbb{R}_+$. Эквивалентные условия теоремы Крейна выполнены тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_n^{n+2}\exp\left[-4\int_0^s a(2t)dt\right]ds \cdot \int\limits_n^{n+2}\exp\left[4\int_0^s a(2t)dt\right]ds - 4\right) < \infty.$$

В пункте (c) теоремы Сеге описана полноценная сходимость, в то время как в пункте (c) теоремы Крейна выполнена только сходимость по некоторой последовательности. Сходимость

$$P_*(r,\lambda) \to \Pi(\lambda), \quad r \to \infty$$

имеет место для функций $a \in L^2(\mathbb{R})$, доказательство этого утверждения можно найти в Теореме 1 в статье А. Тепляева [11] или в Теореме 11.1 в работе С. Денисова [3]. Кроме того, Тепляевым в [11] было показано, что улучшить класс L^2 нельзя. Сформулируем этот результат.

Теорема E (А. Тепляев, Теорема 3 в [11])**.** *Существует непрерывная функция a, для которой мера σ лежит в классе Сеге, и такая, что для любого числа $\theta \in \mathbb{C}$ по модулю равного* 1 *существует последовательность $r_{\theta,n} \to \infty$, для которой выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} P_*(r_{\theta,n},\lambda) = \theta\,|\Pi(\lambda)|\,.$$

Дополнительно можно добиться, чтобы функция a лежала во всех пространствах L^p для $p > 2$, $\lim_{r\to\infty} a(r) = 0$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнялись соотношения

$$\lim_{r\to\infty} P(r,\lambda) = 0,$$
$$\lim_{r\to\infty} |P_*(r,\lambda)| = |\Pi(\lambda)|\,.$$

В той же статье [11] были высказаны две гипотезы о сходимости к предельной функции. Одна из них доказана в настоящей работе. Приведем их формулировки.

Гипотеза I (А. Тепляев Гипотеза 6.5 в [11], доказана в [3])**.** *Предположим, мера σ лежит в классе Сеге на $\mathbb{R}$, функция a принимает только вещественные значения. Пусть r_n – последовательность вещественных чисел, таких, что $P(r_n,\lambda_0) \to 0$ для некоторого $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$. Тогда $P_*(r_n,\lambda) \to \Pi(\lambda)$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$.*

Гипотеза II (А. Тепляев, Гипотеза 6.6 в [11])**.** *Предположим, мера σ лежит в классе Сеге на $\mathbb{R}$, функция a принимает только вещественные значения, и выполнено условие*

$$\sup_{r\geqslant 0}\int_r^{r+1} |a(s)|ds < \infty. \tag{8}$$

Тогда Π является пределом P_* в среднем, то есть имеет место сходимость

$$\Pi(\lambda) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r P_*(\rho,\lambda)\,d\rho$$

равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$.

1.3 Основные результаты

1.3.1 Асимптотическое поведение решений системы Крейна в верхней полуплоскости

В работе доказывается Гипотеза II, условие (8) оказывается излишним.

Теорема 1. *Пусть мера σ лежит в классе Сеге на вещественной прямой, коэффициент a в системе Крейна лежит в $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и принимает только вещественные значения. Тогда P_* сходится к Π в среднем, то есть имеет место сходимость*

$$\Pi(\lambda) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r P_*(\rho,\lambda)\,d\rho$$

равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$.

Используя ту же конструкцию, что и в доказательстве теоремы E, можно показать, что сходимость в среднем может отсутствовать даже при достаточно хороших комплекснозначных функциях a.

Теорема 2. *Существует непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция a, для которой мера σ лежит в классе Сеге, и такая, что для любого числа $\theta \in \mathbb{C}$ по модулю равного 1 существует последовательность $r_{\theta,n} \to \infty$, для которой выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_{\theta,n}} \int\limits_0^{r_{\theta,n}} P_*(\rho,\lambda)\, d\rho = \theta\, |\Pi(\lambda)|\, .$$

Дополнительно можно добиться, чтобы функция a лежала во всех пространствах L^p для $p > 2$, $\lim_{r\to\infty} a(r) = 0$, и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнялись соотношения

$$\lim_{r\to\infty} P(r,\lambda) = 0$$
$$\lim_{r\to\infty} |P_*(r,\lambda)| = |\Pi(\lambda)|\, .$$

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в параграфах 2.2 и 2.3 соответственно.

1.3.2 Асимптотическое поведение решений системы Крейна на вещественной оси

Эта часть работы основана на статье А. Мате, П. Невая, В. Тотика [8]. Во многом рассуждения похожи на проделанные в ней. Приведем здесь их результаты.

Пусть μ - вероятностная борелевская мера на единичной окружности. Определим функцию

$$w_n(\mu,z) = \min\left\{ \frac{1}{2\pi |P(z)|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) \;\middle|\; P - \text{многочлен},\ \deg(P) < n, P(z) \neq 0 \right\}.$$

Теорема F (А. Мате, П. Невай, В. Тотик Теорема 1, [8])**.** *Пусть мера μ лежит в классе Сеге на окружности, тогда для почти всех $t \in [-\pi,\pi)$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} n w_n(\mu, e^{it}) = \mu'(t),$$

где μ' - плотность абсолютно непрерывной части меры μ относительно меры Лебега на окружности $\mathbb{T}$.

В теореме 11.3.1 в книге Сеге [10] показано, что функция w выражается через ортонормированные многочлены на окружности:

$$2\pi w_n(\mu,z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(\mu,z)|^2 \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, можно переформулировать теорему F без использования функций w_n.

Теорема G. *Пусть мера μ лежит в классе Сеге, φ_n – последовательность соответствующих ей ортонормированных многочленов. Тогда для почти всех $z \in \mathbb{T}$ выполнено*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(\mu,z)|^2 \to \frac{1}{2\pi \mu'(z)}, \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть коэффициент a системы Крейна лежит в пространстве $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, и порожденная им мера μ лежит в классе Сеге на вещественной прямой. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\frac{1}{r}\int_0^r |P(s,x)|^2 ds \to (2\pi\mu'(x))^{-1}, \quad \text{при } r \to \infty.$$

Переформулируем эту теорему в виде, похожем на Теорему F. Будем обозначать через PW_r пространство Пэли-Винера со спектром в $[0,r]$, то есть пространство целых функций f, представимых в виде

$$f(x) = \int_0^r \varphi(s) e^{ixs} ds, \quad \varphi \in L^2[0,r].$$

Введем экстремальную функцию

$$m_r(\mu, z) = \inf\left\{ \frac{1}{|f(z)|^2}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\mu(t) \;\middle|\; f \in PW_r, f(z) \neq 0 \right\}.$$

Как показывает следующая лемма, функция m_r выражается через континуальные аналоги ортогональных многочленов.

Лемма A (С. Денисов Лемма 8.2, [3])**.** *Для всех $z_0 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство*

$$m_r(\mu, z_0) = K_r(z_0, z_0)^{-1}, \quad \text{где } K_r(z', z) = \int_0^r \overline{P(s,z')} P(s,z)\, ds.$$

Равенство достигается на функции

$$f_r(z) = \frac{K_r(z_0, z)}{K_r(z_0, z_0)},$$

в частности, сама функция f_r лежит в PW_r.

По лемме,

$$m_r(\mu, z) = K_r(z,z)^{-1} = \left(\int_0^r |P(s,z)|^2 ds\right)^{-1},$$

$$r m_r(\mu, z) = \left(\frac{1}{r}\int_0^r |P(s,z)|^2 ds\right)^{-1}.$$

Из последней формулы получаем эквивалентную переформулировку Теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть коэффициент a системы Крейна лежит в пространстве $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, и порожденная им мера μ лежит в классе Сеге на вещественной прямой. Тогда для почти всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} r m_r(\mu, z) = 2\pi\mu'(z).$$

Доказательству этой теоремы посвящен параграф 3.

Структура работы

Работа начинается с простых следствий известной формулы Дарбу, в параграфах 2.2 и 2.3 доказываются Теоремы 1 и 2. Доказательство теоремы 4 разбито на две части и приведено в параграфах 3.1, 3.3. Вторая из частей содержит технические детали, которые вынесены в леммы 4 - 8. В параграфе 3.2 доказывается лемма про функции из пространства Пэли-Винера, формально не относящаяся к системам Крейна. Кончается работа параграфом 4.1, содержащим доказательство теоремы D.

2 Асимптотическое поведение решений системы Крейна в верхней полуплоскости

2.1 Формула Кристоффеля-Дарбу

Важнейшим соотношением для континуальных ортогональных многочленов на вещественной прямой является Формула Кристоффеля-Дарбу. Докажем ее и выведем простейшие следствия.

Лемма (Формула Кристоффеля-Дарбу)**.** *Для любых комплексных чисел λ, μ имеют место соотношения*

$$P(r,\lambda)\overline{P(r,\mu)} - P_*(r,\lambda)\overline{P_*(r,\mu)} = i(\lambda - \overline{\mu})\int_0^r P(s,\lambda)\overline{P(s,\mu)}ds, \tag{9}$$

$$|P_*(r,\lambda)|^2 = |P(r,\lambda)|^2 + 2\operatorname{Im}(\lambda)\int_0^r |P(s,\lambda)|^2 ds. \tag{10}$$

Доказательство. Вторая формула получается из первой подстановкой $\lambda = \mu$. Обозначим выражение в левой части (9) за $F(r)$, в правой – за $G(r)$. Достаточно показать, что $F(0) = G(0)$ и $F' = G'$. Начальные условия в системе Крейна (3) были $P(0,\lambda) = P_*(0,\lambda) = 1$, поэтому $F(0) = G(0) = 0$. По определению,

$$G'(r) = i(\lambda - \overline{\mu})P(r,\lambda)\overline{P(r,\mu)}.$$

Производная F ищется напрямую дифференцированием с использованием равенств в дифференциальном уравнении (3):

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[P(r,\lambda)\overline{P(r,\mu)} - P_*(r,\lambda)\overline{P_*(r,\mu)}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial r}P(r,\lambda)\overline{P(r,\mu)} + P(r,\lambda)\frac{\partial}{\partial r}\overline{P(r,\mu)} - \frac{\partial}{\partial r}P_*(r,\lambda)\overline{P_*(r,\mu)} - P_*(r,\lambda)\frac{\partial}{\partial r}\overline{P_*(r,\mu)}\\
&= \left[i\lambda P(r,\lambda) - \overline{a(r)}P_*(r,\lambda)\right]\overline{P(r,\mu)} + P(r,\lambda)\left[-i\overline{\mu}\overline{P(r,\mu)} - a(r)\overline{P_*(r,\mu)}\right] +\\
&\quad + \left[a(r)P(r,\lambda)\right]\overline{P_*(r,\mu)} + P_*(r,\lambda)\left[\overline{a(r)P(r,\mu)}\right] = i(\lambda - \overline{\mu})P(r,\lambda)\overline{P(r,\mu)}.
\end{aligned}$$

□

Следствие 1. *Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $|P_*(r,\lambda)| = |P(r,\lambda)|$.*

Следствие 2. *Для всех $\lambda \notin \mathbb{R}$ выполнено $|P_*(r,\lambda)| > |P(r,\lambda)|$.*

Доказательство. Оба утверждения напрямую следуют из второй формулы Кристоффеля-Дарбу (10). □

Следствие 3. *$P_*(r,\cdot)$ не имеет корней в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+} = \{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.*

Доказательство. Из следствия 2 видно, что корней не может быть в открытой полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Если же $P_*(r,x) = 0$ для некоторого вещественного x, то по следствию 1

$$P_*(r,x) = P(r,x) = 0.$$

Тогда функции $P_*(r,x), P(r,x)$ должны обнуляться при всех $r \geqslant 0$, потому что они являются решениями линейного дифференциального уравнения (3), но это не так при $r = 0$. □

Сформулируем еще один результат, доказанный Денисовым в [3]. По формулировке он похож на Гипотезу I.

Лемма B (С. Денисов Лемма 8.5, [3]). *Предположим, мера σ лежит в классе Сеге на вещественной прямой, r_n – последовательность вещественных чисел, таких, что $P(r_n,\lambda_0)\to 0$ для некоторого $\lambda_0\in\mathbb{C}_+$. Тогда $|P_*(r_n,\lambda)|\to|\Pi(\lambda)|$ равномерно во всей полуплоскости $\mathbb{C}_+$.*

Следствие 4. *Из формулы* (10) *и леммы имеем*

$$|\Pi(\lambda)|^2 = 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^\infty |P(s,\lambda)|^2\,ds.$$

2.2 Доказательство Теоремы 1

Вначале докажем, что имеет место сходимость континуальных ортогональных многочленов к функции Π в среднем для модулей.

Лемма 1. *Пусть коэффициент a в системе Крейна лежит в $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и мера σ лежит в классе Сеге на вещественной прямой. Тогда для любого $\lambda\in\mathbb{C}_+$ выполнено*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\,d\rho = |\Pi(\lambda)|\,.$$

Доказательство. Покажем, что выполнены два неравенства

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\,d\rho \geqslant |\Pi(\lambda)|\,, \tag{11}$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\,d\rho \leqslant |\Pi(\lambda)|\,. \tag{12}$$

Перейдем к нижнему пределу по r в формуле Кристоффеля-Дарбу (10).

$$\liminf_{r\to\infty}|P_*(r,\lambda)|^2 = \liminf_{r\to\infty}\left(|P(r,\lambda)|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^r |P(s,\lambda)|^2\,ds\right)$$

Функция $P(\cdot,\lambda)$ лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, поэтому

$$\liminf_{r\to\infty}|P(r,\lambda)|^2 = 0.$$

Второе слагаемое имеет предел, равный интегралу от 0 до ∞, который по следствию 4 равен $|\Pi(\lambda)|^2$. Таким образом,

$$\liminf_{r\to\infty}|P_*(r,\lambda)|^2 = |\Pi(\lambda)|^2,$$
$$\liminf_{r\to\infty}|P_*(r,\lambda)| = |\Pi(\lambda)|.$$

Взяв среднее для интеграла в последнем равенстве, получим неравенство (11).

Проинтегрируем, возьмем среднее и перейдем к пределу по r в формуле Кристоффеля-Дарбу (10).

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|^2\,d\rho &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r\left(|P(\rho,\lambda)|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\,ds\right)d\rho\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r |P(\rho,\lambda)|^2\,d\rho + 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r\int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\,ds d\rho.\end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, потому что $P(\cdot,\lambda)\in L^2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$A(\rho) = 2\,\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\,ds.$$

Из следствия 4 знаем, что $A(\rho) \to |\Pi(\lambda)|^2$, поэтому

$$2\operatorname{Im}(\lambda) \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\, ds d\rho = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r A(\rho) d\rho = |\Pi(\lambda)|^2 .$$

Сложением двух найденных пределов получаем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|^2\, d\rho = |\Pi(\lambda)|^2 , \tag{13}$$

то есть имеет место сходимость в среднем квадратичном для модуля $P_*(\rho,\lambda)$. Полностью аналогично можно написать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|^2\, d\rho &= \frac{1}{r}\int_0^r \left(|P(\rho,\lambda)|^2 + 2\operatorname{Im}(\lambda) \int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\, ds \right) d\rho \\ &= \frac{1}{r}\int_0^r |P(\rho,\lambda)|^2\, d\rho + 2\operatorname{Im}(\lambda) \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^\rho |P(s,\lambda)|^2\, ds d\rho \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2r\operatorname{Im}(\lambda)} |\Pi(\lambda)|^2 + |\Pi(\lambda)|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Неравенство (12) теперь получается применением неравенства Коши к (13).

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\frac{1}{r} \int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\, d\rho \right)^2 \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|^2\, d\rho = |\Pi(\lambda)|^2 . \tag{15}$$

Если же применить то же самое неравенство Коши к (14), получится

$$\frac{1}{r} \int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\, d\rho \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{2r\operatorname{Im}(\lambda)}} |\Pi(\lambda)|, \tag{16}$$

это пригодится чуть позже в доказательстве теоремы 1. □

Следствие 5. *Если мера σ лежит в классе Сеге и функция a принимает только вещественные значения, то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r P_*(\rho,i) d\rho = \Pi(i).$$

Доказательство. Подставляя $\lambda = i$ в (6), имеем

$$\Pi(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+si)\ln\sigma'(s)}{(i-s)(1+s^2)} ds \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\sigma'(s)}{(1+s^2)} ds \right].$$

Получается, что $\Pi(i)$ – вещественное положительное число. При подстановке $\lambda = i$ в систему дифференциальных уравнений (3) все коэффициенты в правой части оказываются вещественными. Начальные данные тоже вещественные, поэтому $P_*(r,i)$ – вещественное число при всех r. В следствии 3 отмечено, что $P_*(r,\cdot)$ не имеет корней в $\mathbb{C}_+$. Так как $P_*(0,i) = 1$, при любом $r \geqslant 0$ выполнено $P_*(r,i) > 0$. То есть при $\lambda = i$ модули в условии леммы можно убрать. □

Теперь можем переходить непосредственно к доказательству Теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим семейство аналитических функций

$$F_r(\lambda) = \frac{1}{r}\int_0^r P_*(\rho,\lambda)d\rho, \quad r > 1.$$

Неравенство (16) позволяет оценить $|F_r|$ сверху.

$$|F_r(\lambda)| = \left|\frac{1}{r}\int_0^r P_*(\rho,\lambda)d\rho\right| \leqslant \frac{1}{r}\int_0^r |P_*(\rho,\lambda)|\, d\rho \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{2r\,\mathrm{Im}(\lambda)}}|\Pi(\lambda)|. \qquad (17)$$

Рассмотрим произвольный компакт $D \subset \mathbb{C}_+$. $\mathrm{Im}(\lambda)$ отделено от нуля в D, поэтому

$$\sup_{\lambda\in D, r} |F_r(\lambda)| \leqslant \sup_{\lambda\in D} c(\lambda)|\Pi(\lambda)| < \infty.$$

То есть семейство F_r равномерно ограничено на компактах. Следовательно, по теореме Монтеля о компактном семействе функций, любое подсемейство F_r предкомпактно. Выберем последовательность $r_n \to \infty$, для которых функции F_{r_n} сходятся к некоторой функции $\tilde{F}$. Из неравенства (17) для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$|\tilde{F}(\lambda)| = \lim_{n\to\infty} |F_{r_n}(\lambda)| \leqslant |\Pi(\lambda)|.$$

С другой стороны, по следствию 5

$$\tilde{F}(i) = \lim_{n\to\infty} F_{r_n}(i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}\int_0^{r_n} P_*(\rho,i)d\rho = \Pi(i).$$

Из принципа максимума модуля для аналитических функций получаем равенство

$$\tilde{F}(\lambda) = \Pi(\lambda)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Получается, что любой частичный предел F_r совпадает с Π, тогда у F_r существует настоящий предел, и он равен Π. □

2.3 Пример отсутствия сходимости в среднем. Доказательство Теоремы 2

Доказательство опирается на конструкцию, описанную А. Тепляевым в доказательстве Теоремы E, то есть Теоремы 3 в работе [11].

Доказательство Теоремы 2. В конструкции Тепляева выбираются последовательности r_n, ε_n, такие, что $\varepsilon_n \to 0$ и $r_n - r_{n-1} \to +\infty$. По ним строится функция a, равная 0 на всех полуинтервалах $[r_n + 2\varepsilon_n, r_{n+1})$. Функция $P_*(r,\lambda)$ на этом интервале постоянна. Из доказательства теоремы E видно, что все $r_{\theta,n}$ можно выбрать из последовательности r_n, поэтому можем выбрать последовательность n_k, так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} P_*(r_{n_k},\lambda) = \theta\,|\Pi(\lambda)|\,.$$

Обозначим $s_n = r_n + 2\varepsilon_n$ и дополнительно потребуем $\frac{r_{n+1}}{r_n} \to \infty$. Тогда последовательность r_{n_k} нам подойдет. Действительно,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{r_{n_k}}\int\limits_0^{r_{n_k}} P_*(\rho,\lambda)d\rho = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{s_{n_k-1}}{r_{n_k}}\frac{1}{s_{n_k-1}}\int\limits_0^{s_{n_k-1}} P_*(\rho,\lambda)d\rho\right] + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{r_{n_k}}\int\limits_{s_{n_k-1}}^{r_{n_k}} P_*(\rho,\lambda)d\rho$$

Первое слагаемое стремится к нулю, потому что $\frac{s_{n_k-1}}{r_{n_k}} \to 0$ и выражение $\frac{1}{s_{n_k-1}}\int_0^{s_{n_k-1}} P_*(\rho,\lambda)d\rho$ ограничено по неравенству (16). От интеграла во втором слагаемом можно избавиться, так как функция P_* постоянна на интервале (s_{n_k-1}, r_{n_k}). Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{r_{n_k}}\int_0^{r_{n_k}} P_*(\rho,\lambda)d\rho = \lim_{k\to\infty}\frac{r_{n_k}-s_{n_k-1}}{r_{n_k}}P_*(r_{n_k},\lambda) = \lim_{k\to\infty} P_*(r_{n_k},\lambda) = \theta\,|\Pi(\lambda)|\,.$$

□

3 Асимптотическое поведение решений системы Крейна на вещественной оси. Доказательство Теоремы 4

Требуемое в теореме равенство очевидным образом следует из следующих неравенств:

$$\limsup rm_r(\mu, z) \leqslant 2\pi\mu'(z), \tag{18}$$

$$\liminf rm_r(\mu, z) \geqslant 2\pi\mu'(z). \tag{19}$$

Они получены в параграфах 3.1 и 3.3 соответственно.

3.1 Верхняя оценка

Лемма 2. *Пусть мера μ на вещественной прямой удовлетворяет условию* (4)*, тогда для почти всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\limsup rm_r(\mu, z) \leqslant 2\pi\mu'(z).$$

Доказательство. Покажем, что неравенство выполнено для всех точек плотности меры μ, то есть точек z, в которых выполнено

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu([z-h, z+h])}{2h} = \mu'(z).$$

Зафиксируем точку плотности z и предъявим пример функции f.

$$f(x) = \frac{1}{r}\left(\mathbf{1}_{[0,r]}e^{-izu}\right)\check{}(x) \in PW_r,$$

$$f(x) = \frac{1}{r}\int_0^r e^{ixu-izu}du = \frac{1}{r}\frac{e^{i(x-z)r}-1}{i(x-z)}.$$

По построению $f(z) = 1$, поэтому

$$rm_r(\mu, z) \leqslant r\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, d\mu(x) = r\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{i(x-z)r}-1}{r(x-z)}\right|^2 d\mu(x) = F_r(z).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем числа N и r, так, чтобы для $h < \frac{N}{a}$ выполнялось

$$\frac{1}{2h}\mu([z-h, z+h]) < \mu'(z) + \varepsilon. \tag{20}$$

Введем в рассмотрение три множества

$$S_1 = \left\{|x-z| < \frac{N}{r}\right\}, \quad S_2 = \left\{\frac{N}{r} \leqslant |x-z| < 1\right\}, \quad S_3 = \{1 \leqslant |x-z|\}.$$

Обозначим $F_i = r\int_{S_i}|f(x)|^2 d\mu(x)$, тогда

$$F_r(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z).$$

Оценим каждое слагаемое F_i по отдельности.

$$F_3(z) = r\int_{S_3}\left|\frac{e^{i(x-z)r}-1}{r(x-z)}\right|^2 d\mu(x) \leqslant \frac{1}{r}\int_{S_3}\frac{4}{(x-z)^2}d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{r}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(x-z)^2+1}d\mu(x) = \frac{c_2(z)}{r} \tag{21}$$

Слагаемое F_2 оценим через L^∞ норму подынтегрального выражения

$$F_2(z) = r\int_{S_2}\left|\frac{e^{i(x-z)r}-1}{r(x-z)}\right|^2 d\mu(x) \leqslant \frac{1}{r}\int_{S_2}\frac{4}{(x-z)^2}d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{r}\mu(S_2)\sup_{S_2}\frac{1}{(x-z)^2} \leqslant \frac{4\mu([-1+z,1+z])}{r(N/r)^2} = c_3(z)\cdot\frac{r}{N^2}. \tag{22}$$

Остается слагаемое F_1. Обозначим

$$H_N(x) = \left|\frac{e^{ix}-1}{x}\right|^2 \mathbf{1}_{\{\frac{1}{\varepsilon}<|x|<N\}},$$
$$S_\varepsilon(x) = \left|\frac{e^{ix}-1}{x}\right|^2 \mathbf{1}_{\{|x|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\}}.$$

Тогда

$$F_1(z) = r\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon((x-z)r) + H_N((x-z)r)d\mu(x)$$
$$= r\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon((x-z)r)d\mu(x) + r\int_{\mathbb{R}} H_N((x-z)r)d\mu(x). \tag{23}$$

Оценим слагаемые по отдельности. Рассмотрим функцию

$$V_{\varepsilon,N}(x) = \min\left\{4\varepsilon^2, \frac{4}{x^2}\right\}\mathbf{1}_{\{|x|<N\}}.$$

Графики функций $V_{\varepsilon,N}$ и H_N изображены на рисунке 1. При всех $z\in\mathbb{R}$ выполнено

$$H_N(z) \leqslant V_{\varepsilon,N}(z),$$
$$r\int_{\mathbb{R}} H_N((x-z)r)d\mu(x) \leqslant r\int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}((x-z)r)d\mu(x).$$

Функция $V_{\varepsilon,N}$ кусочно-непрерывная, поэтому ее интеграл равен пределу верхних сумм Дарбу по измельчающимся разбиениям. Функция симметричная и неубывающая на $[0,+\infty]$, поэтому можно считать, что все суммы Дарбу получаются из интегралов простых симметричных неубывающих на $[0,+\infty]$ функций. Обозначим класс этих функций через $\mathcal{P}$. На рисунке 2 изображено, как выглядят функции из $\mathcal{P}$. Легко видеть, что эти функции представимы в виде

$$P(x) = \sum_{i=1}^M b_i\mathbf{1}_{[-t_i,t_i]}(x), \quad t_i\leqslant N, 0<b_i.$$

Таким образом, интеграл $V_{\varepsilon,N}$ выражается в следующем виде:

$$\int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}(x)dx = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} P(x)dx \;\middle|\; P\in\mathcal{P}, P(x)\geqslant V_{\varepsilon,N}(x)\right\}.$$

Рассмотрим некоторое P, входящее в множество, по которому берется инфимум.

$$r\int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}((x-z)r)d\mu(x) \leqslant r\int_{\mathbb{R}} P((x-z)r)d\mu(x)$$
$$= r\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^M b_i\mathbf{1}_{[-t_i,t_i]}((x-z)r)d\mu(x) = r\sum_{i=1}^M b_i\cdot\mu\left([z-\frac{t_i}{r}, z+\frac{t_i}{r}]\right)$$
$$= \sum_{i=1}^M 2t_ib_i\cdot\frac{r}{2t_i}\mu\left([z-\frac{t_i}{r}, z+\frac{t_i}{r}]\right).$$

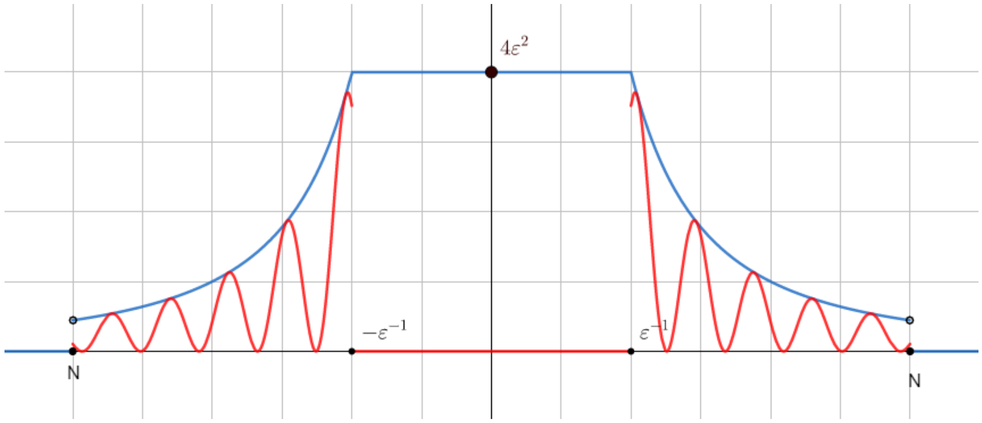

Рис. 1: Синим цветом изображен график $V_{\varepsilon,N}$, красным - график H_N.

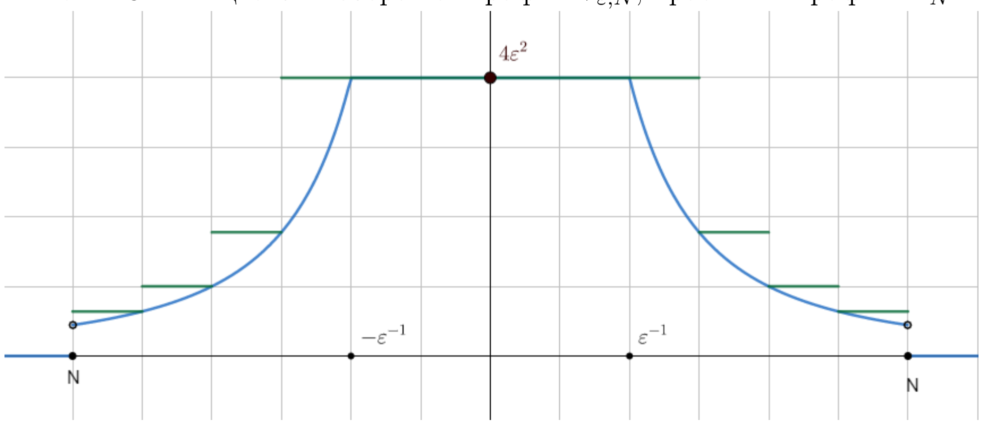

Рис. 2: Синим цветом изображен график $V_{\varepsilon,N}$, зеленым цветом изображен график простой функции из класса $\mathcal{P}$.

Каждое $t_i \leqslant N$, поэтому $\frac{t_i}{r} \leqslant \frac{N}{r}$, и из условия (20) имеем

$$\frac{r}{2t_i}\mu\left([z-\frac{t_i}{r}, z+\frac{t_i}{r}]\right) < \mu'(z)+\varepsilon,$$

$$r\int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}((x-z)r)d\mu(x) \leqslant \sum_{i=1}^{M} 2t_i b_i \cdot (\mu'(z)+\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} P(x)dx \cdot (\mu'(z)+\varepsilon).$$

Это выполнено для всех подходящих P, возьмем инфимум.

$$\begin{aligned} r\int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}((x-z)r)d\mu(x) \leqslant \inf_P \int_{\mathbb{R}} P(x)dx \cdot (\mu'(z)+\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} V_{\varepsilon,N}(x)dx \cdot (\mu'(z)+\varepsilon) < \\ < \int_{\mathbb{R}} \min\left\{4\varepsilon^2, \frac{4}{x^2}\right\} dx \cdot (\mu'(z)+\varepsilon) \\ = 8\left(\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \varepsilon^2 dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right) \cdot (\mu'(z)+\varepsilon) = 16\varepsilon(\mu'(z)+\varepsilon). \qquad (24)\end{aligned}$$

Функция S_ε кусочно-непрерывная симметричная с носителем в $[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, поэтому ее интеграл можно найти следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} S_\varepsilon(x)dx = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} P(x)dx \;\middle|\; P - \text{ простая, симметричная, } \operatorname{supp}(P) \subset [-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}], P(x) \geqslant S_\varepsilon(x)\right\}.$$

Выберем P, так, чтобы выполнялось

$$\int_{\mathbb{R}} P(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon(x)dx + \varepsilon,$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{M} c_i(\mathbf{1}_{[-b_i,-a_i]}(x) + \mathbf{1}_{[a_i,b_i]}(x)) = \sum_{i=1}^{M} c_i(\mathbf{1}_{[-b_i,b_i]}(x) - \mathbf{1}_{[-a_i,a_i]}(x)), \quad c_i > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon((x-z)r)d\mu(x) &\leqslant r\int_{\mathbb{R}} P((x-z)r)d\mu(x) \\ &= r\sum_{i=1}^{M} c_i \cdot \mu\left([z-\frac{b_i}{r}, z+\frac{b_i}{r}]\right) - r\sum_{i=1}^{M} c_i \cdot \mu\left([z-\frac{a_i}{r}, z+\frac{a_i}{r}]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} 2b_ic_i \cdot \frac{r}{2b_i}\mu\left([z-\frac{b_i}{r}, z+\frac{b_i}{r}]\right) - \sum_{i=1}^{M} 2a_ic_i \cdot \frac{r}{2a_i}\mu\left([z-\frac{a_i}{r}, z+\frac{a_i}{r}]\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Все b_i и a_i не превосходят ε^{-1}. Рассмотрим $\varepsilon_1 > 0$, его точное значение укажем позже. При достаточно больших a, для любого $h < \frac{1}{a\varepsilon}$ имеет место неравенство

$$\mu'(z) - \varepsilon_1 < \frac{1}{2h}\mu([z-h, z+h]) < \mu'(z) + \varepsilon_1.$$

С учетом этого, неравенство (25) приобретает вид

$$\begin{aligned} r\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon((x-z)r)d\mu(x) &\leqslant \sum_{i=1}^{M} 2b_ic_i(\mu'(z)+\varepsilon_1) - \sum_{i=1}^{M} 2a_ic_i \cdot (\mu'(z)-\varepsilon_1) \\ &= \mu'(z)\sum_{i=1}^{M}(2b_ic_i - 2a_ic_i) + \varepsilon_1\sum_{i=1}^{M} c_i(a_i+b_i) \\ &= \mu'(z)\int_{\mathbb{R}} P(x)dx + \varepsilon_1\sum_{i=1}^{M} c_i(a_i+b_i). \end{aligned} \tag{26}$$

Выберем ε_1 так, чтобы выполнялось

$$\varepsilon_1\sum_{i=1}^{M} c_i(a_i+b_i) < \varepsilon.$$

Тогда неравенство (26) примет вид

$$\begin{aligned} r\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon((x-z)r)d\mu(x) \leqslant \mu'(z)\int_{\mathbb{R}} P(x)dx + \varepsilon < \mu'(z)\left(\int_{\mathbb{R}} S_\varepsilon(x)dx + \varepsilon\right) + \varepsilon < \\ < \mu'(z)\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{ix}-1}{x}\right|^2 dx + \varepsilon\right) + \varepsilon = 2\pi\mu'(z) + \varepsilon(\mu'(z)+1). \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя (24) и (27) в (23), получаем

$$F_1(z) \leqslant 2\pi\mu'(z) + C(z)\varepsilon. \tag{28}$$

Собирая вместе неравенства (28), (22), (21), получаем, что при выбранных r, N выполнено

$$F_r(z) \leqslant 2\pi\mu'(z) + C(z)\varepsilon + \frac{c_3(z)r}{N^2} + \frac{c_2(z)}{r}.$$

Подставим $N = r^{2/3}$. Мы требовали условие (20), с такой подстановкой оно выполнено при всех достаточно больших r. Возьмем верхний предел по r, получится

$$\limsup F_r(z) \leqslant 2\pi\mu'(z) + C(z)\varepsilon, \quad r \to \infty.$$

Это выполнено для всех $\varepsilon > 0$, поэтому от ε можно избавиться. В итоге получаем

$$\limsup rm_r(z) \leqslant \limsup F_r(z) \leqslant 2\pi\mu'(z).$$

$\square$

3.2 Оценка убывания для функций из пространства Пэли-Винера

Множителями Вейерштрасса называется последовательность функций E_n, заданной следующей формулой:

$$E_n(z) = \begin{cases} (1-z) & n = 0, \\ (1-z)\exp\left(\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right) & n > 0. \end{cases}$$

Теорема. *(Теорема Адамара о факторизации)*
Пусть f - целая функция конечного порядка $\rho \geqslant 0$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ее корни с учетом кратности. Тогда f может быть представлена в виде

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=0}^{\infty} E_d\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

где $d \leqslant \rho$, и $g(z)$ - полином степени не более ρ.

Лемма 3. *Пусть f – функция из пространства PW_r, имеющая нули только на вещественной оси, и $f(0) \neq 0$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$ и для всех $\gamma > 0$ выполнено*

$$|f(t)| \leqslant |f(t+\gamma i)| e^{\gamma r}.$$

Доказательство. Обозначим через $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ нули f с учетом кратности. По условию, они вещественные. Функции из пространства Пэли-Винера имеют порядок 1, следовательно по теореме Адамара функция f допускает следующее представление:

$$f(z) = e^{c_1 z + c_2} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}.$$

Если $f(t) = 0$, то неравенство в лемме не нуждается в пояснении, иначе можем написать

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(t+\gamma i)}{f(t)}\right| &= \left|e^{c_1 \cdot \gamma i}\right| \prod_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1 - \frac{t+\gamma i}{a_k}}{1 - \frac{t}{a_k}} e^{\frac{\gamma i}{a_k}}\right| = \left|e^{c_1 \cdot \gamma i}\right| \prod_{k=0}^{\infty} \left|\frac{a_k - t - \gamma i}{a_k - t}\right| \\ &= \left|e^{c_1 \cdot \gamma i}\right| \prod_{k=0}^{\infty} \left|1 - \frac{\gamma i}{a_k - t}\right| = e^{-\operatorname{Im}(c_1)\gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left|1 + \frac{\gamma^2}{(a_k - t)^2}\right|^{1/2} \geqslant e^{-\operatorname{Im}(c_1)\gamma}. \end{aligned} \tag{29}$$

Выберем большое натуральное число N и подставим $z = -iN$.

$$\begin{aligned} |f(-iN)|^2 &= \left|e^{-c_1 iN + c_2} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{-iN}{a_k}\right) e^{\frac{-iN}{a_k}}\right|^2 \\ &= e^{2\operatorname{Re} c_2} e^{2N \operatorname{Im} c_1} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{N^2}{a_k^2}\right) \geqslant e^{2N \operatorname{Im} c_1 + 2\operatorname{Re} c_2} \end{aligned}$$

Функция из PW_a имеет экспоненциальный тип не более r, поэтому

$$r \geqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{\log|f(-iN)|}{N} \geqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{N \operatorname{Im} c_1 + \operatorname{Re} c_2}{N} = \operatorname{Im} c_1.$$

Это неравенство вместе с неравенством (29) дает требумое в лемме. $\square$

3.3 Нижняя оценка

Во всех утверждениях этого параграфа считаем, что мера μ лежит в классе Сеге на вещественной прямой. Нам будет удобно рассмотреть функцию Сеге D, определенную равенством

$$D(z) = \left(\sqrt{2\pi}\Pi(z)\right)^{-1}. \tag{30}$$

Из формулы (7) следует, что для почти всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|D(z)|^2 = \mu'(z). \tag{31}$$

С учетом последнего равенства для получения неравенства (19), а вместе с ним и доказательства Теоремы 4, достаточно доказать, что для почти всех $z \in \mathbb{R}$

$$\liminf rm_r(\mu, z) \geqslant 2\pi|D(z)|^2.$$

Если мы докажем это неравенство для всех абсолютно непрерывных относительно меры Лебега на прямой мер μ, то оно автоматически докажется для всех мер, потому что добавление сингулярной части разве что увеличивает значение функции m_r. С этого момента считаем, что

$$d\mu(x) = |D(x)|^2 dx.$$

Введем несколько ограничений на точку z. Во-первых, предположим, что z - точка Лебега функции D, что означает выполнение условия

$$\frac{1}{h} \int\limits_{|x-z|<h} |D(x) - D(z)| dx \to 0, \quad h \to 0. \tag{32}$$

Во-вторых, будем считать, что D имеет некасательные граничные значения в точке z. Первое условие выполнено на множестве полной меры Лебега, это общее свойство функций из пространства L^1. В параграфе 1.2 было отмечено, что функция $\frac{D(\lambda)}{\lambda+i}$ лежит в пространстве Харди в верхней полуплоскости, из чего следует, что второе условие тоже выполнено почти всюду по мере Лебега на вещественной прямой, доказательство можно найти в [4].

Во всех последующих рассуждениях будем предполагать, что точка z удовлетворяет двум описанных выше условиям. Кроме того, не умаляя общности, считаем $z = 0$. Из того, что f_r реализует значение $m_r(\mu, 0)$ следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f_r(x)D(x)|^2 \, dx = m_r(0)|f_r(0)|^2. \tag{33}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших r выполнено

$$rm_r(\mu, 0) > (2\pi - 100\varepsilon)|D(0)|^2. \tag{34}$$

Дополнительно будем считать, что

$$rm_r(\mu, 0) < 2\pi|D(0)|^2, \tag{35}$$

потому что иначе желаемое неравенство в объяснении не нуждается. Далее в доказательстве будут выбраны достаточно большое число $b(\varepsilon)$ и достаточно большое число $r(\varepsilon, b)$. Все формальные условия на “достаточно большое” будут появляться по ходу рассуждения.

3.3.1 Технические леммы

Лемма 4. *Для всех $t \in \mathbb{R}$ и для всех $\gamma > 0$ выполнено*

$$|f_r(t)| \leqslant |f_r(t+\gamma i)|e^{\gamma r}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что f_r удовлетворяет всем условиям леммы 3. Функция f_r лежит в пространстве Пэли-Винера по лемме A. Вспомним, что по определению

$$f_r(\lambda) = \frac{K_r(0,\lambda)}{K_r(0,0)}, \text{ где } K_r(\lambda',\lambda) = \int_0^r \overline{P(s,\lambda')}P(s,\lambda)ds.$$

Видно, что $f_r(0) = 1$, поэтому нетривиальным остается только вопрос отсутствия корней вне вещественной прямой. Докажем это от противного. Пусть нашлось число $\lambda \notin \mathbb{R}$, такое, что $f_r(\lambda) = 0$. Тогда

$$K_r(0,\lambda) = \int_0^r \overline{P(s,0)}P(s,\lambda)ds = 0,$$

и из формулы Кристоффеля-Дарбу (9) получается

$$\begin{gathered} P(r,\lambda)\overline{P(r,0)} - P_*(r,\lambda)\overline{P_*(r,0)} = 0, \\ |P(r,\lambda)P(r,0)| = |P_*(r,\lambda)P_*(r,0)|. \end{gathered}$$

Последнее противоречит Следствиям 2 и 3 из формулы Кристоффеля-Дарбу. □

Лемма 5. *Для всех точек z из верхней полуплоскости выполнено неравенство*

$$|f_r(z)D(z)| \leqslant K_r(0,0)^{-\frac{1}{2}}(4\pi \operatorname{Im}(z))^{-\frac{1}{2}},$$

в частности, функция f_rD ограничена в любой полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im}(z) > c\}$ при всех положительных c.

Доказательство.

$$\begin{aligned} |f_r(z)| &= \left|\frac{K_r(0,z)}{K_r(0,0)}\right| = \left|\frac{\int_0^r \overline{P(s,0)}P(s,z)ds}{\int_0^r |P(s,0)|^2\,ds}\right| \leqslant \frac{\left(\int_0^r |P(s,0)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^r |P(s,z)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^r |P(s,0)|^2\,ds} \leqslant \\ &\leqslant K_r(0,0)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{|\Pi(z)|^2}{2\operatorname{Im}(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(30)}{=} K_r(0,0)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\operatorname{Im}(z)\cdot 2\pi|D(z)|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= K_r(0,0)^{-\frac{1}{2}}\left(4\pi \operatorname{Im}(z)\right)^{-\frac{1}{2}}|D(z)|^{-1}. \end{aligned}$$

Неравенство во второй строчке получается из Следствия 4. Умножая последнее выражение на $|D(z)|$, получаем требуемое. □

Лемма 6. *Для любого $z \in \mathbb{C}_+$ верно*

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x)D(x)}{x-z}dx = f_r(z)D(z), \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x)D(x)}{x+z}dx = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Замечание. Если бы функция f_rD лежала в некотором пространстве Харди H^p при $p \geqslant 1$, утверждение леммы являлось бы известным фактом, изложенным, например, на странице 116 в книге Кусиса [5]. В нашем случае это не так, но дополнительно f_rD удовлетворяет условию “ограниченности” из Леммы 5.

Доказательство. В параграфе 1.2 отмечалось, что функция $\frac{c\Pi(z)^{-1}}{z+i} = \frac{D(z)}{z+i}$ лежит в пространстве Харди H^2. При $z \in \mathbb{C}_+$ отношение $\frac{x+z}{x+i}$ ограничено по модулю, поэтому из того, что $\frac{D(x)}{x+i}$ лежит в H^2 следует, что $\frac{D(x)}{x+z}$ лежит в H^2. Функция f_r лежит в пространстве Пэли-Винера, а, значит, также лежит в H^2. Следовательно, написанные в лемме интегралы абсолютно сходится и задают аналитические функции в $\mathbb{C}_+$. Кроме того, $f_r(x)\frac{D(x)}{x+z}$ является произведением двух функций из H^2, и следовательно лежит в пространстве H^1. Интеграл по вещественной оси функции из H^1 равен 0, доказательство этого классического факта можно найти в книге П. Кусиса [5] на странице 122 или в книге Дж. Гарнетта [4] в лемме 3.7. Таким образом, второе равенство из леммы выполнено.

Рассмотрим Функцию $G_\varepsilon(z) = f_r(z+\varepsilon i)D(z+\varepsilon i)$, по лемме 5 она ограничена в верхней полуплоскости. Из соображений, аналогичных предыдущему абзацу, для всех $z \in \mathbb{C}_+$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{G_\varepsilon(x)}{x+z}dx = 0.$$

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x+\varepsilon i)D(x+\varepsilon i)}{x-z}dx &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{G_\varepsilon(x)}{x-z}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{G_\varepsilon(x)}{x-z}dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{G_\varepsilon(x)}{x+z}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Последний интеграл можно найти интегрированием по вычетам. Возьмем большое положительное число R и рассмотрим контур C_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и лежащего в $\mathbb{C}_+$ полукруга Γ_R, соединяющего точки R и $-R$.

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(z) = \mathrm{Res}_z\left(\frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[-R,R]} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx. \end{aligned} \tag{38}$$

Рассмотрим эти два слагаемых:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[-R,R]} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx.$$

Функция G_ε ограничена по Лемме 5, поэтому второе слагаемое стремится к нулю при $R \to \infty$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left|\frac{2zG_\varepsilon(Re^{i\theta})}{R^2e^{2i\theta}-z^2}\right| Rd\theta \leqslant \frac{R|z|}{R^2-|z|^2}\sup_\theta |G_\varepsilon(Re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Переходя к пределу по R в равенстве (38), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{2zG_\varepsilon(x)}{x^2-z^2}dx = G_\varepsilon(z),$$

и равенство (37) пробразуется в

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x+\varepsilon i)D(x+\varepsilon i)}{x-z}dx = G_\varepsilon(z) = f_r(z+i\varepsilon)D(z+i\varepsilon).$$

Для доказательства равенства (36), остается перейти к пределу по ε. Правая часть равенства стремится к $f_r(z)D(z)$, поэтому достаточно оценить, насколько левая часть отличается от интеграла из условия леммы. Проделаем это.

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x+\varepsilon i)D(x+\varepsilon i)}{x-z}dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x)D(x)}{x-z}dx\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f_r(x+i\varepsilon)\frac{D(x+\varepsilon i)-D(x)}{x-z}dx + \int_{\mathbb{R}} D(x)\frac{f_r(x+i\varepsilon)-f_r(x)}{x-z}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f_r(x+i\varepsilon)\frac{D(x+\varepsilon i)-D(x)}{x-z}\right| dx + \int_{\mathbb{R}} \left|D(x)\frac{f_r(x+i\varepsilon)-f_r(x)}{x-z}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \|f_r(x+\varepsilon i)\|_2 \cdot \left\|\frac{x+i}{x-z}\right\|_\infty \left\|\frac{D(x+\varepsilon i)-D(x)}{x+i}\right\|_2 + \|f_r(x+i\varepsilon)-f_r(x)\|_2 \cdot \left\|\frac{x+i}{x-z}\right\|_\infty \left\|\frac{D(x)}{x+i}\right\|_2$$

$$\leqslant C\left(\left\|\frac{D(x+\varepsilon i)-D(x)}{x+i}\right\|_2 + \|f_r(x+i\varepsilon)-f_r(x)\|_2\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\left\|\frac{D(x+\varepsilon i)}{x+\varepsilon i+i} - \frac{D(x+\varepsilon i)}{x+i}\right\|_2 + \left\|\frac{D(x+\varepsilon i)}{x+\varepsilon i+i} - \frac{D(x)}{x+i}\right\|_2 + \|f_r(x+i\varepsilon)-f_r(x)\|_2\right)$$

Первое слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\left\|\frac{D(x+\varepsilon i)}{x+\varepsilon i+i} - \frac{D(x+\varepsilon i)}{x+i}\right\|_2 = \varepsilon\left\|\frac{D(x+\varepsilon i)}{(x+\varepsilon i+i)(x+i)}\right\|_2 \leqslant \varepsilon\left\|\frac{D(x)}{x+i}\right\|_2 \to 0.$$

Второе и третье слагаемые в скобке стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, это общее свойство функций из пространства H^2, его доказательство можно найти, например, в Теореме 3.1 в [4] или в параграфе 19.2 в [7]. $\square$

Лемма 7. *При фиксированном b и при всех достаточно больших r для всех $t \in [-\frac{b}{r}, \frac{b}{r}]$ выполнено*

$$|f_r(t)| \leqslant 2\sqrt{2}e\pi|f_r(0)| < 25|f_r(0)|.$$

Доказательство. Точка $t+i/r$ находится в конусе $K = \{z\colon b|\operatorname{Im}(z)| \geqslant \operatorname{Re}(z)\}$. По предположению, в точке 0 существует некасательное граничное значение. Значит, существует предел внутри конуса K, и при достаточно больших r выполнено

$$\left|D\left(t+\frac{i}{r}\right)\right| > \frac{|D(0)|}{2}. \tag{39}$$

По Лемме 6,

$$\left|f_r\left(t+\frac{i}{r}\right)D\left(t+\frac{i}{r}\right)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{f_r(x)D(x)}{x-(t+\frac{i}{r})}dx\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_r(x)D(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+\frac{1}{r^2}}dx =$$

$$\overset{(33)}{=} m_r(0)|f_r(0)|^2 \cdot \pi r \overset{(35)}{\leqslant} 2\pi^2|D(0)f_r(0)|^2.$$

Перенесем все, кроме $f_r(0)$, в одну часть, применим Лемму 4 для $\gamma = \frac{1}{r}$ и неравенство (39):

$$|f_r(0)| > \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{\left|D\left(t+\frac{i}{r}\right)\right|}{|D(0)|}\left|f_r\left(t+\frac{i}{r}\right)\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2}e^{-1}|f_r(t)| > \frac{1}{25}|f_r(t)|.$$

$\square$

3.3.2 Окончание доказательства

Вернемся к доказательству Теоремы 4, а точнее, к неравенству (34). Обозначим

$$H_r(x) = \frac{e^{-irx} - 1}{x}.$$

Утверждение. *Для всех положительных δ выполнено*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(x - \delta i)|^2 \, dx < 2\pi r. \tag{40}$$

Доказательство. Доказательство – прямое вычисление, нам понадобится формула преобразования Фурье функции $\frac{1}{x^2+1}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|w|}.$$

С ней значение интеграла легко вычисляется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(x - \delta i)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|e^{-r\delta} e^{irx} - 1\right|^2}{x^2 + \delta^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2r\delta} + 1 - e^{-r\delta}(e^{irx} + e^{-irx})}{x^2 + \delta^2} dx$$
$$= \frac{1}{\delta} \left[(e^{-2r\delta} + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} - e^{-r\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ir\delta y} + e^{-ir\delta y}}{y^2 + 1} dy \right]$$
$$= \frac{1}{\delta} \left[(e^{-2r\delta} + 1)\pi - 2e^{-r\delta} \pi e^{-r\delta} \right] = \pi \frac{1 - e^{-2r\delta}}{\delta} < 2\pi r$$

□

Далее в доказательстве считаем $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$. Имеют место следующие неравенства:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) H_r(x - \delta i) D(x) dx \right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_r(x) D(x)|^2 \, dx \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(x - \delta i)|^2 \, dx$$
$$\overset{(33)}{=} m_r(0) |f_r(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(x - \delta i)|^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant m_r(0) |f_r(0)|^2 2\pi r.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) H_r(x - \delta i) D(x) dx \right| \leqslant |f_r(0)| \sqrt{2\pi r m_r(0)} \tag{41}$$

Рассмотрим величины I, I_1, I_2, определенные равенствами

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) H_r(x - \delta i) D(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ir(x-\delta i)} f_r(x) D(x)}{x - \delta i} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_r(x) D(x)}{x - \delta i} dx = e^{-r\delta} I_2 - I_1.$$

По Лемме 6, имеет место равенство

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_r(x)D(x)}{x-\delta i}dx = 2\pi i f_r(\delta i)D(\delta i). \tag{42}$$

Дальнейшей целью будет оценка

$$|I_2| < 4\varepsilon f_r(0)D(0). \tag{43}$$

Предположим, что данная оценка получена, и выведем из нее желаемое неравенство (34). Из неравенства треугольника имеем

$$|I| \geqslant |I_1| - e^{-r\delta}|I_2| \geqslant |I_1| - |I_2|.$$

Применим к этому неравенству оценки (41), (43) и равенство (42).

$$|f_r(0)|\sqrt{2\pi r m_r(0)} \geqslant 2\pi|f_r(\delta i)D(\delta i)| - 4\varepsilon|f_r(0)D(0)|. \tag{44}$$

Функция D имеет некасательный предел в точке 0, мы выбирали $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$, поэтому при достаточно больших r

$$|D(i\delta)| > (1-\varepsilon)|D(0)|. \tag{45}$$

Кроме того, по лемме 4

$$|f_r(\delta i)| \geqslant e^{-r\delta}|f_r(0)| = e^{-\varepsilon}|f_r(0)| \geqslant (1-\varepsilon)|f_r(0)|. \tag{46}$$

Подставляя (45) и (46) в неравенство (44), получаем

$$\begin{aligned} |f_r(0)|\sqrt{2\pi r m_r(0)} &\geqslant 2\pi(1-\varepsilon)(1-\varepsilon)|f_r(0)D(0)| - 4\varepsilon|f_r(0)D(0)| \geqslant \\ &\geqslant (2\pi - (4+4\pi)\varepsilon + 2\pi\varepsilon^2)|f_r(0)D(0)| > (2\pi - 20\varepsilon)|f_r(0)D(0)|, \\ r m_r(0) &\geqslant \frac{(2\pi-20\varepsilon)^2}{2\pi}|D(0)|^2 > (2\pi - 100\varepsilon)|D(0)|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Таким образом, остается доказать оценку (43): Введем еще один интеграл $\tilde{I}_2$.

$$\tilde{I}_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(\frac{e^{-irx}f_r(x)}{x-\delta i}\right)} D(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irx}\overline{f_r(x)}}{x+\delta i}D(x)dx = 0.$$

Последнее равенство нуждается в обосновании. Функция f_r лежит в пространстве PW_r, поэтому существует $\varphi \in L^2[0,r]$, такая, что $f_r(x) = \int_0^r \varphi(t)e^{itx}dt$, поэтому

$$e^{irx}\overline{f_r(x)} = e^{irx}\int_0^r \overline{\varphi(t)}e^{-itx}dt = \int_0^r \overline{\varphi(t)}e^{i(r-t)x}dt = \int_0^r \overline{\varphi(r-t)}e^{itx}dt.$$

Таким образом, функция $e^{irx}\overline{f_r(x)}$ лежит в пространстве PW_r, следовательно в пространстве Харди H^2 на $\mathbb{R}$. Выше уже отмечалось, что функция $\frac{D(x)}{x+\delta i}$ тоже лежит в H^2. Получается, что

$$\frac{e^{irx}\overline{f_r(x)}D(x)}{x+\delta i} \in H^1.$$

Интеграл по вещественной оси функций из H^1 равен 0, на этот факт мы уже ссылались при доказательстве леммы 6, найти его можно, например, в книге Гарнетта [4] в лемме 3.7. Обозначим

$$K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon |x| > \frac{b}{r} \right\}, \quad K_2 = \mathbb{R} \setminus K_1.$$

Разобьем I_2 на два слагаемых и оценим каждое из них по отдельности.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} D(x) dx = \int_{K_1} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} D(x) dx + \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} D(x) dx = I_{21} + I_{22}.$$

Аналогично для $\tilde{I}_2$ введем интегралы $\tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}$. Выполнено тождество

$$I_2/D(0) = I_2/D(0) - \overline{\tilde{I}_2/D(0)} = I_{21}/D(0) + \left(I_{22}/D(0) - \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} dx \right) + \\ - \overline{\tilde{I}_{21}/D(0)} - \overline{\left(\tilde{I}_{22}/D(0) - \int_{K_2} \overline{\left(\frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} \right)} dx \right)}. \qquad (47)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части.

$$|I_{21}|^2 = \left| \int_{K_1} \frac{e^{-irx} f_r(x) D(x)}{x - \delta i} dx \right|^2 \leqslant \int_{K_1} |f_r(x) D(x)|^2 \, dx \int_{K_1} \left| \frac{e^{-irx}}{x - \delta i} \right|^2 dx$$

$$\int_{K_1} |f_r(x) D(x)|^2 \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_r(x) D(x)|^2 \, dx \overset{(33)}{=} m_r(0) |f_r(0)|^2$$

$$\int_{K_1} \left| \frac{e^{-irx}}{x - \delta i} \right|^2 dx = \int\limits_{|x| > \frac{b}{r}} \frac{1}{x^2 + \delta^2} dx \leqslant 2 \int_{\frac{b}{r}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2r/b.$$

Таким образом,

$$|I_{21}|^2 \leqslant m_r(0) |f_r(0)|^2 \frac{2r}{b} \leqslant \frac{2}{b} |f_r(0)|^2 \left(r m_r(0) \right) \overset{(35)}{\leqslant} \frac{4\pi}{b} |f_r(0) D(0)|^2.$$

Выберем b так, чтобы $b > \frac{4\pi}{\varepsilon^2}$, тогда выполнено $\frac{4\pi}{b} \leqslant \varepsilon^2$. Подставляя это в последнее неравенство, получаем

$$\frac{|I_{21}|}{|D(0)|} \leqslant \varepsilon |f_r(0)|. \qquad (48)$$

Аналогично оценивается $\overline{\tilde{I}_{21}/D(0)}$.

Оставшиеся два слагаемых в (47) тоже оцениваются одинаково, проделаем вычисления для одного из них.

$$\left| \frac{I_{22}}{D(0)} - \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} dx \right| = \frac{1}{|D(0)|} \left| \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} D(x) dx - \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} D(0) dx \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|D(0)|} \sup_{K_2} \left| \frac{f_r(x)}{x - \delta i} \right| \int_{K_2} |D(x) - D(0)| dx.$$

В Лемме 7 доказано, что $|f_r(x)| < 25 |f_r(0)|$ для $x \in K_2$. Вспомним, что изначально мы предполагали, что 0 является точкой Лебега функции D, то есть выполнено условие (32). Выберем настолько большое число r, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{K_2} |D(x) - D(0)| dx = \int\limits_{|x| < \frac{b}{r}} |D(x) - D(0)| dx < \frac{b}{r} \frac{\varepsilon^2}{25b} |D(0)|.$$

Из последних двух неравенств получаем

$$\left|\frac{I_{22}}{D(0)} - \int_{K_2} \frac{e^{-irx} f_r(x)}{x - \delta i} dx\right| \leqslant \frac{1}{|D(0)|} \cdot \frac{25|f_r(0)|}{\delta} \cdot \frac{b}{r} \frac{\varepsilon^2}{25b} |D(0)| = \frac{\varepsilon^2}{\delta r} |f_r(0)| = \varepsilon |f_r(0)|. \qquad (49)$$

Оценка (43) теперь получается подстановкой неравенств (48), (49) и парных к ним для $\tilde{I}_2$ в тождество (47).

4 Приложения

4.1 Вывод Теоремы D

Сформулируем более общую теорему.

Теорема H (Р. Бессонов, С. Денисов, Теорема 1, [1])**.** *Симметричная мера μ лежит в классе Сеге тогда и только тогда, когда существует порожденный мерой μ диагональный гамильтониан $\mathcal{H} = diag(h_1, h_2)$, такой, что $\sqrt{det \mathcal{H}} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$ и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+2}} h_1(s) ds \cdot \int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+2}} h_2(s) ds - 4 \right) < \infty,$$

где $\eta_k = \min\left\{ t \geqslant 0 \colon \int_0^t \sqrt{det \mathcal{H}(s)} ds = k \right\}$.

Для доказательства теоремы D приведем систему дифференциальных уравнений (3) к канонической системе с подходящим гамильтонианом. Перепишем систему дифференциальных уравнений в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} P \\ P_* \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} i\lambda & -a(r) \\ -a(r) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ P_* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P(0,\lambda) \\ P_*(0,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две функции

$$\varphi(r,\lambda) = \frac{\exp(-i\lambda r)}{2} \left[P(2r,\lambda) + P_*(2r,\lambda) \right], \quad \varphi(0,\lambda) = 1,$$
$$\psi(r,\lambda) = \frac{\exp(-i\lambda r)}{2i} \left[P(2r,\lambda) - P_*(2r,\lambda) \right], \quad \psi(0,\lambda) = 0.$$

Обозначим $A(r) = 2\int\limits_0^r a(2t) dt$. В параграфе 13 в [3] доказано, что $\varphi(\cdot,\lambda), \psi(\cdot,\lambda)$ являются собственными функциями для значения λ оператора Дирака $\mathcal{D} = J\frac{d}{dr} + Q(r)$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2a(2r) \\ -2a(2r) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A(r)' \\ -A(r)' & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$M(r) = \begin{pmatrix} \exp\left[-A(r)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[A(r)\right] \end{pmatrix},$$
$$H(r) = M(r)^2 = \begin{pmatrix} \exp\left[-2A(r)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[2A(r)\right] \end{pmatrix},$$

и рассмотрим следующую пару функций:

$$\begin{pmatrix} u(r,\lambda) \\ v(r,\lambda) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(r,\lambda) \\ \psi(r,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(r,\lambda) \exp\left[A(r)\right] \\ \psi(r,\lambda) \exp\left[-A(r)\right] \end{pmatrix}.$$

Утверждение.

$$J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}' = \lambda H\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Проделаем явно все вычисления.

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\varphi\exp[A]\\ \psi\exp[-A]\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\varphi'\exp[A] + A'\varphi\exp[A]\\ \psi'\exp[-A] - A'\psi\exp[-A]\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\exp[A] & 0\\ 0 & \exp[-A]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi' + A'\varphi\\ \psi' - A'\psi\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}\varphi' + A'\varphi\\ \psi' - A'\psi\end{pmatrix}.$$

Умножим обе части на J. Заметим, что $JM^{-1} = MJ$, поэтому

$$J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}' = JM^{-1}\begin{pmatrix}\varphi' + A'\varphi\\ \psi' - A'\psi\end{pmatrix} = MJ\begin{pmatrix}\varphi' + A'\varphi\\ \psi' - A'\psi\end{pmatrix}.$$
$$= M\left(J\begin{pmatrix}\varphi'\\ \psi'\end{pmatrix} + J\begin{pmatrix}A'\varphi\\ -A'\psi\end{pmatrix}\right) = M\left((-Q+\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right) =$$
$$= \lambda M\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \lambda M^2\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \lambda H\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

□

Известно, что спектральная мера, определенная в параграфе 1.2 порождает гамильтониан H. Остается заметить, что $det H(s) = 1$ при всех s, следовательно, для такого гамильтониана $\eta_k = k$, и теорема D следует из общей теоремы H явной подстановкой.

Список литературы

[1] Roman Bessonov and Sergey Denisov. A spectral Szego theorem on the real line. *Adv. Math.*, 359:106851, 41, 2020.

[2] S. A. Denisov. To the spectral theory of Kreĭn systems. *Integral Equations Operator Theory*, 42(2):166–173, 2002.

[3] Sergey A. Denisov. Continuous analogs of polynomials orthogonal on the unit circle and Kreĭn systems. *IMRS Int. Math. Res. Surv.*, pages Art. ID 54517, 148, 2006.

[4] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 96 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1981.

[5] Paul Koosis. *Introduction to H_p spaces*, volume 115 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. With two appendices by V. P. Havin [Viktor Petrovich Khavin].

[6] M. G. Kreĭn. Continuous analogues of propositions on polynomials orthogonal on the unit circle. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 105:637–640, 1955.

[7] B. Ya. Levin. *Lectures on entire functions*, volume 150 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Translated from the Russian manuscript by Tkachenko.

[8] Attila Máté, Paul Nevai, and Vilmos Totik. Szego's extremum problem on the unit circle. *Ann. of Math. (2)*, 134(2):433–453, 1991.

[9] Barry Simon. *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1*, volume 54 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Classical theory.

[10] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.

[11] Alexander Teplyaev. A note on the theorems of M. G. Krein and L. A. Sakhnovich on continuous analogs of orthogonal polynomials on the circle. *J. Funct. Anal.*, 226(2):257–280, 2005.