Санкт-Петербургский государственный университет

**Волкова Альбина Андреевна**

**Выпускная квалификационная работа**

# Оценки числа остовных деревьев графа

Образовательная программа
бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
профессор
факультета МКН СПбГУ,
доктор ф.-м. наук
Ф. В. Петров

Рецензент:
научный сотрудник
ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
кандидат ф.-м. наук
А. В. Пастор

Санкт-Петербург
2020

# Содержание

# 1 Введение

Для связного неориентированного графа $G = (V, E)$ будем обозначать за $\tau(G)$ количество остовных деревьев в этом графе. Верхние оценки для этой характеристики графа, которую иногда называют *сложностью графа*, не только представляют интерес с точки зрения теории, но и имеют важные приложения.

Например, количество остовных деревьев графа, описывающего некоторую коммуникационную сеть, позволяет судить о ее надежности и определять ее слабые места, то есть ребра, удаление которых приводит к максимальному уменьшению числа остовных деревьев [6]. Кроме того, оценки числа остовных деревьев имеют применение в статистике, конкретно в теории оптимального дизайна эксперимента [3].

Существует множество различных верхних оценок для числа остовных деревьев графа в терминах степеней вершин, количества ребер, количества вершин и других характеристик графа. Один из основных методов доказательства верхних оценок на $\tau(G)$ опирается на утверждение, известное как *матричная теорема Кирхгофа о деревьях* [1]. Напомним её формулировку.

*Лапласианом* графа $G = (V, E)$ называется оператор на пространстве $\mathbb{R}^V$ функций на $V$, сопоставляющий функции $f(v)$ функцию

$$(\Delta f)(v) = \deg(v) f(v) - \sum_{u : uv \in E} f(u).$$

Если пронумеровать вершины $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, то в естественном базисе матрица этого оператора имеет вид

$$a_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{если } i = j \\ -1, & \text{если } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матричная теорема о деревьях утверждает, что $\tau(G)$ может быть вычислено как алгебраическое дополнение любого элемента в матрице лапласиана графа $G$.

Нетрудно видеть, что такая матрица всегда сингулярна. Также известно [2], что $\tau(G)$ выражается посредством собственных чисел этой матрицы следующим образом

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i,$$

где $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1} > \mu_n = 0$ — собственные числа лапласиана $G$.

Таким образом, стоящая перед нами задача может быть сведена к оценке произведения ненулевых собственных чисел эрмитовой сингулярной матрицы. Одна из первых оценок [5], полученная с помощью этого подхода, выглядит следующим образом

$$\tau(G) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2|E|}\right). \tag{1}$$

Ключевая идея оценки выше заключается в применении неравенства о средних к нормализованным собственным числам. Другие современные продвижения относительно верхних оценок числа остовных деревьев можно найти в [9], также некоторый обзор дан в [8].

В данной работе мы сосредоточимся на оценке $\tau(G)$ для двудольных графов. Далее будем рассматривать связный конечный двудольный граф $G = (V, E)$, $n + m = |V|$, где $m$ и $n$ размеры долей. Степени вершин в первой доле обозначим как $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а во второй $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Кроме того, введем обозначения для произведения степеней вершин $D(G) = a_1 a_2 \dots a_n \cdot b_1 b_2 \dots b_m$.

В этих терминах для двудольного графа Эренборгом [7] была сформулирована гипотеза, согласно которой для любого двудольного графа выполняется оценка

$$\tau(G) \leq m^{-1} n^{-1} D(G). \tag{2}$$

Также в [7] доказывается точность данной оценки для графов Юнга. *Графом Юнга* мы будем называть двудольный граф, в котором вершины обеих компонент могут быть упорядочены таким образом, что если есть ребро $(a, b)$, то есть и все ребра $(a', b)$ и $(a, b')$ для $a' < a$ и $b' < b$ (см. рис. 1).

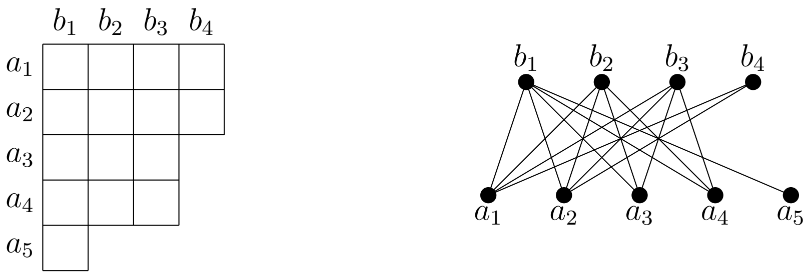


Рис. 1: Диаграмма Юнга и соответствующий ей граф Юнга.

В главе 2 мы приведем альтернативное доказательство утверждения о точности оценки (2) посредством индуктивного подсчета определителя.

К сожалению, справедливость гипотезы Эренборга на данный момент остается под вопросом. Известны лишь некоторые уточнения оценки (1), касающиеся двудольных графов. Например, в [8] была показана следующая верхняя оценка для двудольного связного графа

$$\tau(G) \le \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{m} b_i}{|E|}. \tag{3}$$

Глава 3 посвящена доказательству гипотезы Эренборга в случае односторонне регулярного графа (то есть графа, для которого все степени вершин хотя бы одной из компонент равны), а также обобщению этой оценки для бирегулярного графа, позволяющему оценить количество остовных деревьев с ограничениями на степень конкретной вершины.

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть $n$ натуральное число. $[n]$ обозначает множество $\{1, \ldots, n\}$; $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$; $e_{ij}$ — стандартные матричные единицы; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

# 2 Число остовных деревьев в графе Юнга

Оригинальное доказательство достижимости равенства в гипотезе Эренборга для графов Юнга из статьи [7] пользуется методами теории электрических цепей. Эта теория стоит у истоков задачи о числе остовных деревьев. В терминах электрических цепей также написана статья Кирхгофа [1], в которой впервые сформулирована матричная теорема о деревьях.

В данном разделе мы приведем альтернативное доказательство точности гипотезы, не использующее эту теорию. Сформулируем основное утверждение в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Для любого графа Юнга справедливо равенство*

$$\tau(G) = \frac{D(G)}{mn} \tag{4}$$

Для доказательства этого утверждения мы будем индуктивно вычислять определитель матрицы следующего вида:

$$
M = \left(\begin{array}{ccccc:cccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & \\
0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & -1 & & C & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -1 & & & & \\
\hdashline
 & & & & & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & C^T & & & 0 & 0 & \cdots & b_{m-1} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m
\end{array}\right) \tag{5}
$$

При этом строки упорядочены таким образом, что $a_2 \geq \cdots \geq a_n$ и симметрично $b_2 \geq \cdots \geq b_m$. Сумма чисел в каждой из строк со второй по $n$-ую, а также в каждом из последних $m-1$ столбцов равна нулю. Матрица $C$ является матрицей Юнга, то есть $-1$ в ее ячейках образуют диаграмму Юнга. Кроме того, первая строка матрицы $C$ состоит целиком из $-1$.

**Лемма 1.** *Определитель описанной выше матрицы $M$ равен* $\prod_{i=2}^{n} a_i \prod_{j=2}^{m} b_j$.

В первую очередь, покажем, каким образом теорема 1 следует из утверждения выше. Как уже было отмечено, алгебраическое дополнение любого элемента в лапласиане графа равно числу остовных деревьев. Согласно определению, мы всегда можем разместить строки и столбцы в лапласиане графа таким образом, что матрица приобретет следующий вид

$$
\begin{pmatrix} A & D \\ D^T & B \end{pmatrix} \tag{6}
$$

Здесь $A$ и $B$ диагональные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, а $D$ матрица Юнга, как и определенная в (5) матрица $C$. Более того, мы можем считать, что как минимум две первые строки матрицы $D$ состоят целиком из $-1$. Это соответствует тому, что в графе нет вершин степени один. Действительно, удаление вершин степени один никаким образом не влияет на число остовных деревьев, и правая часть равенства из теоремы 1 от такого преобразования также не изменится.

Таким образом, если мы рассмотрим дополнение элемента с координатами $(n+1, 1)$ в матрице (6), то мы получим матрицу вида (5). Тогда, согласно лемме 1, определитель такой матрицы будет равен

$$\prod_{i=2}^{n} a_i \prod_{j=2}^{m} b_j = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{m} b_j}{mn},$$

что соответствует утверждению теоремы, поскольку максимальные степени $a_1$ и $b_1$ в графе Юнга как раз равны числу вершин в противоположной доле, то есть $m$ и $n$ соответственно.

Теперь вернемся к доказательству самой леммы .

*Доказательство леммы 1.* Будем доказывать по индукции. Предположим, что утверждение леммы 1 выполнено, для любой матрицы вида (5), размер которой не превосходит $m+n-2$.

Рассмотрим максимальное $k$ такое, что во всех строках матрицы $M$ от первой до $k$-ой, количество минус единиц равно $m$. Ранее мы уже отметили, что $k \geq 2$.

Из всех строк со второй по $k$-ую вычтем первую строку матрицы. Теперь в этих строках останется по единственному ненулевому числу $a_2, a_3, \dots a_k$ соответственно. Таким образом, определитель искомой матрицы $M$ вычисляется как

$$\det(M) = \det(M_1) \prod_{i=2}^{k} a_i,$$

где $M_1$ квадратная матрица размера $(n+m)-k$, которая получается из матрицы $M$ удалением строк со второй по $k$-ую и столбцов с первого по $(k-1)$-ый.

Далее обозначим за $l < m$ количество минус единиц в $(k+1)$-ой строке матрицы $M$. Тогда в матрице $M_1$ в каждой из последних $l$ строк есть всего по одному ненулевому элементу $b_{m-l+1}, \dots, b_m$ соответственно. Теперь можно избавится от этих строк и соответствующих им столбцов, получив новую квадратную матрицу $M_2$ вида (5) и размера $m+n-k-l$ (что строго меньше $m+n-1$, так как $k, l > 0$ по определению матрицы $M$), для которой выполняется соотношение

$$\det(M_1) = \det(M_2) \prod_{i=m-l+1}^{m} b_i.$$

$$
\begin{array}{cc}
\hfill \overbrace{\hphantom{-1 \quad \cdots \quad -1}}^{l} & \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & a_k & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & a_{k+1} & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_n & -1 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
-1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & * & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
-1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & b_{m-l} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m-l+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_m
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c} a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{array}}\right\} k \\
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

Рис. 2: Исходная матрица $M$ с выделенными блоками

Описанный переход от $M$ к $M_2$ проиллюстрирован на рис. 2 (области, не выделенные цветом, соответствуют матрице $M_2$). Отметим, что свойство гарантирующее, что в двух первых строках матрицы $M_2$ одинаковое количество $-1$, сохраняется, так как мы оставляем неизменной первую строку исходной матрицы $M$.

Таким образом, мы можем применить к матрице $M_2$ предположение индукции. Откуда найдем определитель исходной матрицы

$$
\det(M) = \det(M_2) \prod_{i=2}^{k} a_i \prod_{j=m-l+1}^{m} b_j = \prod_{i=2}^{n} a_i \prod_{j=2}^{m} b_j
$$

Полученное равенство точно соответствует утверждению леммы. $\square$

## 3 Оценки для графов с регулярностью

В данной главе мы покажем справедливость гипотезы Эренборга (2) для односторонне регулярного графа. Существующие на данный момент оценки в терминах числа ребер, например (3), не дают достаточно хорошего приближения гипотезы, в случае когда число ребер в графе мало относительно максимально возможного.

Раздел 3.2 этой главы посвящен оценке числа остовных деревьев бирегулярного графа с ограничением на степень конкретной вершины. Этот вопрос является естественным обобщением основной задачи, поскольку общее число деревьев равно сумме коэффициентов производящего многочлена $\tau(G)$ по наборам степеней дерева, а в данном разделе мы пытаемся оценить частичные суммы коэффициентов этого многочлена.

## 3.1 Гипотеза Эренборга для односторонне регулярных графов

Сформулируем основной результат в виде теоремы.

**Теорема 2.** *Для двудольного односторонне регулярного графа $G$ выполнено неравенство*

$$\tau(G) \leqslant \frac{D(G)}{mn}.$$

В доказательстве основной теоремы нам потребуется следующая техническая лемма, которая в более общем виде была доказана в [4].

**Лемма 2.** *Пусть $A$ неотрицательно определенная сингулярная эрмитова матрица размера $n\times n$. Обозначим $(A|(i,i))$ матрицу порядка $n-1$, полученную из $A$ удалением $i$-ой строки и $i$-ого столбца, тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \det(A|(i,i)) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{7}$$

*Доказательство.* Если один из диагональных элементов $a_{kk}$ матрицы $A$ равен 0, то $0 = \langle Ae_k, e_k\rangle = \langle\sqrt{A}e_k, \sqrt{A}e_k\rangle$, откуда $\sqrt{A}e_k = 0$ и $Ae_k = \sqrt{A}\cdot\sqrt{A}e_k = 0$. То есть в матрице $A$ равны 0 все элементы $k$-й строки и $k$-го столбца. Отсюда все слагаемые в левой части (7) равны 0 и (7) доказано.

Пусть теперь $a_{kk} > 0$ больше при всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим $B = DAD$, где $D$ диагональная матрица, для которой $d_{ii} = 1/\sqrt{a_{ii}}$. Тогда $b_{ii} = 1$ для любого $i$, а исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} \det(B|(i,i)) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Обозначим собственные числа матрицы $B$ за $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n = 0$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n}(\beta_i - t) = \det(B - tI) = \det(B) - t\sum_{i=1}^{n}\det(B|(i,i)) + \dots,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}\det(B|(i,i)) = \beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1} \leq \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

□

Таким образом, мы умеем получать оценку необходимого нам минора порядка $n-1$ через произведение диагональных элементов.

*Доказательство теоремы 2.* Пронумеруем вершины $G$ так, чтобы диагональные элементы матрицы лапласиана $A_G$ были расположены в следующем порядке: $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$. Для квадратной матрицы $X$ порядка $m+n$ определим следующее преобразование.

$$S_{i,j}(X) = T_{n+j,i}\left(\frac{1}{b_j}\right) X T_{i,n+j}\left(\frac{1}{b_j}\right),$$

где $T_{i,j}(\lambda) = I + \lambda e_{ji}$ обозначает трансвекцию.

Для каждой пары позиций матрицы $A_G$ вида $(i, n+j)$, где $i \in [n]$, $j \in [m]$, в которой стоит $-1$, применим $S_{i,j}$ к матрице $A_G$ поочередно. Полученная в итоге матрица останется неотрицательно определенной, симметричной и сингулярной. После применения всех таких преобразований новая матрица $\widehat{A_G}$ будет иметь следующий вид

$$\widehat{A_G} = \left(\begin{array}{ccc:cccc} & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & C & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_m \end{array}\right)$$

Описанные преобразования осуществляют обнуление правого верхнего и левого нижнего блоков, после чего нас интересует только устройство матрицы $C$ размера $n \times n$. Проследив за трансвекциями, можно заметить

$$c_{ij} = \begin{cases} a_i - \sum\limits_{k:(i,k)\in E} \frac{1}{b_k}, & \text{если } i = j \\ -\sum\limits_{\substack{k:(i,k)\in E \\ (j,k)\in E}} \frac{1}{b_k}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Как и $\widehat{A_G}$, матрица $C$ неотрицательно-определенна, сингулярна и симметрична, а значит мы можем применить к ней лемму 2, откуда получим оценку

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} \det(C|(i,i)) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} c_{ii}. \tag{8}$$

В произведенных матричных преобразованиях мы вычитали только строки и столбцы второй компоненты из строк из столбцов первой, поэтому все $\det(C|(i,i))$ по прежнему равны между собой, и $\tau(G) = \det(C|(i,i)) \prod_{j=1}^{m} b_j$. Таким образом, неравенство (8) можно переписать в виде

$$\tau(G) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - \sum_{(i,k)\in E} \frac{1}{a_i b_k})}{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \sum_{(i,k)\in E} \frac{1}{b_k})} \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{m} b_j. \tag{9}$$

До этого момента мы не пользовались условием о регулярности, а сейчас пришло время это сделать. Перепишем число ребер в виде $|E| = \varepsilon mn$, где $\varepsilon \in [0,1]$, тогда, не умаляя общности, будем считать, что вторая компонента регулярна, то есть $b_j = \varepsilon n$ для любого $j \in [m]$, после чего неравенство (9) можно упростить:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{(1 - \frac{1}{\varepsilon n})^n}{m(\varepsilon n - 1)} \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{m} b_j = \\ &= \frac{(\varepsilon n - 1)^{n-1}}{\varepsilon^n (n-1)^{n-1}} \frac{D(G)}{mn}. \end{aligned} \tag{10}$$

Осталось показать, что получившийся при $\frac{D(G)}{mn}$ коэффициент не превосходит единицы. Для этого сначала проверим, что выражение $\frac{(\varepsilon n-1)^{n-1}}{\varepsilon^n (n-1)^{n-1}}$ возрастает по $\varepsilon$:

$$\left(\frac{(\varepsilon n-1)^{n-1}}{\varepsilon^n}\right)' = \left(\frac{(\varepsilon n-1)^{n-2}}{\varepsilon^{n+1}}\right)(\varepsilon(n-1)n-(\varepsilon n-1)n) = \\ = \left(\frac{(\varepsilon n-1)^{n-2}}{\varepsilon^{n+1}}\right)(1-\varepsilon)n \geq 0. \tag{11}$$

Последнее неравенство имеет место при $1/n \leq \varepsilon \leq 1$, что соответствует имеющимся ограничениям, поскольку $1 \leq b_j = \varepsilon n \leq n$. Теперь нам достаточно будет рассмотреть крайний случай $\varepsilon = 1$. В этом случае как раз достигается равенство единице.

□

## 3.2 Обобщение оценки Эренборга для бирегулярного графа

В данной главе мы, пользуясь техникой доказательства теоремы 2, обобщаем её утверждение для оценки числа остовных деревьев с ограничениями на степень конкретной вершины. Однако данное обобщение возможно лишь для графа, регулярного в обеих компонентах.

Итак, далее мы будем рассматриваем двудольный бирегулярный граф $G = (V, E)$, в котором размер первой доли равен $n$, а второй $m$. Обозначим за $a$ степень вершины из первой доли, а из второй за $b = an/m$. Пусть $v$ произвольная вершина из второй доли. Обозначим $\tau^v_{>k}(G)$ число остовных деревьев графа $G$, в которых вершина $v$ имеет степень строго больше $k$. Аналогично, $\tau^v_{\leq k}(G)$ будет обозначать число остовных деревьев графа $G$, в которых вершина $v$ имеет степень не превосходящую $k$.

**Теорема 3.** *Пусть $k = \theta \cdot b/a$ — натуральное число, меньшее $b$. Тогда в вышеописанных предположениях справедливы следующие оценки.*

*(i) Если $\theta \geq 1$, то $\tau^v_{>k}(G) \leq \left(\theta^{-1}\exp\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\right)^k \frac{a^n b^m}{mn}$*

*(ii) Если $\theta \leq 1$, то $\tau^v_{\leq(k+1)}(G) \leq \left(\theta^{-1}\exp\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\right)^k \frac{a^n b^m}{(m-1)n}$,*

Для доказательства этой теоремы мы будем использовать ту же технику оценки определителя, что и в теореме 2, однако в этот раз нам понадобится следующее обобщение теоремы Кирхгофа о деревьях.

**Теорема.** *(Обобщенная теорема Кирхгофа) Для произвольного графа $G = (V, E)$ обобщенным Лапласианом будем называть матрицу $A_G$, зависящую от свободных переменных $x_1, \dots x_{|V|}$, определенную следующим* *образом*

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{(i,k)\in E} x_i x_k, & \textit{если } i = j \\ -x_i x_j, & \textit{если } v_i v_j \in E \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

*Для такой матрицы алгебраические дополнения всех элементов равны как многочлены производящему многочлену $P_G$ для числа остовных деревьев по степеням, то есть для любой пары $(i, j)$ выполнено*

$$\det(A_G|(i,j)) = \sum_{t\in T_G} \prod_{i=1}^{|V|} x_i^{\deg_t(i)} =: P_G(x_1, \ldots, x_{|V|}). \tag{12}$$

*Здесь $T_G$ обозначает множество всех остовных деревьев графа $G$, а $\deg_t(i)$ степень $i$-ой вершины в дереве $t$.*

Нетрудно увидеть, что подстановка $x_1 = \cdots = x_{|V|} = 1$ дает обычную теорему Кирхгофа. С другой стороны, для весового графа с весом всякого ребра $v_i v_j$ равным $x_i x_j$ в (12) вычисляется сумма весов всех остовных деревьев. Обобщённый лапласиан соответствует квадратичной форме $\sum_{v_i v_j \in E} x_i x_j (f(v_i) - f(v_j))^2$ на пространстве $\mathbb{R}^V$, откуда сразу следует его неотрицательная определённость при неотрицательных значениях переменных $x_i$.

*Доказательство теоремы 3.* Предположим, что вершинам первой доли соответствуют переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а вершинам второй доли — $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Не умаляя общности, будем считать, что вершина $v$ соответствует переменной $y_1$. Подставим в производящий многочлен вместо каждой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_m$ единицу. Останется многочлен от одной переменной $y_1$.

Далее мы хотим поступить так же как в теореме 2 из предыдущего раздела и применить операции $S_{i,j}$ к обобщенному лапласиану, после чего воспользоваться леммой 2.

После описанной выше подстановки и до применения преобразований

$S_{i,j}$ матрица $A_G(y_1)$ в подходящем базисе может имеет следующий вид:

$$A_G(y_1) = \left(\begin{array}{ccc:ccc|c:ccc}
{\scriptstyle (a-1)+y_1} & \cdots & 0 & & & & -y_1 & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & 0 & & \vdots & & * & \\
0 & \cdots & {\scriptstyle (a-1)+y_1} & & & & -y_1 & & & \\
\hdashline
 & & & a & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & * & \\
 & & & 0 & \cdots & a & 0 & & & \\
\hline
-y_1 & \cdots & -y_1 & 0 & \cdots & 0 & by_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
 & & & & & & 0 & b & \cdots & 0 \\
 & * & & & * & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & 0 & \cdots & b
\end{array}\right)$$

Здесь вместо $*$, согласно определению, стоят $-1$ или $0$, причем сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю.

Далее, как и в теореме 2, поочередно применим преобразования $S_{i,j}$. Для оценки с использованием леммы 2 нас будут интересовать только диагональные элементы получившейся после преобразования матрицы. Выпишем их:

$$a_{ii} = \begin{cases} (1-\frac{1}{b})(y_1+(a-1)), & \text{при } 1 \le i \le b \\ (1-\frac{1}{b})a, & \text{при } b < i \le n \\ by_1, & \text{при } i = n+1 \\ b, & \text{при } n+1 < i \le m \end{cases}$$

К полученной матрице применим лемму 2 и получаем оценку для любого положительного $y_1$

$$P_G(y_1) \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \frac{(y_1+(a-1))^b a^{n-b}(1-\frac{1}{b})^n}{(1-\frac{1}{b})(by_1+b(a-1)+a(n-b))} b^m y_1.$$

Обозначим, как и в предыдущем доказательстве, $b = \varepsilon n$, тогда неравенство выше можно упростить, пользуясь соотношением $an = bm$, а также доказанной ранее оценкой $\frac{(\varepsilon n-1)^{n-1}}{\varepsilon^n (n-1)^{n-1}} < 1$ при $\varepsilon = b/n$:

$$P_G(y_1) \le \frac{(y_1+(a-1))^b a^{n-b} b^m y_1}{(y_1+(m-1))n} := Q(y_1).$$

Разложим по степеням $y_1$ многочлен $P_G(y_1) = c_b y_1^b + \dots + c_2 y_1^2 + c_1 y_1$ (свободный член у $P_G$ всегда нулевой). В этих терминах $\tau^v_{>k}(G) = \sum_{i=k+1}^{b} c_i$, и $\tau^v_{\le(k+1)}(G) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i$. Откуда, пользуясь тем, что все коэффициенты $P_G$ неотрицательны, получаем, что при любом $y_1 \ge 1$ справедлива оценка:

$$\begin{gathered}\tau^v_{>k}(G) = c_{k+1} + \dots + c_b \le \\ \le c_{k+1} + c_{k+2} y_1 + \dots + c_b y_1^{b-k-1} \le \frac{P_G(y_1)}{y_1^{k+1}} \le \frac{Q(y_1)}{y_1^{k+1}}.\end{gathered} \tag{13}$$

Аналогично, для $0 < y_1 \le 1$ выполнено

$$\tau^v_{\le k+1}(G) = c_1 + \dots + c_{k+1} \le \frac{P_G(y_1)}{y_1^{k+1}} \le \frac{Q(y_1)}{y_1^{k+1}}. \tag{14}$$

Для доказательства теоремы подставим $y_1 = 1 + \frac{a(\theta-1)}{(a-\theta)}$ в известный нам многочлен $\frac{Q(y_1)}{y_1^{k+1}}$, где $k = \theta b/a$. В первом утверждении теоремы выполнено условие $\theta \ge 1$ (и $\theta < a$ в обоих случаях), а значит такой $y_1$ будет не меньше единицы, и неравенство (14) имеет место. Аналогично, в случае $\theta \le 1$ имеет место (13). Таким образом, в обоих случаях нам необходимо оценить сверху выражение, полученное после подстановки:

$$\frac{(a-1)^{b-k}}{(a-\theta)^{b-k}\theta^k(\frac{a(\theta-1)}{m(a-\theta)}+1)}\frac{a^n b^m}{mn}. \tag{15}$$

Для первого утверждения теоремы имеем $\theta \ge 1$, а значит $\frac{a(\theta-1)}{m(a-\theta)} > 0$, и можем оценить (15) сверху, откуда получим оценку для $\tau^v_{>k}(G)$:

$$\tau^v_{>k}(G) \le \theta^{-k}\left(1 + \frac{(\theta-1)}{(a-\theta)}\right)^{(a-\theta)k/\theta}\frac{a^n b^m}{mn} \le \left(\theta^{-1}\exp\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\right)^k\frac{a^n b^m}{mn}.$$

Это соответствует утверждению теоремы. Кроме того, нетрудно убедиться, что выражение под степенью $k$ не превосходит единицы для любого $\theta > 0$. Таким образом, мы улучшили общую оценку из теоремы 2.

Теперь докажем второе утверждение. Поскольку $a \ge 1$ для любого $\theta \le 1$ имеем оценку

$$\frac{a(1-\theta)}{m(a-\theta)} < \frac{1}{m}.$$

Пользуясь этим неравенством, оценим (15) и, аналогично предыдущему пункту, получим:

$$\tau^v_{\le k+1}(G) \le \left(\theta^{-1}\exp\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\right)^k\frac{a^n b^m}{(m-1)n}.$$

Таким образом, оценка во втором случае отличается лишь на множитель $\frac{1}{(1-1/m)}$, который стремится к единице при увеличении размера соответствующей доли. $\square$

**Замечание.** *При $\theta = k = 0$ неравенство (ii) теоремы 3 для количества деревьев с висячей вершиной $v$ оказывается слишком грубым по сравнению с теоремой 2. Однако* (15) *даёт в этом случае верхнюю оценку $(1-1/a)^b \frac{a^n b^m}{(m-1)n}$, которая уже уточняет теорему 2 и, более того, точна для полного двудольного графа.*

# Список литературы


[1] G. Kirchhoff, *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. 148 (1847), pp. 497-508.

[2] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs. *Spectra of Graphs—Theory and Application*, Academic Press, New York (1980).

[3] C. Cheng, *Maximizing the total number of spanning trees in a graph: Two related problems in graph theory and optimization design theory*, J. Combinat. Theory B 31 (1981), pp. 240–248.

[4] B. Grone, *An inequality for the second immanant* Linear and Multilinear Algebra 18:2 (1985), pp. 147-152.

[5] R. Grone, R. Merris, *A bound for the complexity of a simple graph*, Discrete Math. 69 (1988), pp. 97-99.

[6] Tsen Fu-Shang, Sung Ting-Yi, Lin Men-Yang, Wendy Myrvold. *Finding the Most Vital Edges with Respect to the Number of Spanning Trees*, Reliability, IEEE Transactions on. 43 (1995), pp. 600-603.

[7] R. Ehrenborg, S. Willigenburg, *Enumerative properties of Ferrers graphs*, Disc. Comp.Geom. 32 (2004), pp. 481-492.

[8] Ş.B Bozkurt, *Upper bounds for the number of spanning trees of graphs*, J. Inequal. Appl. 2012 (2012), article no. 269.

[9] S. Klee, M. T. Stamps, *Linear algebraic techniques for spanning tree enumeration*, arXiv:1903.04973 (2019)