Санкт-Петербургский государственный университет

БЛИНОВА Дарья Игоревна

Выпускная квалификационная работа

Натянутые струны, сопровождающие случайные процессы и случайные блуждания

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2016 «Математика»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.
Лифшиц Михаил
Анатольевич

Рецензент:
д.ф.-м.н., проф.
Белопольская
Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2020

1 Введение

Пусть дан интервал времени $[0, T]$ и некоторые непрерывные функциональные границы $g_1(t) \leqslant g_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T$. Натянутой струной называется функция h_*, которая обладает свойством универсальности, а именно, для любой неотрицательной выпуклой функции $\phi(\cdot)$ функция h_* минимизирует функционал вида:

$$\int_0^T \phi(h'(s))ds$$

среди всех абсолютно непрерывных функций, имеющих заданное начальное и конечное значение и удовлетворяющих неравенствам:

$$g_1(t) \leqslant h(t) \leqslant g_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В данной работе мы будем рассматривать границы вида:

$$g_1(t) = W(t) + r_t,\ g_2(t) = W(t) - r_t,$$

где W – винеровский процесс, а r_t – ширина коридора в момент времени t.

Решение задачи минимизации для каждой отдельной функции $\phi(\cdot)$ существует, причём, для строго выпуклых функций ϕ решение этой задачи единственно. В нашем случае $\phi(x) = x^2$, поэтому проблема единственности отсутствует. Проблемы существования и единственности натянутых струн, а также их дискретных аналогов, рассматривались в работах [1], [5], [6], [11]–[12].

В работе [8] М.А. Лифшиц и Э. Сеттерквист исследовали энергию натянутых струн, сопровождающих винеровский процесс, но ширина коридора r_t была постоянной для любых t и T. Далее, в работе [9] М.А. Лифшиц и А.А. Сюняев исследовали натянутые струны, также сопровождающие винеровский процесс с постоянной шириной коридора, но существенное различие было в том, что ширина коридора менялась в зависимости от T, то есть от правого конца временного промежутка, на котором рассматривается данная конструкция. Строгие формулировки доказанных утверждений представлены в теоремах 2-4. Далее, в этой же работе М.А. Лифшиц и А.А. Сюняев показали аналогичных результат для натянутых струн, сопровождающих случайные ломаные. Цель данной работы – обобщить описанные выше результаты для натянутых струн с переменной шириной коридора, сопровождающих винеровский процесс (разделы 3, 4 и 6), и для струн, сопровождающие случайные блуждания (раздел 7). О приложениях натянутых струн, см. например, [1], [12].

2 Основные результаты

В этой работе будем пользоваться равномерной нормой и соболевской нормой:

$$||h||_T = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{|h(t)|\},\ h\in\mathbb{C}[0,T],$$

$$|h|_T^2 := \int_0^T h'(t)^2 dt,\ h\in AC[0,T],$$

где через $AC[0,T]$ обозначается множество абсолютно непрерывных функций на $[0,T]$. Значение $|h|_T$ называется энергией струны h. Именно эту величину мы собираемся изучать. Все определённые понятия можно свести в следующие определения, которыми будем пользоваться на протяжении всей работы.

Для коридора постоянной ширины:

$$I_W(T,r) := \inf\{|h|_T; h\in AC[0,T], ||h-W||_T\leqslant r, h(0)=0\}.$$

$$I_W^0(T,r) := \inf\{|h|_T; h\in AC[0,T], ||h-W||_T\leqslant r, \\ h(0)=0, h(T)=W(T)\}.$$

Для коридора переменной ширины:

$$I_W(T,r.) := \inf\{|h|_T; h\in AC[0,T], |h(t)-W(t)|\leqslant r_t,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ h(0)=0\}.$$

$$I_W^0(T,r.) := \inf\{|h|_T; h\in AC[0,T], |h(t)-W(t)|\leqslant r_t,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ h(0)=0, h(T)=W(T)\}.$$

Единственные функции, на которых достигаются эти инфимумы, называются, соответственно, натянутой струной (для I_W) и натянутой струной с закреплённым концом (для I_W^0). Значения I_W и I_W^0 называются, соответственно, энергией натянутой струны и энергией натянутой струны с закреплённым концом. Основной результат данной работы следующий.

Обозначение. Будем записывать $f(t)\sim g(t)$, когда верно, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Теорема 1. Пусть $\{r_t\}$ удовлетворяют следующим условиям

1. r_t не убывает;
2. $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}}$ не возрастает;
3. $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}} \to 0$ при $t \to \infty$.

Тогда при $T \to \infty$ верно соотношение

$$I_W(T, r.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \text{ п.н.}, \tag{1}$$

где $\mathcal{C}$ – некоторая постоянная.

Замечание 1. Постоянная $\mathcal{C}$ была введена в работе [8]. Точное значение $\mathcal{C}$ неизвестно, но компьютерное моделирование даёт приближённое значение $\mathcal{C} \approx 0.63$. В работе [9] дана интерпретация постоянной $\mathcal{C}$ в терминах структуры обновления, связанной с винеровским процессом.

В ходе доказательства теоремы 1 мы будем пользоваться результатами, доказанными для натянутых струн с постоянной шириной коридора ([8] и [9]). Для полноты изложения сформулируем их здесь.

Теорема 2 [8]. Если $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$, то $\forall q > 0$:

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T, r) \xrightarrow{L_q} \mathcal{C},$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W^0(T, r) \xrightarrow{L_q} \mathcal{C}.$$

Теорема 3 [8]. Для любого фиксированного $r > 0$, при $T \to \infty$ верно

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T, r) \to \mathcal{C} \text{ п.н.},$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W^0(T, r) \to \mathcal{C} \text{ п.н.}$$

Теорема 4 [9]. Пусть $\{r_T\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. r_T не убывает;

2. $\frac{r_T\sqrt{\ln\ln T}}{\sqrt{T}}$ не возрастает;

3. $\frac{r_T\sqrt{\ln\ln T}}{\sqrt{T}} \to 0$ при $T \to \infty$.

Тогда верно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{r_T}{\sqrt{T}} I_W(T, r_T) = \mathcal{C} \text{ п.н.},$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{r_T}{\sqrt{T}} I_W^0(T, r_T) = \mathcal{C} \text{ п.н.}$$

Наш основной результат описывает поведение $I_W(T, r_.)$, но в силу теорем 2-4 не удивительно, что результат можно получить и для величины $I_W^0(T, r_.)$.

Теорема 5. При выполнении условий теоремы 1 верен результат:

$$I_W^0(T, r_.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \text{ п.н.}$$

Доказательство этого факта опирается на теорему 1 и будет приведено с разделе 6.

Отметим несколько важных идей.

Замечание 2. Утверждения теорем 1 и 5 остаются верными, если заменить ширину коридора с r_t до $r_t(1 + o(1))$. Это позволяет уходить от предположения о монотонности.

Замечание 3. В теореме 5 условие прихода в точку $W(T)$ можно заменить на условие прихода в точку $W(T) + x_T$, где $x_T = o(r_T)$. Это видно из доказательства. На странице 18 (лемма 2) мы строим функцию $\bar{h}$, от которой требуем $\bar{h}(T) = W(T)$. Если заменить это условие на $\bar{h}(T) = W(T) + x_T$, то дальнейшее рассуждение приведет нас к оценке энергии функции $\bar{h}$ энергией струны с коридором ширины $r_t(1 + o(1))$ и другими малыми величинами, которые не поменяются. При дальнейшем переходе к пределу по T, значение этой энергии будет таким же, как значение энергии $I_W(T, (1 - 3\delta)r_.)$ по замечанию 2.

Эти замечания используются в доказательстве результата для струн, сопровождающих случайное блуждание, аналогичного теоремам 1 и 5.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин со значениями в $\mathbb{R}$. Определим частичные суммы $S_0 := 0$ и

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} X_j,\ k \geqslant 1.$$

Определим на $[0, \infty)$ случайную ломаную $S(\cdot)$ следующим образом:

$$S(t) := \begin{cases} S_k, & t = k,\ k = 0, 1, \ldots \\ (k+1-t)S_k + (t-k)S_{k+1}, & t \in (k, k+1),\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Введём аппроксимационные характеристики для S, аналогичные определённым ранее для винеровского процесса W:

$$I_S(T, r.) := \inf\{|h|_T \colon h \in AC[0,T], |h(t) - S(t)| \leqslant r_t, h(0) = 0\}$$
$$I_S^0(T, r.) := \inf\{|h|_T \colon h \in AC[0,T], |h(t) - S(t)| \leqslant r_t, h(0) = 0, h(T) = S(T)\}$$

Теорема 6. Пусть S – случайная ломаная, построенная по частичным суммам независимых одинаково распределённых случайных величин X_j, имеющих нулевое среднее и единичную дисперсию. Пусть X_j имеют конечный момент порядка $p > 2$, $r.$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а также $T^{1/p} = o(r_T)$. Тогда

$$I_S(T, r.)^2 \sim C^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \text{ п.н.},$$
$$I_S^0(T, r.)^2 \sim C^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \text{ п.н.}$$

Если же величины X_j имеют конечный экспоненциальный момент, то указанные результаты верны в предположениях теоремы 1 и условия $\ln T = o(r_T)$.

3 Доказательство теоремы 1: оценка сверху

Зафиксируем $a > 1$. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k := a^k$. Поскольку последовательность $\{r_t\}$ не убывает, $r_{t_{k+1}} \geqslant r_{t_k}$. С другой стороны, $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}}$ не возрастает, значит функция

$$t \to \frac{r_t}{\sqrt{t}} = \frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln\ln t}}$$

является невозрастающей. Следовательно,

$$\frac{r_{t_{k+1}}}{\sqrt{t_{k+1}}} \leqslant \frac{r_{t_k}}{\sqrt{t_k}}. \tag{2}$$

Вспомним, что $t_k = a^k$ по определению, и подставим в неравенство (2). Получим

$$r_{t_{k+1}} \leqslant r_{t_k}\sqrt{\frac{t_{k+1}}{t_k}} = r_{t_k}\sqrt{a}.$$

В частности, в силу того, что r_t не убывает, при $t \in (t_k, t_{k+1})$ верно

$$r_{t_k} \leqslant r_t \leqslant r_{t_{k+1}} \leqslant r_{t_k}\sqrt{a}. \tag{3}$$

Уменьшим ширину полосы на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ с r_t до r_{t_k}. Обозначим правые концы этих интервалов $T_k := t_{k+1}$. Тогда получим следующую оценку

$$I_W(T_m, r.)^2 \leqslant I_W^0(T_m, r.)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} I_{W_k}^0(t_{k+1} - t_k, r_{t_k})^2, \tag{4}$$

где $W_k(s) = W(t_k + s) - W(t_k), 0 \leqslant s \leqslant t_{k+1} - t_k$, – независимые винеровские процессы.

Нам достаточно показать, что

$$I_{W_k}^0(t_{k+1} - t_k, r_{t_k})^2 \leqslant \frac{\mathcal{C}^2 \cdot (t_{k+1} - t_k)}{r_{t_k}^2} \cdot (1 + o(1)) \text{ п.н.}, \tag{5}$$

$$\frac{t_{k+1} - t_k}{r_{t_k}^2} \leqslant a \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{r_t^2}. \tag{6}$$

Заметим, что из (3) следует (6).

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{a}{r_t^2} dt \geqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{r_{t_k}^2} dt = \frac{1}{r_{t_k}^2} \cdot (t_{k+1} - t_k) = \frac{t_{k+1} - t_k}{r_{t_k}^2}.$$

Теперь покажем (5). Заметим, что эта оценка касается только полос постоянной ширины, изученных в [8] и [9]. Воспользуемся неравенством, доказанным в [9] (стр.11). Для любого числа $\delta \in (0, \frac{1}{3})$, для любого L_T такого, что $L_T \ll T$, обозначим $T_* = T - L_T$, $W'(s) = W(T_* + s) - W(T_*)$ для $s \in [0, T - T_*]$. Тогда верно неравенство

$$I_W^0(T, r_T)^2 \leqslant I_W(T, (1-3\delta) r_T)^2 + 2 I_{W'}(L_T, \delta r_T)^2 + \frac{2 r_T^2}{L_T}.$$

Перепишем это неравенство для нашего случая. Тогда для любых L_k таких, что $L_k \ll t_k$, и для любых $\delta \in (0, \frac{1}{3})$:

$$I_{W_k}^0(t_{k+1} - t_k, r_{t_k})^2 \leqslant I_{W_k}(t_{k+1} - t_k, (1-3\delta) r_{t_k})^2 + 2 I_{W_k'}(L_k, \delta r_{t_k})^2 + \frac{2 r_{t_k}^2}{L_k}, \quad (7)$$

где $W_k'(s) = W_k(s + T_*) - W(T_*), 0 \leqslant s \leqslant t_{k+1} - t_k - T_* = L_k$.

Выберем теперь $L_k = r_{t_k}^2$ и зафиксируем δ. Мы хотим показать, что

$$\frac{r_{t_k}^2}{\mathcal{C}^2 \cdot (t_{k+1} - t_k)} \Big(I_{W_k}(t_{k+1} - t_k, (1-3\delta) r_{t_k})^2 + 2 I_{W_k'}(L_k, \delta r_{t_k})^2 + \frac{2 r_{t_k}^2}{L_k} \Big) = 1 + o(1) \text{ п.н.} \quad (8)$$

Рассмотрим каждое из этих слагаемых. Заметим сначала, что

$$\frac{2 r_{t_k}^2}{L_k} = \frac{2 L_k}{L_k} = 2.$$

Поскольку по условию теоремы

$$\frac{r_{t_k}^2}{t_{k+1} - t_k} \asymp \frac{r_{t_k}^2}{t_k} \to 0,$$

последнее слагаемое в (8) уйдёт в $o(1)$

$$\frac{2}{\mathcal{C}^2} \cdot \frac{r_{t_k}^2}{t_{k+1} - t_k} \to 0, \ k \to \infty.$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое, равное $2I_{W'_k}(r_{t_k}^2, \delta r_{t_k})^2$. Необходимо показать, что

$$\frac{r_{t_k}^2}{t_{k+1} - t_k} \cdot I_{W'_k}(r_{t_k}^2, \delta r_{t_k})^2 \to 0,\ k \to \infty \text{ п.н.}$$

Поскольку $t_{k+1} - t_k = (a-1) \cdot t_k$, то это условие эквивалентно следующему:

$$\frac{r_{t_k}^2}{t_k} \cdot I_{W'_k}(r_{t_k}^2, \delta r_{t_k})^2 \to 0,\ k \to \infty \text{ п.н.}$$

Это делается таким же образом, как и в [9] (стр.11). Повторим данные выкладки. Сначала заметим, что случайная величина $I_{W'_k}(r_{t_k}^2, \delta r_{t_k})$ в силу самоподобия винеровского процесса равнораспределена с $I_W(1, \delta)$. По лемме Бореля–Кантелли нам достаточно проверить, что для любого $\epsilon > 0$ верно:

$$\sum_k \mathbb{P}\Big(I_W(1, \delta) \geqslant \frac{\epsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big) < \infty. \tag{9}$$

Для проверки сходимости этого ряда нам достаточно рассматривать только его «хвост». Обозначим за $m(T, r)$ медиану случайной величины $I_W(T, r)$. Поскольку $m(1, \delta)$ – константа, то для достаточно больших k, где $k > N$, верно, что:

$$m(1, \delta) < \frac{\epsilon}{2} \frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}.$$

Воспользуемся оценкой концентрации [1, стр.408]. Для произвольных фиксированных T и r и для любого $\rho > 0$:

$$\mathbb{P}(|I_W(T, r) - m(T, r)| \geqslant \rho) \leqslant \mathbb{P}(|\xi| \geqslant \rho) \leqslant \exp\{-\rho^2/2\}, \tag{10}$$

где ξ – стандартная нормальная случайная величина. При помощи этих двух неравенств построим следующую цепочку:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) \geqslant \frac{\epsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) - m(1,\delta) \geqslant \frac{\epsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}} - m(1,\delta)\Big)\\ &\leqslant \mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) - m(1,\delta) \geqslant \frac{\epsilon}{2}\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big)\\ &\leqslant \mathbb{P}\Big(|I_W(1,\delta) - m(1,\delta)| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big)\\ &\leqslant \exp\Big(-\frac{\epsilon^2}{8}\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно показать, что для любого $h > 0$:

$$\sum_{k>N} \exp\Big(-h \cdot \frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big) < \infty.$$

Функция $f(t) = t/r_t^2$ является возрастающей, как было отмечено на стр.7, следовательно, для достаточно больших t можно написать, что $f(t) \geqslant C$ для некоторой константы $C > 1$. Тогда функция $g(t) = \exp(-ht/r_t^2)r_t^{-2}$ является убывающей. Оценим интеграл функции $g(t)$. Разобъем временную ось на отрезки $[t_{k-1}, t_k]$ и на каждом из них сделаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}&\int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp\Big(-h\frac{t}{r_t^2}\Big)\frac{1}{r_t^2}dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)dt \geqslant g(t_k)\cdot(t_k - t_{k-1})\\ &= \exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big)\frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \geqslant C\cdot\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big) = C'\exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{C'}\sum_{k>N}\exp\Big(-h\cdot\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big) \leqslant \sum_{k>N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\exp\Big(-h\frac{t}{r_t^2}\Big)\frac{1}{r_t^2}dt \leqslant \int_{t>N}\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2}dt.$$

Значит, достаточно показать, что

$$\int_{t>N}\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2}dt < \infty.$$

Перепишем подинтегральное выражение

$$\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2} = \exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}h\frac{t}{r_t^2}\cdot h^{-1}t^{-1} = \exp\{-u\}u\cdot h^{-1}t^{-1}.$$

Согласно условию 3 нашей теоремы, $u = ht\cdot r_t^{-2}$ при достаточно больших t удовлетворяет оценке $u > 2\ln\ln t$. Значит,

$$\exp\{-u\}\cdot u \leqslant 2\exp\{-2\ln\ln t\}\ln\ln t = (2\ln t)^{-2}\ln\ln t.$$

Таким образом, мы можем оценить интеграл

$$2h^{-1}\int_{t>N}\frac{\ln\ln t}{t(\ln t)^2}dt < \infty.$$

Следовательно, второе слагаемое в равенстве (8), как и последнее, уходит в $o(1)$.

Осталось первое слагаемое в (8). Как уже говорилось выше, можно применять все результаты, полученные для полос постоянной ширины. По теореме 1.2 из [8]

$$\frac{(1-3\delta)r_{t_k}^2}{t_{k+1}-t_k}\cdot I_{W_k}(t_{k+1}-t_k,(1-3\delta)r_{t_k})^2 \to \mathcal{C}^2,\ k\to\infty \text{ п.н.}$$

Это в точности то, что было нужно, поскольку теперь δ можно выбрать сколь угодно маленьким.

Таким образом, оценка (5) получена. Объединяя неравенства (4) – (6), получим верхнюю оценку теоремы. Дополнительно отметим, что при этом был доказан более сильный результат:

$$I_W(T_m,r.)^2 \leqslant I_W^0(T_m,r.)^2 \leqslant \mathcal{C}^2\int_0^{T_m}\frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)) \text{ п.н.} \tag{11}$$

Мы показали эту оценку пока что только для дискретного времени. Для того, чтобы перейти к непрерывному времени, нужно вспомнить некоторые свойства I_W. Пусть $T\in[T_{m-1},T_m]$. Тогда, поскольку $I_W(\cdot,r)$ – неубывающая функция, то верна оценка

$$I_W(T,r.) \leqslant I_W(T_m,r.).$$

Теперь оценим следующее

$$\int_0^T\frac{dt}{r_t^2} \geqslant \int_0^{T_{m-1}}\frac{dt}{r_t^2} = \int_0^{T_m}\frac{d\tau}{ar^2_{\frac{\tau}{a}}}.$$

По условию теоремы r_t не убывает, значит, $r_{\frac{\tau}{a}} \leqslant r_\tau$. Получаем

$$\int_0^{T_m} \frac{d\tau}{ar^2_{\frac{\tau}{a}}} \geqslant \int_0^{T_m} \frac{d\tau}{ar^2_\tau}.$$

Следовательно, верно следующее неравенство

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{I_W(T, r.)^2}{\int_0^T \frac{dt}{r_t^2}} \leqslant \limsup_{m\to\infty} \frac{I_W(T_m, r.)^2}{\int_0^{T_m} \frac{dt}{ar_t^2}} \leqslant a\mathcal{C}^2 \text{ п.н.}$$

Устремим a к единице и получим нужное неравенство для непрерывного времени. Оценка сверху полностью доказана.

4 Доказательство теоремы 1: оценка снизу

Рассмотрим ϕ_m – натянутую струну, реализующую $I_W(t_m, r.)$, где $t_m = a^m$ для некоторой константы $a > 1$. Тогда,

$$I_W(t_m, r.)^2 = \int_0^{t_m} \phi'_m(s)^2 ds = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi'_m(s)^2 ds,$$

и при $s \in [t_{k-1}, t_k]$ верно

$$|\phi_m(s) - W(s)| \leqslant r_s \leqslant r_{t_k}.$$

Добавим и вычтем $W(t_{k-1})$ в левой части. Получим эквивалентное неравенство.

$$|\phi_m(s) - W(t_{k-1}) - (W(s) - W(t_{k-1}))| \leqslant r_{t_k}.$$

Обозначим $W_k(b) = W(b + t_{k-1}) - W(t_{k-1})$, где $b \in [0, t_k - t_{k-1}]$. Заметим, что W_k является винеровским процессом.

Введём новую характеристику $\widetilde{I}_W(T, r)$, которая называется энергией натянутой струны с незакреплёнными концом и началом. Она определяется следующим образом

$$\widetilde{I}_W(T, r) = \inf\{|h|_T; h \in AC[0, T], ||h - W||_T \leqslant r\}.$$

Тогда с помощью этой случайной величины можно оценить величину $I_W(T, r)$. В нашем случае, мы можем оценить следующим образом

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2 \leqslant \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_m(s) - W(t_{k-1}))'^2 ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi'_m(s)^2 ds.$$

Следовательно

$$I_W(t_m, r.)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{m} \widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2. \tag{12}$$

Для того, чтобы доказать оценку снизу для дискретного времени, необходимо показать, что

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2 \geqslant (1 + o(1)) \cdot \mathcal{C}^2 \cdot \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \text{ п.н.} \tag{13}$$

Покажем, почему неравенства (13) будет достаточно. Заметим сначала, что, поскольку r_t – неубывающая функция:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2} \leqslant \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_{t_{k-1}}^2} = \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_{k-1}}^2} = \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \cdot \frac{r_{t_k}^2}{r_{t_{k-1}}^2}.$$

По оценке (3) мы знаем

$$\frac{r_{t_k}^2}{r_{t_{k-1}}^2} \leqslant a.$$

Поэтому

$$\frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \cdot \frac{r_{t_k}^2}{r_{t_{k-1}}^2} \leqslant \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \cdot a.$$

Отсюда следует

$$\frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \geqslant \frac{1}{a} \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2}. \tag{14}$$

Скомбинируем оценки (12)–(14) вместе и получим

$$I_W(t_m, r.)^2 \geqslant \mathcal{C}^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) = \frac{\mathcal{C}^2}{a} \cdot \int_0^{t_m} \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \text{ п.н.}$$

После этого необходимо устремить a к единице и получить нужную оценку для дискретного времени. Вместо неравенства (13) будем доказывать эквивалентное ему неравенство:

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) \geqslant (1 + o(1)) \cdot \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}} \text{ п.н.}, \tag{15}$$

для которого достаточно показать следующие соотношения, где $\widetilde{m}$ – медиана случайной величины $\widetilde{I}_W$:

$$\widetilde{m}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) \geqslant \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}}(1 + o(1)), \tag{16}$$

$$(\widetilde{I}_{W_k} - \widetilde{m})(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) = o\Big(\frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}}\Big) = o\Big(\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big) \text{ п.н.} \tag{17}$$

Докажем сначала оценку (17). По условию теоремы мы знаем, что

$$\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}} \to 0.$$

Таким образом, можно утверждать, что при любой константе $M > 1$ и при достаточно больших t выполняется неравенство

$$M\sqrt{\ln\ln t} < \frac{\sqrt{t}}{r_t}.$$

Поэтому для доказательства равенства (17) достаточно применить лемму Бореля–Кантелли и доказать следующее:

$$\sum_k \mathbb{P}((\widetilde{I}_{W_k} - \widetilde{m})(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) < -M\sqrt{\ln\ln t_k}) < \infty. \tag{18}$$

Заметим, что

$$\ln\ln t_k = \ln(\ln a \cdot k) \sim \ln k,$$
$$\sqrt{\ln\ln t_k} \sim \sqrt{\ln k}.$$

Тогда, используя оценку концентрации (10), можно сумму из (18) оценить следующим значением:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-M^2 \ln k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-M^2} < \infty.$$

Сумма конечна, если выбрать $M > 1$. Таким образом, неравенство (17) доказано и наша основная цель – доказать (16).

Переформулируем нашу задачу следующим образом. Для фиксированного r и $T \to \infty$ нужно показать, что:

$$\widetilde{m}(T, r) \geqslant \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{T}}{r}(1 + o(1)). \tag{19}$$

В силу самоподобия винеровского процесса имеем $\widetilde{I}_W(T, r) = \widetilde{I}_W(\frac{T}{r^2}, 1)$ по распределению, откуда следует равенство:

$$\widetilde{m}(T, r) = \widetilde{m}\Big(\frac{T}{r^2}, 1\Big).$$

Тогда неравенство (19) можно переписать в другом виде

$$\widetilde{m}(T, 1) \geqslant \mathcal{C}\sqrt{T}(1 + o(1)) \text{ п.н.} \tag{20}$$

Для доказательства этой оценки нам понадобится вспомогательное утверждение, похожее на неравенство (7).

Лемма 1. Для любого $\epsilon > 0$ верно неравенство

$$I_{W_1}(T+1,1+\epsilon)^2 \leqslant \widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 + 2I_{W_1}(1,\epsilon/2)^2 + 2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2, \tag{21}$$

где W_1, W_2 – два зависимых винеровских процесса.

Доказательство леммы 1 будет приведено в следующем разделе. Воспользуемся неравенством (21), переписав его в следующем виде:

$$\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 \geqslant I_{W_1}(T+1,1+\epsilon)^2 - 2I_{W_1}\Big(1,\frac{\epsilon}{2}\Big) - 2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2. \tag{22}$$

Пусть $q_1 = q_1(\epsilon), q_2 = q_2(\epsilon)$ – две такие квартили, что выполнены неравенства:

$$\mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\epsilon) \geqslant q_1\Big) = \mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\epsilon)^2 \geqslant q_1^2\Big) \geqslant \frac{3}{4}, \tag{23}$$

$$\mathbb{P}\Big(2I_{W_1}\Big(1,\frac{\epsilon}{2}\Big)^2 \leqslant q_2\Big) \geqslant \frac{3}{4}. \tag{24}$$

Тогда,

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 \geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2\Big) = 1-\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 < q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2\Big),$$

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 < q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2\Big) \leqslant \\ \mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\epsilon)^2 < q_1^2\Big) + \mathbb{P}\Big(2I_{W_1}\Big(1,\frac{\epsilon}{2}\Big)^2 > q_2\Big) < \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 \geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2\Big) \geqslant \frac{1}{2}.$$

По определению медианы отсюда сразу же следует, что

$$\widetilde{m}(T,1)^2 \geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2.$$

Из (23) следует, что

$$q_1 \geqslant m(T+1,1+\epsilon)-c,$$

где c – некоторая абсолютная константа. Таким образом, применяя результат статьи [8] (следствие 3.2), получаем, что:

$$\widetilde{m}(T,1)^2 \geqslant (m(T+1,1+\epsilon)-c)^2 - q_2 - 2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2 =$$

$$\Big(\mathcal{C}\frac{\sqrt{T+1}}{1+\epsilon}(1+o(1))-c\Big)^2 - q_2 - 2\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\Big)^2 = \mathcal{C}^2\frac{T}{(1+\epsilon)^2}(1+o(1)) \text{ п.н.}$$

Другими словами, для любого $\epsilon > 0$ верен следующий результат:

$$\widetilde{m}(T,1) \geqslant \mathcal{C}\frac{\sqrt{T}}{1+\epsilon}(1+o(1)) \text{ п.н.}$$

В силу произвольности ϵ тогда верно, что

$$\widetilde{m}(T,1) \geqslant \mathcal{C}\sqrt{T}(1+o(1)) \text{ п.н.}$$

Таким образом, доказано неравенство (20), а вместе с ним и полностью доказана оценка снизу для дискретного времени. Аналогично тому, как мы делали переход к непрерывному времени в оценке сверху, докажем переход от дискретного времени в оценке снизу. Пусть $T \in [T_{m-1}, T_m]$, $T_m = a^m$, тогда

$$I_W(T, r.) \geqslant I_W(T_{m-1}, r.).$$

$$\int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \leqslant \int_0^{T_m} \frac{dt}{r_t^2} = \int_0^{T_{m-1}} \frac{a d\tau}{r_{a\tau}^2}.$$

Поскольку r_t – неубывающая функция, то верно $r_{a\tau} \geqslant r_\tau$, откуда

$$\int_0^{T_{m-1}} \frac{a d\tau}{r_{a\tau}^2} \leqslant \int_0^{T_{m-1}} \frac{a d\tau}{r_\tau^2}.$$

Отсюда мы получим, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{I_W(T,r.)^2}{\int_0^T \frac{dt}{r_t^2}} \geqslant \liminf_{m\to\infty} \frac{I_W(T_{m-1},r.)^2}{\int_0^{T_{m-1}} \frac{adt}{r_t^2}} \geqslant a^{-1}\mathcal{C}^2 \text{ п.н.}$$

Устремим a к единице и получим требуемое неравенство. Таким образом, оценка снизу полностью доказана.

5 Доказательство леммы 1

Разобъём временной интервал $[0, T+1] = [0,1] \cup [1, T+1]$ и рассмотрим на этом интервале винеровский процесс W_1. Определим

$$W_2(s) = W_1(1+s) - W_1(1),\ 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Пусть $\phi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$ – натянутая струна, реализующая $\widetilde{I}_{W_2}(T,1)$. Будем строить струну $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T+1$, отдельно на $[0,1]$ и $[1, T+1]$ так, чтобы $||\psi - W_1||_{T+1} \leqslant 1+\epsilon$ и $\psi(0) = 0$. Тогда будет верно, что

$$I_{W_1}(T+1, 1+\epsilon)^2 \leqslant |\psi|^2_{T+1}.$$

А значит, будет достаточно оценивать только энергию струны ψ.

Для $0 \leqslant s \leqslant T$ положим

$$\psi(1+s) = \phi(s) + W_1(1).$$

Тогда

$$|\psi(1+s) - W_1(1+s)| = |\phi(s) + W_1(1) - W_1(1+s)| =$$
$$|\phi(s) - W_2(s)| \leqslant 1 < 1+\epsilon.$$

$$\int_1^{T+1} \psi'(t)^2 dt = \int_0^T \phi'(s)^2 ds = \widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2.$$

Заметим, что $\theta = \psi(1) - W_1(1) = \phi(0) + W_1(1) - W_1(1) = \phi(0) \in [-1,1]$. Построим $\psi(s), 0 \leqslant s \leqslant 1$ так, чтобы $\psi(0) = 0, \psi(1) = W_1(1) + \theta$. Пусть $g(s), 0 \leqslant s \leqslant 1,$ – натянутая струна, реализующая $I_{W_1}(1, \epsilon/2)$. Положим

$$\psi(s) = g(s) + s(\theta + W_1(1) - g(1)).$$

Тогда

$$\psi(0) = 0,$$
$$\psi(1) = g(1) + \theta + W_1(1) - g(1) = \theta + W_1(1).$$

$$|\psi(s) - W_1(s)| \leqslant |g(s) - W_1(s)| + |\theta| + |W_1(1) - g(1)|$$
$$\leqslant 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} + |\theta| \leqslant 1 + \epsilon.$$

Осталось оценить энергию струны ψ на интервале $[0, 1]$. Имеем

$$\psi'(s) = g'(s) + \theta + W_1(1) - g(1),$$

$$\psi'(s)^2 \leqslant 2g'(s)^2 + 2\Big(1 + \frac{\epsilon}{2}\Big)^2.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \psi'(s)^2 ds \leqslant 2\int_0^1 g'(s)^2 ds + 2\Big(1 + \frac{\epsilon}{2}\Big)^2 = 2I_{W_1}(1, \epsilon/2)^2 + 2\Big(1 + \frac{\epsilon}{2}\Big)^2.$$

Окончательно, запишем все полученные неравенства вместе

$$I_{W_1}(T+1, 1+\epsilon)^2 \leqslant \int_0^{T+1} \psi'(t)^2 dt = \int_0^1 \psi'(t)^2 dt + \int_1^{T+1} \psi'(t)^2 dt$$
$$\leqslant 2I_{W_1}(1, \epsilon/2)^2 + 2\Big(1 + \frac{\epsilon}{2}\Big)^2 + \widetilde{I}_{W_2}(T, 1)^2.$$

Что и требовалось доказать.

6 Доказательство теоремы 5

Поскольку $I_W(T, r.) \leqslant I_W^0(T, r.)$, то при $T \to \infty$ верно

$$I_W^0(T, r.)^2 \geqslant \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)),$$

таким образом, оценка в одну сторону автоматически следует из теоремы 1. Необходимо проверить оценку в другую сторону. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $L_T \ll T$ при $T \to \infty$. Тогда для любого числа $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ и при всех достаточно больших T, верно

$$I_W^0(T, r.)^2 \leqslant I_W(T, (1 - 3\delta)r.)^2 + 2I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 + 2\frac{r_T^2}{L_T}.$$

Доказательство. Определим $T_* = T - L_T$. Пусть h – натянутая струна, реализующая величину $I_W(T, (1 - 3\delta)r.)$. Тогда для h выполнены следующие условия

$$h(0) = 0, \tag{25}$$
$$|h(t) - W(t)| \leqslant (1 - 3\delta)r_t, 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{26}$$
$$|h|_T = I_W(T, (1 - 3\delta)r.). \tag{27}$$

Введём вспомогательный винеровский процесс: $W_1(s) = W(T_* + s) - W(T_*)$, где $0 \leqslant s \leqslant T - T_* = L_T$. Пусть h_1 – натянутая струна, реализующая $I_{W_1}(L_T, \delta r_{T_*})$. Тогда для h_1 выполнены следующие условия:

$$h_1(0) = 0, \tag{28}$$
$$|h_1(t) - W_1(t)| \leqslant \delta r_{T_*}, 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{29}$$
$$|h_1|_{L_T} = I_{W_1}(L_T, \delta r_{T_*}). \tag{30}$$

Теперь всё готово для того, чтобы построить функцию $\bar{h}$, энергия которой будет аппроксимировать $I_W^0(T, r.)$ с некоторыми поправками. Определим

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \leqslant t \leqslant T_*, \\ h(T_*) + h_1(t - T_*) + (t - T_*)\nu, & T_* \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{31}$$

где значение постоянной ν находится из уравнения

$$\bar{h}(T) = h(T_*) + h_1(L_T) + L_T\nu = W(T),$$

из чего следует

$$\nu = \frac{W(T) - h(T_*) - h_1(L_T)}{L_T}.$$

Заметим, что $\bar{h}(t)$ непрерывна. Достаточно проверить, что непрерывность сохраняется в точке перехода, то есть при $t = T_*$. Действительно, с одной стороны должно получиться $h(T_*)$, а с другой:

$$h(T_*) + h_2(0) + 0 = h(T_*).$$

Перед тем, как оценивать $\bar{h}$, отметим, что $T = L_T + T_*$ и $L_T \ll T$, откуда следует: $L_T < T_* < T$, а значит, $r_{L_T} \leqslant r_{T_*} \leqslant r_T$. В дальнейших рассуждениях используется, что $r.$ – неубывающая функция. Далее, оценим ν для $t \geqslant T_*$

$$\begin{aligned} |\nu| &= \frac{|((W(T_*) - h(T_*)) + (W(T) - W(T_*) - h_1(L_T))|}{L_T} \\ &\leqslant \frac{|(W(T_*) - h(T_*)| + |W_1(L_T) - h_1(L_T)|}{L_T} \\ &\leqslant \frac{(1-3\delta)r_{T_*} + \delta r_{T_*}}{L_T} = \frac{(1-2\delta)r_{T_*}}{L_T}. \end{aligned}$$

Оценим равномерное расстояние между $\bar{h}$ и W. Для $0 \leqslant t \leqslant T_*$

$$|\bar{h}(t) - W(t)| = |h(t) - W(t)| \leqslant (1-3\delta)r_t.$$

Для $T_* \leqslant t \leqslant T$ воспользуемся тождеством

$$\bar{h}(t) - W(t) = h_1(t-T_*) - W_1(t-T_*) - (L_T - (t-T_*))\nu + W_1(L_T) - h_1(L_T).$$

Тогда для рассматриваемого интервала верно

$$\begin{aligned} |\bar{h}(t) - W(t)| &\leqslant |h_1(t-T_*) - W_1(t-T_*)| + |W_1(L_T) - h_1(L_T)| + L_T|\nu| \\ &\leqslant \delta(r_{t-T_*} + r_{L_T}) + (1-2\delta)r_{T_*} \leqslant 2\delta r_t + (1-2\delta)r_t = r_t. \end{aligned}$$

Осталось оценить энергию.

$$
\begin{aligned}
|\bar{h}|_T^2 &= \int_0^{T_*} \bar{h}'(t)^2 dt + \int_{T_*}^{T} \bar{h}'(t)^2 dt \\
&= \int_0^{T_*} h'(t)^2 dt + \int_{T_*}^{T} (h_1'(t-T_*)+\nu)^2 dt \\
&\leqslant \int_0^{T_*} h'(t)^2 dt + 2\int_{T_*}^{T} h_1'(t-T_*)^2 dt + 2\nu^2 L_T \\
&\leqslant I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 + 2I_{W_1}(L_T,\delta r_{T_*})^2 + \frac{2r_T^2}{L_T}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $I_W^0(T,r.)^2 \leqslant |\bar{h}|_T^2$, утверждение доказано. □

Теперь воспользуемся данным утверждением. Определим L_T и покажем

$$
I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 + 2I_{W_1}(L_T,\delta r_{T-L_T})^2 + 2\frac{r_T^2}{L_T} = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)). \quad (32)
$$

Этого достаточно для доказательства теоремы 5. Первое слагаемое никак не зависит от L_T, поэтому можно воспользоваться теоремой 1 и устремить δ к нулю:

$$
I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{(1-3\delta)^2 r_t^2}(1+o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)) \text{ п.н.}
$$

Покажем, что остальные слагаемые уйдут в $o(1)$. Построим следующую последовательность моментов времени:

$$
T_0 := 1,\ T_{k+1} := T_k + r_{T_k}^2.
$$

Для удобства обозначим $r_k := r_{T_k}$. Из условий теоремы следует, что

$$
\lim_{k\to\infty} T_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty} \frac{T_{k+1}}{T_k} = 1,\ \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1.
$$

Теперь определим L_T. Для $T \in [T_{k+1}, T_{k+2})$ положим

$$
T_* := T_k,\ L_T = T - T_k.
$$

Тогда при достаточно больших k будет верно неравенство:

$$\frac{r_{k+2}}{\sqrt{T_{k+2}}} \leqslant \frac{r_T}{\sqrt{T}} \leqslant \frac{2r_k}{\sqrt{T_k}},$$

после чего можно оценить L_T

$$L_T \geqslant T_{k+1} - T_k = r_k^2 > \frac{r_{k+2}^2}{2} \geqslant \frac{r_T^2}{2},$$
$$L_T \leqslant T_{k+2} - T_k = r_k^2 + r_{k+1}^2 < 3r_k^2.$$

Перейдём к остальным слагаемым, которые остались в (32). Для начала оценим второе слагаемое

$$I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 = I_{W_1}(L_T, \delta r_k)^2 \leqslant I_{W_1}(3r_k^2, \delta r_k).$$

Тогда, применив неравенства, рассмотренные выше, получим утверждение, аналогичное доказанному ранее (стр.9):

$$\lim_{T\to\infty} I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 : \left(\int_0^T \leqslant \frac{dt}{r_t^2}\right)$$
$$\leqslant \lim_{T\to\infty} I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 \cdot \frac{r_T^2}{T}$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{4r_k^2}{T_k} \cdot I_{W_1}(3r_k^2, \delta r_k)^2 = 0 \text{ п.н.}$$

Третье слагаемое оценим как

$$\lim_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{L_T} : \left(\int_0^T \frac{dt}{r_t^2}\right) \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{L_T} \cdot \frac{r_T^2}{T} \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{r_T^2/2} \cdot \frac{r_T^2}{T} = 0 \text{ п.н.}$$

Таким образом, теорема доказана.

7 Доказательство теоремы 6

Для решения нашей задачи понадобится следующий результат, который имеет название КМТ-теорема (см. [3], [4], [10]).

Теорема 7. Пусть $X = \{X_1, \dots, X_j, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечный момент порядка $p > 2$. Тогда можно построить на некотором вероятностном пространстве последовательность $\bar{X} = \{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_j, \dots\}$, равнораспределённую с X, и последовательность независимых гауссовских величин $\bar{Y} = \{\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_j, \dots\}$, имеющих те же математические ожидания и дисперсии, чтобы было выполнено

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_n = o(n^{1/p}) \text{ п.н.}$$

Если же величины X_j имеют конечный экспоненциальный момент, то можно добиться выполнения

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_n = O(\ln n) \text{ п.н.}$$

О различных обощениях КМТ-теоремы см., например, [13], [14].

Напомним, что в теореме рассматриваются S_k – частичные суммы независимых одинаково распределённых случайных величин X_j, с нулевыми средними, единчными дисперсиями и имеющих конечный момент порядка $p > 2$. Приблизим их частичными суммами W_k таких независимых гауссовских величин $\bar{Y}_j$, для которых выполняется КМТ-теорема (теорема 7). Случайная ломаная $S(t)$ строится по узлам (k, S_k). Случайную ломаную $W(t)$ определим аналогично по узлам (k, W_k). По КМТ-теореме будет верно, что $S_k - W_k = o(k^{1/p})$ п.н.

Построим по случайной ломаной $W(t)$ винеровский процесс $\bar{W}(t)$, добавив к каждому отрезку ломаной (от (k, W_k) до $(k+1, W_{k+1})$) соответствующие броуновские мосты $W_k^0(t)$, независимые между собой и от последовательности узлов W_k.

Оценка энергии снизу.

Примем во внимание, что

$$\sup_{t\in[0,T]} |\bar{W}(t) - W(t)| = \max_{0\leqslant k\leqslant T} \max_{0\leqslant s\leqslant 1} |W_k(s)| = O(\sqrt{\ln T}) \text{ п.н.} \tag{33}$$

Это следует из оценки максимумов гауссовских процессов [7, гл. 12]:

$$\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|W_k(s)| \geqslant x\Big) = \exp\{-2x^2(1+o(1))\}, x \to \infty,$$

и леммы Бореля–Кантелли. В частности, в условиях теоремы будет верно:

$$\sup_{t\in[0,T]}|\bar{W}(t) - W(t)| = O(\sqrt{\ln T}) = o(T^{1/p}) = o(r_T) \text{ п.н.}$$

Положим

$$\rho_t := r_t + \sup_{s\in[0,t]}|S(s) - W(s)| + \sup_{s\in[0,t]}|\bar{W}(s) - W(s)|.$$

Третье слагаемое уйдет в $o(r_t)$ по равенству (33). Оценим второе слагаемое. Заметим, что

$$S_k - W_k = o(k^{1/p}) = o(r_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим $t \in [k, k+1]$. Тогда будет верно

$$\sup_{s\in[0,t]}|S(s) - W(s)| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant k+1}|S_s - W_s| = o((k+1)^{1/p}) = o(r_t) \text{ п.н.}$$

Последнее равенство верно, поскольку

$$\frac{(k+1)^{1/p}}{r_t} \leqslant \frac{(t+1)^{1/p}}{r_t} \leqslant 2^{1/p}\cdot\frac{t^{1/p}}{r_t} \to 0, t \to \infty.$$

Таким образом,

$$\rho_t = r_t + o(r_t) + o(r_t) = r_t(1+o(1)),\ t \to \infty.$$

Получившиеся $\{\rho_t\}$ не убывают и $\rho_t \sim r_t$ при $t \to \infty$, поэтому $\{\rho_t\}$ попадают под условия теоремы 1.

Рассмотрим натянутую страну h, сопровождающую случайную ломаную S так, чтобы:

$$|S(t) - h(t)| \leqslant r_t \text{ и } |h|_T = I_S(T, r.).$$

Тогда

$$|h(t) - \bar{W}(t)| \leqslant |h(t) - S(t)| + |S(t) - W(t)| + |W(t) - \bar{W}(t)| \leqslant \rho_t.$$

Поэтому теорема 1 гарантирует:

$$I_S(T,r.)^2 = |h|_T^2 \geqslant I_{\bar W}(T,\rho.)^2 = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1+o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)) \text{ п.н.}$$

Оценка энергии сверху.

Положим

$$\rho_t := r_t - \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |S(s)-W(s)| = r_t(1+o(1)), t \to \infty.$$

Такие $\{\rho_t\}$ вновь будут удовлетворять условию, указанному в замечании 2 к теореме 1. Выберем струну h, сопровождающую винеровский процесс $\bar W$ так, чтобы:

$$|h(t) - \bar W(t)| \leqslant \rho_t \text{ и } |h|_T = I_{\bar W}(T,\rho.).$$

В качестве $\bar h$ возьмём случайную ломаную, построенную по узлам $(k,h(k))$. Когда $T\in(k,k+1)$, где k – натуральное число, на отрезке $t\in[k,T]$ определим $\bar h$ следующим образом:

$$\bar h(t) = \frac{T-t}{T-k}\cdot h(k) + \frac{t-k}{T-k}\cdot h(T).$$

Тогда для всех $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
|\bar h(t) - S(t)| &\leqslant |\bar h(t) - W(t)| + |W(t)-S(t)| \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\bar h(s) - W(s)| + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|S(s)-W(s)| \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |h(s) - \bar W(s)| + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|S(s)-W(s)| \\
\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\rho_s + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|S(s)-W(s)| &\leqslant \rho_t + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|S(s)-W(s)| = r_t. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Заметим также, что поскольку $\bar h$ – ломаная, построенная по узлам функции h, то $\bar{h}(t) = h(t)$ при $t = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor T \rfloor$ и $\bar{h}(T) = h(T)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|\bar{h}|_T^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor} \int_k^{k+1} \bar{h}'(s)^2 ds + \int_{\lfloor T \rfloor}^T \bar{h}'(s)^2 ds \\
= \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor - 1} \big(\bar{h}(k+1) - \bar{h}(k)\big)^2 + (\bar{h}(T) - \bar{h}(\lfloor T \rfloor)^2 \\
= \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor - 1} \big(h(k+1) - h(k)\big)^2 + (h(T) - h(\lfloor T \rfloor)^2 \\
= \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor - 1} \Big(\int_k^{k+1} h'(s) ds\Big)^2 + \Big(\int_{\lfloor T \rfloor}^T h'(s) ds\Big)^2 \\
\leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor - 1} \int_k^{k+1} h'(s)^2 ds + \int_{\lfloor T \rfloor}^T h'(s)^2 ds = \int_0^T h'(s)^2 ds = |h|_T^2. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Получаем при $T \to \infty$

$$
\begin{aligned}
I_S(T, r.)^2 \leqslant |\bar{h}|_T^2 \leqslant |h|_T^2 = I_{\bar{W}}(T, \rho.) \\
= \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1 + o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \text{ п.н.}
\end{aligned}
$$

Оценка энергии I_S^0.

Оценка снизу следует из результата, доказанного для $I_S(T, r.)$:

$$
I_S^0(T, r.)^2 \geqslant I_S(T, r.)^2 = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \text{ п.н.}
$$

Чтобы доказать оценку сверху, необходимо повторить действия для оценки сверху $I_S(T, r.)$, взяв в качестве h струну, сопровождающую винеровский процесс $\bar{W}$ так, чтобы:

$$
\begin{aligned}
|h(t) - \bar{W}(t)| \leqslant \rho_t, \\
|h|_T = I_{\bar{W}}^0(T, \rho.)
\end{aligned}
$$

и $h(T) = S(T)$. Заметим, что закреплённый конец струны h удовлетворяет условию, указанному в замечании 3 к теореме 5:

$$
h(T) = S(T) = \bar{W}(T) + (S(T) - \bar{W}(T)) = \bar{W}(T) + o(r_T).
$$

Аналогично определим ломаную $\bar{h}$. Тогда неравенства (34) и (35) останутся верными. Получаем при $T \to \infty$

$$I_S^0(T, r.)^2 \leqslant |\bar{h}|_T^2 \leqslant |h|_T^2 = I_{\bar{W}}^0(T, \rho.)$$
$$= \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1 + o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \text{ п.н.}$$

Когда величины X_j имеют экспоненциальный момент, необходимо применить соответствующую часть КМТ-теоремы и воспользоваться условием $\ln T = o(r_T)$.

Таким образом, теорема 6 полностью доказана.

Список литературы

1. Grasmair, M. The equivalence of the taut string algorithm and BV-regularization. J. Math. Imaging Vis., 2007, 27, 59–66.

2. Kabluchko, Z.; Lifshits, M. Least energy approximation for processes with stationary increments. J. Theoret. Probab. 30 (2017), no. 1, 268—296.

3. Komlos, J., Major, P., Tusnady, G. An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.I, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 32 (1975), 111—131.

4. Komlos, J., Major, P., Tusnady, G. An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.II, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 34 (1976), 34—58.

5. Kruglyak, N.; Setterqvist, E. Discrete taut strings and real interpolation. J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 2, 671—704.

6. Kruglyak, N.; Setterqvist, E. Invariant K-minimal sets in the discrete and continuous settings. J. Fourier Anal. Appl. 23 (2017), no. 3, 572—611.

7. Lifshits, M., Gaussian Random Functions, Kluwer, Dordrecht, 1995.

8. Lifshits, M., Setterqvist, E. Energy of taut strings accompanying Wiener process, Stoch. Proc. Appl. 125 (2015) 401–427.

9. Lifshits, M., Siuniaev, A. Energy of taut strings accompanying random walk, to appear in Probab. Math. Statist. 2019+. URL: `https://math.uni.wroc.pl/~pms/forthcoming_list/f.1761.pdf`.

10. Major, P., The approximation of partial sums of independent r.v.'s, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 35 (1976), 213—220.

11. Schertzer, E. Renewal structure of the Brownian taut string. Stoch. Proc. Appl. 128 (2018), no. 2, 487—504.

12. Scherzer, O. et al. Variational Methods in Imaging. Ser.: Applied Math. Sci., vol. 167, Springer, New York, 2009.

13. Саханенко, А. И. Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределённых случайных величин с экспоненциальными моментами. Труды Института Математики СО АН СССР, 1984, т. 3, 4–49.

14. Зайцев, А.Ю. Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов. Успехи матем. наук, 2013, 68, no. 4 (412), 129–172.