Санкт-Петербургский государственный университет

БАРКАРЬ Алиса Георгиевна

Выпускная квалификационная работа

Повторяющиеся аукционы с резервной ценой

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
Доцент,
Факультет математики
и компьютерных наук СПбГУ,
Ph.D.,
Калинин Никита Сергеевич

Рецензент:
Доцент,
НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге,
Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента,
Департамент экономики,
Старший научный сотрудник,
НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге,
Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента,
Международная лаборатория теории игр
и принятия решений,
Кандидат физико-математических наук,
Кондратьев Алексей Юрьевич

Санкт-Петербург
2020 год

Аннотация

Работа относится к области теории игр. Исследуются различные механизмы повторяющихся аукционов и их свойства. Предложен incentive compatible (мотивирующий к правдивости) механизм повторяющегося аукциона с двумя участниками.

Ключевые слова: Повторяющиеся аукционы, резервная цена, мотивация к правдивости, теория игр.

Содержание

1 Введение.

Реальные социальные процессы, конфликтные ситуации в математике описываются в виде игры с участниками, стратегиями и функциями выигрыша. Это может быть как продажа антиквариата, так и схема уплаты налогов в государстве. Соответственно, в зависимости от целей игроков и дизайнера игры, от модели можно требовать различные свойства.

Определение 1. *Игра в нормальной форме (или стратегической)—это определение следующих составляющих игры:*

1. *Список игроков $N = \{1, \dots, n\}$. Где $i \in N$—номер игрока.*
2. *Для каждого $i \in N$ определено множество стратегий S_i для i-ого игрока. Где $s_i \in S_i$ — стратегия i-ого игрока, а $S_N = S_1 \times \cdots \times S_n$.*
3. *Для каждого игрока описаны функции выигрышей u_i: $S_N \to \mathbb{R}$.*

Определение 2. *Игра в байесовской форме — набор $G = \langle N, \Omega, \langle A_i, u_i, V_i, \nu_i, p_i, C_i \rangle_{i \in N} \rangle$, где:*

1. *Множество игроков $N = \{1, \dots, n\}$. Где $i \in N$ — номер игрока.*
2. *Ω — множество состояний природы. Где природа — некий дополнительный участник игры, который фигурирует в качестве генератора случайных чисел. Например, множество состояний природы $\omega \in \Omega$ — множество порядков карт в колоде.*
3. *Для i-ого игрока определено множество действий A_i. $A = \{A_1, \dots, A_n\}$. В частности, для аукциона это могут быть ставки или принятие/непринятие цены предлагаемой продавцом.*
4. *V_i — множество типов игрока i. Тип определяется по правилу $\nu_i \colon \Omega \to V_i$. Соответственно тип игрока i это $v_i \in V_i$.*
5. *$C_i \subseteq A_i \times V_i$ определяет доступные действвия для игрока i, обладающего неким типом в A_i.*
6. *Функция выигрыша (платежа, полезности) — функция для i-ого игрока u_i: $\Omega \times A \to \mathbb{R}$.*
7. *Оценка вероятности состояний природы i-ым игроком — распределение вероятности p_i на множестве Ω для i, то есть каждый игрок оценивает вероятности состояний природы; Обычно распределение состояний природы все знают (и оценивают одинаково).*

Определение 3. *Чистая стратегия игрока предписывает выбор игрока каждой возможной ситуации, полностью определяя поведения игрока в каждый момент игры. Чистая стратегия $s_i \colon V_i \to A_i$ должна предписывать лишь доступные для игрока действия, то есть $(s_i(v_i), v_i) \in C_i$ для всех v_i. Множество всех стратегий i-ого игрока S_i. Обозначим $S_N = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.*

Определение 4. *Смешанная стратегия — набор вероятностей реализации каждой чистой стратегии. Таким образом игрок перед началом игры выбирает одну из чистых стратегий с вероятностью, заданной смешанной стратегией, после чего не меняет выбор до ее завершения.*

Определение 5. *Профилем стратегий называется набор из стратегий для каждого игрока $s_N = (s_1, \ldots, s_n)$, где $s_i \in S_i$. Соответственно, $s_N \in S_N$. Будем обозначать s_{-i} набор стратегий всех игроков, за исключением i-ого.*

Таким образом, профиль стратегий является элементом декартова произведения $S_N = \times_{i \in N} S_i$. Стратегия игрока зависит исключительно от его типа, а функция выигрыша зависит не только от стратегии игрока, но и от стратегий оппонентов.

Ожидаемый выигрыш игрока i при данном профиле стратегий равен $u_i(s_N) = \mathbb{E}_{\omega \sim p_i}[u_i(\omega, s_1(\nu_1(\omega)), \ldots, s_N(\nu_n(\omega)))]$.

На основе игры G в байесовской форме можно рассмотреть игру в нормальной форме $\hat{G} = \langle N, \hat{S} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n, \hat{u} = u \rangle$

Определение 6. *Равновесием по Нэшу для игры в нормальной форме, где S_N — набор чистых стратегий, а $\{u_1, \cdots, u_n\}$ — набор функций выигрышей, называется такой профиль стратегий $s_N^* = (\cdots, s_i^*, \cdots)$, что:*

$$\forall i \forall s_i \in S_i : u_i(s_N^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Определение 7. *Байесовское равновесие игры G — равновесие по Нэшу (возможно, в смешанных стратегиях) для игры $\hat{G}$.*

Как отдельный класс игр, можно выделить повторяющиеся игры (аукционы). Такие аукционы, в частности, используются при продаже рекламного места в интернете. Например, такое многократное взаимодействие в жизни происходит между сотрудниками в компании, в продажах и просто соревнованиях. Что интересно в такого рода играх, так это наличие памяти, опыта, чего практически нет при однократной игре. Например, этот опыт в реальности может выражаться в умении распознавать блеф и ложь своих знакомых и, соответственно, значительно влиять на принятие решений.

Определение 8. *Кооперативная (коалиционная) игра — игра, в которой игроки могут объединяться в группы, взяв на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия.*

Определение 9. *Параллельная игра — игра, в которой участники делают ходы одновременно или же не получают информации о ходах остальных игроков до тех пор, пока все не сделают свой ход.*

Определение 10. *Игра с полной информацией — игра, в которой игроки знают все ходы, сделанные до текущего момента, а также возможные стратегии других игроков.*

Определение 11. *Повторяющаяся игра (аукцион) — это повторяющаяся многократно (или же бесконечно) игра, являющая собой розыгрыш товара между участниками в соответствии с некоторым объявленным ранее правилом.*

Определение 12. *Резервная цена — наличие в аукционе некоторого порогового значения, дешевле которого продавец не может (или не хочет) продавать товар. Это значение может также равняться нулю или меняться от раунда к раунду в зависимости от ставок покупателей.*

Определение 13. *Игрок называется рациональным, если, обладая некоторыми предпочтениями, стремится максимизировать собственную выгоду (функцию выигрышей), формируя представления и оптимизируя свою стратегию.*

В данной работе изучаются повторяющиеся аукционы с резервной ценой для случая двух покупателей и одного продавца. Рассматриваемые модели являются некооперативными параллельными играми с неполной информацией. Игроки предполагаются совершенно рациональными. К тому же имеет место общее знание, что означает, что все знают, что все играют рационально, и все знают, что все знают, что все рациональны и т.д.

В повторяющихся аукционах обычно дисконтируют выигрыш (см. для примера [3]). Допустим, у каждого участника есть некоторая функция выигрыша u_i, зависящая от его типа (далее реальной оценки товара) v_i и от профиля стратегий участников s_N. Дисконтирование означает, что для некоторого заранее выбранного числа $\delta \in (0,1)$ и для раунда аукциона с номером n, покупатель получает выигрыш $\delta^n u_i(v_i, s_N)$ вместо $u_i(v_i, s_N)$. Иначе на $\delta^n \in (0,1)$ можно смотреть как на вероятность того, что n-ый раунд состоится. В таких моделях покупатели стараются приобретать товар раньше, то есть дисконтирование является рычагом давления устроителя на участников.

Иногда такого рода штрафы могут выглядеть неадекватными — в продаже того же рекламного места в интернете в единицу времени может происходить такое количество раундов, что любое значение δ будет различать два последующих шага аукциона. С этой мотивировкой в [2] рассматривается аукцион без дисконтирования, рассчитанный на одного покупателя и продажу одной единицы товара за раунд.

Определение 14. *Правдивой стратегией покупателя (покупатель правдив) будем называть такую стратегию s_i, которая подразумевает выставление им ставок (действие $a_i \in A_i$), соответствующих его реальной оценке товара. Это либо выставление ставки v_i в каждом раунде, либо согласие на покупку тогда и только тогда, когда предложенная продавцом цена не превышает значения v_i и т.п.*

Определение 15. *Мотивирующим к правдивости механизмом будем называть механизм взаимодействия участников аукциона, при котором рациональным поведением игрока является правдивая стратегия.*

Основной же целью этой работы является обобщение на случай двух покупателей и двух единиц товара механизма, приведенного в [2], где модель мотивировала участников вести себя правдиво. А также доказательство того, что обобщение также мотивирует к правдивости.

Для того, чтобы точнее понимать, что в данной работе понимается под правдивостью, опишем модель взаимодействия игроков (участников аукциона).

В общем смысле рассматриваются модели для двух покупателей и двух единиц товара такого рода:

- Повторяющийся аукцион, в каждом раунде которого устроитель по некоторому принципу распределяет между двумя участниками две единицы товара. Этот принцип называется стратегией продавца.

- Единицы товара идентичны.

- У каждого покупателя есть тип, называемый оценкой единицы товара v_i. Это значение скрыто от остальных участников аукциона и определяется в результате хода природы перед началом аукциона.

- Покупатели делают ставки (действия $a_i \in A_i$) в общем смысле этого слова. Это может быть согласие или не согласие на цену, предлагаемую устроителем, как в [2]; выставление собственных цен из какого-то диапазона и т.п.

- Стратегией покупателя называется последовательность ставок для каждого раунда.

- Мы предполагаем, что продавец раскрывает свою стратегию и придерживается ее. Когда как покупатели ведут себя рационально, что означает, что при фиксированных стратегиях остальных участников покупатель будет действовать в соответствие со стратегией, максимизирующей его функцию выигрыша.

- Также у устроителя может формироваться или не формироваться представление об истинной ценности товара для покупателей (в частности, это представления о состоянии природы). Эти представления, соответственно, могут влиять на стратегию продавца.

Так, в секции 2 рассматривается пример повторяющегося аукциона в случае, когда продавец не составляет никакого мнения о покупателях. Мотивировка для такой модели была в том, чтобы более богатые игроки (с большим значением v_i) получали товар с большей вероятностью и в большем количестве. Иначе об этой модели можно думать, как о модели распределения награды для членов команды за выполненную работу. Про данный механизм доказано, что он не является мотивирующим к правдивости. Таким образом данный результат можно интерпретировать, как рекомендацию к организации процесса распределения благ, например, при таком способе вознаграждения за проделанную работу, работники не будут вкладывать столько сил, времени, умений, сколькими располагают в реальности, что могло бы показаться контр-интуитивным. Или, если речь идет о рекламе в интернете, то такое устройство аукциона приводит к снижению цен на рекламу. В общем случае здесь также показано для ряда моделей, как может быть найдена оптимальная стратегия поведения покупателя.

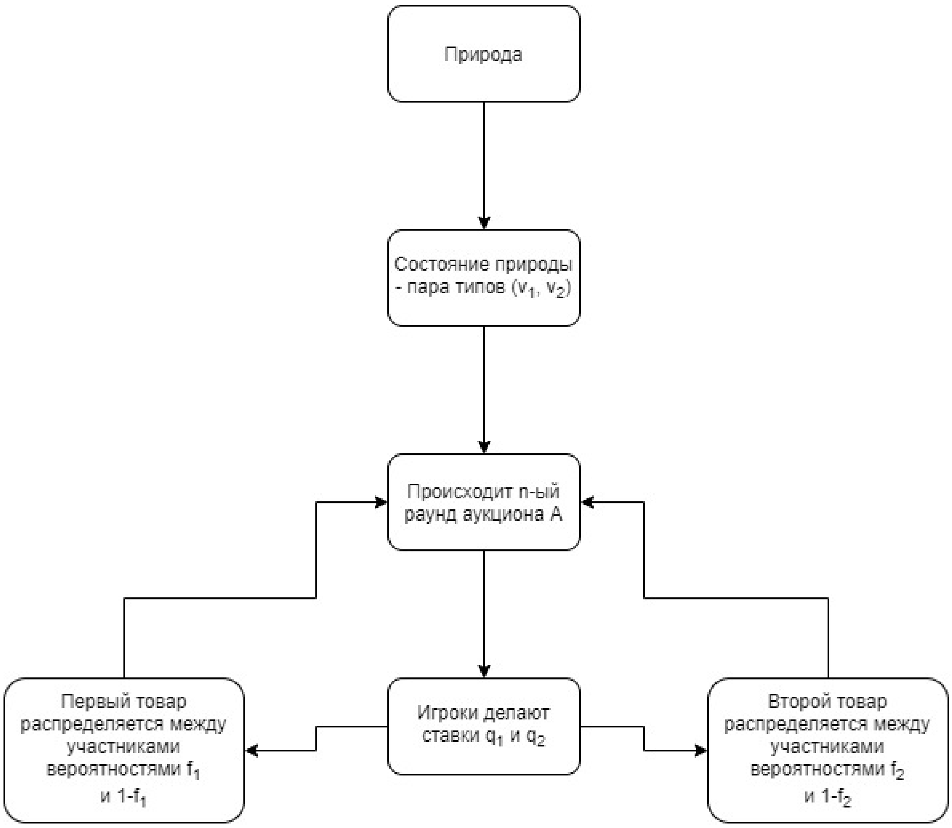
В секции 3 приводится модель из [2] и придуманные обобщения, что являлось целью всей работы. Предъявляются новые механизмы, являющиеся мотивирующими к правдивости. То есть без попыток выдать свою реальную стоимость v_i для товара (тип) за другое значение. Одна из приведенных здесь моделей также реализует принцип «каждому по способностям», что можно интересно трактовать в терминах вознаграждения сотрудников. Так, v_i для работника может быть количеством времени или сил, которыми он располагает для того, чтобы работать. Ставки игроков

— усилия, прилагаемые работником в реальности. А товар — премия на весь отдел, распределяемая между работниками в соответствие с количеством приложенных усилий. Таким образом приведенные механизм реализует вознаграждения сотрудников, мотивирующую к более продуктивной деятельности, соответствующей реальному количество сил и времени, которыми сотрудник располагает. Или, если смотреть на это с точки зрения продаж, то модель, позволяющая устроителю правильно оценить заинтересованность тех или иных покупателей в товаре.

2 Аукционы без представлений об оценке покупателя.

В данном разделе рассматриваются модели повторяющихся аукционов с резервной ценой, в которых продавец не составляет никакого мнения о покупателях, то есть не строит никаких догадок о реальных значениях v_i (то есть нет представлений о состоянии природы). Пусть в каждом раунде покупатель называет сумму q_i, которую покупатель готов заплатить за единицу товара, это число и будет называться ставкой. Таким образом множество действий для i-ого покупателя — $A_i = \mathbb{R}_+$.

Стратегия покупателя, соответственно — последовательность ставок в раундах. Стратегия продавца же состоит в том, чтобы с какими-то вероятностями выдавать товары покупателям в зависимости от сделанных ими ставок. Здесь сразу надо отметить, что модель подразумевает возможность приобретения покупателями как одной единицы, так и двух единиц товара.



Определение 16. *Мотивирующими к правдивости механизмами здесь будем называть такие механизмы, что наиболее выгодной для покупателя стратегией будет последовательность ставок $q_i = v_i$, где i номер раунда.*

Основной мотивацией для данного примера является открытый вопрос, который можно сформулировать следующим образом: в классе мотивирующих к правдивости механизмов найти такой механизм распределения двух единиц товара между двумя покупателями в повторяющемся аукционе, дающий максимальную прибыль продавцу, что распределение товаров происходит в соответствии со следующими вероятностями:

1. С вероятностью f_1 только первый покупатель получает товар

2. С вероятностью f_2 только второй покупатель получает товар

3. С вероятностью f_3 оба покупателя получают товар

4. С вероятностью f_4 никто не получает товар

Где $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$, и являются функциями, зависящими (возможно, не от всех перечисленных параметров) от $q_i \in A_i, \omega \in \Omega, p_i, s_i \in S_i$.

В разделе рассматривается конкретный пример, про который доказывается, что эта модель не является мотивирующей к правдивости. После чего для ряда моделей такого типа организации показан способ нахождения рациональной стратегии для игроков.

2.1 Аукцион А. Не мотивирующий к правдивости.

Формальное описание модели:

1. У покупателей в данной модели есть единственный скрытый параметр — ценность товара v_i (ранее тип). Тип покупателя можно считать выпадающим в самом начале игры в результате хода природы.

2. В каждом раунде аукциона покупатели делают ставки $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+$.

3. Продавец, основываясь на значениях ставок покупателей, с какими-то вероятностями распределяет две единицы товара между покупателями.

4. Вероятности получения первого товара для первого и второго покупателей, соответственно, f_1 и $1 - f_1$.

5. Вероятности получения второго товара для первого и второго покупателей $1-f_2$ и f_2.

   Где f_1 и f_2 считаются, соответственно:

$$f_1 = \min(\tfrac{2q_1}{q_1+q_2}, 1)$$
$$f_2 = \min(\tfrac{2q_2}{q_1+q_2}, 1)$$

6. Выигрыш покупателя за раунд при покупке единицы товара по стоимости q_1, составляет $v_1 - q_1$.

	1 покупатель Ставка q_1	2 покупатель Ставка q_2
1 товар	Вероятность: $f_1 = min(\frac{2q_1}{q_1+q_2}; 1)$ Плата: q_1	Вероятность: $1 - min(\frac{2q_1}{q_1+q_2}; 1)$ Плата: q_2
2 товар	Вероятность: $1 - min(\frac{2q_2}{q_1+q_2}; 1)$ Плата: q_1	Вероятность: $f_2 = min(\frac{2q_2}{q_1+q_2}; 1)$ Плата: q_2

Не умаляя общности $q_1 \geq q_2$, следовательно, $f_2 \leq 1$, а $f_1 = 1$. Таким образом можно посчитать математическое ожидание выигрыша в одном раунде для игрока с большей и меньшей ставкой:

1. Для игрока с большей ставкой: $\mathbb{E}_1 = 1(v_1 - q_1) + (1 - f_2)(v_1 - q_1) = (v_1 - q_1)(2 - f_2) = \frac{2q_1(v_1-q_1)}{q_1+q_2}$

2. Для игрока с меньшей ставкой: $\mathbb{E}_2 = f_2(v_2 - q_2) = \frac{2q_2(v_2-q_2)}{q_1+q_2}$

Наводящие соображения. В данной модели нет никаких представлений об игроках, то есть каждый раунд независим с остальными. Стратегия покупателя в данном аукционе — последовательность ставок в каждом раунде. Наивное рассуждение состоит в следующем: если в каком-то раунде можно сделать более выгодную ставку, чтобы получить больший выигрыш, то стратегия с такой ставкой в данном раунде будет более выгодной.

2.2 Правдивость покупателей в аукционе A.

Теорема 2.1. *Данный механизм не является мотивирующим к правдивости.*

Доказательство. *План доказательства будет такой:*

- *Рассмотрим математическое ожидание выигрышей за один раунд. Найдем оптимальные ставки, максимизирующие эти математические ожидания.*

- *Проверим, что оптимальные ставки не являются честным ответом.*

- *Предположим, что стратегия покупателя играть оптимальные ставки (найденные в предыдущих пунктах) может быть не лучше (то есть максимизирует математическое ожидание выигрыша за один ход, но не максимизирует математическое ожидание выигрыша за всю игру), чем иные стратегии, докажем от противного, что это не так. Покажем, что при любой игре оппонента, честная игра никогда не является лучшим ответом.*

Фиксируем текущий раунд. Не умаляя общности, первый игрок будет делать большую ставку, чем второй. Здесь не важно, кто из них в реальности имеет более высокую оценку.

1. Исследуем функцию математического ожидания выигрыша первого покупателя за один раунд аукциона $\mathbb{E}_1 = 1(v_1 - q_1) + (1 - f_2)(v_1 - q_1) = (v_1 - q_1)(2 - f_2) = \frac{2q_1(v_1 - q_1)}{q_1 + q_2}$.

   Продифференцировав $\mathbb{E}_1$ по q_1, получим:

$$(\mathbb{E}_1)'_{q_1} = \frac{2v_1q_2 - 2(q_1)^2 - 4q_1q_2}{(q_1 + q_2)^2}$$

   Таким образом производная обнуляется при обнулении числителя, то есть:

$$2v_1q_2 - 2(q_1)^2 - 4q_1q_2 = 0$$

$$(q_1)_{1,2} = -q_2 \pm \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}$$

   Также у функции есть вертикальная асимптота $q_1 = -q_2$. На промежутках $(-\infty; -q_2 - \sqrt{q_2^2 + v_1q_2})$, $(-q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}; \infty)$ производная отрицательна — функция убывает. На промежутках $(-q_2 - \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}; -q_2)$, $(-q_2; -\infty; -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2})$ функция возрастает. Заметим также, что нули функции $\mathbb{E}_1(q_1)$ — точки $(0; 0)$ и $(v_1; 0)$.

   Таким образом функция $\mathbb{E}_1(q_1)$ положительная на промежутке $(0; v_1)$ и имеет локальный максимум при значении аргумента $q_1 = -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}$. Примерный график представлен ниже.

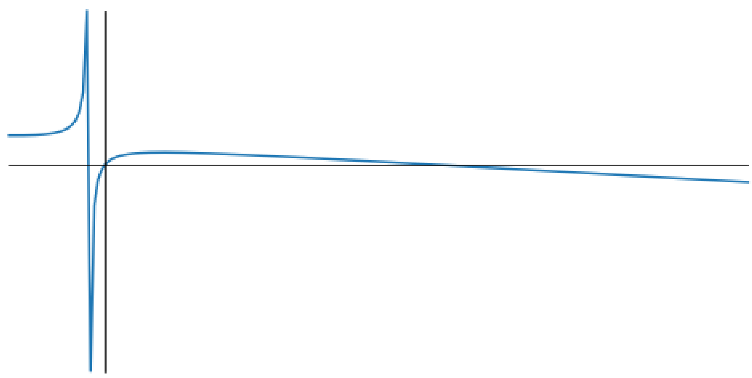


Рис. 1: График зависимости $\mathbb{E}_1(q_1)$.

2. Рассмотрим функцию $\mathbb{E}_2(q_2)$ при подстановке оптимального ответа первого $q_1 = -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}$:

$$\mathbb{E}_2 = f_2(v_2 - q_2) = \frac{2q_2}{q_1 + q_2}(v_2 - q_2) = \frac{2q_2(v_2 - q_2)}{\sqrt{q_2^2 + v_1q_2}}$$

Продифференцируем по q_2 и получим:

$$(\mathbb{E}_2)'_{q_2} = \frac{-2q_2^3 + q_2v_1v_2 - 3q_2^2v_1}{(\sqrt{q_2^2 + v_1q_2})^3}$$

Производная обнуляется при обнулении числителя в значениях $q_2 = 0$ и $(q_2)_{1,2} = \frac{3v_1 \pm \sqrt{9v_1^2 + 8v_1v_2}}{-4}$, откуда нас интересует лишь значение $(q_2)_{1,2} = \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4}$, так как отрицательные ставки не рассматриваются, а нулевая ставка — вырожденный случай. Вероятность получения товара при $q_2 = 0$ для второго покупателя нулевая, когда как нас интересует оптимальная реакция второго покупателя.

Поймем, является ли значение $(q_2)_{1,2} = \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4}$ локальным максимумом — определим промежутки знакопостоянства производной.

Знаменатель положителен, так как в q_1^{opt} выбрано положительное значение корня. Числитель раскладывается в произведение: $q_2(-2q_2^2 + v_1v_2 - 3q_2v_1)$. Соответственно на промежутке $(0; \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4})$ производная положительная, функция $\mathbb{E}_2(q_2)$ возрастает. На промежутке $(\frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4}; +\infty)$ производная отрицательная, функция убывает. А значение $(q_2)_{1,2} = \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4}$ реализует локальный максимум.

3. Иначе это надо интерпретировать так. При оптимальной игре первого, полученное значение является оптимальной ставкой второго покупателя.

   Понятно, что в реальности ставки делаются одновременно. Здесь надо также отметить, что покупатели в данной модели не знают ценности друг друга и ставки. Полученные значения максимизируют значения функции полезности, но на практике не известны.

   Таким образом, мы получили следующую пару:

$$q_2^{opt} = \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2+8v_1v_2}}{-4}, q_1^{opt} = -(q_2)^{opt} + \sqrt{((q_2)^{opt})^2 + v_1(q_2)^{opt}}$$

   Можно провести все рассуждения выше еще раз. Уже сначала оптимизируя функцию $\mathbb{E}_2$ по q_2, а затем, подставляя в $\mathbb{E}_1$, искать оптимальный ответ первого на рациональную игру второго. Получится аналогичный результат:

$$q_1^{opt'} = \frac{3v_2 - \sqrt{9v_2^2+8v_1v_2}}{-4}, q_2^{opt'} = -(q_1)^{opt'} + \sqrt{((q_1)^{opt'})^2 + v_1(q_1)^{opt'}}$$

4. Допустим, что меньшая ставка $q_2 \to v_2$, то есть второй покупатель правдив.

   Рассмотрим функцию $q_1^{opt}(q_2) = -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2}$.

   Предел при стремлении аргумента $q_2 \to +\infty$:

$$\lim_{q_2\to\infty} -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1q_2} = \lim_{q_2\to\infty} -q_2 + q_2\sqrt{1 + \frac{v_1}{q_2}} =$$

$$= [\text{по ф. Тейлора для } \sqrt{1+\frac{v_1}{q_2}} \text{ при } \frac{v_1}{q_2} \xrightarrow[q_2\to+\infty]{0}] =$$

$$= \lim_{q_2\to\infty} -q_2 + q_2(1+\frac{v_1}{2q_2} + \frac{(v_1)^2}{2q_2^2} + o(\frac{1}{q_2^3})) =$$

$$= \lim_{q_2\to\infty} \frac{v_1}{2} + \frac{v_1^2}{2q_2} + o(\frac{1}{q_2^2}) = \frac{v_1}{2}$$

Продифференцируем $q_1^{opt}(q_2) = -q_2 + \sqrt{q_2^2 + v_1 q_2}$ по q_2, получим:

$$(q_1^{opt})'_{q_2} = -1 + \frac{2q_2 + v_1}{2\sqrt{q_2^2 + v_1 q_2}}$$

$$\frac{2q_2 + v_1 - 2\sqrt{q_2^2 + v_1 q_2}}{2\sqrt{q_2^2 + v_1 q_2}} \geq 0 \iff 2q_2 + v_1 - 2\sqrt{q_2^2 + v_1 q_2} \geq 0$$

$$2q_2 + v_1(\geq 0) \geq 2\sqrt{q_2^2 + v_1 q_2}(\geq 0)$$

$$4q_2^2 + 4q_2 v_1 + v_1^2 \geq 4(q_2^2 + v_1 q_2)$$

Последнее верно всегда, поэтому получаем, что функция всюду возрастает на промежутке $[0;\infty)$. Отрицательные ставки не рассматриваются.

Таким образом мы получили всюду возрастающую функцию, в бесконечности стремящуюся к значению $\frac{v_1}{2}$.

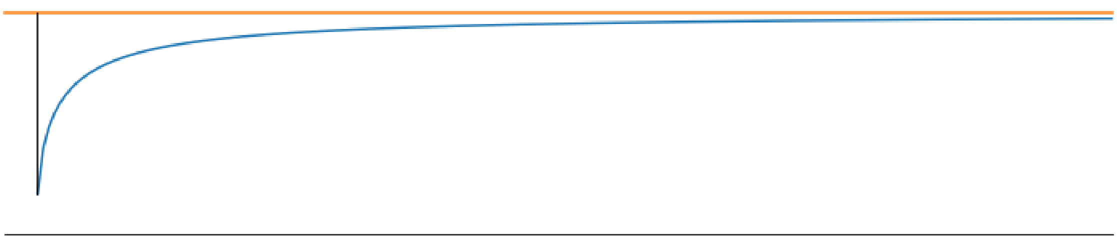


Рис. 2: График зависимости $q_1^{opt}(q_2)$.

То есть, выше этого значения функция не принимает значений. Таким образом при любой, в том числе и правдивой ставке второго,наиболее выгодная ставка первого не стремится к v_1.

Аналогично верно и для $q_2^{opt'} = -(q_1)^{opt'} + \sqrt{((q_1)^{opt'})^2 + v_1 (q_1)^{opt'}}$, что строго меньше v_2. Таким образом мы получаем что оптимальные ставки вообще говоря отличаются от правдивых. Но, возможно, если рассмотреть не отдельный раунд, а выигрыш за все раунды, то получится иной результат? Оказывается, что нет, для этого разобьем всю игру на раунды дух типов, как написано далее.

5. На математическое ожидание также можно смотреть как на получаемую долю товара в каждом раунде. Отметим, что раунды независимы в следующем смысле. Следующие ставки не зависят от предыдущих. Вероятность получения в каждом раунде товара зависит только от ставок в данном раунде.

   Общий выигрыш складывается из этих независимых выигрышей. Таким образом, если в каком-то раунде при смене ставки, увеличивается математическое ожидание, то есть доля получаемого товара, то и общий выигрыш за весь аукцион увеличивается.

   Назовем покупателей A и B. Допустим, модель все же вынуждает играть честно. Рассмотрим произвольную стратегию покупателя A и честную стратегию B.

   Разобьем множество всех раундов на те, в которых ставки A были меньше и на те, в которых его ставки были больше ставок покупателя B.

   Таким образом в первом случае покупатель B играет за ставку $q_2 \leq q_1 = v_B$, но выше выигрыш B в каждом таком раунде уже исследовался в зависимости от q_1. В этих раундах B выгоднее играть не честно при любой игре A. Выигрыш остальных раундов от этого не меняется. А в этих раундах математическое ожидание выигрыша только увеличивается.

   Но, возможно, раундов такого типа вообще нет, то есть во всем аукционе $q_2 \geq q_1 = v_B$. Но в таком случае полный выигрыш B составляет — 0. Но, если B будет ставить $q_1 - \epsilon \leq q_1 \leq q_2$, тогда его выигрыш может увеличиться. То есть и в таком случае играть честно — не выгодно.

■

2.3 Поиск выгодных стратегий.

Обобщая рассуждения в описанном примере, формализуем в большей степени рассуждения об оптимальности стратегии для большого количества раундов.

Рассмотрим множество моделей для продажи двух товаров двум покупателем без представлений продавца о покупателях — то есть где вероятность получения товара зависит только от текущих ставок покупателей.

Соответственно, вероятности получения первого товара в раунде n первым и вторым покупателями — $f_1^1(q_1^n, q_2^n)$ и $f_2^1(q_1^n, q_2^n)$. Аналогично для второго товара — $f_1^2(q_1^n, q_2^n)$ и $f_2^2(q_1^n, q_2^n)$. Плата за товары, соответственно, $p_1^1(q_1^n, q_2^n)$, $p_2^1(q_1^n, q_2^n)$, $p_1^2(q_1^n, q_2^n)$ и $p_2^2(q_1^n, q_2^n)$. Для простоты будем использовать обозначения $p_{1,2}^{1,2}(n)$ и $f_{1,2}^{1,2}(n)$ для вероятностей и платы в n-ом раунде.

Пусть $A = \{a_1, \dots\}$ событие, состоящее в реализации множества событий, где $a_n = 1$ в случае приобретение первого товара первым покупателем, а $a_n = 0$, иначе. Аналогично B для второго товара. Множеством $\mathbf{St}$ назовем множество всевозможных событий $A \wedge B$ для всевозможных исходов A и B.

Тогда за $\mathbf{Pr}_s$ обозначим вероятность реализации события $s = A \wedge B \in \mathbf{St}$. Эта вероятность — произведение вероятностей $f_1^1(n)$ (если $a_n = 1$) или $1 - f_1^1(n)$ (если $a_n = 0$) и $f_1^2(n)$ (если $b_n = 1$) или $(1 - f_1^2(n))$ (если $b_n = 0$).

	1 покупатель Ставка q_1	2 покупатель Ставка q_2
1 товар	Вероятность: $f_1^1(q_1, q_2)$ Плата: $p_1^1(q_1, q_2)$	Вероятность: $f_2^1(q_1, q_2)$ Плата: $p_2^1(q_1, q_2)$
2 товар	Вероятность: $f_1^2(q_1, q_2)$ Плата: $p_1^2(q_1, q_2)$	Вероятность: $f_2^2(q_1, q_2)$ Плата: $p_2^2(q_1, q_2)$

Соответственно, выигрыш первого игрока в случае реализации события A: $\sum_A = \sum_n a_n(v_1 - p_1^1(n))$. Аналогично для B: $\sum_B$. Таким образом выигрыш при реализации события $s = A \wedge B \in \mathbf{St}$: $\sum_s = \sum_A + \sum_B$.

Распишем математическое ожидание выигрыша первого покупателя за n раундов:

$$\mathbb{E}_1 = \sum_{s \in \mathbf{St}} \Big[\mathbf{Pr}_s \cdot \sum_s \Big]$$

Выделим n-ый раунд. Его исходы, соответственно:

- Покупка двух товаров с вероятностью $f_1^1(n) \cdot f_1^2(n)$ и выигрышем $(v_1 - p_1^1(n)) + (v_1 - p_1^2(n))$
- Покупка только первого товара с вероятностью $f_1^1(n) \cdot (1 - f_1^2(n))$ и выигрышем $(v_1 - p_1^1(n))$
- Покупка только второго товара с вероятностью $(1 - f_1^1(n)) \cdot f_1^2(n)$ и выигрышем $(v_1 - p_1^2(n))$
- С вероятностью $(1 - f_1^1(n)) \cdot (1 - f_1^2(n))$ выигрыш 0

Таким образом в качестве A_{-n}, B_{-n} и $\mathbf{St}_{-n}$ будем рассматривать события покупки или продажи товаров первому покупателю во всех раундах, кроме nого.

Перепишем математическое ожидание выигрыша первого покупателя с помощью введенных обозначений:

$$\mathbb{E}_1 = f_1^1(n) \cdot f_1^2(n) \cdot \sum_{s \in \mathbf{St}_{-n}} \Big[\mathbf{Pr}_s \cdot \Big(\sum_s + (v_1 - p_1^1(n)) + (v_1 - p_1^2(n)) \Big) \Big] +$$

$$+ f_1^1(n) \cdot (1 - f_1^2(n)) \cdot \sum_{s \in \mathbf{St}_{-n}} \Big[\mathbf{Pr}_s \cdot \Big(\sum_s + (v_1 - p_1^1(n)) \Big) \Big] +$$

$$+(1-f_1^1(n))\cdot f_1^2(n)\cdot\sum_{s\in\mathbf{St}_{-n}}\Big[\mathbf{Pr}_s\cdot\Big(\sum_s+(v_1-p_1^2(n))\Big)\Big]+$$
$$+(1-f_1^1(n))\cdot(1-f_1^2(n))\cdot\sum_{s\in\mathbf{St}_{-n}}\Big[\mathbf{Pr}_s\cdot\Big(\sum_s+0\Big)\Big]$$

Обозначим произведение $\mathbf{Rest}=\mathbf{Pr}_s\cdot\sum_s$. Заметим также, что $\sum_{s\in\mathbf{St}_{-n}}\mathbf{Pr}_s=1$, так как это сумма вероятностей всевозможных исходов всех раундов, кроме nого.

Теперь перепишем математическое ожидание еще раз:

$$\mathbb{E}_1=\mathbf{Rest}\cdot\Big(f_1^1(n)\cdot f_1^2(n)+f_1^1(n)\cdot(1-f_1^2(n))+(1-f_1^1(n))\cdot f_1^2(n)+(1-f_1^1(n))\cdot(1-f_1^2(n))\Big)+$$
$$+f_1^1(n)\cdot f_1^2(n)\cdot\Big((v_1-p_1^1(n))+(v_1-p_1^2(n))\Big)+$$
$$+f_1^1(n)\cdot(1-f_1^2(n))\cdot\Big(v_1-p_1^1(n)\Big)+$$
$$+(1-f_1^1(n))\cdot f_1^2(n)\cdot\Big(v_1-p_1^2(n)\Big)=$$
$$=\mathbf{Rest}+\mathbb{E}_1^n$$

Где $\mathbb{E}_1^n$ — математическое ожидание выигрыша первого покупателя в n-ом раунде аукциона, а **Rest** не зависящая от ставок в n-ом раунде функция. Аналогичные выкладки можно сделать и для второго покупателя.

Таким образом, в моделях такого типа, где никак не фигурируют представления продавца о покупателях и ставки делаются независимо в каждом раунде, мы получаем, что стратегии, оптимизирующие мат.ожидание выигрыша покупателя можно найти, вычисляя отдельно ставки, максимизирующие выигрыш покупателя в каждом раунде в отдельности. Более того, стратегии, максимизирующие мат.ожидание выигрыша покупателя должны максимизировать выигрыш в каждом отдельном раунде. То есть повторяющийся аукцион редуцируется к однократному. Таким образом вопрос о существовании повторяющихся аукционов без представлений такого типа, мотивирующих к правдивости сводится к вопросу о существовании однократного аукциона такого типа, являющегося мотивирующим к правдивости.

3 Аукционы с представлениями продавца о ценности покупателя.

В данном разделе мы будем изучать равновесие в смешанных стратегиях, в частности, продавец будет реагировать на ответы покупателей с какими-то вероятностями. Здесь в каждом раунде взаимодействие строится по следующему принципу: продавец устанавливает какую-то цену за единицу товара, которую считает, исходя из своих догадок (то есть догадки о состоянии природы, здесь и далее будем обозначать, как q_n^i для n-ого раунда и i-ого игрока) о реальных значениях ценности товара для i-ого покупателя v_i (типе). После чего покупатели либо соглашаются и получают какую-то долю товара по этой цене, либо не соглашаются, соответственно.

Действия i-ого покупателя в n-ом раунде — ставки a_n^i, где $a_n^i = 0$, если покупатель не принимает предлагаемую цену и $a_n^i = 1$ иначе. Стратегией i-ого покупателя здесь будет называться последовательность ставок a_n^i.

Определение 17. *Мотивирующим к правдивости механизмом здесь будем называть механизм, в котором наиболее выгодная для i-ого покупателя стратегия при условии фиксированных стратегий остальных игроков, будет: соглашаться тогда и только тогда, когда предлагаемая продавцом цена не превосходит его оценки товара v_i. Такую стратегию также будем называть наивной.*

Для примера в данном разделе приведена модель для аукциона с одним продавцом, одним покупателем и одной единицей товара, мотивирующий покупателя вести себя честно — аукцион B. Эта модель описывается в [2], где также доказывается выгода для покупателя быть правдивым, к тому же некоторые оценки на выигрыш покупателя.

Далее приведены два обобщения данной модели на случай двух покупателей и двух единиц товара — аукционы C и D, а также доказана мотивация к правдивости в обоих случаях.

3.1 Аукцион B. Для одного покупателя.

Для начала опишем модель из [2].

1. У покупателя также есть скрытое значение v_1 того, как он оценивает товар.

2. В каждом раунде продавец, исходя из своих представлений о покупателе, назначает цену за единицу товара в текущем раунде — Q_n.

3. Покупатель соглашается или не соглашается на данную цену. После чего получает или не получает товар с выигрышами $v_1 - Q_n$ или 0, соответственно. А продавец пересчитывает свои представления о покупателе.

Стратегия продавца (seller) по выбору цены за единицу товара — Q_{n+1} после раунда n зависит от истории игры. Здесь предполагалось, что перед тем, как сыграть в раунде n, продавец составляет догадку — q_n о типе покупателя (buyer), от которой и зависит следующая цена.

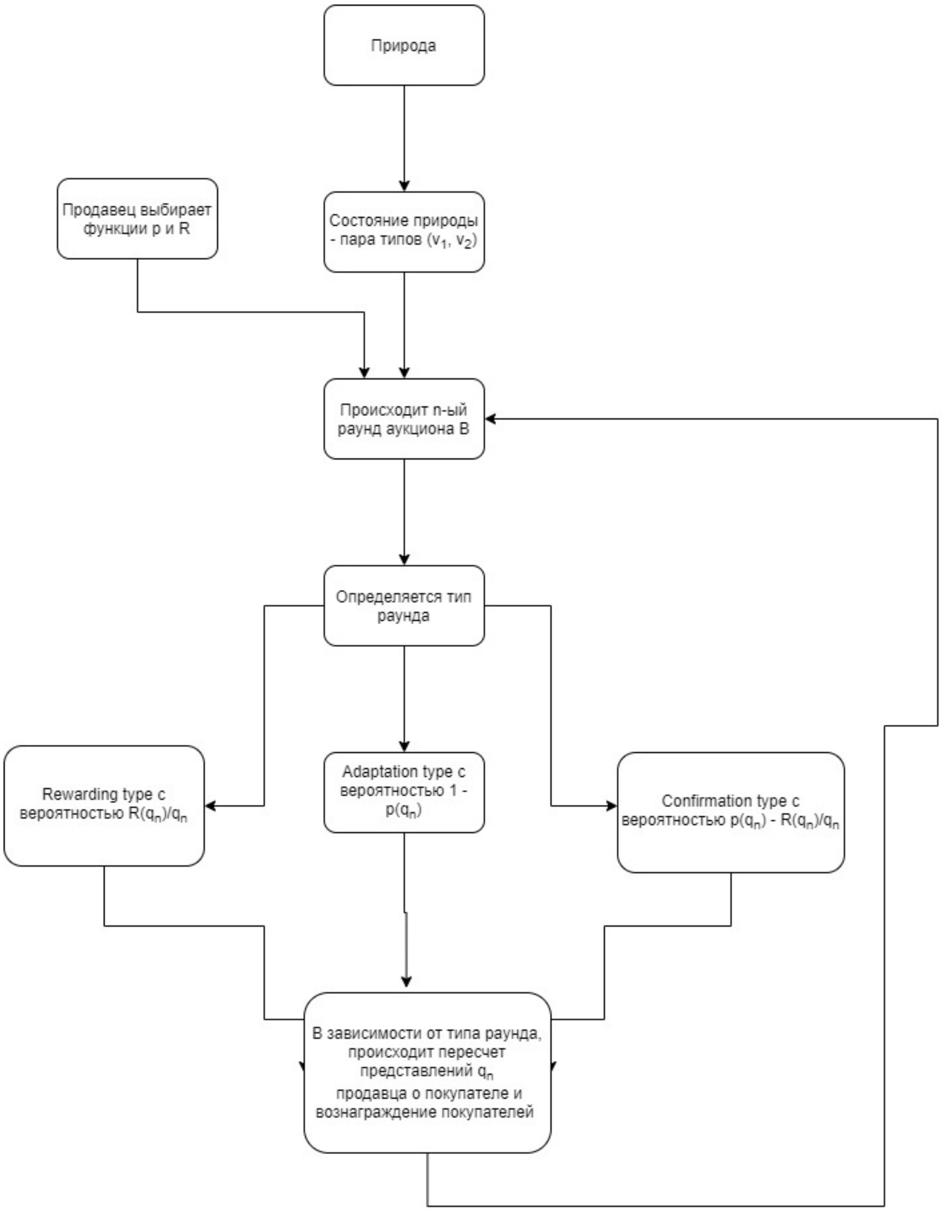
Продавец фиксирует любую возрастающую функцию:

$$p : [0, \infty) \to [0, 1], p(0) = 0, \lim_{q \to \infty} p(q) = 1$$

Пусть R — решение дифференциального уравнения: $R(0) = 0, R'(q) = p(q)$.

В каждом раунде аукциона продавец, имея оценку q_n ($q_0 = 0$), играет приведенную ниже смешанную стратегию $s_{seller}(q_n)$, где покупатель принимает или отвергает предложенную цену и, соответственно, получает (по цене: $q - Q_n$) или не получает товар.

Случайный выбор между тремя типами цен в n-ом этом раунде:



- **Adaptation type** (с вероятностью $1 - p(q_n)$): продавец устанавливает цену Q_n, которая выбирается из равномерного распределения на $[q_n, q_n + 1]$. При принятии этой цены покупателем, представление корректируется: $q_{n+1} = Q_n$. В противном случае: $q_{n+1} = q_n$.
- **Rewarding type** (с вероятностью $\frac{R(q_n)}{q_n}$): цена $Q_n = 0$. *Вероятность появления этой цены растет с ростом* q_n
- **Confirmation type** (с вероятностью $p(q_n) - \frac{R(q_n)}{q_n}$): продавец подтверждает тип: цена $Q_n = q_n$. Если Q_n принимается, тогда: $q_{n+1} = q_n$. Иначе представления о покупателе «откатываются»до какого-то более маленького значения в прошлом.

  Конкретно в [2] предлагается следующий способ: пусть $k = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Где $a_j = 1$, если на j-ом раунде покупатель получил товар и 0, иначе.

Изменим порядок элементов на множестве $\{Q_j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$Q'_1 \geq Q'_2 \geq ... \geq Q'_n$$

Соответственно следующая оценка устанавливается: $q_{n+1} = \frac{Q'_{n-k}+Q'_{n-k-1}}{2}$.

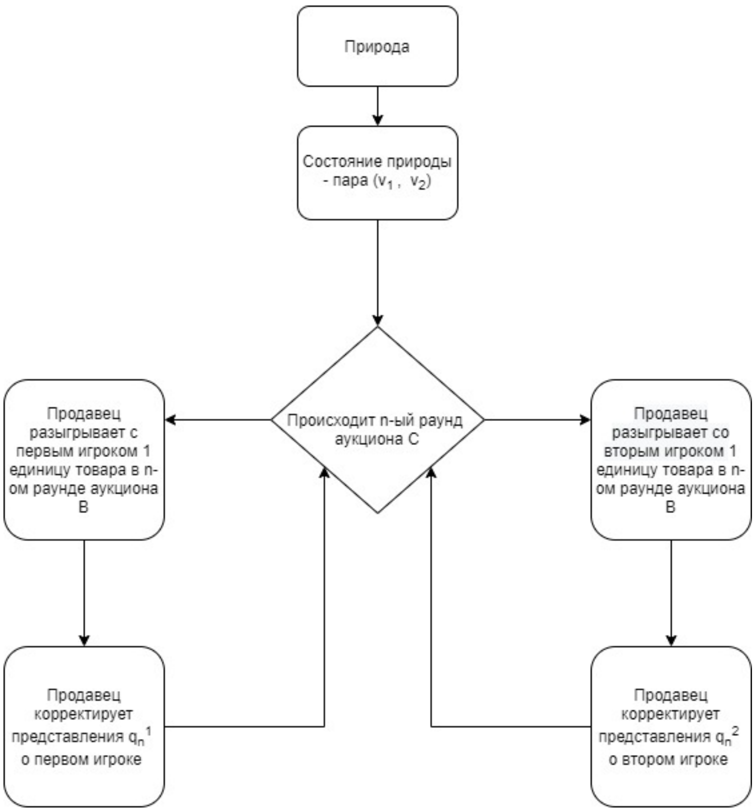
3.2 Обобщенный аукцион для двух покупателей.

Далее опишем два варианта обобщения аукциона из [2] на случай двух покупателей и двух единиц товара. Докажем, что оба обобщения являются мотивирующими к правдивости и сравним ожидаемый выигрыш участников.

Оба обобщения основываются на идее аукциона A о типах раундов и вероятностях появления этих типов, однако принципы распределения товара будут отличаться.

3.2.1 Аукцион C. Простейшее обобщение.

Первый вариант обобщения [2] на случай двух покупателей являет собой модель, в которой каждый из двух покупателей получает или не получает ровно одну единицу товара в процессе аукциона B.

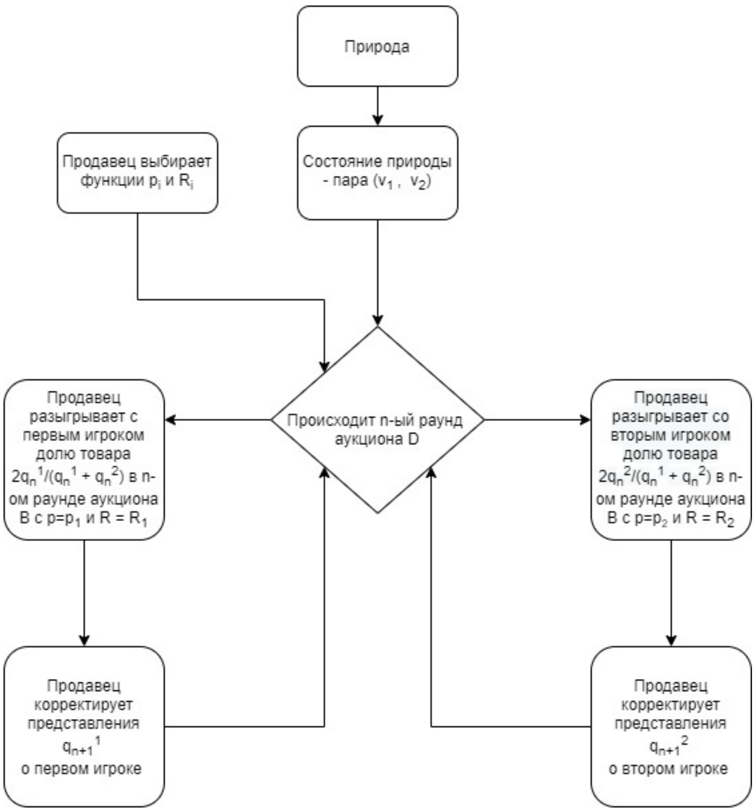


Иначе на это можно смотреть, как на два отдельных аукциона с одним покупателем и одной единицей товара каждый. Покупатели действуют независимо, и, как уже было доказано в исходной статье, честно. То есть принимают цену, предлагаемую продавцом тогда и только тогда, когда предлагаемая цена не превышает скрытого значения покупателя.

3.2.2 Аукцион D. Альтернативное обобщение.

В отличие от первого обобщения, цель этой модели в том, чтобы помимо достижения правдивости от покупателей, также распределить продаваемый товар справедливо, то есть «каждому по способностям»в некотором смысле, при этом мотивировки для смешанной модели согласуются с заявленными в [2] свойствами для хорошей модели:

- Стратегия продавца должна адаптироваться к типу покупателя так, будто его истинный тип медленно меняется со временем, и стратегия продавца к этому изменению приспосабливается.
- Выигрыш покупателя должен монотонно зависеть от типа, более того выигрыш при большем типе должен включать выигрыш при меньшем, чтобы мотивировать покупателя не притворяться беднее, чем он есть на самом деле.
- И, наконец, продавец не должен мотивировать покупателя в тому, чтобы притворяться богаче, чем в реальности.



Итак, в начале аукциона происходит ход природы, в результате которого игроки получают типы v_1 и v_2, соответственно. Далее продавец выбирает возрастающие по первому аргументу функции:

$$p_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, 1], p_i(0, x_2) = 0, \lim_{x_1 \to \infty} p_i(x_1, x_2) = 1, p_i(x_1, x_2) < 1 - \frac{x_2}{x_2 + x_1}$$

Отметим, что первым аргументом для p_i будет представление продавца об i-ом покупателе, а вторым аргументом — о его оппоненте. Так как это вероятность появления каких-либо цен для i-ого игрока, то в первую очередь функция p_i зависит от представлений именно об i-ом игроке, поэтому первым аргументом для нее всегда будет более важный параметр.

Пусть $R_i(x_1, x_2)$ — решение дифференциального уравнения:

$$R_i(0, x_2) = 0, (R_i(x_1, x_2))'_{x_1} = p_i(x_1, x_2)$$

То есть при каждом фиксированном x_{fix}, значение функции $R_i(x_1, x_{fix})$ — площадь под графиком функции $p_i(x_2, x_{fix})$.

В новой версии смешанной стратегии, продавец имеет представления о каждом из своих покупателей — q_n^i на момент раунда с номером n.

В зависимости от этих представлений на каждом новом шаге i-ый покупатель будет претендовать на долю товара $\frac{2q_n^i}{q_n^1+q_n^2}$, которая будет продаваться в соответствии со следующей смешанной стратегией (распишем выбор для первого игрока, для второго игрока розыгрыш товара аналогичен с точностью до перемены местами индексов $1 \to 2$ и $2 \to 1$):

- **Adaptation type** (с вероятностью $1 - p_1(q_n^1, q_n^2)$): продавец устанавливает цену Q_n^1 для первого покупателя(для второго будет другая цена — Q_n^2), которая выбирается из равномерного распределения на $[q_n^1, q_n^1 + 1]$. При принятии этой цены 1-ым покупателем, представление корректируется: $q_{n+1}^1 = Q_n^1$. В противном случае: $q_{n+1}^1 = q_n^1$.

- **Rewarding type** (с вероятностью $\frac{R_1(q_n^1,q_n^2)}{q_n^1}$): цена $Q_n^1 = 0$. *Вероятность появления этой цены растет с ростом* q_n^1

- **Confirmation type** (с вероятностью $p_1(q_n^1, q_n^2) - \frac{R_1(q_n^1,q_n^2)}{q_n^1}$): продавец подтверждает тип: цена $Q_n^1 = q_n^1$. Если Q_n^1 принимается 1-ым покупателем, тогда: $q_{n+1}^1 = q_n^1$. Иначе представления об 1-ом покупателе «откатываются»до какого-то более маленького значения в прошлом.

  Воспользуемся для этого аналогичным методом из [2]: пусть $k^1 = \sum_{j=1}^{n} a_j^1$. Где $a_j^1 = 1$, если 1-ый покупатель получает товар в jом раунде.

  Изменим порядок элементов на множестве $\{Q_j^1\}_{j=1}^n$ следующим образом:

  $$Q'^{\,1}_1 \geq Q'^{\,1}_2 \geq ... \geq Q'^{\,1}_n$$

  Соответственно следующая оценка устанавливается: $q_{n+1}^1 = \frac{Q'^{\,1}_{n-k^1} + Q'^{\,1}_{n-k^1-1}}{2}$.

3.3 Правдивость в аукционе D.

Теорема 3.1. *Аукцион D является мотивирующим покупателей к правдивости.*

Доказательство. Рассмотрим первого покупателя (для второго рассуждения аналогичны).

Посредством своей реакции на предлагаемые цены, покупатель влияет на представления продавца о его реальной оценке товара — q_n^1. В случае, когда $q_n^1 < v_1$, покупатель получает основную выгоду от более частых **adaptation type**. Чтобы поддерживать $q_n^1 < v_1$, по сути, покупатель должен играть за наивную стратегию для типа q_n^1, то есть должен отвергать стоимости **adaptation type**, что сокращает его доход по сравнению с наивной стратегией для его реального типа. Таким образом играть наивную стратегию—не хуже, чем притворяться беднее.

Но что происходит в случае, если покупатель будет притворяться, что его тип больше, чем в реальности? Вероятность **rewarding type** повышается, а вместе с тем также растет доля получаемого товара, и, возможно, это сильно перекрывает невыгодность потерь в случае другого типа раунда.

Предположим, что $q_n^1 = v_1+\epsilon$, для этого покупатель должен принимать стоимости в **adaptation type** и **confirmation type**, иначе q_n^1 либо не превзойдет v_1, либо будет уменьшаться. Иначе говоря, покупатель играет за тип $v_1 + \epsilon$.

В таком случае в случае **adaptation type** он получает $\frac{2q_n^1}{q_n^1+q_n^2}\big(v_1-(v_1+\epsilon)\big)$, или еще меньше, так как в таком типе раундов цена берется из $[q_n^1, q_n^1+1]$. В **confirmation type** раундах выигрыш $\frac{2q_n^1}{q_n^1+q_n^2}(-\epsilon)$, а при **rewarding type** — $\frac{2q_n^1}{q_n^1+q_n^2}v_1$. Таким образом математическое ожидание выигрыша в одном раунде:

$$\mathbb{E} = \frac{2(v_1+\epsilon)}{v_1+\epsilon+q_n^2}\Big((1-p_1(v_1+\epsilon,q_n^2))(-\epsilon)+\frac{R_1(v_1+\epsilon,q_n^2)}{(v_1+\epsilon)}v_1+(p_1(v_1+\epsilon,q_n^2)-\frac{R_1(v_1+\epsilon,q_n^2)}{(v_1+\epsilon)})(-\epsilon)\Big) =$$

$$= \frac{2(v_1+\epsilon)}{(v_1+\epsilon)+q_n^2}\Big(R_1(v_1+\epsilon,q_n^2)-\epsilon\Big)$$

Продифференцируем по ϵ:

$$\frac{\big(2(R_1(v_1+\epsilon,q_n^2)-\epsilon)+2(v_1+\epsilon)((R_1(v_1+\epsilon,q_n^2))'_\epsilon-1)\big)(v_1+\epsilon+q_2)-2(v_1+\epsilon)(R_1(v_1+\epsilon,q_n^2)-\epsilon)}{(v_1+\epsilon+q_n^2)^2}$$

Где $(R_1(v_1+\epsilon,q_n^2))'_\epsilon$, суть, производная по первому аргументу, то есть по определению функции R_1, это $p_1(v_1+\epsilon,q_n^2)$.

Так как знаменатель всегда положителен, за знак производной отвечает знак числителя. Рассмотрим знак числителя при $\epsilon \to 0$, то есть проверим, верно ли, что притворяться $q_n^1 \geq v_1$ не выгоднее, чем играть наивно.

$$\mathbb{E}'_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} \frac{\Big(2R_1(v_1,q_n^2)+2v_1(p_1(v_1,q_n^2)-1)\Big)(v_1+q_2)-2v_1R_1(v_1,q_n^2)}{(v_1+q_n^2)^2}$$

Иначе перепишем числитель $2R_1(v_1,q_n^2)q_2+2v_1(p_1(v_1,q_n^2)-1)(v_1+q_2)$ и воспользуемся тем, что R_1—площадь под графиком функции p_1, то есть $R_1(v_1,q_n^2) \leq v_1$, тогда:

$$2R_1(v_1,q_n^2)q_2+2v_1(p_1(v_1,q_n^2)-1)(v_1+q_2) \leq 2v_1q_2+(2v_1(p_1(v_1,q_n^2)-1))(v_1+q_2)$$

$$2v_1q_2+(2v_1(p_1(v_1,q_n^2)-1))(v_1+q_2)<0 \Longleftrightarrow p_1(v_1,q_n^2)<1-\frac{q_n^2}{q_n^2+v_1}$$

Последнее выражение дает достаточное условие: $p_1(x_1, x_2) < 1 - \frac{x_2}{x_2+x_1}$, при котором производная $\mathbb{E}'_\epsilon(\epsilon \to 0) < 0$, то есть функция математического ожидания выигрыша $\mathbb{E}$ убывает вблизи v_1, откуда получаем, что игра с прицелом на $q_n^1 \geq v_1$ не выгоднее наивной.

Аналогичные рассуждения верны и для второго покупателя, откуда получается также условие на функцию $p_2(x_1, x_2) < 1 - \frac{x_2}{x_2+x_1}$, где x_1 — представления уже о втором покупателе, а x_2 — представления о первом.

Таким образом при выборе функций p_i в соответствие с условиями выше, получаем, что при любой фиксированной стратегии оппонента, каждому из покупателей выгодно играть честно.

■

Замечание 1. *Другой способ думать об аукционе D такой — в каждом раунде с вероятностью* $\frac{q_n^1}{q_n^1+q_n^2}$ *обе единицы товара будут разыгрываться с первым покупателем согласно заявленным правилам и с вероятностью* $\frac{q_n^1}{q_n^1+q_n^2}$ *со вторым. Это видение дает возможность обобщить предложенный механизм на случай неделимого товара.*

Если возвращаться к жизненной постановке вопроса, вышло, что получение более слабыми работниками премии не мотивирует более сильных работать меньше, напротив, вкладывать столько сил, сколько имеется для работы.

4 Заключение.

В дальнейшем задача имеет развитие в сторону обобщения аукциона на большее число участников, а также на большее число единиц товара.

Основным же результатом работы является новый механизм (аукцион D) для повторяющегося аукциона с двумя покупателями и двумя единицами товара. Как можно заметить, он в некотором смысле продолжает идею аукциона A (из секции 2), мотивацией которого было описание честного распределение товаров (благ) между участниками. А также обобщает на случай двух покупателей и двух единиц товара аукцион B (из работы [2]). Легко видеть, что в отличие от предложенного также аукциона C, который также является обобщением для аукциона B, аукцион D легко продолжается и на случай большего количества единиц товара.

Таким образом аукцион D дает нам механизм не только честного, но и мотивирующего к правдивости распределения, обобщаемого для большего количества единиц товара аукциона.

5 Список литературы

Список литературы

[1] Данилов В. И., Лекции по теории игр./КЛ/2002/001. — М.:Российская экономическая школа, 2002. — 140 с.

[2] N. Kalinin. New mechanism for repeated posted price auction with a strategic buyer without discounting [Электронный ресурс]/Arxiv.org: научная электронная библиотека, 2019. — Режим доступа: `https://arxiv.org/abs/1806.02661v2`, свободный. — Загл. с экрана.

[3] Nikhil R. Devanur, Yuval Peres, Balasubramanian Sivan. Perfect Bayesian Equilibria in Repeated Sales, Games and Economic Behavior, Volume 118, November 2019, Pages 570-588.

[4] Roger B. Myerson. Optimal auction design, Mathematics of operations research, vol. 6, no. 1, february 1981.

[5] V. Krishna. Auction Theory (Second Edition), Elsevier Inc, 2010.

[6] John G. Riley; William F. Samuelson. Optimal Auctions, The American Economic Review, Vol. 71, No. 3. (Jun., 1981), pp. 381-392.

[7] K. Amin, A. Rostamizadeh, U. Syed. Learning prices for repeated auctions with strategic buyers. In Advances in Neural Information Processing Systems, pages 1169–1177, 2013.