Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Кричевский Антон Олегович

Выпускная квалификационная работа

Центральность игроков в коалиционной игре

Уровень образования:
Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5504 «Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель:
кафедра МТИиСР,
к.ф.-м.н., доцент
Седаков А. А.

Рецензент:
м.н.с. ИПУ РАН,
Федянин Д. Н.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1 Введение

Теория графов применяется при решении многих практических задач, например, логистики, маршрутизации данных в интернете и химии. Одним из важных значений при решении практических задач является центральность вершины. Центральность вершины в графе – это некоторый класс значений, который показывает важность соответствующей вершины. Для выяснения того, насколько заданная вершина значима в графе, применяется несколько различных метрик центральности, которые употребляются в зависимости от типа задачи. Всего существует четыре основных класса центральности [9], [11]:

1. Степень вершины – показывает со сколькими вершинами она смежна.

2. Closeness – насколько близко ко всем остальным вершинам графа находится вершина (относительно расстояния).

3. Betweenness – важность вершины относительно связи между другими вершинами. Если удалить важную вершину, то минимальное расстояние между другими вершинами графа увеличится или граф перестанет быть связным.

4. Вычисление центральности относительно соседних вершин и соседей их соседей (используя собственный вектор матрицы смежности).

В моей работе я застрагиваю первые три класса метрик центральности.

Коалиционная (или кооперативная) игра – это тип игры, в которой игроки объединяются в коалиции для получения большего выигрыша в сравнении с тем выигрышем, который каждый игрок получил бы, действуя в одиночку. Первоначально теорию игр (в частности коалиционные игры) использовали для объяснения поведения игроков в экономике при различных ситуациях, а также поиска наилучшего поведения. В данный момент теория игр используется в различных областях науки для анализа поведение людей и животных.

В моей работе рассматривается коалиционная игра, заданная на графе. Впервые такая задача была поставлена в статье [2]. Граф в этом случае показывает возможность объединиться в коалицию с каким-либо игроками. Я рассматриваю связные коалиции, то есть у каждого игрока есть связь с другими игроками, как минимум через других игроков. Фукнцией выигрыша в рассматриваемой задаче является центральность игрока в графе. Подсчет выигрыша игрока происходит следующим образом: удаляются любые связи игрока с игроками из других коалиций и подсчитывается его центральность. При переходе игрока в другую коалицию все связи игрока с игроками из прошлой коалиции разрываются и восстанавливаются связи с игроками из коалиции, в которую он переходит.

Одна из задач в коалиционной (кооперативной) теории игр заключается в нахождении устойчивой коалиционной структуры, то есть такого разбиения игроков, при котором в своей коалиции игрок получит выигрыш не меньше, чем в любой другой коалиции в этом разбиении. Впервые устойчивость коалиционных структур была представлена в статьях [4], [8] и была основана на равновесии по Нэшу [10] для некооперативных игр.

В моей работе я исследую различные типы графов и различные разбиения игроков на коалиции для поиска устойчивых коалиционных структур относительно метрик центральности. Необходимо ответить на два вопроса:

1. Является ли заданная коалиционная структура на графе устойчивой?

2. Существует ли устойчивые коалиционные структуры в заданном графе? Если да, то найти их.

Работа имеет следующую структуру:

- Во 2 главе представлена формальная постановка задачи и вводятся необходимые определения.
- В 3 главе представлены основные теоретические результаты моей работы.
- В 4 главе показаны практические результаты работы: разработка алгоритма, его оптимизация и численный эксперимент для сравнения времени работы алгоритмов.

2 Формальная постановка и необходимые определения

Рассмотрим *коалиционную игру* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$, где N – множество игроков (n – число игроков), G – связный неориентированный граф, $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ – коалиционная структура (разбиение множества игроков) и ϕ – функция выигрыша. Рассмотрим каждый элемент подробнее.

Игра задана на некотором связном неориентированном графе $G = (V, E)$, где V – множество вершин и E – множество ребер. Множество V совпадает с множеством N, то есть каждой вершине $v_i \in V$ соответствует игрок $i \in N$, а каждому ребру $e_{ij} \in E$ – существование связи между игроками i и j. Далее под игроком я буду иметь ввиду соответствущую ему вершину и наоборот. Вес ребер в графе G равен 1. Пусть $S \subseteq V$, тогда $g(S)$ – это подграф графа $G = (V, E)$, вершинами которого являются элементы из S, а ребрами являются все ребра из множества E, конечные вершины которых принадлежат S.

Коалиция S – это подмножество множества игроков. Будем называть коалицию *гранд-коалицией*, если $S = N$. Коалиция S_1 вложена в коалицию S_2 ($S_1 \subseteq S_2$), если все игроки из S_1 находятся в коалиции S_2. Каждой коалиции S соотвутствует подграф $g(S)$ графа G. В моей работе данный подграф всегда является связным (из любой вершины подграфа есть путь к любой другой вершине подграфа), так как игроки должны договариваются между собой, а без связи это невозможно. Несвязные коалиции (соответствующий подграф которой не связен) не учитываются. Графом гранд-коалиции, является граф G.

Во время определения выигрыша каждого игрока необходимо преобразовать граф относительно коалиционной структуры. Для этого введем функцию разбиения графа.

Определение 1. *Пусть* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *– коалиционная структура,* $\mathfrak{G}$ *– множество всех подграфов графа* G*. Тогда* $C(\Pi, G) : \Pi \times \mathfrak{G}^n \to G$ *– функция разбиения графа относительно коалиционной структуры. Результатом данной функции является граф* $C(\Pi, G) = G' = \cup_{i=1}^{m} g(S_i)$*.*

Множество ребер графа G' таково, что оно не содержит ребер между игроками из разных коалиций, следовательно увеличивается число компонент связности графа по сравнению с исходным графом G. Компонента связности – это максимальный связный подграф графа G. Пример преобразования графа для коалиционной структуры представлен на рисунках 1 и 2:

$$\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$$
$$S_1 = \{2, 6, 7, 8, 9\}$$
$$S_2 = \{1, 3, 4\}$$
$$S_3 = \{5\}$$

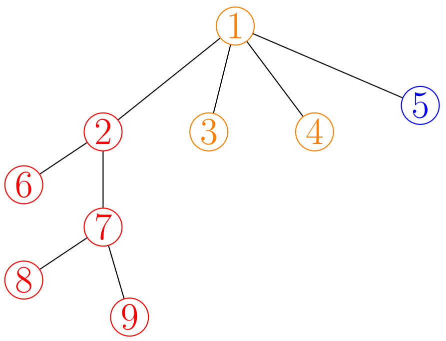

Рис. 1: Граф до преобразования

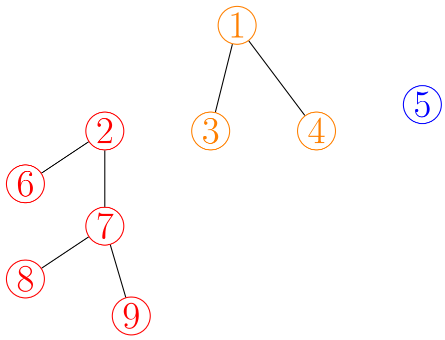

Рис. 2: Граф после преобразования

В качестве функции выигрыша расматривается центральность игрока. Определиим данную функцию и зададим выигрыш игрока.

Определение 2. *Пусть* $\mathbb{G}^n$ *– множество всевозможных графов с* n *– вершинами, тогда* $\phi : \mathbb{G}^n \to R^n$ *функция центральности игроков.*

Далее будем обозначать за $\phi_i(g)$ выигрыш i игрока в графе g и, следовательно, $\phi_i(g(S))$ выигрыш i игрока в подграфе коалиции S. В моей работе затрагиваются следующие метрики центральности:

1. Степень вершины: $\phi_i(g) = deg(i)$, где $deg(i)$ – степень вершины в графе g (количество вершин, у которых есть ребро с игроком i).

2. Closeness [6] :
$$\phi_j(g) = \frac{(\eta - 1)^2}{n - 1} * \frac{1}{\sum\limits_{i=1, i \neq j}^{\eta} d(i, j)},$$
где η – количество вершин в компоненте связности, в которой находится игрок j , n – общее количество вершин, $d(i, j)$ – минимальное расстояние (количество ребер) от вершины i до вершины j. Дополним данную метрику для случая, когда у игрока нет связей (коалиция из одного игрока), его выигрыш равен 0. Данная метрика нормирована при помощи множителя $\frac{\eta-1}{n-1}$ и принимает значение $\phi_j(g) \in [0, 1]$. Чем ближе по наименьшему расстоянию игрок к другим игрокам, тем выше его важность.

3. Betweenness [7]:
$$\phi_i(g) = \sum_{s \neq i \neq t \in V} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}},$$
где σ_{st} – количество минимальных путей от вершины s до t, а $\sigma_{st}(i)$ – количество минимальных путей от вершины s до t, которые проходят через i. Аналогично Closeness, выигрыш игрока без связей равен 0. Данная метрика также нормирована и принимает значения $\phi_i(g) \in [0, 1]$

Основная цель данной работы – исследование *устойчивости коалиционной структуры*. Введем определение (основаное на определении из статьи [8]) этого понятия в текущих обозначениях.

Определение 3. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *устойчива, если:*

$$\forall i \in S_j \quad \phi_i(g(S_j)) \geq \phi_i(g(S_k)) \quad \forall S_k \in \Pi_i' \tag{1}$$

где Π_i' *– коалиционная структура одного из видов:*

$\Pi_i' = \{S_1, ..., S_j \setminus \{i\}, ..., S_k \cup \{i\}, .., S_m\}$ *или*

$\Pi_i' = \{S_1, ..., S_j \setminus \{i\}, .., S_m, \{i\}\}$.

Данное определение означает, что коалиционная структура будет устойчива, если для каждого игрока выигрыш в текущей коалиции будет не меньше, чем его выигрыш в любой другой коалиции (вместе с этим игроком), а также при создании своей собственной коалиции из одного игрока. Выигрыш игрока в рассматриваемых метриках не может быть меньше 0, также известно, что выигрыш игрока в коалиции из одного игрока равен 0. Исходя из этого, можно выдвинуть следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если рассматриваемый игрок i создает свою коалицию (2-ой случай из определения коалиционной структуры* $\Pi_i' = \{S_1, ..., S_j \setminus \{i\}, .., S_m, \{i\}\}$*), его выигрыш не будет больше выигрыша в какой-либо коалиции.*

Следовательно, мы можем исключить из определения устойчивости коалиционной структуры второй случай $\Pi_i' = \{S_1, ..., S_j \setminus \{i\}, .., S_m, \{i\}\}$

Введем понятие крайних игроков в графе при некотором коалиционном разбиении.

Определение 4. *Пусть* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *– коалиционная структура и* $G = (V, E)$ *– неориентированный граф. Тогда игрок* i *из коалиции* S_k *является крайним, если*

$$\exists\ j \in N \setminus S_k : (i, j) \in E.$$

Для множества крайних игроков нельзя сразу сказать, выполняется ли условие устойчивости коалиционной структуры. Для остальных игроков данное неравенство можно не проверять, так как игроки, у которых нет связей в первоначальном графе G с другими коалициями, при проверке устойчивости коалиционной структуры могут создать только коалицию из одного игрока (напомню, что граф, соответствующий коалиции, всегда является связным).

3 Теоретические результаты

Следующее утверждение говорит о существовании устойчивой коалиционной структуры в любом графе.

Утверждение 2 (Утверждение о существовании устойчивой коалиционной структуры)**.** *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра. Тогда для любого графа* $G = (V, E)$ *существует устойчивая коалиционная структура:*

$$\Pi = \{N\}.$$

Доказательство. Так как выигрыш игрока в коалиции из одного игрока равен 0, то неравенство об устойчивости коалиционной структуры преобразуется в следующий вид:

$$\forall i \in N \quad \phi_i(g(S_j)) \geq 0,$$

Выигрыш игрока не может быть отрицательным числом, следовательно утверждение доказано. □

Далее представлены теоретические результаты для каждой метрики центральности. Для поиска устойчивых коалиционных структур были рассмотрены основные типы графов.

3.1 Степень вершины

Напомню, что выигрыш игрока $\phi_i(g) = deg(i)$, где $deg(i)$ – степень вершины в графе g (количество вершин, у которых есть связь с игроком i). Приведу пример рассчета выигрыша игроков на заданном графе G и коалиционной структуре из прошлого раздела. (Рисунок 2).

$$\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$$
$$S_1 = \{2, 6, 7, 8, 9\}$$
$$S_2 = \{1, 3, 4\}$$
$$S_3 = \{5\}$$

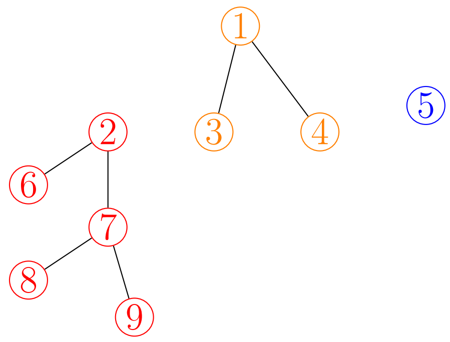

Рис. 3: Граф, преобразованный относительно коалиционной структуры

$\phi_2(g(S_1)) = 2$

$\phi_6(g(S_1)) = \phi_8(g(S_1)) = \phi_9(g(S_1)) = 1$

$\phi_7(g(S_1)) = 2$

$\phi_1(g(S_2)) = 2$

$\phi_3(g(S_2)) = \phi_4(g(S_2)) = 1$

$\phi_5(g(S_3)) = 0$

В начале докажем утверждения, которые относятся ко всем графам с функцией центральности игроков относительно метрики степень вершины.

Утверждение 3. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики степень вершины. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *– устойчива, если*

$$\forall i \in S_j \quad \phi_i(g(S_j)) \geq \lceil \tfrac{\phi_i(G))}{2} \rceil \quad \forall S_j \in \Pi,$$

где $\lceil \frac{\phi_i(G))}{2} \rceil$ *– округление до целого значения вверх.*

Доказательство. Пусть выигрыш игрока i в коалиции S_j $L = \phi_i(g(S_j)) \geq \lceil \frac{\phi_i(G))}{2} \rceil$. Тогда возможный наибольший выигрыш в другой коалиции будет равен $\phi_i(G) - L$. Согласно определению устойчивой коалиционной структуры (Определение 3) необходимо, чтобы $\phi_i(G) - L \leq L$. Перенесем L в правую сторону $\phi_i(G) \leq 2L$. Так как $L \geq \lceil \frac{\phi_i(G))}{2} \rceil$, данное неравевство всегда выполняется, и следовательно коалиционная структура устойчива. Аналогичные рассуждения можно провести для всех игроков в игре Γ, следовательно утверждение доказано. □

Утверждение 4. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики степень вершины и* S *– коалиция. Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$\forall i \in S \quad \phi_i(G) \geq \phi_i(g(S))$$

Аналогично для коалиций S_1, S_2 *таких, что* $S_1 \subseteq S_2$*, выполняется:*

$$\forall i \in S_1 \quad \phi_i(g(S_2)) \geq \phi_i(g(S_1))$$

Доказательство. Следует из функции разбиения графа относительно коалиционной структуры (Определение 1), ребра графа между вершинами удаляются, следовательно, уменьшается выигрыш игрока. □

Граф G является полным, если у каждой пары вершин есть ребро между собой. Докажем утверждениеие, что в полном графе существует всего лишь одна устойчивая коалиционная структура.

Утверждение 5. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики степень вершины и* $G = (V, E)$ *– полный неориентированный граф. Тогда существует единственная устойчивая коалиционная структура* $\Pi = \{N\}$.

Доказательство. Пусть существует устойчивая коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\},\ m \geq 2$. Рассмотрим различные коалиционные структуры с равными и различными размерами коалиций, а также коалиционную структуру, в которой существуют коалиции и одинакового, и разного размера.

1. Пусть размер каждой коалиции одинаков и равен k. Тогда выигрыш каждого игрока равен $k - 1$. Игрок j, перейдя из коалиции S_q в S_p, увеличит свой выигрыш, так как число игроков в S_p увеличится на один и станет $k + 1$, а выигрыш игрока станет k. Следовательно, данная коалиционная структура неустойчива.

2. Пусть размер каждой коалиции разный, тогда выигрыш игрока i равен $\phi_i(S_j) = |S_j| - 1$. Следовательно, существуют коалиции S_q и S_p, такие что $|S_q| > |S_p|$. Игрок из коалиции S_p, перейдя в коалицию S_q, получит выигрыш $|S_q| > |S_p| - 1$, а значит коалиционная структура неустойчива.

3. Для случая, когда существуют коалиции одинакового и разного размера, также не существует устойчивой коалиционной структуры аналогично случаю с разным размером коалиций.

Другого вида коалиционных структур не существует (при $m \geq 2$), следовательно, существует только единственная устойчивая коалиционная структура $\Pi = \{N\}$ (из утверждения 1). $\square$

Следующее утверждение выполняется на графе, который является циклом. Цепью (или путем) в графе называют последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей вершиной ребром. Граф G является циклом, если он состоит из вершин, соединенных замкнутой цепью (то есть последняя вершина соединена с первой). Степень каждой вершины равна двум. Пример такого графа показан на Рисунке 4.

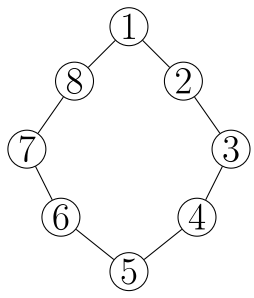

Рис. 4: Пример цикла размера $n = 8$

Утверждение 6. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики степень вершины и* $G = (V, E)$ *– неориентированный граф, являющийся циклом. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *устойчива, если*

$$|S_i| \geq 2 \quad \forall i \in \{1..m\}.$$

Доказательство. Пусть $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ и перенумеруем игроков таким образом, чтобы игроки в одной коалиции обладали последовательными номерами. Это можно всегда сделать, так как подграф коалиции всегда связен. Выберем некоторую коалицию $S_i = \{p, p+1, p+2, .., q-1, q\}$ и посчитаем выигрыши игроков

$\phi_j\{S_i\} = 2 \;\; j \in \{p+1, p+2, ..., q-2, q-1\}$

$\phi_p\{S_i\} = \phi_q\{S_i\} = 1$

В данном случае крайними игроками являются p и q, для них и необходимо проверять неравенство устойчивости коалиции. У этих двух игроков вне текущей коалиции есть связь только с игроками $p-1$ и $q+1$ (возможен случай, когда соседними игроками являются n или 1, но это не имеет значения в данном доказательстве). Следовательно, при переходе к коалициям, в которых есть данные игроки, их выигрыш также будет равен 1, значит неравенство устойчивости коалиционной структуры выполняется. Аналогично у каждой коалиции в коалиционной структуре будет 2 крайних игрока, а значит будет выполняться неравенство устойчивости коалиционной структуры, формула (1) (если $|S_i| \geq 2$). Следовательно, данная коалиционная структура устойчива. $\square$

Связный граф называется деревом, если в нем нет ни одного цикла (замкнутой цепи). Лес – множество деревьев.

Утверждение 7. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики степень вершины* $G = (V, E)$ *– неориентированный граф, являющийся деревом. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ *устойчива, если*

$$|S_i| \geq 2 \quad \forall i \in \{1..m\}.$$

Доказательство. Пусть условия утверждения не верны, то есть существует неустойчивая коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, и размер коалиций $|S_i| \geq 2$. Тогда существует игрок i в коалиции S_k, для которого выполняется:

$$\phi_i(g(S_k)) < \phi_i(g(S_j)) \quad \forall S_j \in \Pi'$$
$$\Pi' = \{S_1, ..., S_j \setminus \{i\}, ..., S_k \cup \{i\}, .., S_m\}$$

Выигрыш игрока до перехода в другую коалицию $\phi_i(g(S_k)) \geq 1$, так как подграф коалиции всегда связен. Но при переходе в другую коалицию выигрыш игрока $\phi_i(g(S_j)) = 1$, так как при существовании второго ребра в графе образуется цикл, а до этого подграф был связен. Следовательно данный граф не является деревом. Противоречие. □

3.2 Closeness

Напомню, что выигрыш игрока

$$\phi_j(g) = \frac{(\eta - 1)^2}{n-1} * \frac{1}{\sum\limits_{i=1, i\neq j}^{\eta} d(i,j)},$$

где η – количество вершин в компоненте связности, в которой находится игрок j, n – общее количество вершин, $d(i,j)$ – минимальное расстояние от вершины i до вершины j. То есть выигрыш игрока зависит от того, насколько близок он к другим игрокам. Приведу пример расчета выигрыша игрока относительно метрики Closeness

$$\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$$
$$S_1 = \{2, 6, 7, 8, 9\}$$
$$S_2 = \{1, 3, 4\}$$
$$S_3 = \{5\}$$

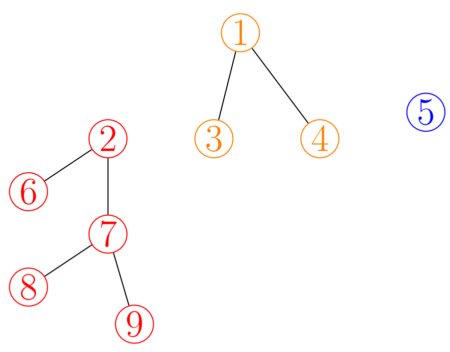

Рис. 5: Граф, преобразованный относительно коалиционной структуры

$\phi_2(g(S_1)) = \frac{16}{8} * \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\phi_6(g(S_1)) = \frac{16}{8} * \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$\phi_7(g(S_1)) = \frac{16}{8} * \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\phi_8(g(S_1)) = \phi_9(g(S_1)) = \frac{16}{8} * \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$\phi_1(g(S_2)) = \frac{4}{8} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\phi_3(g(S_2)) = \phi_4(g(S_2)) = \frac{4}{8} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\phi_5(g(S_3)) = 0$

Критерий 1 (Критерий устойчивости коалиционной структуры). *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Closeness. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, ..., S_m\}$ *устойчива тогда и только тогда, когда для каждой пары коалиций* S_k *и* S_j *выполняется неравенство:*

$$\forall i \in S_j \quad \frac{dSum(g(S_p \cup \{i\}))}{dSum(g(S_q))} \geq \frac{\eta_p^2}{(\eta_q - 1)^2} \quad \forall S_p, S_q \in \Pi, \tag{2}$$

где $dSum(g(.))$ *– Сумма минимальных расстояний от вершины* i *до остальных вершин в подграфе,*

η_q*– количество игроков в коалиции* S_q

η_p *– число игроков в коалиции* S_p

Доказательство. Подставим в формулу (1) из определения устойчивости коалиционной структуры (Определение 3) значение выигрыша i игрока.

$$\frac{(\eta_q - 1)^2}{n-1} * \frac{1}{\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{\eta_q} d(i,j)} \geq \frac{\eta_p^2}{n-1} * \frac{1}{\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{\eta_p+1} d(i,j)}$$

Можно заметить, что множитель в правой части η_p^2 изменился из-за того, что количество игроков в коалиции $S_p \cup \{i\} = \eta_p + 1$. Домножим обе части на $n-1$ и обозначим обе суммы

$\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{\eta_p+1} d(i,j) = dSum(g(S_p \cup \{i\})),$

$\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{\eta_q} d(i,j) = dSum(g(S_q)).$

$$\frac{(\eta_q - 1)^2}{dSum(g(S_q))} \geq \frac{\eta_p^2}{dSum(g(S_p \cup \{i\}))}$$

Умножив обе части на $dSum(g(S_p \cup \{i\}))$ и $\frac{1}{(\eta_q-1)^2}$ (являются положительным числами), получим исходное неравенство. $\square$

Для метрики Closeness хотелось бы доказать утверждение аналогичное Утверждению 3. Основная проблема невозможности строгого доказательства в том, что подсчет метрики центральности Closeness намного сложнее, чем подсчет степени вершины. Поэтому необходимо провести компьютерный эксперимент для поиска константы α, необходимой для выполнения следующих неравенств:

$$\forall i \in S_j \quad \phi_i(g(S_j)) \geq \alpha\phi_i(G)) \quad \forall S_j \in \Pi,$$

Но кроме этого есть результаты, связанные с метрикой Closeness, которые обладают схожим характером с метрикой степень вершины. Для выигрыша игрока выполняется аналогичное утверждение, что и для выигрыша в метрике степень вершины (Утверждение 4).

Утверждение 8. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Closeness и* S *- коалиция. Тогда выполняется следующее неравенство для выигрыша игрока.*

$$\forall i \in S \quad \phi_i(G) \geq \phi_i(g(S))$$

Аналогично, для коалиций S_1, S_2 *таких, что* $S_1 \subseteq S_2$ *выполняется:*

$$\forall i \in S_1 \quad \phi_i(g(S_2)) \geq \phi_i(g(S_1))$$

Доказательство. Следует из функции разбиение графа (Определение 1) относительно коалиционной структуры, а также свойства, что при удалении ребер в графе минимальное расстояние между вершинами может только увеличиться. $\square$

Также аналогично метрики степень вершины выполняется следующее утверждение:

Утверждение 9. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Closeness и* $G = (V, E)$ *– полный неориентированный граф. Тогда существует единственная устойчивая коалиционная структура* $\Pi = \{N\}$.

Доказательство. Пусть существует устойчивая коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\},\ m \geq 2$. Рассмотрим различные коалиционные структуры с равными и различными размерами коалиций, а также коалиционную структуру, в которой существуют коалиции и одинакового, и разного размера.

1. Пусть размер каждой коалиции одинаков и равен k. Воспользуемся формулой 2 из критерия устойчивости коалиционной структуры, рассчитаем необходимые значения и подставим их.

   $dSum(g(S_q)) = k - 1$ (расстояние до каждой вершины равно 1),

   $dSum(g(S_p \cup \{i\})) = k$,

   $\frac{k}{k-1} \geq \frac{k^2}{(k-1)^2}$,

   Так как $\frac{k}{k-1} > 1$, следовательно неравенство (2) не выполняется и Π неустойчива.

2. Пусть размер каждой коалиции разный, обозначим его $|S_p| = \eta_p$. Следовательно, существуют коалиции S_q и S_p такие, что $\eta_p > \eta_q$. Воспользуемся критерием для проверки устойчивости коалиции для случая, когда игрок из коалиции S_q переходит в коалицию S_p. Посчитаем необходимые значения (аналогично пункту 1) и подставим их.

$dSum(g(S_q)) = \eta_q - 1,$

$dSum(g(S_p \cup \{i\})) = \eta_p,$

$\frac{\eta_p}{\eta_q - 1} \geq \frac{\eta_p^2}{(\eta_q-1)^2},$

Так как $\eta_p > \eta_q$, следовательно $\frac{\eta_p}{\eta_q-1} > 1$ и критерий не выполняется. Такая коалиционная структура неустойчива.

3. Для случая, когда существуют коалиции одинакового и разного размера, также не существует устойчивой коалиционной структуры, аналогично случаю с разным размером коалиций.

Другого вида коалиционных структур не существует (при $m \geq 2$), следовательно, существует только единственная устойчивая коалиционная структура (из Утверждения 1). $\square$

Для формулировки следующего утверждения понадобятся определения клики и моста в графе.

Подграф $g \subseteq G$ является кликой, если g – полный граф. Мост в графе – ребро, при удалении которого, увеличивается число связности (количество несвязных компонент графа). Далее рассмотрим граф следующего вида: две клики, соединенные мостом. Пример такого графа приведен на Рисунке 6. Подграфы на вершинах $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ являются кликами, а ребро $(1, 5)$ – мостом.

Утверждение 10. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Closeness,* $G = (V, E)$ *– граф, представляющий собой две клики, соединенных мостом,* $g(S_1), g(S_2)$ *– клики. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2\}$ *устойчива, если следующая система неравенств имеет решение:*

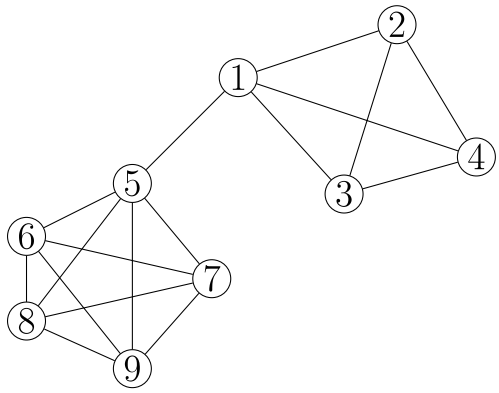

Рис. 6: Пример графа: две клики соединенные мостом.

$$\begin{cases} \eta_1 \geq \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_2 - 1} \\ \eta_1 \leq \eta_2 - 1 + \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)}, \end{cases}$$

где η_1, η_2 – количество игроков в коалиции.

Данное утверждение показывает, что для устойчивости коалиционной структуры необходимо, чтобы количество игроков в одной из коалиций находилось в промежутке, границы которого зависят от размера второй коалиции $[\lceil \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_2 - 1} \rceil, \lfloor \eta_2 - 1 + \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)} \rfloor]$. Утверждение упрощает доказательство устойчивости коалиционной структуры для таких графов, так как не нужно считать расстояния между игроками.

Доказательство. В рамках утверждения количество крайних игроков, для которых необходимо проверить критерий устойчивости коалиции (игроки, соединенные мостом), равно 2. Посчитаем значения и подставим их в формулу (2) для двух игроков.

$dSum(g(S_2 \cup \{i\})) = 2\eta_2 - 1$ – минимальное расстояние от игрока i до игроков из коалиции S_2 равно 2, кроме игрока, с которым он связан мостом (для него это значение равно 1).

$dSum(g(S_1)) = \eta_1 - 1$

Подставив значения для двух игроков, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{2\eta_2-1}{\eta_1-1} \geq \frac{\eta_2^2}{(\eta_1-1)^2} \\ \frac{2\eta_1-1}{\eta_2-1} \geq \frac{\eta_1^2}{(\eta_2-1)^2}, \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство, домножив его на $\frac{(\eta_1-1)^2}{2\eta_2-1}$ (положительное число).

$$\eta_1 - 1 \geq \frac{\eta_2^2}{2\eta_2-1}$$

$$\eta_1 \geq \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_2 - 1} \tag{3}$$

Преобразуем второе неравенство, домножив его на $\frac{(\eta_2-1)^2}{2\eta_1-1}$.

$$\eta_2 - 1 \geq \frac{\eta_1^2}{2\eta_1 - 1}$$

$$\eta_2 \geq \frac{\eta_1^2 + 2\eta_1 - 1}{2\eta_1 - 1}$$

$$\eta_1^2 + 2\eta_1 - 1 - (2\eta_1 - 1)\eta_2 \leq 0$$

Найдем корни квадратного уравнения относительно η_1

$$\eta_1^{1,2} = \eta_2 - 1 \pm \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)}$$

В итоге решением неравенства является следующая система:

$$\begin{cases} \eta_1 \geq \eta_2 - 1 - \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)} \\ \eta_1 \leq \eta_2 - 1 + \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)}, \end{cases}$$

Но первое неравенство в полученной системе исключается из-за решения для неравенства (3). Следовательно, коалиционная структура будет устойчива, если выполняется следующая система неравенств

$$\begin{cases} \eta_1 \geq \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_2-1} \\ \eta_1 \leq \eta_2 - 1 + \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)}, \end{cases}$$

$\square$

Примечание 1. *Для функции центральности относительно степени вершины коалиционная структура из Утверждения 10 на данном графе будет всегда устойчива.*

Используя это утверждение, можно показать, что для графа на Рисунке 6, коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2\}$, где $S_1 = \{1,2,3,4\}$, $S_2 = \{5,6,7,8,9\}$ будет устойчива.

$$\begin{cases} 4 \geq \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{9} \\ 4 \leq 4 + \sqrt{12}, \end{cases}$$

Перенеся слагаемые, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \geq \frac{1}{36} \\ 0 \leq \sqrt{12} \end{cases}$$

Утверждение 10 можно обобщить на случай нескольких ребер между кликами. Для этого мост можно заменить на множество ребер таких, что

$$\exists (p,q) \;\; \nexists (p',q) \;\; \nexists (p,q') \;\; p,p' \in K^i, \;\; q,q' \in K^j,$$

где K^i, K^j– клика в графе G. То есть вершина из клики соединена не более чем с одной вершиной из другой клики. Обозначим множество этих ребер R.

Утверждение 11. *Пусть $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ – коалиционная игра, где ϕ – функция центральности игроков относительно метрики Closeness и $G = (V, E)$ – граф, представляющий собой две клики, соединенных ребрами из множества R, $g(S_1), g(S_2)$ – клики. Тогда коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2\}$ устойчива, если следующая система неравенств имеет решение.*

$$\begin{cases} \eta_1 \geq \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_2 - 1} \\ \eta_1 \leq \eta_2 - 1 + \sqrt{(\eta_2 - 2)(\eta_2 - 1)}, \end{cases}$$

где η_1, η_2 – количество игроков в коалиции.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству из Утверждения 10. Различие заключается в том, что крайних игроков будет не 2, а $2|R|$. При этом значение выигрыша игроков останутся прежними, а следовательно коалиционная структура будет устойчивой. $\square$

Расширим Утверждение 11 до m клик. На рисунке 7 изображен пример графа с 3 кликами и ребрами из множества R.

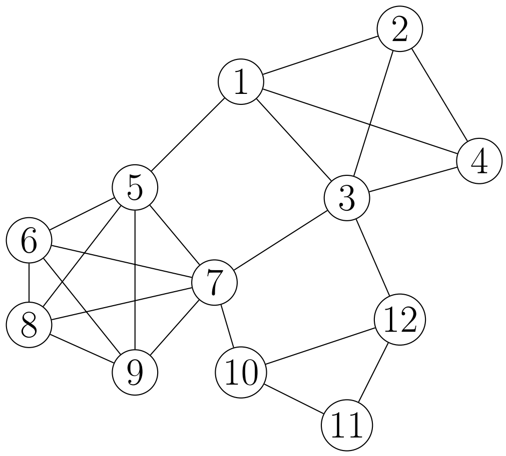

Рис. 7: Пример графа: три клики соединенные ребрами из множества R.

Утверждение 12. *Пусть $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ – коалиционная игра, где ϕ – функция центральности игроков относительно метрики Closeness и $G = (V, E)$ – граф, представляющий собой клики, соединенных ребрами из множества R, $g(S_i)$– клики. Тогда коалиционная структура $\Pi = \{S_1, .., S_m\}$ устойчива, если для любой пары коалиций S_q, S_p между которыми есть связь ребрами из множества R система неравенств имеет решение.*

$$\begin{cases} \eta_q \geq \frac{1}{2}\eta_p + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{2\eta_p - 1} \\ \eta_q \leq \eta_p - 1 + \sqrt{(\eta_p - 2)(\eta_p - 1)}, \end{cases}$$

где η_q, η_p – количество игроков в коалиции S_q, S_p соответственно.

Доказательство. Для устойчивости коалиционной структуры необходимо, чтобы выполнялась система неравенств для каждой пары коалиций, соединенных между собой ребрами из множества R. Это является частным случаем Утверждения 11. Следовательно, при выполнении всех таких систем коалиционная структура будет устойчива. □

Используя Утверждение 12, для графа на рисунке 7 можно показать, что коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, где $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, S_3 = \{10, 11, 12\}$ не устойчива, так как не выполняется система неравенств для коалиций S_1 и S_3.

$$\begin{cases} 3 \geq \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1/4}{9} \\ 3 \leq 4 + \sqrt{12}, \end{cases}$$

Перенеся слагаемые, получим:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} \geq \frac{1/4}{9} \\ 0 \leq 1 + \sqrt{12} \end{cases}$$

Для проверки неустойчивости коалиционной структуры посчитаем выигрыш игрока 10 в коалиции S_3 и его выигрыш в коалиции $S_2 \cup \{10\}$.

$\phi_{10}(g(S_3)) = \frac{4}{11} * \frac{1}{2} = \frac{2}{11}$

$\phi_{10}(g(S_2 \cup \{10\})) = \frac{25}{11} * \frac{1}{1+2+2+2+2} = \frac{25}{99}$

Так как $\frac{25}{99} > \frac{2}{11}$, следовательно коалиционная структура неустойчива (согласно неравенству (1)).

Примечание 2. *Для функции центральности относительно степени вершины и графа, представленного на Рисунке 7, коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, *где* $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, S_3 = \{10, 11, 12\}$ *является устойчивой.*

3.3 Betweenness

Выигрыш игрока относительно метрики Betweenneess равен:

$$\phi_v(g) = \sum_{s \neq v \neq t \in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}},$$

где σ_{st} – количество минимальных путей от вершины s до t, а $\sigma_{st}(v)$ – количество минимальных путей от вершины s до t, которые проходят через v. Данная метрика значительно отличается от метрик степень вершины и Closeness. Например, выигрыш любого игрока в полном графе равен 0, так как не существует коротких путей через других игроков (все соединены друг с другом, и минимальное расстояние равно 1). Пример расчета выигрыша игрока относительно метрики Betweenness.

$$\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$$
$$S_1 = \{2, 6, 7, 8, 9\}$$
$$S_2 = \{1, 3, 4\}$$
$$S_3 = \{5\}$$

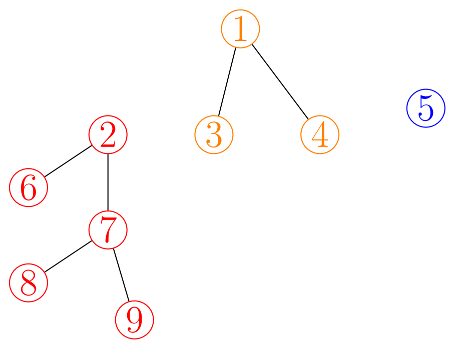

Рис. 8: Граф, преобразованный относительно коалиционной структуры

$\phi_2(g(S_1)) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\phi_6(g(S_1)) = \phi_8(g(S_1)) = \phi_9(g(S_1)) = 0$

$\phi_7(g(S_1)) = \frac{5}{6}$

$\phi_1(g(S_2)) = \frac{1}{1} = 1$

$\phi_3(g(S_2)) = \phi_4(g(S_2)) = 0$

$\phi_5(g(S_3)) = 0$

Следующие утверждения ставят под сомнение использование метрики Betweenness для функции выигрыша. Например, коалиционная структура будет устойчива, если игроки разобьются в коалиции по одному или двум игрокам.

Утверждение 13. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Betweenness. Тогда коалиционная структура* $\Pi = \{S_1, S_2, ..S_m\}$ *устойчива, если.*

$$|S_i| \leq 2 \quad \forall i \in \{1..m\}.$$

Доказательство. Выигрыш любого игрока при таком разбиении будет равен 0, так как нет минимальных путей, проходящих через игроков. Рассмотрим два случая перехода в другую коалицию.

1. Игрок переходит в коалицию размера 1. Тогда его выигрыш останется равен 0, аналогично коалиции, из которой он ушел.

2. Игрок переходит в коалицию размера 2. Его выигрыш также останется равным нулю, так как между игроками уже существует минимальный путь (он равен 1), и коалиция связна.

Следовательно, коалиционные структуры такого вида являются устойчивыми. □

Утверждение 14. *Пусть* $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ *– коалиционная игра, где* ϕ *– функция центральности игроков относительно метрики Betweenness и*

$G = (V, E)$ – полный неориентированный граф. Тогда любая коалиционная структура Π устойчива, и выигрыш игроков равен 0.

Доказательство. Из-за того, что минимальное расстояние между любыми игроками в коалиции равно 1, число минимальных путей, проходящих через какую-нибудь другую вершину, равно 0. Следовательно, выигрыш в любой коалиции равен 0 (подграф коалиции всегда клика). Следовательно, любая коалиционная структура устойчива. $\square$

Утверждение 15. *Пусть $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ – коалиционная игра, где ϕ – функция центральности игроков относительно метрики Betweenness и $G = (V, E)$ – неориентированный граф, являющийся деревом. Тогда любая коалиционная структура Π устойчива.*

Доказательство. В доказательстве Утверждения 7 (устойчивая коалиционная структура в дереве для метрики степень вершины) было выяснено, что при переходе в другую коалицию может существовать только одна связь с игроками из коалиции (иначе образуется цикл). В таком случае выигрыш игрока при переходе в другую коалицию будет равен 0 (ни один минимальный путь не будет проходить через эту вершину). Так как $\phi_i(S_j) \geq 0$, следовательно неравенство устойчивости коалиционной структуры, формула (1), будет всегда выполняться. $\square$

Пусть P – множество игроков, у которых значение метрики центральности степень вершины равен 1 (то есть вершина является листом).

Утверждение 16. *Пусть $\Gamma = (N, G, \Pi, \phi)$ – коалиционная игра, где ϕ – функция центральности игроков относительно метрики Betweenness. Тогда коалиционная структура вида $\Pi = \{S, P'_1, .., P'_w\}$, где P'_i – коалиция, состоящая из одного игрока, находящегося в множестве P, и $w \in [1, 2, .., |P|]$, устойчива.*

То есть коалиционная структура с любой коалицией S и коалициями из одного игрока со степенью вершины 1 будет устойчивой.

Доказательство. При переходе игрока из коалиции с одним игроком в другую коалицию их выигрыш останется равным 0 (аналогично доказательству 15), а выигрыш в коалиции из одного игрока всегда равен 0. □

Исходя из исследования различных метрик, можно сделать следующие выводы:

1. Метрики центральности степень вершины и Closeness схожи между собой. Для них выполняются похожие Утверждения 4 и 8, Утверждения 5 и 9.

2. Для метрики степень вершины и Closeness чем больше число ребер между игроками, тем больше выигрыши самих игроков.

3. Метрика центральности Betweenness сильно отличается от двух других. Коалиционные структуры с коалициями малого размера (меньше 2) являются устойчивыми. Также игроки из коалиций с одним игроком могут не получить прирост выигрыша с переходом в другую коалицию. А выигрыш игроков в полном графе в любой коалиции всегда равен 0 (против максимально возможного выигрыша $n-1$ и 1 для степени вершины и Closeness для гранд-коалиции).

4 Практические результаты

Для поиска устойчивых коалиционных структур с использованием полученных теоретических результатов и подсчета значений функции центральности были реализованы два алгоритма:

1. Алгоритм проверки устойчивости коалиционной структуры на заданном графе.

2. Алгоритм поиска устойчивой коалиционной структуры в заданном графе.

Первый алгоритм является частным случаем второго, так как при поиске устойчивой коалиции мы проверяем, является ли она устойчивой. Для представления графа используется матрица смежности (квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$, в которой элементы равны 1, если есть ребро между вершинами и 0 иначе)

Алгоритмы были реализованы на языке Python, используя библиотеку networkx [1]. Данная библиотека обладает большим количеством встроенных функций для работы с графами.

4.1 Проверка устойчивости коалиционной структуры

Постановка задачи: Для заданного графа G узнать, является ли коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, ..S_m\}$ устойчивой.

Для проверки устойчивости коалиционной структуры необходимо, чтобы для всех игроков выполнялось неравенство (1). Далее приведем алгоритм проверки устойчивости коалиционной структуры:

Алгоритм 1.

1. Преобразовать граф с помощью функции преобразования графа относительно коалиционной структуры (Определение 1).

2. Проверить число связности графа (число связности должно быть равно числу коалиций), так как несвязные коалиции не рассматриваются.

3. Для каждого игрока i в коалиции S_j:

   (a) Посчитать функцию центральности для i игрока в коалиции S_j.

   (b) Перейти i игроком в другую коалицию, преобразовать граф относительно новой коалиционной структуры Π'_i

   (c) Проверить равенство числа связности и количества коалиций.

   (d) Посчитать значение функции центральности для i игрока при новом разбиении Π'_i.

   (e) Сравнить значения до и после перехода. Если значение после перехода больше, следовательно коалиционная структура неустойчива.

   (f) Если для всех переходов в другие коалиции значение центральности оказалось меньше, чем значение в коалиции S_j, то для игрока i выполняется неравенство устойчивости коалиционной структуры.

4. Если для всех игроков выполняется неравенство устойчивости коалиционной структуры, то коалиция является устойчивой.

Пусть n – число вершин графа и v – число ребер в графе, оценим сложность данного алгоритма (сложность расписана для каждого пункта алгоритма):

1. $O(v)$ – проверка, что между игроками из разных коалиций нет ребер. При необходимости такие ребра нужно удалить.
2. $O(v + n)$ – нахождения числа связности (используется алгоритм поиска в ширину [13]) и сравнение его с количеством коалиций.
3. $O(n^4v^2+n^5v)$ – общая сложность данного пункта для метрики степень вершины, $O(n^4v^4 + n^5v^3)$ для Closeness и Betweenness.
   (a) Для метрики степень вершины сложность равна $O(n)$, для Closeness $O(nv)$ (используя алгоритм Беллмана-Форда [3]), Betweenness $O(nv)$ (используя алгоритм Брендеса [5].
   (b) $O(nv)$ аналогично пункту 1, но это действие нужно повторить для всех возможных коалиций (максимальное число возможных коалиций для перехода $n - 1$).
   (c) $O(v + n)$ аналогично пункту 2.
   (d) Аналогично подпункту (a).
   (e) $O(n)$ – сравнение для каждого перехода.

Общая сложность данного алгоритма равна $T(n, v) = O(n^5 v^2)$ для метрики степень вершины и $T(n, v) = O(n^5 v^4)$ для Closeness и Betweenness, что означает, что данный алгоритм является полиномиальным.

В общем случае алгоритм является полным перебором всевозможных случаев. Попробуем оптимизировать его следующим образом: проверять неравенство устойчивости коалиционной структуры не для всех игроков, а только для крайних. Для отбора игроков потребуется время $O(v)$ (проверить, что ребро находится между коалициями и добавить игроков, соединенных этим ребром, в множество крайних игроков). Сложность оптимизированного алгоритма будет равна $T(n, v) = O(n^5 v^3)$ для метрики степень вершины и $T(n, v) = O(n^5 v^5)$ для Closeness и Betweenness. Сложность оптимизированного алгоритма в худшем случае увеличилась, однако в среднем уменьшится (это видно далее в результатах экспериментов). Данная оптимизация хорошо проявляет себя в разряженных графах (граф, в котором малое количество ребер), так как, например, в полном графе при числе коалиций $m > 1$ все игроки являются крайними.

Проведем эксперимент и сравним базовый алгоритм и алгоритм с оптимизацией. Для этого будем генерировать случайный граф и случайную коалиционную структуру и записывать время выполнения алгоритма. Повторив этот эксперимент 1000 раз, выведем среднее время выполнение алгоритма. Также разделим случаи, когда количество ребер в графе меньше половины от максимально возможного количества (случай 1), и когда количество ребер больше, чем $\frac{3}{4}$ от возможного (случай 2).

Число игроков и связей	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
5, (1)	0.00011	0.00007
5, (2)	0.00010	0.00009
6, (1)	0.00150	0.00140
6, (2)	0.00154	0.00151
7, (1)	0.00206	0.00188
7, (2)	0.00215	0.00210
8, (1)	0.00290	0.00272
8, (2)	0.00298	0.00299
9, (1)	0.00416	0.00386
9, (2)	0.00417	0.00418
10, (1)	0.00547	0.00506
10, (2)	0.00551	0.00551
11, (1)	0.00737	0.00686
11, (2)	0.00742	0.00750

Рис. 9: Результаты эксперимента для метрики степень вершины

Число игроков и связей	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
5, (1)	0.00163	0.00141
5, (2)	0.00166	0.00150
6, (1)	0.00239	0.00216
6, (2)	0.00244	0.00240
7, (1)	0.00328	0.00292
7, (2)	0.00335	0.00333
8, (1)	0.00437	0.00396
8, (2)	0.00459	0.00459
9, (1)	0.00626	0.00573
9, (2)	0.00643	0.00644
10, (1)	0.00766	0.00716
10, (2)	0.00776	0.00777
11, (1)	0.00946	0.00893
11, (2)	0.00955	0.00956

Рис. 10: Результаты эксперимента для метрики Closeness

Число игроков и связей	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
5, (1)	0.00587	0.00502
5, (2)	0.00587	0.00588
6, (1)	0.00773	0.00681
6, (2)	0.00784	0.00780
7, (1)	0.00970	0.00867
7, (2)	0.00975	0.00973
8, (1)	0.01001	0.00866
8, (2)	0.01013	0.01011
9, (1)	0.01296	0.01163
9, (2)	0.01300	0.01304
10, (1)	0.01566	0.01401
10, (2)	0.01580	0.01576
11, (1)	0.01706	0.01538
11, (2)	0.01720	0.01721

Рис. 11: Результаты эксперимента для метрики Betweenness

Исходя из результатов численного эксперимента (см. Рис. 9 - 11) можно сделать следующие выводы:

1. Оптимизированный алгоритм работает быстрее при меньшем числе ребер (так как мы рассматриваем не всех игроков, а только крайних).

2. При количестве ребер меньше половины от возможных алгоритм с оптимизацией работает быстрее, чем базовый алгоритм.

3. При количестве ребер больше, чем $\frac{3}{4}$, оба алгоритма имеют примерно одинаковое время работы алгоритма.

Так как оптимизированный алгоритм проявляет себя не хуже базового (а для мало числа ребер даже лучше), в дальнейшем будет использовать его.

4.2 Поиск устойчивой коалиционной структуры

Поставновка задачи: Для заданного графа G найти все устойчивые коалиционные структуры.

Количество всевозможных коалиционных структур с n игроками является числом Белла B_n [14]. Данное число быстро возрастает при росте значения n (при $n = 15$, $B_n > 10^9$).

Алгоритм решения данной задачи следующий: для каждой коалиционной структуры $\Pi = \{S_1, S_2, .., S_m\}$ проверим, является ли она устойчивой (при помощи оптимизированного алгоритма 1).

Данный алгоритм также является полным перебором всевозможных вариантов. Его сложность равна $T(n, v) = O(B_n n^5 v^2)$ для степени вершины и $T(N, v) = O(B_n n^5 v^4)$ для Closeness и Betweenness.

Для оптимизации данного алгоритма необходимо уменьшать число Белла, то есть сразу определять, что коалиционной структура является устойчивой (используя утверждения из прошлой главы). Также можно находить коалиционные структуры, которые будут неустойчивы.

Утверждение 17. *Пусть $\Gamma^s = (N, G, \Pi, \phi^s), \Gamma^c = (N, G, \Pi, \phi^c)$ – коалиционные игры в которых ϕ^s, ϕ^c – функция центральности игроков относительно метрики степень вершины и Closeness соответственно. Тогда коалиционная структура $\Pi = \{S_1, S_2, ..S_m\}$ **не устойчива**, если*

$$\exists S_j \in \Pi \quad |S_j| = 1 \quad j \in [1..m]$$

Доказательство. Выигрыш игрока i в коалиции из одного игрока равен 0. При переходе в другую коалицию S_q выигрыш игрока в метрике степень вершины $\phi_i^s \geq 1$ так как подграф коалиции $S_q \cup \{i\}$ связен. Аналогично для метрики Closeness $\phi_i^c > 0$. Следовательно, коалиционная структура такого вида не устойчива. □

Примечание 3. *Для метрики Betweenness данное утверждение не выполняется из-за Утверждений 13,15,16*

Оптимизированный алгоритм выглядит следующим образом:

Алгоритм 2.

1. Составить множество всевозможных коалиционных структур для n игроков

2. Для коалиционной структуры $\Pi = \{S_1, S_2, .., S_m\}$:

   (a) Проверить, подходит ли коалиционная структура под одно из условий Утверждений, доказаных ранее, и принять относительно этого решение. Если коалиционная структура не подходит ни под одно из утверждение, то Подпункт b.

   (b) Проверить устойчивости коалиционной структуры (оптимизированный вариант Алгоритма 1).

Сложность оптимизированого алгоритма не изменилась. Однако, проведя численные эксперименты на случайно генерируемых графах с разным количеством вершин (см. Рис. 12 - 14), видно уменьшение времени работы оптимизированного алгоритма по сравнению с базовым на один порядок.

Число игроков	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
4	0.00711	0.00099
5	0.03552	0.00415
6	0.27901	0.03009
7	1.10421	0.11185
8	5.81103	0.58216
9	38.7678	4.06626
10	230.885	21.3932
11	2679.38	227.538

Рис. 12: Результаты эксперимента для метрики степень вершины

Число игроков	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
4	0.01049	0.00150
5	0.05080	0.00641
6	0.29479	0.03456
7	1.59740	0.18403
8	8.63905	0.91722
9	51.8290	5.10616
10	298.978	24.8149
11	2979.01	235.350

Рис. 13: Результаты эксперимента для метрики Closeness

Число игроков	Базовый алгоритм, сек	Оптимизированный алгоритм, сек
4	0.01199	0.00079
5	0.05917	0.00496
6	0.36837	0.03647
7	1.96614	0.22417
8	9.12979	0.98793
9	69.0437	7.41808
10	389.160	44.1778
11	3371.81	271.585

Рис. 14: Результаты эксперимента для метрики Betweenness

Основные выводы по итогам этой главы:

1. Были реализованы два алгоритма: их базовая версия (полный перебор всех возможных вариантов) и оптимизированая версия.

2. Время выполнения алгоритма для метрик Closeness и Betweenness больше, чем для метрики степень вершины из-за сложности вычисления метрик.

3. Время выполнения алгоритма 2 уменьшается одинаково для всех метрик (на один порядок), хотя для метрики Betweenness и степень вершины в ходе работы были доказаны утверждения, противоположные друг другу.

5 Заключение

Результатами данной работы являются:

1. Доказательство теоретических утверждений для метрик центральности степень вершины, Closeness, Betweenness. Метрики степень вершины и Closeness схожи между с собой с точки зрения доказанных утверждений, метрика Betweenness сильно отличается от двух других.

2. Реализован алгоритм для проверки устойчивости коалиционной структуры в графе и алгоритм поиска устойчивой коалиционной структуры в граф, а также посчитана их сложность.

3. Были оптимзированы базовые алгоритмы из пункта 2, проведен численный эксперимент для подтверждения правильности способов оптимизации.

Ближайшими перспективами данного исследования являются:

1. Доказательство утверждений для других типов графов для рассмотренных метрик.

2. Исследовать метрику центральности относительно соседей (Katz centrality).

3. Поиск дальнейших методов оптимизации алгоритмов для проверки устойчивости коалиционной структуры в графе и поиска устойчивой коалиционной структуры в графе.

Список литературы

[1] Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult and Pieter J. Swart, "Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX", in Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Gäel Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman (Eds), (Pasadena, CA USA), pp. 11–15, 2008

[2] Aumann, R. J., Dreze, J. H. (1974). Cooperative games with coalition structures. International Journal of Game Theory, 3, 217–237.

[3] Bellman R.: On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. 1958. Vol 16, No. 1. C. 87-90,

[4] Bogomolnaia, A. and Jackson, M. O. (2002) The stability of hedonic coalition structures, Games Econ. Behav. 38(2), 201–230.

[5] Brandes U. (2001) A faster algorithm for betweenness centrality, The Journal of Mathematical Sociology, 25:2, 163-177, DOI: 10.1080/0022250X.2001.9990249

[6] Freeman, L.C., (1979). Centrality in networks: I. Conceptual clarification. Social Networks 1, 215–239.

[7] Freeman, L. (1977). A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness. Sociometry, 40(1), 35-41. doi:10.2307/3033543

[8] Hart, S. and Kurz, M. (1983) Endogenous formation of coalitions, Econometrica 51(4), 1047–1064.

[9] Jackson, M. (2008). Social and Economic Networks. Princeton; Oxford: Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctvcm4gh1

[10] Nash, J. F. [1951] Non-cooperative games, Ann. Math. 54, 286–295.

[11] Newman M. (2010). Networks: An Introduction. Oxford University Press, Inc., USA.

[12] Myerson, R. (1977) Graphs and cooperation in games, Math. Oper. Res., 2, 225–229.

[13] Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е издание М.: «Вильямс», 2013. 1328 с. ISBN 978-5-8459-1794-2

[14] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2006. 392 с. ISBN 5-06-005683-X.