Санкт-Петербургский государственный университет

Шилина Наталья Владимировна

Выпускная квалификационная работа

«Моделирование экономических процессов: математические методы и информационные технологии»

Уровень образования: магистратура

Направление: 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Основная образовательная программа: ВМ.5502 «Вычислительные технологии»

Научный руководитель:
заведующий кафедры
КММС, профессор,
д-р физ.-мат. наук
Андрианов С.Н.

Рецензент: ведущий
научный сотрудник ОИЯИ,
кандидат технических наук,
Юдин И.П.

Санкт-Петербург

2020 год

Содержание

Введение ... 3

Постановка задачи ... 5

Обзор литературы ... 7

Глава 1. Фондовый рынок ... 8

1.1 Фондовый рынок России ... 8

1.2 Классификация видов рынка ценных бумаг и его функции ... 9

1.3 Классы и виды ценных бумаг ... 12

1.4 Опционы ... 13

Глава 2. Обзор моделей и методов ценообразования опционов ... 15

2.1 Модель Блэка-Шоулза-Мертона ... 16

2.2 Биноминальная модель ... 17

2.3 Метод конечных разностей ... 19

2.4 Методы Монте-Карло ... 19

Глава 3. Алгоритмы ценообразования опционов, основанные на методе Монте-Карло ... 20

3.1. СДУ для опциона европейского типа. ... 20

3.2. СДУ для опциона азиатского типа. ... 21

Глава 4. Программная реализация и численные эксперименты. ... 23

4.1. Вычислительные системы. ... 23

4.2. Генератор случайных чисел. ... 25

4.3. Вычислительные эксперименты. ... 25

4.3.1. Вычисление цены опциона европейского типа. ... 26

4.3.2. Вычисление цены опциона азиатского типа. ... 29

Выводы ... 32

Заключение ... 33

Список литературы ... 34

Введение

В современных условиях российский рынок находится в процессе усиленной трансформации, очевидна необходимость увеличения активности участия населения и предпринимателей в вопросах применения биржевых инструментов. Фондовый рынок достаточно важен для экономики современного государства. Для государства он является объектом регулирования и механизмом для управление экономикой. При грамотном подходе данное направление является альтернативным источником доходов, а также позволяет хеджировать предпринимательские риски. [1] Важным направлением исследования финансового рынка в целом, так и его отдельных сегментов, является экономико-математическое моделирование с применением методов финансовой математики и информационных технологий. [2]

Одним из важнейших и эффективных инструментов фондового рынка, предназначенных для страхования рисков, и, в свою очередь, ставшие объектом торговли, являются опционы. [1] Так как сделки с опционами также рискованны, проблема определения справедливой цены опциона является весьма актуальной.

В настоящее время, в связи с увеличением вычислений, важной проблемой стала эффективная реализация моделей для вычисления цены опционов, используя современные устройства. Эффективным способом решения таких задач является ускорение на графических процессорах. Таким образом, можно получить достаточно точные результаты с минимизацией времени. [3]

Предметом исследования являются методы финансовой математики и их реализация, используя гетерогенные вычислительные системы.

Актуальность данной выпускной квалификационной работы заключается в исследовании эффективности применения GPU для задач финансовой математики.

Постановка задачи

Далее представлены некоторые определения для понимания работы[4]:

- Опцион – это контракт, по которому покупатель получает право купить/продать базовый актив по заранее известной цене в определенный момент в будущем или на протяжении определенного отрезка времени.
- «Колл»-опцион – позволяет держателю купить базовый актив по цене исполнения
- «Пут»-опцион – позволяет держателю продать базовый актив по цене исполнения.
- Хеджирование — открытие сделок на одном рынке для компенсации воздействия ценовых рисков равной, но противоположной позиции на другом рынке. Обычно хеджирование осуществляется с целью страхования рисков изменения цен путём заключения сделок на срочных рынках. [5]
- Производный финансовый инструмент (дериватив) – в его основу заложены обязательства в отношении других инвестиционных активов. Можно сказать, что это ценная бумага на ценную бумагу.[6]

Как известно, в финансовом мире время играет очень важную роль, любая задержка в обработке информации может привести к огромным экономическим потерям. Поэтому для более эффективной работы используются технологии параллельных вычислений.[7]

Цель данной работы — моделирование ценообразования опционов, используя гетерогенные вычислительные системы.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть фондовый рынок, опционы и их место в экономике.

2. Рассмотреть существующие модели и методы финансовой математики для оценки стоимости опционов.
3. Выполнить программную реализацию алгоритмов и провести численные эксперименты, проанализировать их результаты.

Обзор литературы

В таких источниках, как [1], [8], [9], [10], подробно описаны основы финансовой математики, рассмотрены особенности экономико-математического моделирования как направление исследования финансового рынка. Рассмотрен фондовый рынок в целом

В работах [17], [18], [19], [22], [23] представлены описания особенностей применения различных моделей финансовой математики.

В следующих изданиях [26], [27], [28],[30] описаны методы Монте-Карло для стохастического дифференциального уравнения (далее – СДУ) для азиатских и европейских опционов.

Для понимания архитектуры вычислительных систем рассмотрены следующие источники: [7], [33], [36].

Источники [38], [37], [40] предоставлены компанией NVIDIA.

Глава 1. Фондовый рынок

1.1 Фондовый рынок России

Фондовый рынок представляет собой совокупность финансовых рыночных отношений, связанных с выпуском и обращением ценных бумаг, а также способы такого обращения. В тоже время, это система институтов и экономических механизмов, которые отвечают за движение ценных бумаг. Фондовый рынок, или рынок ценных бумаг, выделяется в структуре рыночной экономики, поскольку объектом продажи является нетривиальный товар - ценные бумаги. Основное различие между рынком ценных бумаг и другими рынками заключается в формировании денежного капитала, который в будущем можно использовать для инвестирования в производство любого реального продукта или для увеличения первоначального капитала. [8]

Рынок ценных бумаг, как часть современной рыночной экономики, обладает способностью мобилизовать инвестиционные ресурсы для экономического роста, развития научно-технического прогресса и интенсификации инноваций. [9]

Еще совсем недавно считалось, что российский фондовый рынок выполняет свои функции по привлечению инвестиций для развития экономики в недостаточном объеме. [9]

Этот рынок характеризовался нестабильной эффективностью государственного регулирования; недоверие отечественных инвесторов к фондовому рынку; недостаточно разработанная нормативно-правовая база, устанавливающая ответственность за нарушения на фондовом рынке.

Фондовый рынок России довольно молодой, он зародился в начале 90-х годов, поэтому его относят к развивающимся рынкам. Таким рынкам характерна большая доходность и большой уровень риска. [8]

В 2018 году вся основная деятельность российской биржи проводилась в Москве и Санкт-Петербурге. Северная столица представляла около 10% от общего объема рынка. 87% были сосредоточены в Москве, а остальные 3% были поделены между региональными структурами фондового рынка, расположенными в городах с населением более миллиона человек.[10]

Двумя крупнейшими биржами на российской фондовой бирже являются Московская фондовая биржа (MOEX) и Санкт-Петербургская фондовая биржа (SPBEX). На этих биржах торгуются не только акции, но и облигации, валюты и фьючерсы. Московская биржа MOEX была основана в декабре 2011 года после слияния Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ) и Российской торговой системы (РТС).[11], [1]

На этой бирже представлены такие известные компании, как Газпром, Сбербанк, Роснефть, Лукойл, Норникель, Банк ВТБ и другие. Наиболее важным индексом фондового рынка является ММВБ, рассчитанный в руб., который отслеживает динамику 50 наиболее ликвидных российских акций, которые представляют основные сектора российской экономики. Другой ключевой индекс, RTSI, отслеживает те же компании, но номинирован в долларах США. После вышеуказанного объединения оба индекса управляются MOEX. [12]

1.2 Классификация видов рынка ценных бумаг и его функции

Рынок ценных бумаг представляет собой сложную комбинацию различных видов или типов относительно независимых рынков. Типы рынка ценных бумаг классифицируются по следующим критериям:[13]:

- в зависимости от стадии обращения ценных бумаг различают первичный и вторичный рынки;

- по типу эмитента: рынок государственных (федеральных) ценных бумаг, субъекты Российской Федерации, рынок муниципальных и корпоративных ценных бумаг;
- выделяются относительно независимые рынки значимых ценных бумаг по их типу: долевой рынок, облигации (долговый рынок), векселя и т. д. В свою очередь, каждый из этих рынков можно разделить на еще более мелкие рынки. Например, рынок облигаций делится на рынок государственных, региональных и корпоративных облигаций и т. д.;
- в соответствии с уровнем организации, рынок ценных бумаг делится на организованный (любая торговая среда, например, биржа) и неорганизованный (любая торговая среда, которая работает в соответствии с частными правилами);
- степень концентрации отношений между эмитентами и инвесторами с точки зрения места, времени, процессов и т. д. рынок ценных бумаг разделен на биржи (биржевые торги) и внебиржевые;
- способ заключения сделок - традиционный (наличие физического пространства) и компьютеризированный;
- по видам сделок: кассовый (выполнение транзакций в течение одного или двух рабочих дней) и срочные (сроки исполнения превышают два рабочих дня).
-

На рис. 1 наглядно показана данная классификация видов рынка ценных бумаг по признакам. [14]

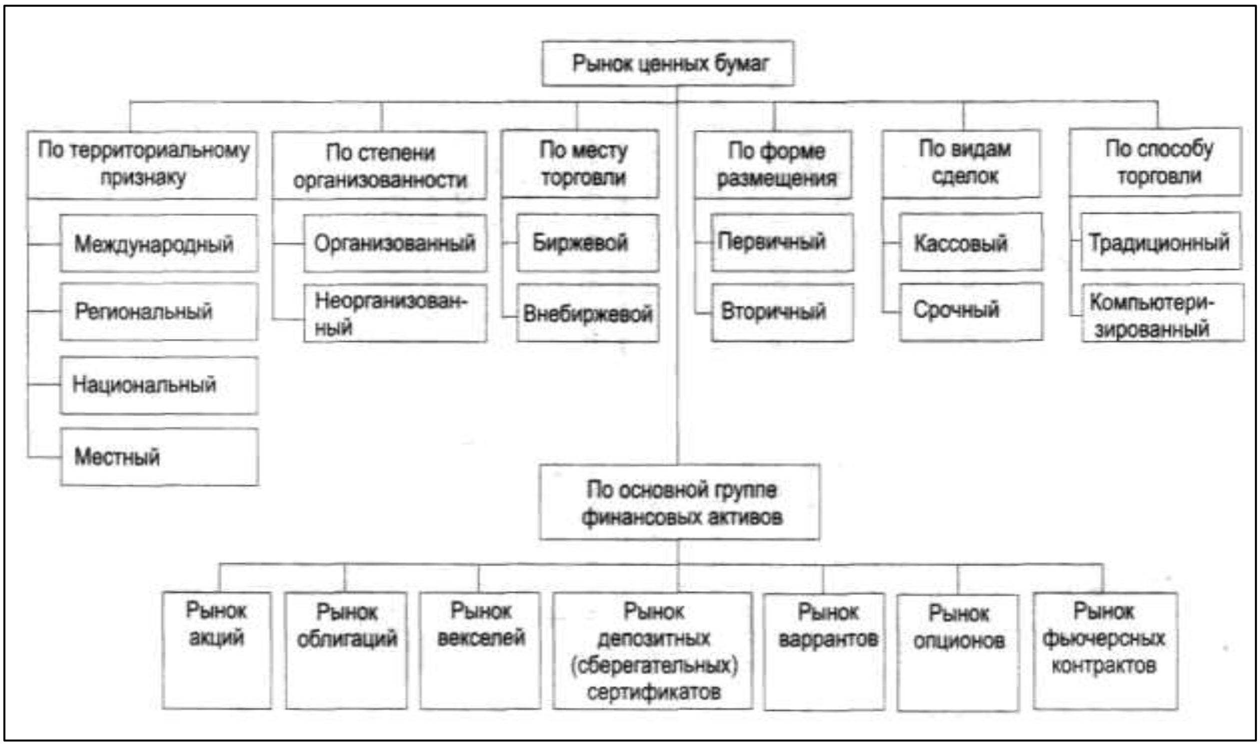

Рисунок 1: Виды рынка ценных бумаг.

Фондовый рынок выполняет следующие функции в экономике страны:

- перераспределения инвестиционных ресурсов (финнсирование тех областей хозяйствования, где самая высокая вероятность получения максимального дохода от деятельности);
- воздействия на денежную массу страны (дефицит денег можно покрыть выпуском ценных бумаг);
- объединения капитала (единение всех ценных бумаг в один актив);
- учета ценных бумаг;
- стимулирования фондового рынка (мотивации всех юридических и физических лиц стать участниками рынка, покупать и продавать ценные бумаги).

Кроме того, российский фондовый рынок является своеобразным индикатором экономики страны в целом, характеризующим процессы, происходящие во всех сферах деятельности государства. [11]

1.3 Классы и виды ценных бумаг

Субъекты рынка фондовых отношений взаимодействуют друг с другом посредством ценных бумаг. Для повышения доходов по своим денежным средствам или капиталу инвесторы используют специальный пакет ценных бумаг, называемый инвестиционным портфелем. Такой инструмент позволяет: повысить ликвидность фондовых инструментов; за счет разноплановости ценных бумаг достичь повышения эффективности портфеля в целом; снизить риски по фондовым документам.

Перечень ценных бумаг представлен ниже на рис. 2.

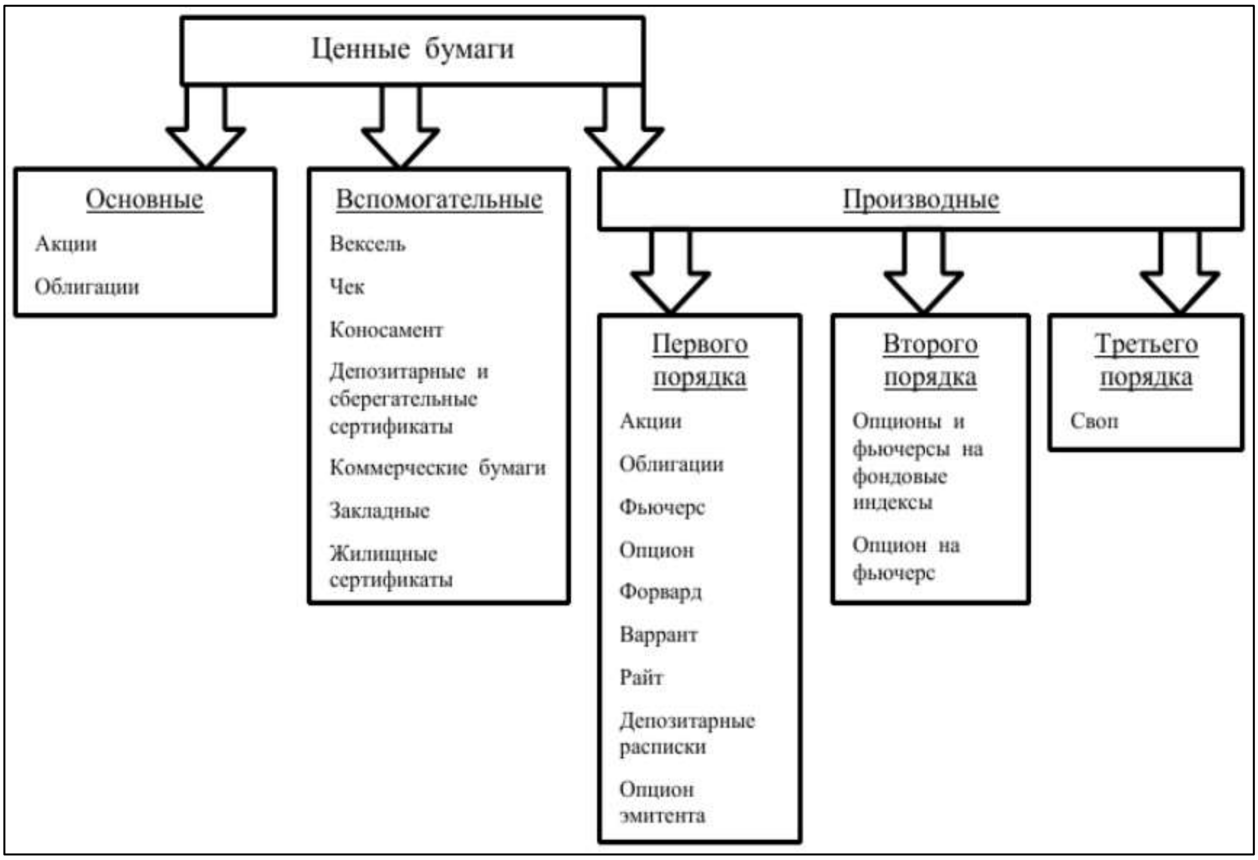

Рисунок 2: Ценные бумаги.

Одной из наиболее распространенных производных ценных бумаг является опцион. Их преимущество заключается в гибкости их применения: в отличие от форвардных и фьючерсных сделок опцион вменяет право, а не обязанность, купить или продать актив по обозначенной в контракте цене. [15]

1.4 Опционы

Рынок опционов является самым популярным среди финансистов по причине того, что прибыль, получаемая в результате торгов, не идет ни в какое сравнение с доходами от простой купли-продажи ценных бумаг. Доходность в этом случае исчисляется не процентами, а десятками или даже сотнями процентов. Кроме того, биржа обеспечивает своим клиентам безопасность и прозрачность при осуществлении всех сделок.

Опцион – это право купить или продать актив в будущем на условиях, установленных сегодня. Этим правом держатель опциона может воспользоваться или не воспользоваться в зависимости от того, выгодно ли ему это в момент исполнения контракта. [16]

Цена, по которой держатель купил опцион, называется премией. По цене она гораздо меньше того убытка, который может понести держатель при неблагоприятном стечение обстоятельств. Опционная премия зависит от волатильности стоимости базового актива. Чем выше волатильность стоимости базового актива, тем выше риск продавца опциона, тем больше премия опциона и наоборот.

Опционы бывают двух типов – «колл» и «пут». Опцион «колл» дает право купить актив в будущем по заранее установленной цене, а опцион «пут» - право продать актив в будущем по заранее установленной цене. [4]

Приобретая опцион типа колл, покупатель рассчитывает на рост цены базового актива в будущем. В этом случае он сможет воспользоваться своим правом на «покупку» по указанной в контракте цене (т.е. ниже рынка) по истечению опциона. Обратная схема с опционами типа пут: покупатель ожидает падения цены ниже контрактной для «реализации» по ней базового актива в будущем.

В основе каждого опциона лежит базовый актив. Это может быть акция, индекс, валюта, товар или любой другой актив.

Каждый опцион имеет цену исполнения – страйк, по которой держатель опциона имеет право купить или продать актив в будущем. Справедлвая цена опционов «колл» и «пут» во время их исполнения T определяется следующими выражениями соответственно:

$$u(S,T) = \max\{0; S - K\}$$
$$u(S,T) = \max\{0; K - S\},$$

где S – цена базового актива, K – страйк.

Каждый опцион имеет срок жизни – дату экспирации. Это определенный момент в будущем, когда опционный контракт прекращает свое существование. [4]

Существуют разные виды опционных контрактов, рассмотрим некоторые из них: американский, европейский, азиатский.

Американский опцион может быть исполнен в любой день до истечения срока действия контракта.

Европейский - строго в день исполнения договора.

Цена исполнения азиатского опциона определяется средней стоимостью базового актива за определённый период времени. Продавцу такого опциона намного сложнее управлять условиями такогоо контракта, чтобы уменьшить прибыль покупателя. В данном случае прибыль будет зависеть только от цены базового актива в моменты мониторинга и не будет фиксированной и заранее известной в момент покупки опциона

Основные функции опционов – хеджирование и спекуляция.

Глава 2. Обзор моделей и методов ценообразования опционов

В основе всех математических моделей для расчета цены опциона, лежит идея эффективного рынка. Предполагается, что «справедливая» премия опциона соответствует его стоимости, при которой ни покупатель опциона, ни его продавец, в среднем не получают прибыли.

Чтобы рассчитать премию, постулируются свойства стохастического процесса, который имитирует поведение цены базового актива, лежащего в основе опционного контракта. Параметры такой модели оцениваются на основе исторических данных. Одним из наиболее важных статистических параметров, влияющих на размер премии, является волатильность цены базового актива. [17] Чем этот показатель больше, тем выше неопределенность в прогнозировании будущей цены и, следовательно, тем выше премия (за риск), которую должен получить продавец опционов. Вторым важным параметром, также напрямую связанным с неопределенностью, является время до истечения срока действия опции. Чем дольше эта дата, тем выше премия (для той же цены поставки базового актива, которая указана в опционном контракте).

Существующие методы финансовой математики для оценки любых опционов можно разделить на две основные группы: [18]

- аналитические методы;
- численные методы.

Аналитические методы - это оценка с использованием математически полученных формул, которые позволяют мгновенно получить значение опциона. Формула Блэка Шоулза для оценки стандартных европейских опционов является примером такой формулы. Аналитические формулы, однако, доступны только для очень ограниченного набора опционных контрактов (европейские и некоторые экзотические варианты).

Численные методы включают биномиальный метод, метод конечных разностей и метод Монте-Карло. Их преимущество в том, что они позволяют оценить стоимость любых опционов и дериватов. Однако точность этих методов, как правило, не идеальна. Кроме того, они требуют большего расчета и времени для получения результата.

2.1 Модель Блэка-Шоулза-Мертона

Модель Блэка-Шоулза-Мертона является классической моделью ценообразования европейских опционов. Модель, разработанная Фишером Блэком и Майроном Шоулзом и дополненная Робертом Мертоном, была представлена в 1973 году.[19]

Эта модель была первой математической моделью, описывающей оценку опционов за непрерывный период.

Чтобы вывести эту модель, были сделаны следующие предположения:

- безрисковая процентная ставка r известна и не меняется с течением времени;
- цена базового актива *S(t)* изменяется в соответствии с геометрическим броуновским движением и удовлетворяет СДУ:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

где μ — снос случайного процесса, представляющий средний уровень роста доходности актива, σ — волатильность доходности, $W(t)$ — геометрическое броуновское движение.

Торговля ценными бумагами (базовый актив) не прерывается.

- дивиденды по базовому активу опциона не выплачиваются за весь срок действия опциона;
- нет транзакционных издержек, связанных с покупкой или продажей опциона;

- любой актив на рынке делится, любое реальное количество ценных бумаг может быть куплено или продано;
- короткая продажа разрешена без ограничений, и в этом случае продавец немедленно получит полную сумму по сегодняшней цене;
- нет возможности для арбитража, то есть нет способа получить прибыль без риска.

Из всего этого следует, что рынок полный. Это означает, что любой актив на рынке может быть представлен портфелем других активов с такими же характеристиками риска и доходности.[20]

Данные предположения Блэка, Шоулза и Мертона соответствует идеальному рынку, следовательно, их выполнение является нереальным.[20]

Модель Блэка-Шоулза-Мертона выглядит следующим образом:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln(\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1)$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

где:

- S – цена базового актива в момент времени t;
- K – цена исполнения опциона;
- e – число Эйлера;
- r – годовая безрисковая процентная ставка;
- (T-t) – время до истечения срока действия опциона в годах;
- σ – среднеквадратическое отклонение доходности базовой акции.

2.2 Биноминальная модель

Одной из самых популярных моделей для определения справедливой цены опционов, европейских и американских, является модель бинарного дерева. Она была предложен Джоном Коксом, Стивеном Россом и Марком Рубинштейном в работе [22], основанной на знаменитой классической модели Блэка-Шоулза.

Цена опциона определяется путем деления промежутка времени до истечения срока на определенное количество периодов, в каждый из которых цена базового актива может увеличиваться или уменьшаться. Затем, начиная с самого последнего периода, цены опционов рассчитываются для разных значений цены базового актива (в разных узлах бинарного дерева, которые находятся на одном уровне), при условии, что нет арбитража.

Этот процесс продолжается до корня дерева, где значение цены опциона и будет справедливой ценой опциона в течение указанного срока (экспирации), начальной цены базового актива и безрисковой процентной ставки. Эта модель ценообразования производных ценных бумаг в дискретном времени стала очень распространенной благодаря своей простоте и интуитивно понятной реализации на компьютере.

Пример модели бинарного дерева показан на рис. 3.

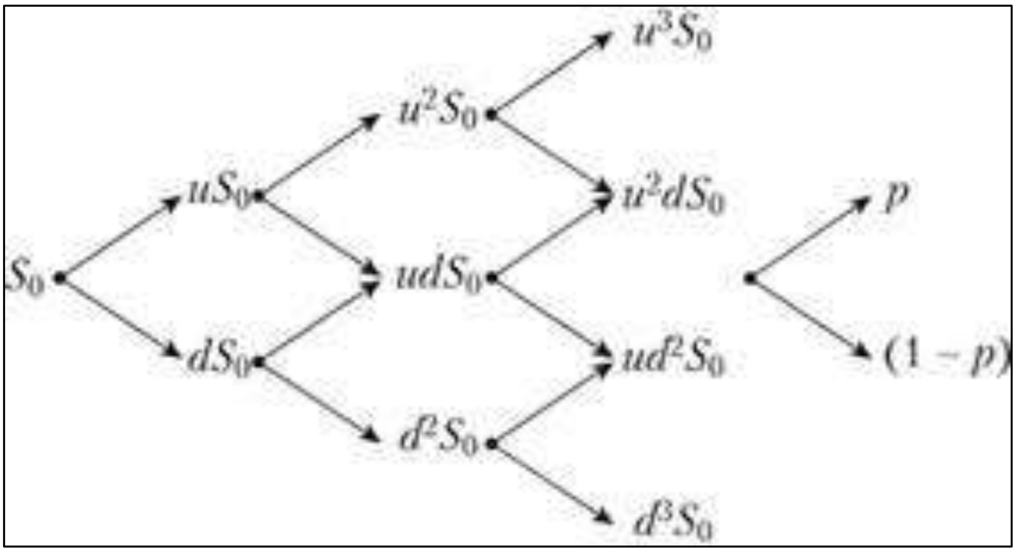

Рисунок 3: Пример биноминальной модели ценообразования опционов.

2.3 Метод конечных разностей

Метод конечных разностей или метод сеток является универсальным и эффективным методом решения диф. уравнений в частных производных. Теория разностных схем для численного решения дифференциальных уравнений является одной из основных частей современной компьютерной математики. [23]

Первая работа была предложена профессором Эдуардо Шварц в 1982.

2.4 Методы Монте-Карло

Методы Монте-Карло известны с 1940-х годов и широко используются в самых разных областях. Фелим Бойль был первым, кто предложил их использовать в ценообразовании. [24] Идея таких методов заключается в моделировании возможных траекторий цены базового актива с учетом вероятностных характеристик изменений этой цены и других параметров модели. Подобно биномиальной модели, методы Монте-Карло также популярны из-за простоты реализации. [18]

Суть метода состоит в том, чтобы оценить математическое ожидания выплаты, которую опцион сгенерирует для своего владельца, многократно генерируя возможные ценовые пути движения акции.

Алгоритмы нахождения цены с использованием метода Монте-Карло подробно рассмотрены в Главе 3.

Глава 3. Алгоритмы ценообразования опционов, основанные на методе Монте-Карло

Алгоритмы определения цен с использованием метода Монте-Карло могут быть реализованы, например, с использованием стохастического дифференциального уравнения. [25]

Стохастическое дифференциальное уравнение (далее – СДУ) – это уравнение, в котором один член или более имеют стохастическую природу, то есть представляют собой стохастический (или случайный) процесс. Таким образом, решения уравнения также оказываются стохастическими процессами. [26]

В данной главе рассмотрены алгоритмы для двух типов опционов – европейского и азиатского. [27]

3.1. СДУ для опциона европейского типа.

Модель Блэка-Шоулза-Мертона (1) соответствует следующему СДУ [16]:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma dB(t),$$

где B(t) – стандартный винеровский процесс, B(t) ~ N(0, 1)

В этом случае формула цены базового актива в день экспирации выглядит следующим образом:

$$S(T) = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\varepsilon}, \qquad (2)$$

где ε – случайная величина, распределенная по нормальному закону (распределение Гаусса).

Применение метода Монте-Карло для европейских опционов описывается следующим алгоритмом [28]:

1. сгенерировать n случайных чисел для ε;
2. используя формулу (2), вычислить цену базового актива S(T) для каждого значения ε;
3. вычислить среднее значение цены базового актива S_{cp};
4. по формулее (3) вычислить цену опциона C:

$$C = e^{-rT} S_{cp} \tag{3}$$

3.2. СДУ для опциона азиатского типа.

Используя метод Монте-Карло для азиатского опциона, необходимо сгенерировать случайный временной ряд для цены базового актива за весь период времени. [29] Необходимо разделить этот период времени на m частей. Тогда шаг $\Delta t = \frac{T}{m}$. В каждый момент времени цена будет зависеть от цены на предыдущем шаге.[18] Формула цены базового актива выглядит следующим образом:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon} \tag{4}$$

где Δt – промежуток времени между двумя измерениями цены.

Алгоритм для вычисления цены азиатского опциона с применением метода Монте-Карло выглядит следующим образом: [30]

1. сгенерировать m случайных чисел ε и найти для каждого из них значение цены базового актива по формуле (4), (i=0, 1, …, m);
2. по следующей формуле находим среднее арифметическое значение полученного ряда:

$$S = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S(t_i)$$

3. повторить п.1 и п. 2 n раз;
4. вычислить цену опциона C по формуле:

$$C(s_0, T) = \frac{1}{n} e^{-rT} \sum_{j=1}^{n} S_j$$

Глава 4. Программная реализация и численные эксперименты.

4.1. Вычислительные системы.

Вычислительные системы – это совокупность аппаратных и программных средств, используемые для решения различных задач. Отличительная особенность вычислительных систем по отношению к электронно-вычислительным машинам заключается в наличие в них нескольких вычислителей, реализующих параллельную обработку.[31]

Основной проблемой в области суперкомпьютерных технологий является повышение производительности системы.

На основе принципов конвейерной обработки и суперскалярности были созданы микропроцессоры (CPU) и, позднее, графические ускорители (GPU).[32] Использование графического процессора подходит не только для ускорения трехмерной графики, но и для решения задач с высокой степенью параллелизма. Графический процессор состоит из однородных вычислительных элементов с общей памятью, каждый из которых может выполнять тысячи потоков, которые могут быть сгруппированы в блоки с общим кешем и быстрой разделяемой памятью.[33]

Современные графические процессора имеют высокую скорость доступа к модулям памяти, обработка больших объемов данных может происходить параллельно, а производительность достигает высоких значений.[7]

Первоначально CPU и GPU создавались для определенного класса задач, а системы были однородными (состоящими из одного или нескольких компьютеров с одинаковой архитектурой). В настоящее время часто используют гетерогенные системы. Гетерогенные системы могут использовать универсальный процессор CPU и графический GPU совместно.

Стандартной гетерогенной системой является совокупность одного CPU и одного или более GPU. Однако GPU используется как сопроцессор к центральному процессору, который является «хостом», и называется «устройством».

GPGPU (General Purpose computing for GPU) – это техника использования GPU для расчетов, которые обычно выполняются на CPU. [34]

Существуют различные платформы для GPGPU, такие как OpenCL, AMD FireStream, Nvidia CUDA и другие.[31]

В данной выпускной квалификационной работе используется платформа Nvidia CUDA (Compute Unified Device Architecture). [35]

CUDA использует CPU и GPU: на CPU выполняется последовательная часть кода, на GPU - параллельные участки кода, выполняемые одновременно несколькими потоками.

В архитектуре CUDA используется модель памяти грид. Это форма распределённых вычислений, в которой «виртуальный суперкомпьютер» представлен в виде кластеров. Грид состоит из блоков, которые в свою очередь состоят из потоков. Эта технология применяется для решения научных, математических задач, требующих значительных вычислительных ресурсов.[36]

Для запуска параллельной реализации алгоритма использованы GPGPU NVidia Tesla M2050. Характеристики графического процессора представлены ниже: [37]

Производительность операций с плавающей запятой	515 ГФлоп
Производительность операций с плавающей запятой одинарной точности (пиковая)	1.03 ТФлоп
Полный объем специальной памяти	3 ГБ GDDR5
Максимальное потребление энергии	225 Вт
Количество ядер CUDA	448

Таблица 1. Характеристики используемого графического процессора.

4.2. Генератор случайных чисел.

Для генерации случайных чисел с равномерным и нормальным распределением на GPU используется библиотека cuRAND.[38]

Существуют псевдослучайные и квазислучайные генераторы. Генератор псевдослучайных чисел создает все числа из диапазона с равной вероятностью, поэтому генерация случайной величины не влияет на возможность повторения ее генерации на следующем шаге. Генератор квазислучайных чисел уменьшает вероятность ее повторного появления, поэтому этот генератор покрывает пространство равномернее.

Исходя из особенностей вышеперечисленных генераторов, для симуляции Монте-Карло лучше использовать квазислучайные.

В данной работе используется генератор квазислучайных чисел Соболя.[25]

4.3. Вычислительные эксперименты.

В данной главе будет представлено сравнение точности и скорости вычислений цены опциона на CPU и GPGPU. [39]

Вычисления произведены для опциона «колл» со следующими начальными данными:

- $S_0 = 100$
- $K = 110$
- $T = 1$ год
- $\sigma = 0{,}3$
- $r = 0{,}1$

Подставив эти данные в формулу Блэка-Шоулза-Мертона (1), получим следующие значения:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + (0.1 + \frac{0.3^2}{2})}{0.3} = 0.1656 \approx 0.17$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + (0.1 - \frac{0.3^2}{2})}{0.3} = -0.1344 \approx -0.13$$
$$N(d_1) = N(0.17) = 0.5675$$
$$N(d_2) = N(-0.13) = 1 - N(0.13) = 1 - 0.5517 = 0.4483$$
$$C(S_0, 0) = 100 \times 0.5675 - 110 \times e^{-0.1} \times 0.4483 = 56.75 - 44.62 = 12.13$$

Таким образом, цена европейского опциона с такими исходными данными равна 12.13

4.3.1.Вычисление цены опциона европейского типа.

Изначально было сгенерировано малое количество случайных чисел. Из-за этого сходимость к значению, полученному по формуле Блэка-Шоулза-Мертона, недостаточная. На рис. 4 изображен график, на котором красной линией обозначено это значение.[40]

Если количество случайных величин увеличить, то сходимость будет намного больше. На рис. 5 изображен такой график. Можно заметить, что при количестве случайных величин, равных 20 млн., сходимость достаточно высокая.

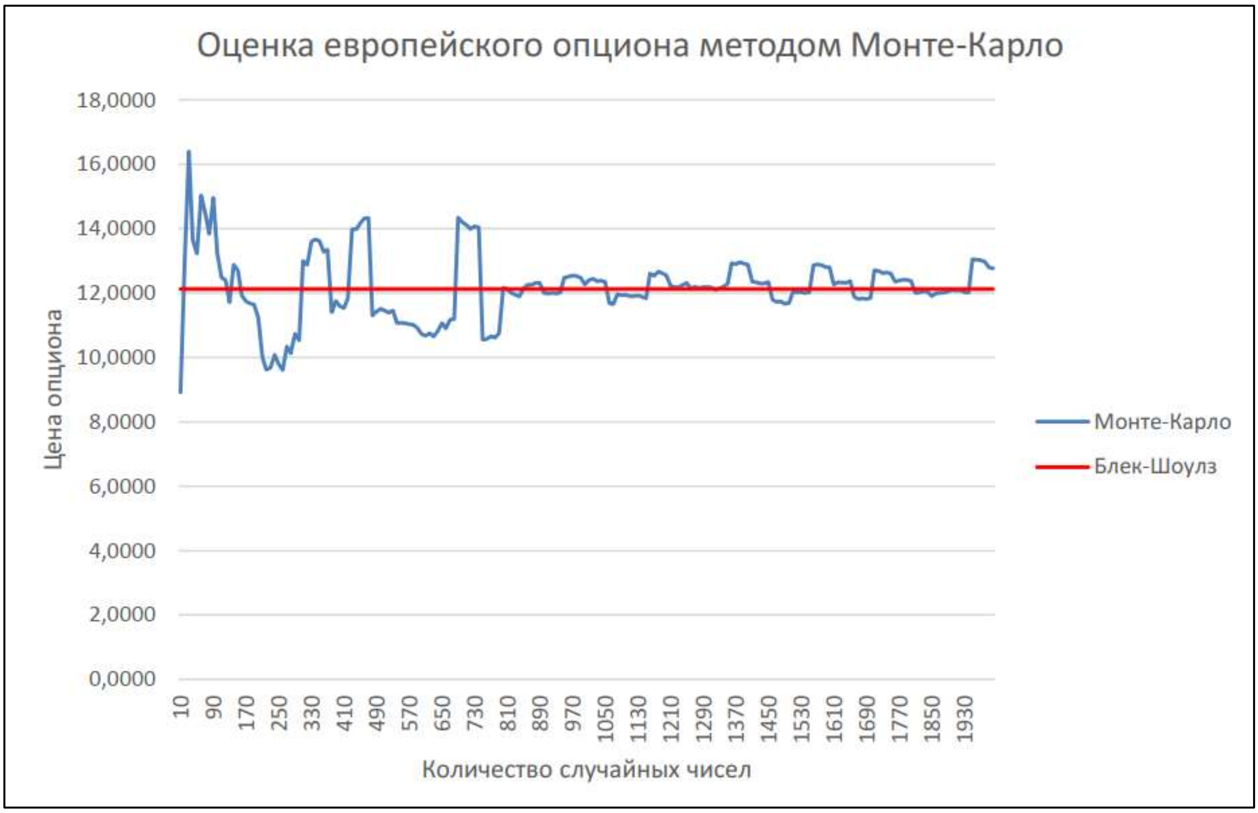

Рисунок 4: Оценка европейского опциона методом Монте-Карло (вар. 1).

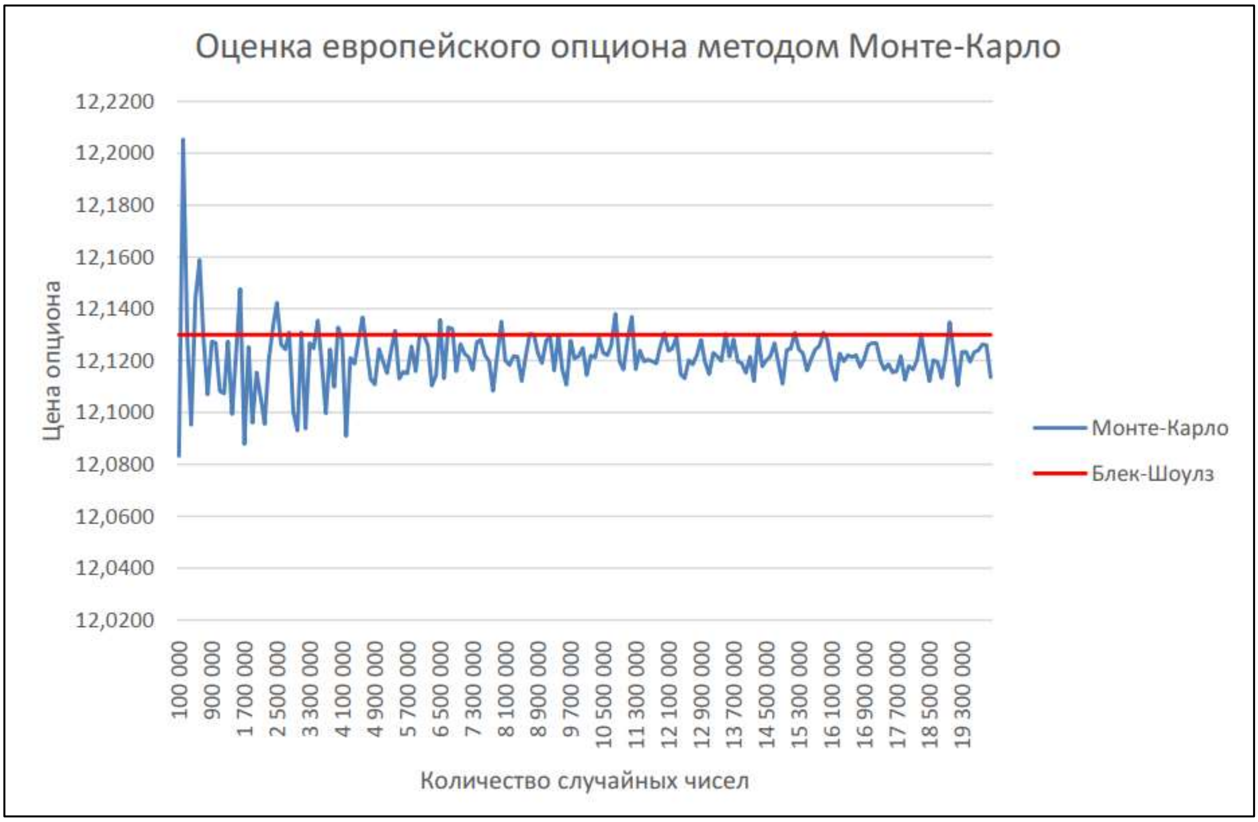

Рисунок 5: Оценка европейского опциона методом Монте-Карло (вар. 2).

Также важной задачей является сравнить скорость вычислений на CPU и GPU. Сравнительный анализ представлен в табл. 2:

Кол-во случайных чисел	Время на CPU, мс	Время на GPU, мс
361 600	59	13
2 762 600	397	14
6 892 600	991	19
10 893 600	1602	22
15 253 600	2276	27
20 296 000	3122	30

Таблица 2. Сравнительный анализ скорости вычислений на CPU и GPU, европейский опцион.

Таким образом, при 361 тыс. случайных чисел, ускорение равно 4.5, а при 20.2 млн. – 104.

Таким образом, использование GPU для вычисления цены европейского опциона с помощью СДУ является эффективным.

Стоит заметить, что с увеличением количества случайных чисел ускорение на GPU возрастает. Это можно заметить на графике рис. 6. CPU исполняет поток инструкций последовательно, несмотря на максимальную производительность. В то время как GPU исполняет большое количество потоков параллельно.

Чтобы использование GPU было эффективным, для обработки массивов используется алгоритм параллельной редукции. [36] Редукцией массива x0, x1, x2, … , xn−1 называется выражение: $A = (((x_0 + x_1) + x_2 + ... + x_{n-1})$

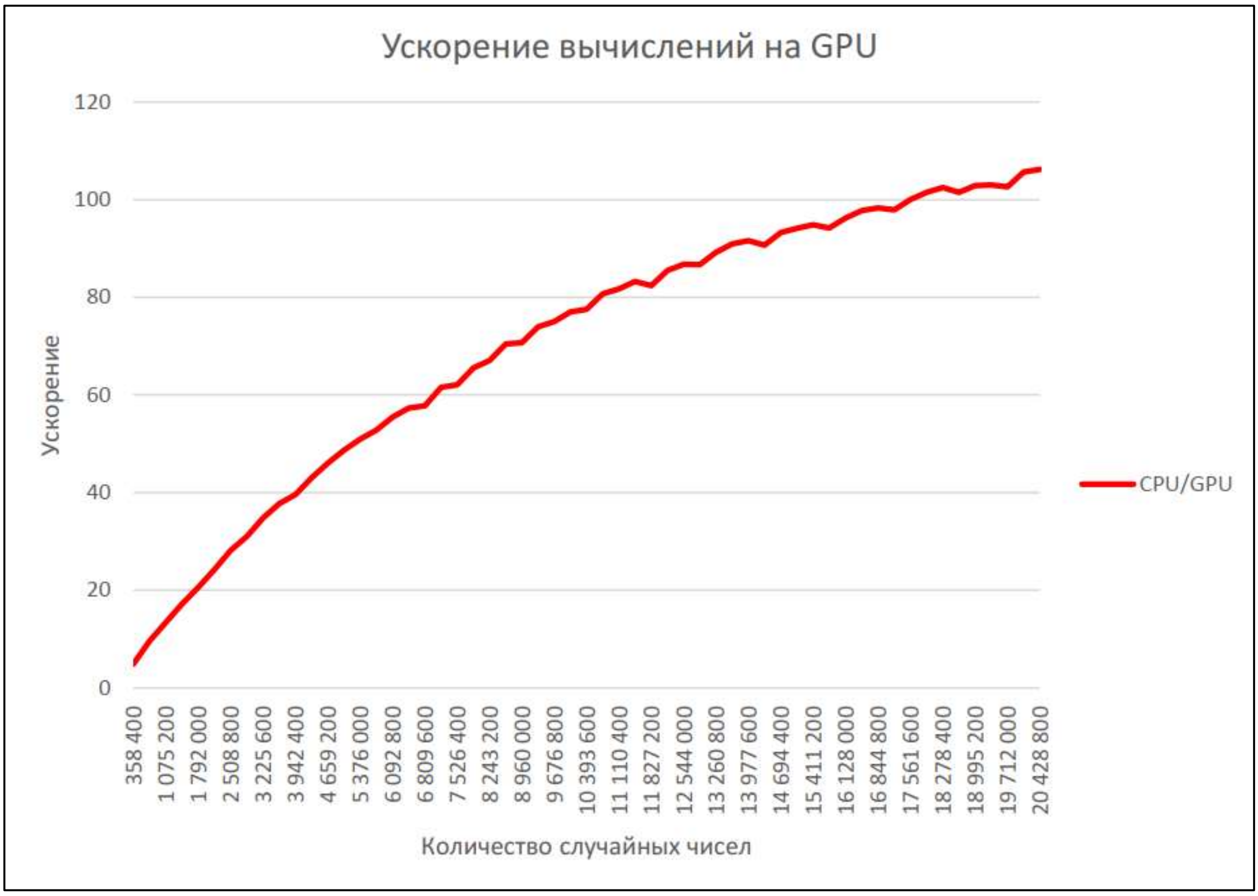

Рисунок 6. Ускорение вычислений на GPU.

4.3.2.Вычисление цены опциона азиатского типа.

Как говорилось ранее, сложность вычисления цены азиатского опциона заключается в том, что он может быть исполнен в любой момент до даты экспирации. Поэтому необходимо считать цену базового актива для каждого отрезка времени.

В текущих расчетах используются те же начальные данные. Среднее значение такого опциона равно 3.95. На графике рис. 7 представлена сходимость к этому значению.

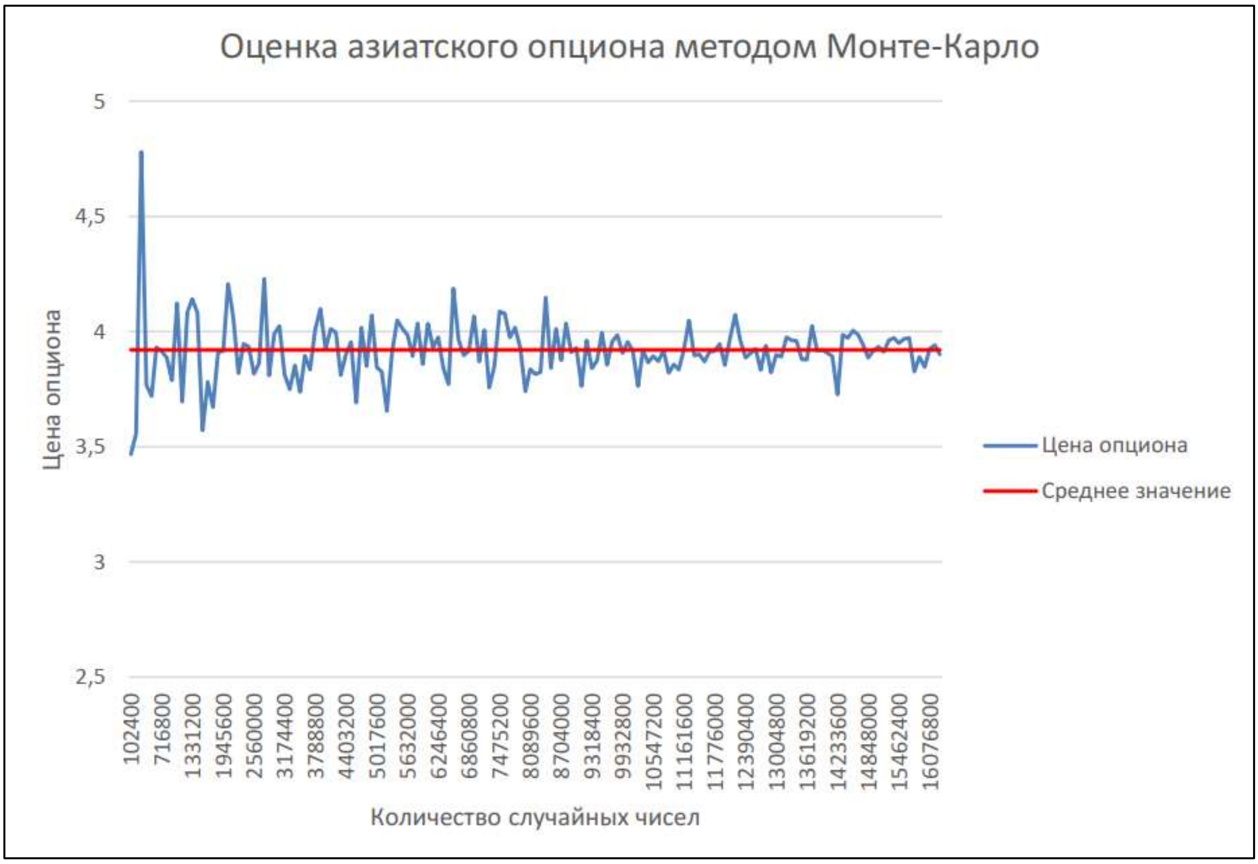

Рисунок 7. Оценка азиатского опциона методом Монте-Карло.

Сравнительный анализ скорости вычислений на CPU и GPU представлен в табл. 3:

Кол-во случайных чисел	Время на CPU, мс	Время на GPU, мс
361 600	57	139
2 762 600	368	194
6 892 600	919	493
10 893 600	1472	785
15 253 600	2165	1143
20 296 000	2984	1530

Таблица 3. Сравнительный анализ скорости вычислений на CPU и GPU, азиатский опцион.

Среднее ускорение равно 2. Следует отметить, что по сравнению с европейским вариантом ускорение значительно ниже. Причины этого - характеристики азиатских опционов. Как упоминалось выше, на каждой итерации необходимо рассчитать промежуточное значение цены базового актива и использовать алгоритм префиксных сумм.

Префиксная сумма последовательности чисел x0, x1, x2, … - это последовательность чисел y0, y1, y2, …, которые вычисляются следующим образом:[36]

$$
\begin{aligned}
&y_0 = x_0 \\
&y_1 = x_0 + x_1 \\
&y_2 = x_0 + x_1 + x_2 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

График на рис. 8 показывает, как меняется скорость расчета цены азиатского опциона в зависимости от использования разных процессоров.

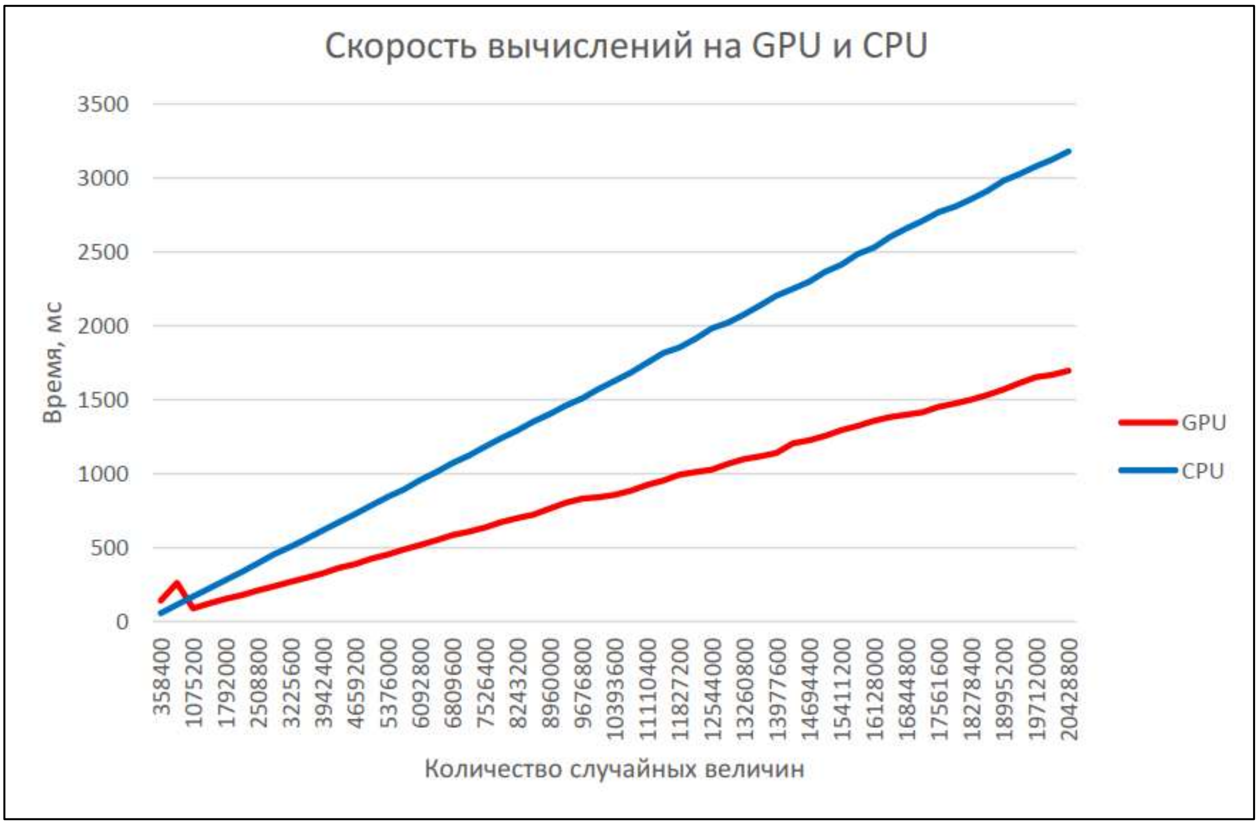

Рисунок 8. Скорость вычисления азиатского опциона на CPU и GPU.

Следовательно, использование GPU для вычисления цены азиатского опциона с помощью СДУ является неэффективным.

Выводы

В этой выпускной квалификационной работе были проведены численные эксперименты с использованием технологии CUDA. Показаны методы Монте-Карло для расчета цен европейских и азиатских опционов с использованием СДУ. Проведен анализ эффективности использования графических процессоров в задачах финансовой математики.

Были достигнуты следующие результаты программной реализации методов Монте-Карло на модуле обработки NVidia Tesla M2050 GPGPU:

- ускорение в 104 раза для расчетов цен европейских опционов с использованием СДУ;
- ускорение в 2 раза для расчетов цен азиатских опционов с использованием СДУ.

В результате вычислительных экспериментов по расчету цены азиатского опциона с использованием СДУ, использование графического процессора оказалось неэффективным.

.

Заключение

В настоящее время применение вычислительных систем с гетерогенной архитектурой становится более востребованным. Технология CUDA применяется к огромному количеству задач, в том числе и в финансовой математике.

В этой работе рассматриваются различные методы финансовой математики. Для построения моделей ценообразования опционов используется метод Монте-Карло. Эти алгоритмы хорошо подходят для реализации на графических процессорах, поскольку они основаны на большом количестве независимых операций. Этот метод имеет высокую степень параллелизма.

Задачи по данной работе выполнены, результаты проанализированы.

Список литературы

[1] Московская биржа: официальный сайт [Электронный ресурс]. - Режим доступа: URL: http://moex.com/ru/derivatives/select.aspx

[2] Экономико-математическое моделирование финансового рынка / В. К. Бурлачков, А. В. Гусаков // Финансовый менеджмент. – 2008. – N.5. – С. 135-143.

[3] Вычисления на GPU: мифы и реальность. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://compress.ru/article.aspx?id=23724

[4] Опцион, Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Опцион

[5] Хэджирование. Википедия.https://ru.wikipedia.org/wiki/Хэджирование

[6] Производный финансовый инструмент, Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Производный_финансовый_инструмент

[7] Минаева Ю. В. Применение параллельных вычислений при решении задач оптимизации // Вестник ВГТУ. 2013. №5-1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-parallelnyh-vychisleniy-pri-reshenii-zadach-optimizatsii

[8] Фондовый рынок России. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.fondovyj-rynok.ru

[9] Витченко А. Б. Фондовый рынок как механизм привлечения инвестиций в российскую экономику и стратегия повышения его конкурентоспособности // Пространство экономики. 2006. №4-2.

[10] Сайбель Н.Ю., Ковальчук А.В. Фондовый рынок России: проблемы и перспективы развития // Финансы и кредит. 2018. №3 (771).

[11] Финансовые рынки. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://answr.pro/

[12] TradingView. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.tradingview.com/

[13] Энциклопедия экономиста. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.grandars.ru/

[14] Виды и классификация ценных бумаг. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://studme.org/

[15] Виды ценных бумаг. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.banki.ru/wikibank/vidyi_tsennyih_bumag/

[16] Джон К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. Изд. дом. Вильямс, 2014. 1072 с.

[17] Bluemke A. How to Invest in Structured Products: A Guide for nvestors and Asset Managers. Wiley Finance, 2009.

[18] Глухов М. Оценка опционов методом Монте-Карло // Futures&Options. 2009. №4

[19] Модель Блэка — Шоулза, Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Блэка_—_Шоулза

[20] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities // Journal Political Economy, 1973. Vol. 81. No. 3. P. 637-659

[21] Особенности и перспективы применения модели Блэка-Шоулза для российского рынка / А.А. Масалова, А.А. Гладилин // Современная экономика. – 2019. – с. 150-153.

[22] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach//Journal of Financial Economics, September, 1979. 7. P. 229.

[23] Ворошилова Наталья Александровна Сравнительный анализ методов моделирования стоимости опционов // Научный журнал КубГАУ - Scientific Journal of KubSAU. 2007. №26.

[24] Boyle Ph. Options: a Monte Carlo approach //Journal of FinancialEconomics. 1977. 4. P. 323-338.

[25] Соболь И.М., Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 307 с.

[26] Лукашев, А.В. Метод Монте-Карло для финансовых аналитиков: краткий путеводитель / А.В. Лукашев // Управление корпоративными финансами. – 2007. – № 1. – С. 22–39.

[27] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике: Вводный курс. СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 192с.

[28] Войтишек А. В. Михайлов Г.А. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. Академия М., 2006.

[29] Hongbin Zhang. Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods. Department of Mathematics Uppsala University, 2009. 36 с.

[30] Михаил Глухов. Оценка экзотических опционов методом МонтеКарло. Futures&Options, май 2009. 40-49 с

[31] Вычислительные системы. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://chernykh.net/content/view/900/981/

[32] Э. Таненбаум, М. ван Стеен. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. СПб.: Питер, 2003. 877 с.

[33] Дегтярев А.Б. Андрианов С.Н. Параллельные и распределенные вычисления. Часть 1. Спб.:"СОЛО" 2007. 60 с

[34] Hyesoon Kim, Richard Vuduc, Sara Baghsorkhi. Performance Analysis and Tuning for General Purpose Graphics Processing Units (GPGPU) // Morgan & Claypool Publishers, 2012

[35] А. В. Боресков, А. А. Харламов. Основы работы с технологией CUDA. Изд. дом. ДМК Пресс, 2010, 232 стр.

[36] А. В. Боресков и др. Предисл.: В. А. Садовничий. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA: Учебное пособие. Изд-во Московского университета, 2012, 336 стр.

[37] Официальный сайт Nvidia http://www.nvidia.ru/object/gpucomputingapplications-ru.html

[38] Библиотека cuRand http://www.nvidia.ru/object/tesla-gpu-acceleratedlibraries-curand-ru.html

[39] Simoes B. General-purpose computing on the GPU (GPGPU). http://www.think-techie.com/2009/09/general-purpose-computing-on-gpugpgpu.html

[40] NVIDIA CUDA C Programming Guide. Version 4.2 http://developer.nvidia.com/nvidia-gpu-computing-documentation