

Санкт–Петербургский государственный университет

*Кудин Павел Сергеевич*

Выпускная квалификационная работа  
*Движения космического аппарата в  $L_2$  системы  
Солнце-Земля*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Математическое моделирование систем и процессов управления»

Научный руководитель:

доцент кафедры механики управляемого движения,  
к.ф. - м.н. Шиманчук Дмитрий Викторович

Рецензент:

доцент кафедры теории систем управления электрофизической  
аппаратурой,  
к.ф. - м.н. Шмыров Василий Александрович

Санкт-Петербург

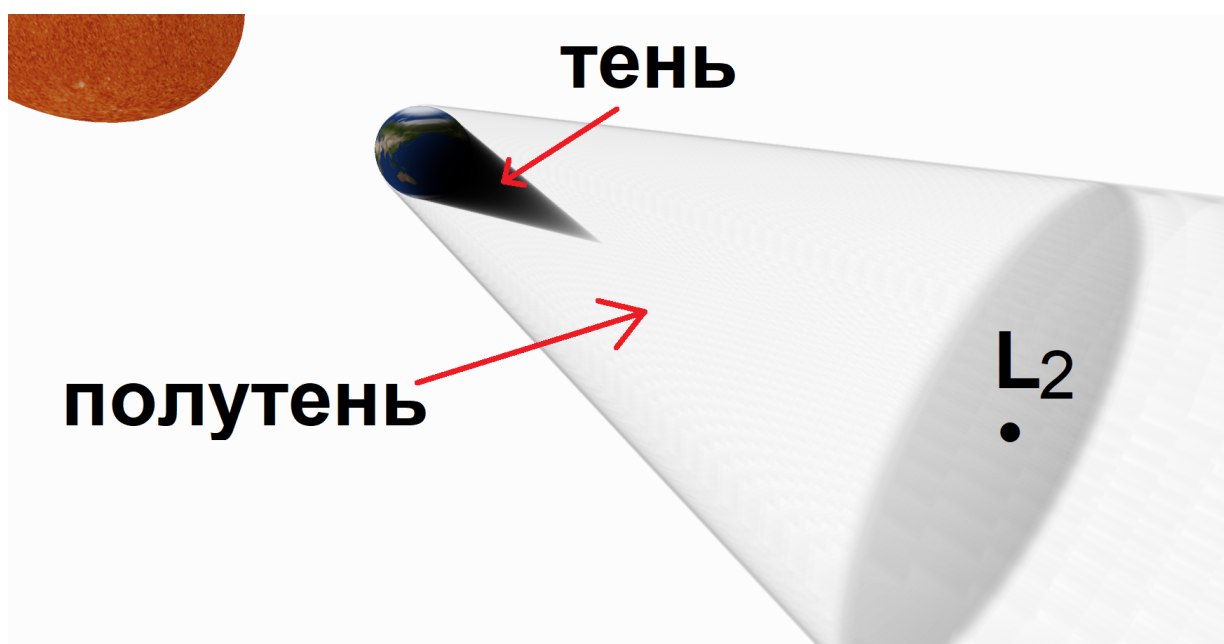
2020 г.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Постановка задачи</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Построение периодических орбит в <math>L_2</math></b> . . . . .	6
1.1. Уравнения движения и анализ траекторий КА в окрестности $L_2$ . . . . .	6
1.2. Построение возможных траекторий . . . . .	8
<b>Глава 2. Движение КА вне области полутени Земли</b> . . . . .	18
2.1. Тень и полутень Земли . . . . .	18
2.2. Численное решение задачи длительного пребывания КА вне области полутени . . . . .	19
<b>Выводы</b> . . . . .	22
<b>Заключение</b> . . . . .	23
<b>Список литературы</b> . . . . .	24

## Введение

С каждым днём человечество становится всё ближе к освоению Солнечной системы и изучению самых далёких уголков Вселенной. Из-за чего всё больший интерес проявляется к исследованию небесных тел, их движения и свойств. С течением времени учёными было разработано понятие круговой ограниченной задачи трёх тел. Это модель, используемая для описания движения тела малой массы в поле притяжения двух массивных небесных тел, вращающихся вокруг общего центра масс по околокруговым орбитам. Ключевыми особенностями этой модели являются следующие предположения: массивные тела движутся по круговым орбитам, движущееся в поле притяжения тело никак не воздействует на движение других тел системы. Несмотря на то, что эксцентриситет земной орбиты не равен нулю, уравнения круговой ограниченной задачи трёх тел достаточно точно описывают движение. В рамках данной работы будет рассматриваться система, где в качестве небесных тел будут выступать Солнце и Земля.



**Рис. 1:** Тень и полутень Земли

Известно, что уравнения круговой ограниченной задачи трёх тел не имеют аналитического представления, однако известны частные решения, обладающие свойством сохранения положения в пространстве конфигураций, и называют их точками либрации [2, 17]. Особый интерес пред-

ставляет коллинеарная точка либрации  $L_2$ , в силу удобства её использования в астрономических целях [4]. Она расположена в полутени Земли, создаваемой Солнцем (см. рис. 1), в результате чего множество космических проектов связано с использованием её свойств. Например, в 2019 году произошёл запуск орбитальной астрофизической обсерватории Spectrum-Roentgen-Gamma (SRG) [15] в окрестность точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля, предназначенной для построения полной карты Вселенной, избегая при этом область полутени в течение 7 лет.

Стоит отметить, что не меньший интерес представляет эллиптическая ограниченная задача трёх тел, где отсутствует предположение о том, что движение массивных небесных тел происходит по орбитам с нулевым эксцентриситетом. В этой области проходят исследования, касающиеся использования орбит в окрестности точек либраций  $L_1$  и  $L_2$  для построения перелёта между ними [10, 13, 14].

Неустойчивость коллинеарных точек ограничивает длительное пребывание космического аппарата (КА) в их окрестности без управления. Ввиду этого свойства, учёными разработаны методы удержания движения КА в точке либрации [7, 8, 12]. Одним из таких подходов является построение так называемых гало-орбит в окрестности самой точки либрации [16]. Полученные результаты можно использовать, например, для решения задачи перелёта между этими орбитами [11].

## Постановка задачи

В рамках модели круговой ограниченной задачи трёх тел системы Солнце—Земля рассматривается движение КА в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_2$ , описываемое гамильтоновой системой хилловского приближения.

Требуется определить возможные движения КА в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце—Земля, выполнив перед этим ряд следующих задач:

- 1) провести анализ поведения траекторий КА в точке либрации  $L_2$ , путем линеаризации исходной гамильтоновой системы хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел;
- 2) воспользовавшись методом Пуанкаре – Ляпунова теории нелинейных колебаний, получить системы дифференциальных уравнений нулевого, первого и второго приближений;
- 3) проинтегрировать полученные системы и получить аналитическое представление возможных траекторий, обеспечивающих длительное пребывание КА в окрестности  $L_2$ ;
- 4) оценить степень адекватности использования полученных траекторий, сравнив их с результатом численного интегрирования исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Целью работы является исследование возможности движения КА вне области тени (полутени) Земли, для достижения которой необходимо будет для фиксированных значений параметров возможной траектории КА определить наибольший интервал времени движения вне области полутени Земли, а также сравнить полученные результаты с результатом численного интегрирования исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

# Глава 1. Построение периодических орбит в $L_2$

## 1.1 Уравнения движения и анализ траекторий КА в окрестности $L_2$

Рассматривается декартова вращающаяся система координат  $Ox_1x_2x_3$ , центр которой совпадает с центром массы Земли (см. рис. 2). Ось  $x_1$  направлена к Солнцу и соединяет центры масс Земли и Солнца, оси  $x_1, x_2$  лежат в плоскости эклиптики, а  $x_3$  дополняет систему до правой тройки. Единица расстояния равна  $10^{-2}$  астрономическим единицам, а единица времени берётся таким образом, чтобы период обращения Земли вокруг Солнца составлял  $2\pi$  и равна 58,0916 суткам.

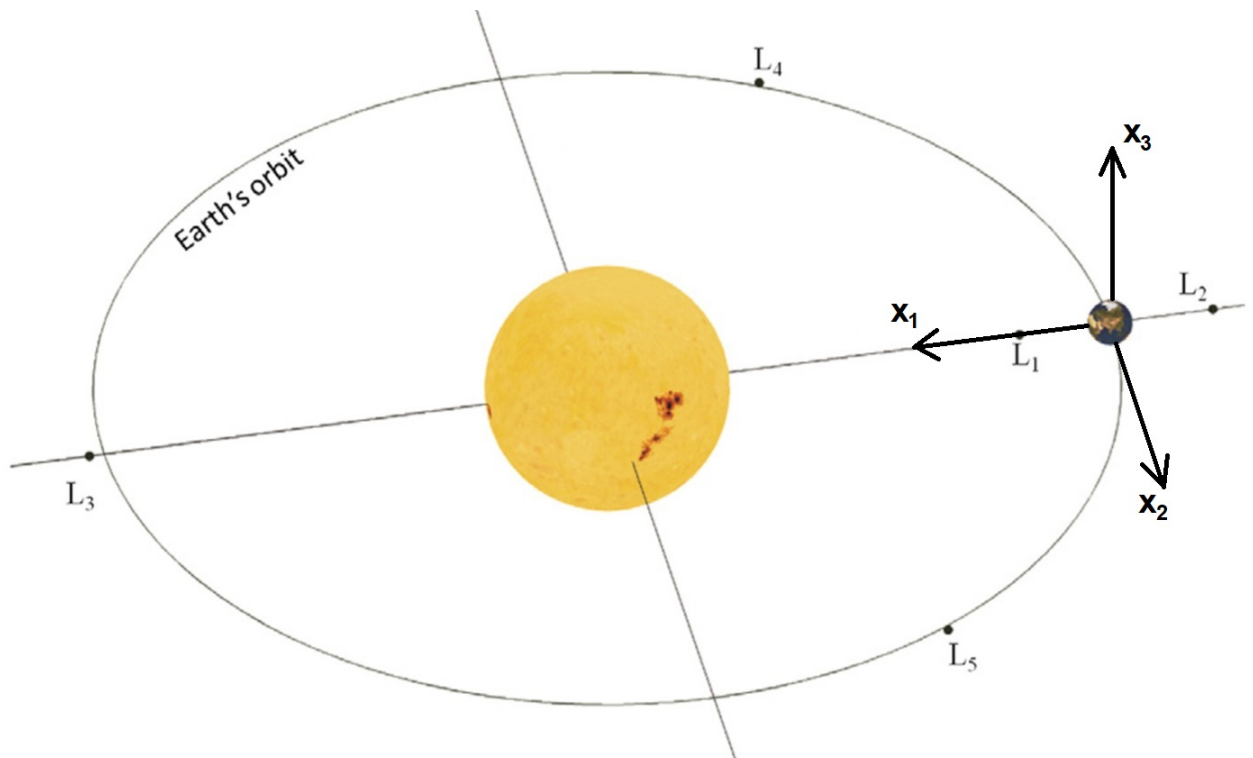


Рис. 2: Система координат  $Ox_1x_2x_3$

Движение КА в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_2$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  может быть определено гамильтоновой системой хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел [7]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{cases} \quad (1)$$

в которой  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  — векторы координат и импульсов КА. Точке  $L_2$  в  $Ox_1x_2x_3$  соответствуют координаты  $x^* = (-1, 0, 0)$ ,  $y^* = (0, -1, 0)$ . Гамильтониан системы (1) имеет следующий вид

$$H = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + x_2y_1 - x_1y_2. \quad (2)$$

Проведём более детальный анализ поведения траекторий КА в окрестности точки либрации  $L_2$  путём линеаризации системы (1), определив следующую замену переменных  $\xi_1 = x_1 + 1$ ,  $\xi_2 = x_2$ ,  $\xi_3 = x_3$ ,  $\eta_1 = y_1$ ,  $\eta_2 = y_2 + 1$ ,  $\eta_3 = y_3$ :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_3 = \eta_3, \\ \dot{\eta}_1 = 8\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -4\xi_2 - \eta_1, \\ \dot{\eta}_3 = -4\xi_3. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет следующий набор собственных значений [7]:  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\sqrt{7}+1} = \pm\kappa$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2\sqrt{7}-1} = \pm i\omega_e$ ,  $\lambda_{5,6} = \pm 2i = \pm i\omega_n$ . Из положительности  $\lambda_1$  следует неустойчивость точки либрации  $L_2$  по Ляпунову [4]. Общее решение системы (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) + A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e) \\ b_2(c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}) - \nu_2 A_e \cos(\omega_e t + \varphi_e) \\ A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ b_4(c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}) + \nu_4 A_e \cos(\omega_e t + \varphi_e) \\ b_5(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) + \nu_5 A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e) \\ 2A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$b_2 = -\frac{1}{3} \frac{\kappa + \kappa^3}{5 + \kappa^2}, \quad b_4 = \frac{4}{3} \frac{4\kappa + \kappa^3}{5 + \kappa^2}, \quad b_5 = -\frac{4}{5 + \kappa^2},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{3} \frac{\omega_e - \omega_e^3}{5 - \omega_e^2}, \quad \nu_4 = \frac{4}{3} \frac{4\omega_e - \omega_e^3}{5 - \omega_e^2}, \quad \nu_5 = -\frac{4}{5 - \omega_e^2}.$$

Здесь  $c_1, c_2, A_e, A_n, \varphi_e, \varphi_n$  — произвольные постоянные. Из вида (4) можно сделать вывод о том, что в линейном приближении при  $c_1 \neq 0$  КА неограниченно удаляется из окрестности точки либрации. При  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  будет происходить приближение КА к некоторым условно-периодическим или периодическим траекториям, а в случае  $c_1 = 0, c_2 = 0$  движение реализуется на условно-периодических или периодических орбитах в окрестности точки  $L_2$ .

## 1.2 Построение возможных траекторий

Перепишем систему уравнений (1) в новых переменных  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_3 = \eta_3, \\ \dot{\eta}_1 = \frac{-3(\xi_1 - 1)}{(\|\xi\|^2 - 2\xi_1 + 1)^{\frac{3}{2}}} + 2\xi_1 + \eta_2 - 3, \\ \dot{\eta}_2 = \frac{-3\xi_2}{(\|\xi\|^2 - 2\xi_1 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \xi_2 - \eta_1, \\ \dot{\eta}_3 = \frac{-3\xi_3}{(\|\xi\|^2 - 2\xi_1 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \xi_3, \end{cases} \quad (5)$$



В (5) рассмотрим слагаемое  $\frac{3}{(\|\xi\|^2 - 2\xi_1 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ . Введём  $\delta = \|\xi\|^2 - 2\xi_1$ , тогда дробь  $\frac{3}{(1 + \delta)^{\frac{3}{2}}}$  можно переписать в другом виде, используя формулу бинома Ньютона для отрицательных дробных степеней [1]. Необходимо отметить, что следующее представление имеет место лишь для таких  $\delta$ , для которых выполняется условие  $|\delta| < 1$ :

$$\frac{3}{(1 + \delta)^{\frac{3}{2}}} = 3(1 + \delta)^{-\frac{3}{2}} = 3\left[1 - \frac{3}{2}\delta + \frac{15}{8}\delta^2 + \dots\right]. \quad (6)$$

С помощью (6) можно переписать гамильтонову систему (5):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_3 = \eta_3, \\ \dot{\eta}_1 = 2\xi_1 + \eta_2 + 3\xi_1 \left(-1 + \frac{3}{2}\delta - \frac{15}{8}\delta^2 + \dots\right), \\ \dot{\eta}_2 = -\xi_2 - \eta_1 + 3\xi_2 \left(-1 + \frac{3}{2}\delta - \frac{15}{8}\delta^2 + \dots\right), \\ \dot{\eta}_3 = -\xi_3 + 3\xi_3 \left(-1 + \frac{3}{2}\delta - \frac{15}{8}\delta^2 + \dots\right). \end{cases} \quad (7)$$

Приближённое аналитическое представление решения системы (7) в окрестности точки либрации  $L_2$  может быть найдено с помощью метода Пуанкаре–Ляпунова теории нелинейных колебаний с точностью до  $o(\varepsilon^2)$  [2, 5, 6]. Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр,  $\varepsilon \neq 0$ :

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_{i0} + \varepsilon\xi_{i1} + \varepsilon^2\xi_{i2}, & i = \overline{1, 3}, \\ \eta_j = \eta_{j0} + \varepsilon\eta_{j1} + \varepsilon^2\eta_{j2}, & j = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (8)$$

Перепишем систему (7), учитывая представление  $\delta$  и откидывая члены ряда более высокого порядка, чем  $o(\varepsilon^2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_3 = \eta_3, \\ \dot{\eta}_1 = 8\xi_1 + \eta_2 + 9\xi_1^2 - \frac{9}{2}(\xi_2^2 + \xi_3^2), \\ \dot{\eta}_2 = -4\xi_2 - \eta_1 - 9\xi_1\xi_2, \\ \dot{\eta}_3 = -4\xi_3 - 9\xi_1\xi_3. \end{array} \right. \quad (9)$$

В связи с переходом к новым переменным  $(\xi, \eta)$ , нулевое приближение (8) удовлетворяет  $\xi_{10} = \xi_{20} = \xi_{30} = \eta_{10} = \eta_{20} = \eta_{30} = 0$ . Действительно, построим систему нулевого приближения и согласно методу Пуанкаре–Ляпунова, подставим (8) в (7) при  $\varepsilon = 0$ . Получаем следующую систему (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{10} = \xi_{20} + \eta_{10}, \\ \dot{\xi}_{20} = -\xi_{10} + \eta_{20}, \\ \dot{\xi}_{30} = \eta_{30}, \\ \dot{\eta}_{10} = 2\xi_{10} + \eta_{20} + 3\xi_{10} \left( -1 + \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{15}{8}\delta_0^2 + \dots \right), \\ \dot{\eta}_{20} = -\xi_{20} - \eta_{10} + 3\xi_{20} \left( -1 + \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{15}{8}\delta_0^2 + \dots \right), \\ \dot{\eta}_{30} = -\xi_{30} + 3\xi_{30} \left( -1 + \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{15}{8}\delta_0^2 + \dots \right), \end{array} \right. \quad (10)$$

где  $\delta_0 = (\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 + \xi_{30}^2) - 2\xi_{10}$ . Данная система эквивалентна системе (5). По методу Пуанкаре–Ляпунова необходимо найти решение полученной системы (10). Общее решение данной системы найти невозможно, однако можно взять частное решение — точку либрации  $L_2$ . В таком случае  $\xi_{10} = \xi_{20} = \xi_{30} = \eta_{10} = \eta_{20} = \eta_{30} = 0$ , что и требовалось доказать.

В качестве компонент нулевого приближения выступают координаты  $L_2$ , тогда в (8) приближённое аналитическое представление решения системы будет найдено в окрестности точки либрации в силу того, что  $\varepsilon$  — малый параметр.

Перейдём к нахождению системы первого приближения методом Пуанкаре–Ляпунова. Полученная система при  $\varepsilon$  будет эквивалентна ранее записанной линеаризованной системе (3):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{11} = \xi_{21} + \eta_{11}, \\ \dot{\xi}_{21} = -\xi_{11} + \eta_{21}, \\ \dot{\xi}_{31} = \eta_{31}, \\ \dot{\eta}_{11} = 8\xi_{11} + \eta_{21}, \\ \dot{\eta}_{21} = -4\xi_{21} - \eta_{11}, \\ \dot{\eta}_{31} = -4\xi_{31}. \end{cases} \quad (11)$$

В качестве компонент первого приближения (8) берём общее решение (11) линеаризованной системы (9) при условии  $c_1 = c_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \xi_{11} = A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e), \\ \xi_{21} = -\nu_2 A_e \cos(\omega_e t + \varphi_e), \\ \xi_{31} = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \\ \eta_{11} = \nu_4 A_e \cos(\omega_e t + \varphi_e), \\ \eta_{21} = \nu_5 A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e), \\ \eta_{31} = 2A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \end{cases} \quad (12)$$

Условие на произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  в данном случае необходимо для того, чтобы в решении линеаризованной системы отсутствовали компоненты, отвечающие за неустойчивость и асимптотическую устойчивость, с целью получения периодических или условно-периодических траекторий, которые бы обеспечивали длительное пребывания КА в окрестности точки либрации  $L_2$ .

Система для компонент второго приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{12} = \xi_{22} + \eta_{12}, \\ \dot{\xi}_{22} = -\xi_{12} + \eta_{22}, \\ \dot{\xi}_{32} = \eta_{32}, \\ \dot{\eta}_{12} = 8\xi_{12} + \eta_{22} + 9\xi_{11}^2 - \frac{9}{2}(\xi_{21}^2 + \xi_{31}^2), \\ \dot{\eta}_{22} = -4\xi_{22} - \eta_{12} - 9\xi_{11}\xi_{21}, \\ \dot{\eta}_{32} = -4\xi_{32} - 9\xi_{11}\xi_{31}. \end{cases} \quad (13)$$

Стоит отметить, что для нахождения решения системы (13) необходимы компоненты первого приближения  $\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}$ , найденные ранее из системы (11). Тогда, подбирая частное решение для системы (13), получаем:

$$\begin{aligned} \xi_{12} &= \frac{1}{4}((\nu_2^2 - 2)A_e^2 + A_n^2) + \frac{9}{4} \frac{3 - 4\omega_n^2}{16\omega_n^4 + 8\omega_n^2 - 27} A_n^2 \cos(2\omega_n t + 2\varphi_n) - \\ &\quad - \frac{9}{2} \frac{(3 - 4\omega_e^2)(\frac{\nu_2^2}{2} + 1) - 4\nu_2\omega_e}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27} A_e^2 \cos(2\omega_e t + 2\varphi_e), \\ \xi_{22} &= -\frac{9}{2} \frac{4\omega_e(\frac{\nu_2^2}{2} + 1) + \nu_2(4\omega_e^2 + 9)}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27} A_e^2 \sin(2\omega_e t + 2\varphi_e) + \\ &\quad + \frac{9}{4} \frac{4\omega_n}{16\omega_n^4 + 8\omega_n^2 - 27} A_n^2 \sin(2\omega_n t + 2\varphi_n), \\ \xi_{32} &= \frac{9}{2} \frac{1}{(\omega_e - \omega_n)^2 - 4} A_e A_n \cos((\omega_e - \omega_n)t + \varphi_e - \varphi_n) - \\ &\quad - \frac{9}{2} \frac{1}{(\omega_e + \omega_n)^2 - 4} A_e A_n \cos((\omega_e + \omega_n)t + \varphi_e + \varphi_n), \\ \eta_{12} &= -\frac{9}{2} \frac{(8\omega_e^3 - 10\omega_e)(\frac{\nu_2^2}{2} + 1) - \nu_2(9 - 4\omega_e^2)}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27} A_e^2 \sin(2\omega_e t + 2\varphi_e) + \\ &\quad + \frac{9}{4} \frac{2\omega_n(4\omega_n^2 - 5)}{16\omega_n^4 + 8\omega_n^2 - 27} A_n^2 \sin(2\omega_n t + 2\varphi_n), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{22} &= \frac{1}{4}((\nu_2^2 - 2)A_e^2 + A_n^2) + \frac{9}{4} \frac{4\omega_n^2 + 3}{16\omega_n^4 + 8\omega_n^2 - 27} A_n^2 \cos(2\omega_n t + 2\varphi_n) - \\
&\quad - \frac{9}{2} \frac{(4\omega_e^2 + 3)(\frac{\nu_2^2}{2} + 1) + \nu_2(8\omega_e^3 + 14\omega_e)}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27} A_e^2 \cos(2\omega_e t + 2\varphi_e), \\
\eta_{32} &= -\frac{9}{2} \frac{\omega_e - \omega_n}{(\omega_e - \omega_n)^2 - 4} A_e A_n \sin((\omega_e - \omega_n)t + \varphi_e - \varphi_n) + \\
&\quad + \frac{9}{2} \frac{\omega_e + \omega_n}{(\omega_e + \omega_n)^2 - 4} A_e A_n \sin((\omega_e + \omega_n)t + \varphi_e + \varphi_n).
\end{aligned}$$

В силу вида (12) и решения системы второго приближения (14), если в (8) положить  $\varepsilon = 1$ , тогда разложение по малому параметру можно рассматривать, как разложение по амплитудам линейного приближения (12).

Проверим справедливость данного утверждения. Рассматривая полученные компоненты первого приближения (12), можно заметить, что в аналитическом представлении каждой из них амплитуды  $A_e$  или  $A_n$  входят линейно, а для компонент второго приближения амплитуды  $A_e$  и  $A_n$  представлены в квадратичной форме. Таким образом, подставляя найденные компоненты первого и второго приближений в (8), мы можем ввести новые обозначения  $\tilde{A}_e = \varepsilon A_e$  и  $\tilde{A}_n = \varepsilon A_n$  или же положить  $\varepsilon = 1$ , но в этом случае необходимо уточнить, что адекватность получаемых результатов будет зависеть только от выбора величины амплитуды, так как величина малого параметра уже является фиксированной.

Ниже (см. рис. 3) представлены возможные траектории, для которых начальное положение определяется разложением (8) движения КА в окрестности точки  $L_2$ .

В табл. 1 приведены значения произвольных постоянных, которые были взяты при построении возможных траекторий, представленных на рис. 3.

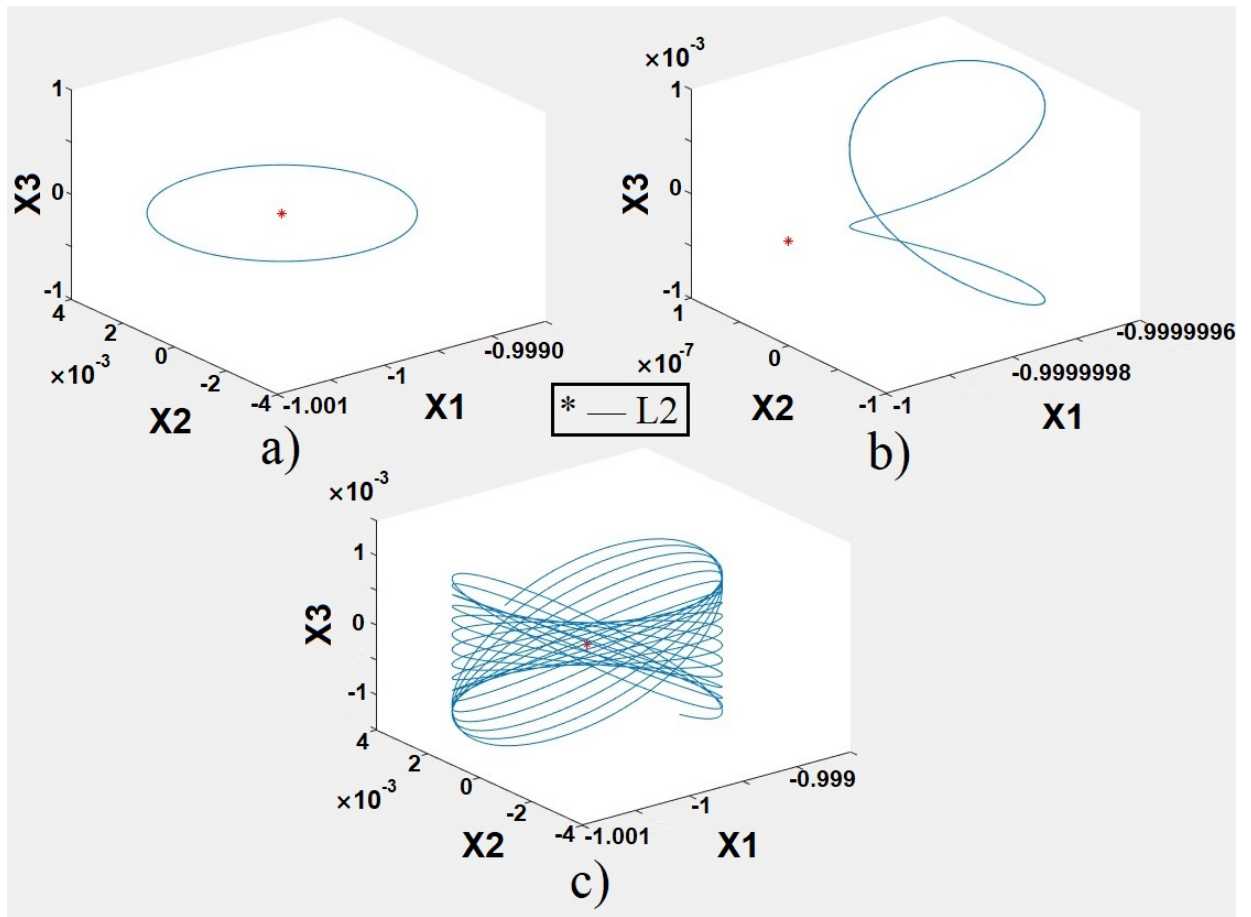


Рис. 3: Орбиты в окрестности  $L_2$ : а) плоская Ляпунова, б) вертикальная, в) Лиссажу

Таблица 1: Значение параметров орбит

орбита	$A_e$	$A_n$	$\varphi_e$	$\varphi_n$
плоская	0.001	0	0	0
вертикальная	0	0.001	0	0
Лиссажу	0.001	0.001	0	0

Известно, что в любой гамильтоновой неуправляемой системе существует общий интеграл энергии [3]. Тогда, выражая функцию Гамильтона (2) через переменные Лагранжа, мы получим представление полной механической энергии системы

$$\tilde{H}(x, \dot{x}) = \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{x_3^2}{2} = h, \quad (15)$$

где  $h = \text{const}$ , то есть  $\tilde{H}(x, \dot{x}) = \text{const}$  на каждой траектории системы (1). Следовательно, каждой траектории движения КА, описываемой системой (1), будет соответствовать какое-то конкретное значение энергии. Например, координатам точки либрации  $L_2$  соответствует значение энергии равное  $-4.5$ .

Заметим, что слагаемое  $\frac{\|\dot{x}\|^2}{2} \geq 0$ . Тогда, откинув его в (15), можно получить неравенство, которое определяет область (16), в которой будет происходить движение КА

$$\tilde{H}(x, \dot{x}) \geq -\frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{x_3^2}{2}. \quad (16)$$

Проведём численное моделирование нелинейной системы (8), с целью получения адекватной оценки точности и величины, взятых при использовании метода Пуанкаре–Ляпунова. В качестве начальных данных используются величины, найденные при построении возможных траекторий с соответствующими значениями произвольных постоянных.

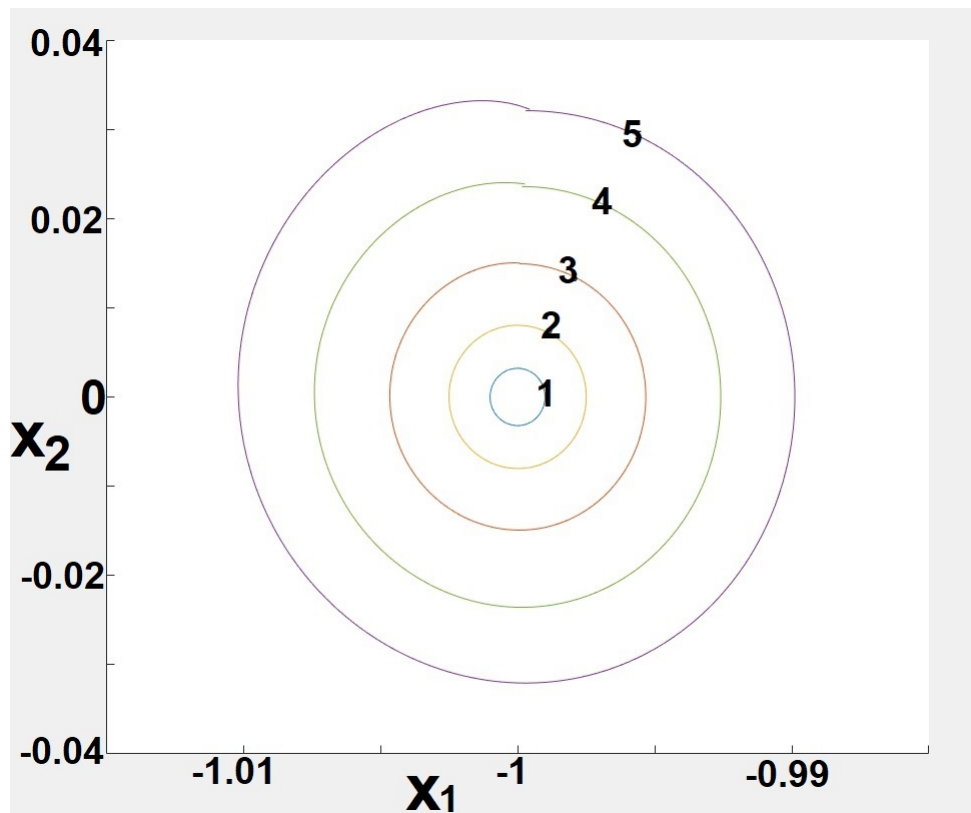


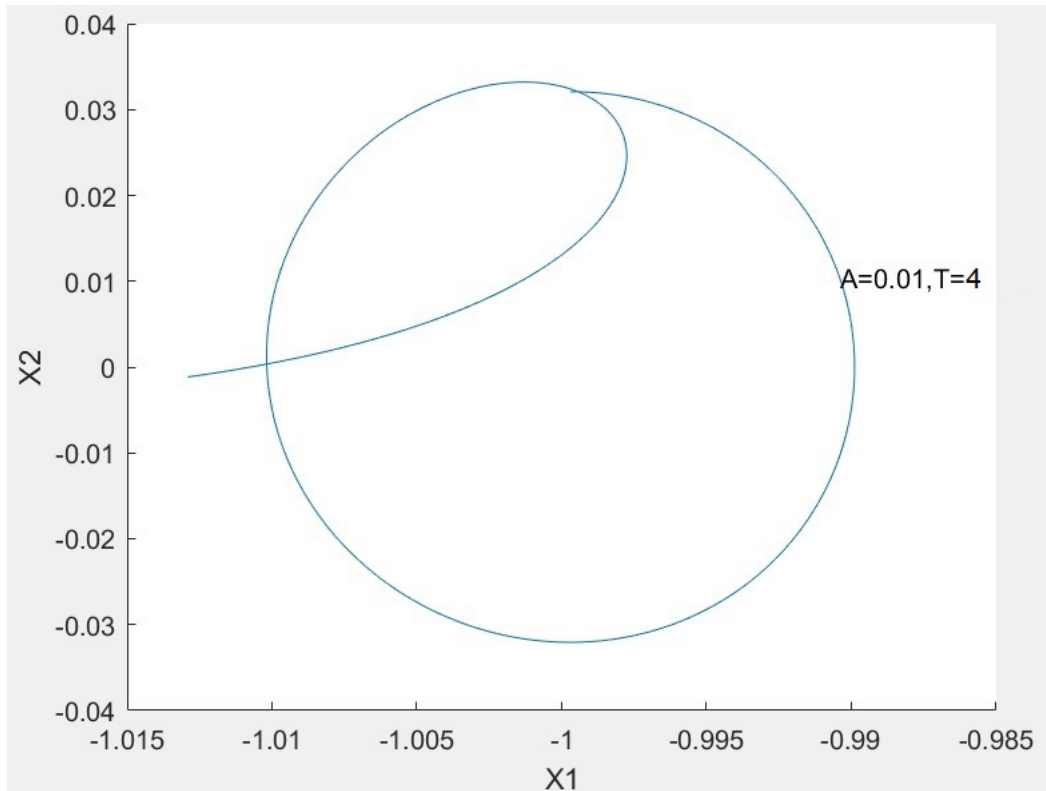
Рис. 4: Движение в окрестности плоских орбит Ляпунова

Учитывая точность метода интегрирования, полученные результаты показывают (см. рис. 4), что эти орбиты являются неустойчивыми. Ниже в табл. 2 приведены характеристики орбит, представленных на рисунке.

**Таблица 2:** Значение параметров орбит

Номер орбиты	Амплитуда	Период	Уровень энергии
1	0.001	3.034	-4.4999824...
2	0.0025	3.035	-4.4998901...
3	0.00465	3.039	-4.4996195...
4	0.00735	3.102	-4.4990502...
5	0.01	3.18	-4.4982419...

Принимая во внимание полученные результаты моделирования, можно сделать вывод о том, что при увеличении амплитуды орбит необходимо учитывать больше членов более высокого порядка в разложении (8).



**Рис. 5:** Движение в окрестности плоской орбиты Ляпунова



Рис. 5 демонстрирует, на примере плоской орбиты Ляпунова, что при амплитуде линейного приближения равной  $10^{-2}$ , происходит сильное отклонение с течением времени от движения по периодической орбите. Ввиду свойства неустойчивости, помимо необходимости учитывания большего числа членов в разложении (8), нужно использовать численные методы достаточно высокого порядка, которые дадут меньшую погрешность в вычислении.

## Глава 2. Движение КА вне области полутени Земли

### 2.1 Тень и полутень Земли

Одним из важнейших свойств точки либрации  $L_2$  является её расположение в области полутени Земли. Тень и полутень Земли образуются в результате прямолинейного распространения лучей света, исходящих от Солнца. Геометрически области тени и полутени описываются “конусом тени” и “конусом полутени” соответственно. Из рис. 6 видно, что расстояние между вершиной конуса тени и точкой либрации  $L_2$  составляет приблизительно 113 000 км. Пересечение конуса полутени и плоскости  $Ox_2x_3$  в координате  $x_1 = -1$ , соответствующей положению точки либрации  $L_2$  по оси  $x_1$ , образует окружность радиусом примерно 13 000 км.

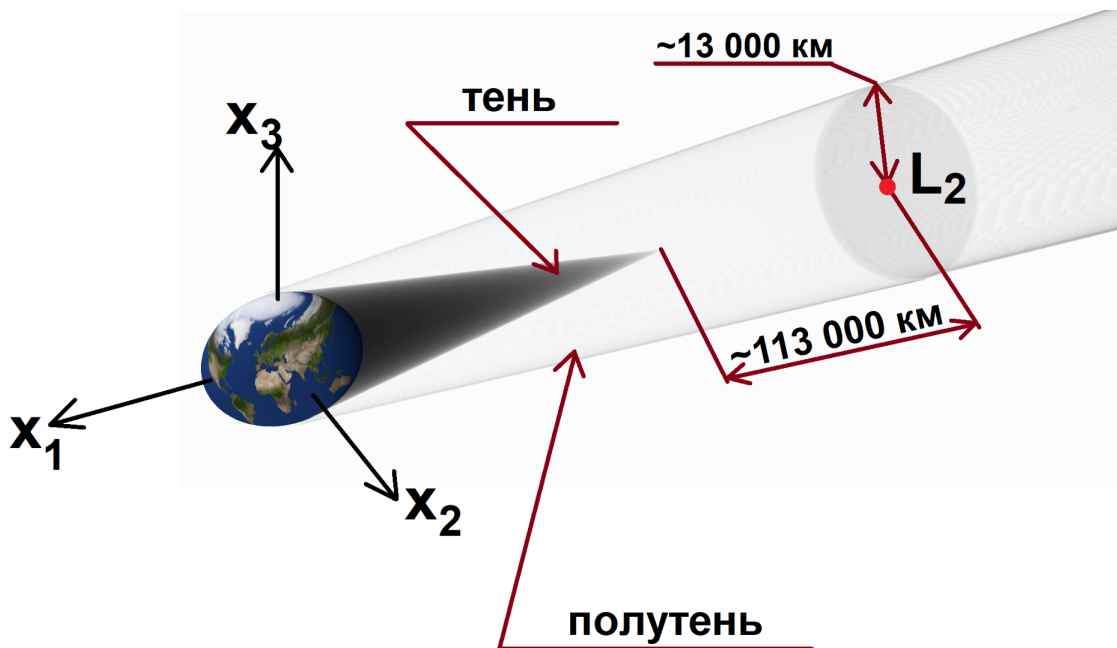


Рис. 6: Тень и полутень Земли

Сформулируем следующую задачу: необходимо найти наибольший промежуток времени, в течение которого КА будет двигаться в окрестности точки либрации без управления, не попадая при этом в область полутени. Время движения КА в окрестности точки либрации считается ограниченным и предполагается, что рассматриваются лишь траектории, имеющие ненулевое пересечение с внутренними точками областей вне полутени и полутени.

Ранее уже проводились исследования в решении подобной задачи для системы Земля-Луна [9], в которой находились траектории, позволяющие спутнику быть видимым с поверхности Земли в течение длительного промежутка времени. Задачи такого типа могут решаться, например, для обеспечения возможности передавать данные или результаты, собранные космическим аппаратом.

## 2.2 Численное решение задачи длительного пребывания КА вне области полутени

Для решения поставленной задачи предполагалось, что движение КА в окрестности точки либрации  $L_2$  происходит по орбите Лиссажу, представление которой было получено ранее методом Пуанкаре – Ляпунова теории нелинейных колебаний. Переменные  $A_e$ ,  $A_n$  считались фиксированными величинами. Тогда задача поиска траектории длительного пребывания КА вне области полутени сводится к задаче выбора оптимальных начальных фаз  $\varphi_e$  и  $\varphi_n$ , с целью получения траектории движения КА, обеспечивающей наибольший интервал времени пребывания вне области полутени.

Несмотря на то, что орбита Лиссажу является пространственной траекторией, решать задачу предлагается в плоскости  $Ox_2x_3$ . Данное упрощение связано с тем, что изменением радиуса окружности полутени в плоскости  $Ox_2x_3$  координаты  $x_1 = -1$  можно пренебречь, так как варьирование координаты  $x_1$  на величину параметра амплитуды  $A_e$  или  $A_n$ , является достаточно малым, что мало сказывается на изменении радиуса окружности полутени.

Поставленная задача решалась численно. На рис. 7 изображена область полутени в виде окружности и орбита Лиссажу с параметрами  $A_e = A_n = 0.012$  и начальными фазами  $\varphi_e$ ,  $\varphi_n$  равными нулю, обозначенная чёрными и зелёными кривыми. Для этой траектории на интервале времени от 0 до  $T=25$  (4 года) находились её точки пересечения с областью полутени, которые отмечены красными звёздами. В результате этого, наибольшим промежутком пребывания вне области полутени оказался интервал времени равный 11.320 (22 месяца), начало которого соответствует момен-

ту времени  $t=0$ . Зелёные кривая — это траектория КА по орбите Лиссажу с приведёнными ранее параметрами, соответствующая движению КА вне области полутени Земли в течение найденного отрезка времени.

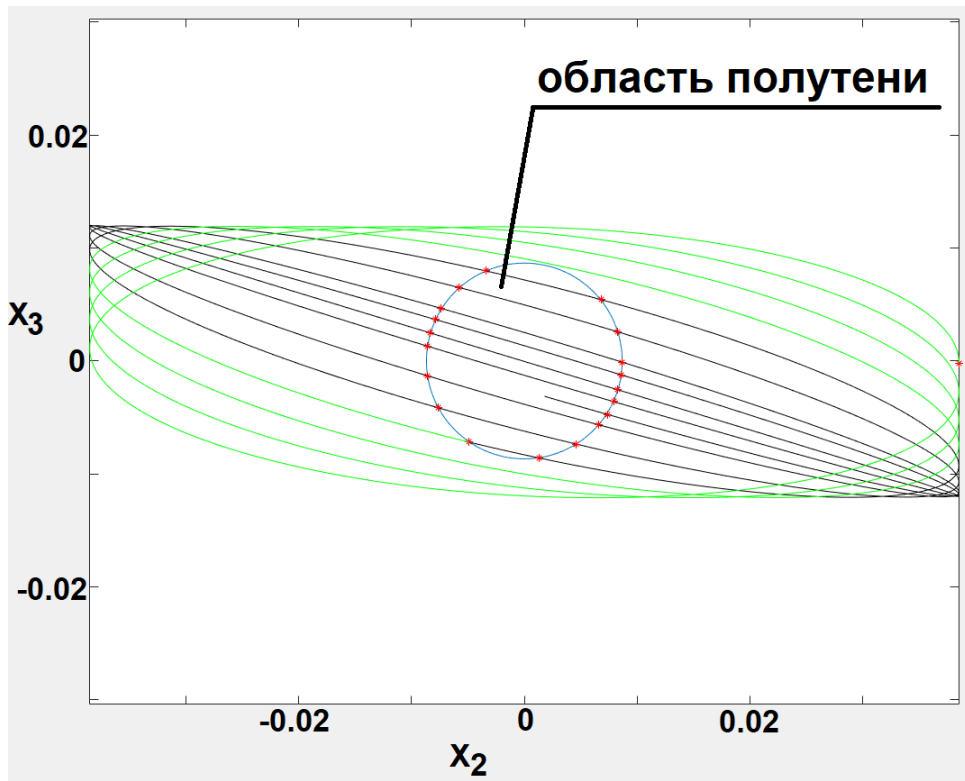


Рис. 7: пересечения орбиты Лиссажу и области полутени Земли

Используя координаты и импульсы точки, соответствующей началу найденного временного интервала в качестве вектора начальных данных, а также учитывая автономность исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений (1), можно численно проинтегрировать систему (1).

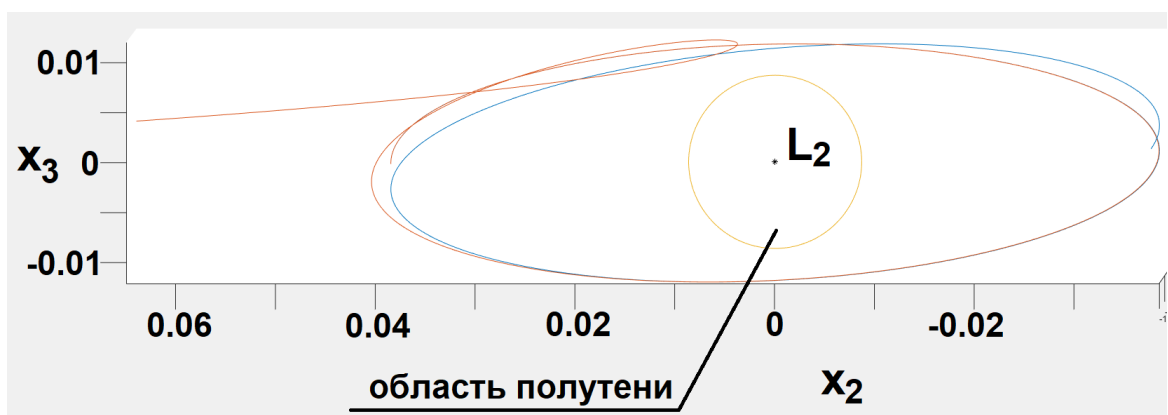


Рис. 8: неустойчивость движения КА по орбите Лиссажу

На рис. 8 синим цветом изображена траектория, построенная с использованием приближенного аналитического представления 8. Оранжевым цветом отмечена траектория, полученная интегрированием исходной гамильтоновой системы хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел 1.

Траектории были смоделированы на участке времени от 0 до 4.65 (9 месяцев). В силу свойства неустойчивости движения КА в окрестности точки либрации  $L_2$ , происходит довольно быстрое отклонение от орбиты Лиссажу.

## Выводы

В ходе работы были найдены начальные данные для КА с помощью метода Пуанкаре – Ляпунова теории нелинейных колебаний, которые согласно представленным ранее результатам численного моделирования способны обеспечить его длительное пребывание в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_2$ .

На примере плоских орбит Ляпунова представлен анализ траекторий, демонстрирующий их поведение в зависимости от величины амплитуды в полученных приближениях при определении начальных данных.

Для орбиты Лиссажу с фиксированными значениями амплитуд и начальных фаз был найден момент времени  $t^*$ , соответствующий началу временного интервала, гарантирующего наибольшее время пребывания КА вне области полутени для полученной траектории в течении отрезка времени от 0 до  $T=25$ .

Был проведён численный эксперимент, в ходе которого орбита Лиссажу сравнивалась с результатом численного интегрирования исходной гамильтоновой системы хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел, где в качестве начальных данных был взят вектор координат и импульсов, соответствующий полученному моменту времени  $t^*$ .

## Заключение

В ходе работы было выполнено следующее:

1) для модели хилловского приближения круговой ограниченной задачи трёх тел были представлены квазипериодические орбиты, которые имеют достаточно простое представление;

2) реализовано компьютерное моделирование в программе MATLAB, благодаря которому были получены графики возможных траекторий движения КА в окрестности точки либрации  $L_2$ , а также произведено численное интегрирование нелинейной системы дифференциальных уравнений для оценки полученных результатов;

3) численно было найдено решение задачи нахождения наибольшего интервала времени пребывания КА вне области полутени Земли, движущегося по орбите Лиссажу с заданными значениями параметров амплитуд и начальных фаз.

В дальнейшем предполагается использовать найденные аналитические представления возможных траекторий КА для построения орбит перелётов в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_2$ .

## Список литературы

- [1] Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М: Наука, 1979. 509 с.
- [2] Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М:Физматлит, 1976. 864 с.
- [3] Лурье А. И. Аналитическая механика. М:Физматлит, 1961. 824 с.
- [4] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [5] Найденова М. А. Процессы управления и устойчивость: Труды 48-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова СПб.: Издат. Дома Фёдоровой Г. В., 2017. С. 192–198.
- [6] Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 445 с.
- [7] Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193–199.
- [8] Шиманчук Д. В., Шмыров А. С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013, Вып. 2. С. 76–85.
- [9] Farquhar R. W. The control and use of libration point satellites. Technical Report TR R346. NASA. 1970.
- [10] Gómez G., Masdemont J. Some zero cost transfers between libration point orbits // Advances in the Astronautical Sciences. 2000. Vol. 105.2, P. 1199–1216.



- [11] Gómez G., Jorba A., Masdemont J., Simó C. Study of the transfer between halo orbits // *Acta astronautica*. 1998. Vol. 43, P. 493–520.
- [12] Gómez G., Howell K. C., Masdemont J., Simó C. Station-keeping strategies for translunar libration point orbits // *Advances in the Astronautical Sciences*. 1998. Vol. 99, P. 949–967.
- [13] Hiday-Johnston L. A., Howell K. C. Transfers between libration-point orbits in the elliptic restricted problem // *Celestial Mech Dyn Astr*. 1994. Vol. 58, P. 317–337.
- [14] Howell K. C., Hiday-Johnston L. A. Time-free transfers between libration-point orbits in the elliptic restricted problem // *Pergamon Acta Astronautica*. 1994. Vol. 32, No. 4, P. 245–254.
- [15] Kovalenko I. D., Eismont N. A. Orbit design for the Spectrum-Roentgen-Gamma mission // *Acta Astronautica*. 2019. Vol. 160, P. 56–61.
- [16] Richardson D. L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // *Celestial Mechanics*. 1980. Vol. 22, P. 241–253.
- [17] Thurman R., Worfolk P. The geometry of halo orbits in the circular restricted three-body problem // Technical report GCG95, Geometry Center, University of Minnesota. 1996.