САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

РОЖИНА АЛИНА АЛЕКСАНДРОВНА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Анализ кредитного механизма для развития фирмы

Направление 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение

Для того чтобы обеспечить успешное развитие предприятия, вне зависимости от рода его деятельности необходимо комплексно подходить к организации работы. Успешным развитием мы считаем ситуацию, когда получена максимально возможная прибыль за счет реализации производимой продукции. В условиях современной рыночной экономики у предприятий все чаще возникает потребность в получении кредита для осуществления, расширения своей деятельности и в итоге получения прибыли. Благодаря дополнительному бюджету появляются ресурсы для подъема производства.

Чаще всего кредиты выдаются на организацию и развитие производства, приобретение техники и оборудования, материалов и сырья, торгово-закупочную деятельность. Воспользовавшись кредитом, фирмы получают возможность направить полученные дополнительные ресурсы для расширения своего дела либо приблизить достижение своих потребительских целей, скорее получить в свое распоряжение вещи, предметы, ценности, которыми, не будь кредита, они могли бы владеть лишь в будущем.

Исследование кредитных механизмов, а также прогнозирование банковских рисков в сфере кредитования описано во многих работах [1, 2, 3, 4]. Экономико-математическое моделирование располагает необходимыми инструментами для того, чтобы оценить все аспекты работы предприятия и установить его предполагаемую судьбу. Поэтому оно является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Развитие математического анализа, исследования операций, теории вероятностей и математической статистики способствуют получению наиболее точного прогноза дальнейшего функционирования фирмы.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается предприятие, которое производит товар одного вида. Предполагаем, что для развития производства, был получен единовременный кредит в банке. Полученные средства используются для приобретения нового оборудования, а процентная ставка по кредиту считается постоянной.

Используя модель развития предприятия, необходимо:

1. Определить оптимальную стратегию выпуска товара и выплаты долга, при которой предприятие станет рентабельным, то есть производство и реализация продукции будут приносить прибыль, а задолженность по кредиту уменьшится. При этом фирма может менять величину суммы, выплачиваемой банку в фиксированные моменты времени, получая информацию о текущей ситуации с величиной долга.
2. рассчитать, в какие сроки долг будет полностью покрыт.
3. узнать, как повлияет изменение некоторых параметров модели таких как: цена продукции, процентная ставка по кредиту, сумма выплаты долга на финансовую ситуацию предприятия.

Глава 1. Элементы экономико-математического моделирования

Экономико-математическая модель – это упрощенное отображение исследуемого экономического объекта (процесса), с помощью которого изучается его функционирование и оценивается изменение его эффективности при возможных изменениях входных характеристик. Под экономико-математическим моделированием понимаем построение и изучение экономико-математической модели, способной заменить исследуемый объект.

Для того, чтобы успешно руководить крупным предприятием в условиях конкуренции, руководителю необходимо учитывать множество факторов, рассматривать различные варианты достижения конечных целей фирмы. В рамках современных масштабов производства неудачный выбор варианта решения может привести к значительным потерям. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием – математическое программирование [5]. В данном случае, в отличие от программирования для ЭВМ, понятие «программирование» употребляется в смысле планирование, выбор программы действий.

Математическое программирование – раздел высшей математики, разрабатывающий теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. В настоящее время большое число задач планирования и управления в различных отраслях хозяйствования, а также множество частных прикладных задач решаются методами математического программирования. В данной главе более подробно рассмотрим общие виды задач линейного и нелинейного программирования, стохастического программирования.

1.1. Линейное программирование. Задача оптимального использования ресурсов

Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования [6, 7].

Определение 1. ***Линейное программирование*** — это область математического программирования, являющегося разделом математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений некоторой линейной функции, на аргументы которой наложены линейные ограничения. Такая линейная функция называется ***целевой***, а набор количественных соотношений между переменными, выражающих определенные требования экономической задачи в виде уравнений или неравенств, называется ***системой ограничений***.

Определение 2. Совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на ее аргументы, называется ***математической моделью экономической задачи оптимизации.***

Линейное программирование позволяет описать с достаточной точностью широкий круг задач коммерческой деятельности, таких, как, например, планирование товарооборота, размещение розничной торговой сети города, планирование товароснабжения города, организация рациональных перевозок груза (транспортная задача), организация рациональных закупок продуктов питания (задача о диете), распределение работников торговли по должностям (задача о назначении), распределение ресурсов, планирование капиталовложений, замена торгового оборудования.

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) записывается как:

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \to \max\,(min) \quad (1)$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases} \qquad (2)
$$

где x_j – *неизвестные*; a_{ij}, b_i, c_j – *заданные постоянные величины*.

Наиболее распространенная экономическая интерпретация сформулированной задачи состоит в следующем: имеется n ресурсов при некоторых m ограничениях; нужно определить объемы этих ресурсов x_j при которых целевая функция будет достигать максимума (минимума), т. е. найти оптимальное распределение ограниченных ресурсов. При этом возникают также и ограничения, которые называются естественными: $x_j > 0$.

Следует особо отметить, что экстремум целевой функции ищется на допустимом множестве решений, определяемом системой ограничений. При этом все или некоторые уравнения системы ограничений могут быть записаны также в виде неравенств. Математическая модель в более краткой записи имеет вид

$$
L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j \to \max\,(min)
$$

При ограничениях

$$
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad x_j \geq 0, \qquad i = \overline{1{:}\,m}, \quad j = \overline{1{:}\,n}.
$$

1.2. Задача нелинейного программирования

Пусть фирма производит только один вид продукции, используя несколько видов затрат. x_j – количество затрат j-го вида ($j = \overline{1,n}$), то $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец затрат. $x_j \geq 0$, и принимают любые вещественные значения. Каждой точке пространства затрат соответствует единственный максимальный выпуск продукции. Связь между максимальным выпуском продукции и затратами называется ***технологической функцией***

$$q = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Здесь q – размеры выпуска.

Если считать, что фирма производит однотипную продукцию, цены на продукцию и на затраты фиксированы, а цель предприятия-максимизировать прибыль, тогда рассматриваемая задача может быть сведена к задаче нелинейного программирования [8, 9].

Введём обозначения: p – цена единицы продукции, w_j –
цена единицы затрат j – го типа, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ – вектор –
столбец цен затрат.

Максимизация прибыли осуществляется путём выбора видов и количества затрат, при заданной производственной функции и ценах p и w.

Прибыль фирмы: $\Pi(x) = pf(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i-1}^{n} w_i x_i = pf(x) - w^T x$.

Решая долгосрочную задачу, фирма может выбрать любой вектор затрат из пространства затрат и поэтому задачу можно сформулировать так:

$$\begin{cases} \Pi(x) = pf(x) - w^T x \ \Rightarrow \ max \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Эта задача является задачей нелинейного программирования.

Необходимые условия экстремума (условия Куна-Таккера) в явном виде:

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = w_i, \text{если } x_i > 0, \\ p\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \le w_i, \text{если } x_i = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \ \text{если } x_i > 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} \le 0, \text{если } x_i = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда в точке экстремума все $x_i > 0$. Тогда условия Куна-Таккера примут вид: $p\dfrac{\partial f}{\partial x_i} - w_i = 0, i = \overline{1:n}$.

Решение этой системы – $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) -$ функции спроса на затраты – являются функциями параметров p $и$ w. Подставляя это решение в $f(x)$ получим функцию предложения выпуска: $q^* = f\big(x^*(p,w)\big) = q^*(p,w)$.

1.3. Задача стохастического программирования. Задача перспективного планирования

Задача, рассмотренная в п. 1.1. является детерминированной, то есть сформулированной в условиях полной определенности в значениях используемых параметров. Такая постановка имеет однозначность при математическом представлении и позволяет получить однозначное решение. Но планирование работы предприятия – это оценка будущего состояния с позиции текущего момента времени, поэтому важно учитывать ряд случайных факторов, существенно влияющих на процесс производства.

Так, в моделях математического программирования, к исследованию которых сводятся задачи экономики, часть или даже все параметры (или характеристики) показателя качества и ограничений могут оказаться неопределенными или случайными. Для снижения риска принятия ошибочных решений в связи с неполнотой информации об обстановке в которой будет реализовываться произведенная продукция, мы прибегаем к ***стохастическому программированию*** – разделу математического программирования, который изучает теорию и методы решения задач при неполной информации о параметрах условий задачи.

Прогноз спроса и других характеристик поведения экономической системы в будущем не обходится без определённых погрешностей и всегда связан с риском. Помимо того, без него невозможно составить успешный план работы фирмы. Поэтому ***задача перспективного планирования*** является типичной стохастической задачей.

Рассмотрим задачу перспективной работы предприятия [10, 11].

Пусть рассматриваемое предприятие выпускает m видов продукции. Разобьём горизонт планирования на N периодов. Показатель качества – величина прибыли за планируемый период. Область задания целевого функционала определяется выпуклым замкнутым множеством интенсивностей использования заранее отработанных технологических способов. Множество допустимых интенсивностей обусловлено наличными ресурсами сырья и оборудования и спросом на продукцию.

Введем обозначения:

$b_k -$ случайный m-мерный вектор спроса на продукцию предприятия в $k-\textit{периоде}$;

$A_k -$ случайная технологическая матрица размером $m \times n_k$, определяющая нормы выпуска или затрат при использовании технологических способов с единичной интенсивностью в $k -$ периоде;

$c_k -$ случайный n_k-мерный вектор издержек от использования технологических способов с единичной интенсивностью в k-периоде;

$x_k -$ n_k-мерный вектор интенсивностей использования технологических способов с единичной интенсивностью в k-периоде;

$X_k -$ множество допустимых интенсивностей в k-периоде ($X_k \subset R^{n_k}$ *выпукло и замкнуто*);

$y_k^+ -$ неотрицательный m-мерный вектор превышения спроса над предложением в $(k-1)$-периоде;

$y_k^- -$ неотрицательный m-мерный вектор превышения предложения над спросом в $(k-1)$-периоде;

$q_k^+ -$ m-мерный вектор цен на единицу продукции, выпускаемой предприятием в $(k-1)$-периоде;

$q_k^- -$ m-мерный вектор издержек от хранения единицы готовой продукции в течение $(k-1)$-периода;

Математическое ожидание прибыли в первом периоде:

$M\{q_2^+ b_1 - q_2^+ y_2^+ - q_2^- y_2^- - c_1 x_1\}$, где

$$y_2^+ - y_2^- = b_1 - A_1 x_1;$$

$$y_2^+ y_2^- = 0\,, \qquad y_2^+ \geq 0, \quad y_2^- \geq 0, \quad x_1 \geq 0.$$

Предполагается, что произведенную, но не проданную продукцию можно хранить на складе и реализовать в следующем периоде. При хранении в течение периода часть продукции приходит в негодность. Пусть D_k – детерминированная диагональная матрица размером $m \times m$, диагональные элементы которой показывают какая часть продукции, находящейся на складе в начале k-периода, останется годной для продажи к концу k-периода. Считаем, что величины q_k^+, q_k^-, c_k приведены к ценам первого периода.

Математическое ожидание прибыли во втором периоде:

$M\{q_3^+ b_2 - q_3^+ y_3^+ - q_3^- y_3^- - c_3 x_3\}$, где

$$y_3^+ - y_3^- + D_2 y_2^- = b_2 - A_2 x_2;$$

$$y_3^+ y_3^- = 0\,, \qquad y_3^+ \geq 0, \quad y_3^- \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Аналогично вычисляются математические ожидания прибыли и для других периодов.

Пусть y_1^- известный вектор запаса готовой продукции на складе к началу первого периода.

Математическое ожидание прибыли за весь плановый период:

$$M = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} [q_{k+1}^+ b_k - q_{k+1}^+ y_{k+1}^+ - q_{k+1}^- y_{k+1}^- - c_k x_k]\}\,, \qquad (5)$$

Где

$$y_{k+1}^+ - y_{k+1}^- + D_k y_k^- = b_k - A_k x_k; \qquad (6)$$

$$y_{k+1}^+ y_{k+1}^- = 0\,, \qquad (7)$$

$$y_{k+1}^+ \geq 0, \quad y_{k+1}^- \geq 0, \quad x_k \geq 0. \qquad k = 1, \dots, n \qquad (8)$$

Задача перспективного планирования формулируется следующим образом:

Требуется вычислить набор векторов $x_1, \dots, x_N$, удовлетворяющий условиям (6)–(8) и максимизирующий математическое ожидание прибыли (5) за весь плановый период.

Поставленной задаче может быть придан вид:

$$M \sum_{k=1}^{n} [q_{k+1}^{+} y_{k+1}^{+} - q_{k+1}^{-} y_{k+1}^{-} - c_k x_k] \to min, \qquad (9)$$

$$y_{k+1}^{+} - y_{k+1}^{-} + D_k y_k^{-} = b_k - A_k x_k; \qquad (10)$$

$$y_{k+1}^{+} y_{k+1}^{-} = 0 , \qquad (11)$$

$$y_{k+1}^{+} \geq 0, \quad y_{k+1}^{-} \geq 0, \quad x_k \geq 0. \qquad k = 1, \dots, n \qquad (12)$$

так как первый член выражения (5) $M q_{k+1}^{+} b_k$ не зависит от искомых параметров управления.

Также для окончательной постановки задачи необходимо уточнить следует ли считать планы различных периодов детерминированными или случайными. Решается ли задача как двухэтапная или многоэтапная. В зависимости от этого возможны различные варианты информационной структуры задачи.

Следует отметить, что стохастическая задача решается как двухэтапная, если после выбора предварительного решения становится известной реализация случайных параметров за все периоды. Задача решается как многоэтапная, если на k-периоде принимается решение при отсутствии информации о значениях случайных параметров, которые будут реализованы в течение периодов $k, k+1, \dots, N$.

1.4. Выводы по главе 1

Проведем сравнение моделей и методов. Экономико-математические модели можно классифицировать по большому количеству критериев и рассмотреть соответствующие задачи. В зависимости от свойств целевой функции и функции, задающей ограничения, можно рассмотреть линейное и нелинейное программирование. Для описания большинства экономических процессов достаточно рассмотреть линейную модель, часто этого будет достаточно при анализе и прогнозировании. Однако, в задачах проектирования различных объектов, математические модели должны отражать множество процессов, и чаще всего эти процессы подчинены нелинейным законам, в силу их многообразия и сложности. К примеру, возможны непропорциональные зависимости между объемом производства и затратами или между выручкой и объемом реализации и т.д. Кроме того, следует учитывать наличие случайных воздействий на исследуемые показатели. Так, для полноты анализа помимо детерминированных моделей нельзя не рассматривать стохастические, которые позволяют исследовать системы со сложными и неясными закономерностями.

Один и тот же тип моделей может быть применим к различным социально-экономическим системам, и одна и та же система может быть исследована с помощью различных моделей. Поэтому необходимо обладать знаниями многих математических инструментов и учитывать различные факторы для составления полноценного сценария поведения исследуемого объекта. Общая постановка задачи предполагает учет динамики развития фирмы, поэтому далее мы рассмотрим еще один подход моделирования процесса ее функционирования.

Глава 2. Динамическая модель производства с учетом кредитования

2.1. Описание модели

По характеру зависимости от времени математические модели делятся на статические модели, характеристики которых не изменяются во времени и динамические – с переменными во времени характеристиками.

Математическое описание динамических моделей экономики производится с помощью систем дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также систем обыкновенных алгебраических уравнений.

Модель Лебедева [2], используемая для выработки конкретных рекомендаций и принятии практических решений при рассмотрении вопроса о кредитоспособности предприятия представляет собой систему дифференциальных уравнений. Она описывает динамику производства и долга по кредиту. Модель Лебедева является удобной для анализа, понятной и простой в использовании, поэтому в данной главе исследуем именно ее.

Для дальнейшей работы вводятся следующие обозначения:

Kt – производственные фонды;

Zt – величина/значение долга (основная фазовая переменная);

Qt – объем/величина производимой продукции;

Ct – полные издержки товарного производства;

Rt – доход фирмы;

πt – прибыль фирмы;

T_{cr} – время/момент погашения кредита;

H_F – часть прибыли – доход владельца предприятия;

H_{cr} – часть прибыли для оплаты кредита;

I_t – часть прибыли, идущая на развитие товарного производства;

K_0 – основной капитал (производственные фонды);

Z_0 – начальное значение кредита для развития производства;

p – цена товара на рынке;

β –ставка по кредиту (%, постоянная величина);

λ – фондоотдача (положительная величина);

μ – коэффициент амортизации.

Основные предположения

1. В начальный период стоимость капитала или основных производственных фондов равна величине кредитов:

$$K_0 = z_0 \qquad (13)$$

Производственные фонды участвуют в процессе изготовления продукции или оказания услуг (станки, машины, приборы, передаточные устройства и т.д.)

Понятие основные производственные фонды необходимо отличать от общего понятия основные фонды, включающего в себя основные фонды производственного и непроизводственного назначения. Основные производственные фонды представляют собой совокупность средств производства, созданных общественным трудом, которые длительное время участвуют в процессе производства и по мере износа переносят свою стоимость на стоимость производимого продукта. Основные фонды, не участвующие непосредственно в производстве, являются основными фондами непроизводственного назначения. К ним относятся: жилые здания, общежития, клубы, дома культуры, бани, гостиницы, школы, больницы и др.

2. Динамика долга определяется уравнением:

$$z_{t+1} = z_t + \beta z_t - H_{CR} \quad (14)$$

3. Объем производимого товара пропорционален основным производственным фондам:

$$Q_t = \lambda z_t \quad (15)$$

Коэффициент фондоотдачи характеризует эффективность использования основных средств организации. Фондоотдача показывает, сколько выручки приходится на единицу стоимости основных средств.

4. Из (1) и (3) следует, что объем производства в начальный момент времени можно определить, как

$$Q_0 = \lambda z_0 \quad (16)$$

5. Для производства товара используются трудовые ресурсы, их объем определяются соотношением:

$$L_t = Q_t / \varphi(Q_t) \quad (17)$$

$\varphi(Q_t)$ – заданная функция производительности труда.

Производительность труда измеряет эффективность использования трудовых ресурсов любой организации. Это результирующий показатель работы предприятия, отражающий положительные стороны работы, а также недостатки.

6. Полные издержки производства, такие как: оплата труда, затраты на материалы, затраты на обслуживание оборудования, определяются уравнением:

$$C_t = mQ_t^2 + nQ_t + c \quad (18)$$

где m, n, c – неотрицательные коэффициенты.

7. Предполагается, что спрос потребителя на производимый товар превышает предложение. Поэтому доход определим уравнением:

$$R_t = pQ_t \tag{19}$$

8. Прибыль предприятия:

$$\pi_t = R_t - C_t \tag{20}$$

Она делится на 3 части: личный доход владельца предприятия, инвестиции в производство и сумма, идущая на погашение долга.

9. Объем инвестиций в производство:

$$I_t = R_t - C_t - H_t \tag{21}$$

$$H_t = \begin{cases} H_F + H_{CR}, если\ z_t > 0, \\ H_F, если\ z_t \leq 0. \end{cases} \tag{22}$$

10. Динамика основных производственных фондов, которые определяют производственный потенциал предприятия, задается разностным уравнением

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \mu K_t. \tag{23}$$

Проведём преобразования соотношений (1)–(11) для получения системы разностных уравнений. Для этого выражения (21), (19), (18) подставим в (23):

$$K_{t+1} = K_t + (R_t - C_t - H_t) - \mu K_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = K_t + (pQ_t - mQ_t^2 - nQ_t - c - H_t) - \mu K_t;$$

Также, учитывая (15) получаем систему разностных уравнений вида:

$$\begin{cases} Q_{t+1} = Q_t + \lambda(pQ_t - mQ_t^2 - nQ_t - c - H_t) - \mu Q_t, \\ z_{t+1} = z_t + \beta(z_t - z_e). \end{cases} \tag{24}$$

Здесь

$$z_e = \frac{H_{CR}}{\beta}. \quad (25)$$

Первое уравнение данной системы определяет объем производства товара, второе уравнение динамику величины долга. Рассмотрим также решение системы (24).

Для последовательности $z_t - z_e$ из второго уравнения получаем уравнение геометрической прогрессии:

$$z_{t+1} - z_e = (1+\beta)(z_t - z_e) \quad (26)$$

Откуда следует уравнение:

$$z_t - z_e = (1+\beta)^t (z_e - z_0) \quad (27)$$

К моменту погашения кредита за время T_{CR} долг будет равен 0, то есть

$z_t = 0$:

$$z_e = (1+\beta)^{T_{CR}} (z_e - z_0) \quad (28)$$

Исходя из (28) можем определить время погашения кредита:

$$T_{CR} = \frac{\ln\left(\frac{z_e}{z_e - z_0}\right)}{\ln(1+\beta)}. \quad (29)$$

2.2. Непрерывная модель развития предприятия

Модель (24) является дискретной. Однако, при относительно малых значениях параметра, свойства данной системы совпадают со свойствами соответствующей непрерывной модели. Исследуем в дальнейшем именно её.

Для перехода от дискретной системы дифференциальных уравнений к непрерывной рассмотрим отношение приращения функции Q к приращению ее аргумента и проделаем аналогичное с функцией z:

$$\frac{Q(t+\triangle t) - Q(t)}{\triangle t}, \ \frac{z(t+\triangle t) - z(t)}{\triangle t}.$$

Вычисляя предел данных выражений при $\triangle t \to 0$, получаем систему вида:

$$\begin{cases} Q'(t) = \lambda\big(pQ(t) - mQ^2(t) - nQ(t) - c - H(t)\big) - \mu Q(t), \\ z'(t) = \beta(z(t) - z_e), \end{cases} \tag{30}$$

$$z_e = \frac{H_{CR}}{\beta},$$

с начальными условиями: $z(0) = z_0, Q(0) = \lambda z_0$. (31)

Найдем решение второго уравнения из системы (30), которое является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dt} = \beta(z(t) - z_e);$$

$$\frac{dz}{(z(t) - z_e)} = \beta dt;$$

$$\int_0^t \frac{d(z(t) - z_e)}{(z(t) - z_e)} = \int_0^t \beta dt;$$

$$\ln\left(\frac{z(t) - z_e}{z_0 - z_e}\right) = \beta t;$$

Тогда конечное решение имеет вид: $z(t) = z_e - (z_e - z_0)e^{\beta t}$.

2.3. Линейная функция полных издержек производства

Полные издержки производства, описанные соотношением (18), представляют собой квадратичную функцию. То есть кроме постоянных и переменных затрат учтены также «сверхпропорциональные» затраты, такие как, к примеру, оплата сверхурочного труда.

В дальнейшем будем рассматривать модель развития предприятия с линейной функцией полных издержек (m=0), что соответствует системе вида:

$$\begin{cases} Q'(t) = \lambda\big(pQ(t) - nQ(t) - c - H(t)\big) - \mu Q(t), \\ z'(t) = \beta(z(t) - z_e), \end{cases} \quad (32)$$

где

$$H(t) = \begin{cases} H_F + H_{CR}, \text{если } t \leq T_{CR}, \\ H_F, \text{если } t > T_{CR} \end{cases} \qquad z_e = \frac{H_{CR}}{\beta}, \quad T_{CR} = \frac{1}{\beta} ln(\frac{z_e}{z_e - z_0}). \quad (33)$$

В силу (16) решения $Q(t)$ *и* $z(t)$ системы (32) должны удовлетворять начальным условиям

$$z(0) = z_0, Q(0) = \lambda z_0. \quad (34)$$

Положим, что

$$r = (p-n)\lambda - \mu, \quad Q_e = \frac{(c+H)\lambda}{(p-n)\lambda - \mu}.$$

Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$Q'(t) = r(Q(t) - Q_e). \quad (35)$$

Принимая $H(t) = const$ решение можно получить аналогично решению второго уравнения.

$$Q(t) = Q_e + (\lambda z_0 - Q_e)e^{rt}.$$

Важно вычислить положение равновесия системы, так как оно, учитывая затраты на выплату долга и амортизационные отчисления, будет соответствовать точке безубыточности, то есть тому объему производства и реализации продукции, при котором расходы будут компенсированы доходами, а при производстве и реализации каждой последующей единицы продукции предприятие начнет получать прибыль.

Также следует отметить, что амортизация имеет принципиальное значение для ценообразования, без её учета не получится корректно вычислить срок и условия окупаемости бизнеса. Амортизационные расходы – для организации это часть затрат, которая в общем случае формирует себестоимость произведенной продукции

Нахождение точек, в которых правые части обоих дифференциальных уравнений одновременно обращаются в нуль, приводит нас к тому, что единственное положительно равновесное решение системы (32) имеет вид:

$$Q(t) = Q_e, z(t) = z_e.$$

Исследуем фазовые траектории системы вблизи положения равновесия. Изменим начальные условия. Пусть $Q(0) = Q_1, z(0) = z_1$. Найдём соответствующие этим условиям решения. Проинтегрировав каждое из уравнений, имеем: $Q(t) = C_1 e^{rt} + Q_e;\ z(t) = C_2 e^{\beta t} + z_e$. C_1 и C_2 – произвольные константы.

$$Q(0) = C_1 + Q_e = Q_1;\ z(0) = C_2 + z_e = z_1;$$

Тогда, $Q(t) = (Q_1 - Q_e)e^{rt} + Q_e; z(t) = (z_1 - z_e)e^{\beta t} + z_e$.

Так как $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) = \infty$, то можно прийти к выводу, что в случае произвольных начальных условиях равновесное решение будет представлять собой неустойчивый узел. Все траектории, начинающиеся вблизи этой точки,

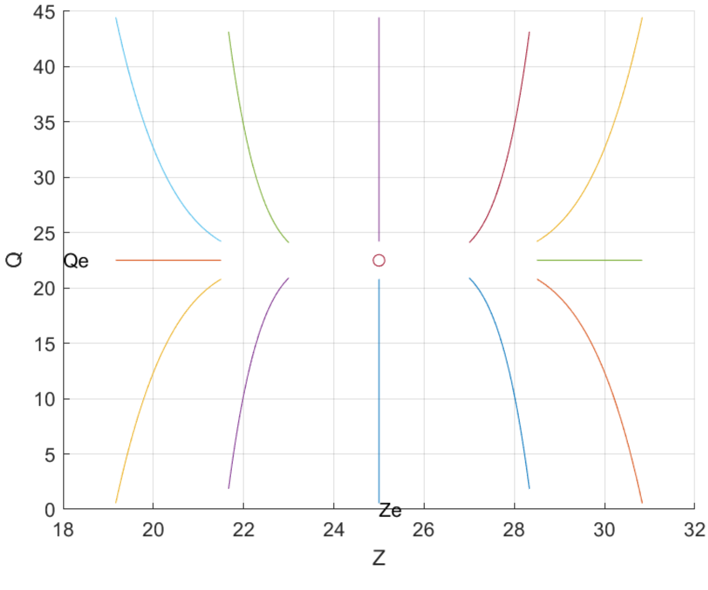

Рис. 1. Фазовые траектории системы (32) при произвольных начальных условиях

будут удаляться от нее.

Далее будем исследовать фазовые траектории, принимая во внимание начальные условия (34). Это будет означать, что начальная точка любой фазовой траектории системы (32) будет лежать в плоскости (z, Q) на прямой $Q = \lambda z$.

При этом возможны такие случаи, как:

1. Точка безубыточности расположена выше прямой $Q = \lambda z$,
2. Точка безубыточности проходит через прямую $Q = \lambda z$,
3. Точка безубыточности расположена ниже прямой $Q = \lambda z$.

Так, анализируя каждый из вышеперечисленных случаев, можем описать различные альтернативные варианты развития производства.

2.3.1. Расположение равновесного значения выше прямой $Q = \lambda z$

Первая из возможных ситуаций возникает, когда точка, соответствующая положению равновесия системы, расположена выше прямой, содержащей начальные значения фазовых траекторий. В этом случае выполнено неравенство:

$$\lambda < \frac{Q_e}{z_e} \Rightarrow \lambda < \frac{\beta(c+H)\lambda}{\big((p-n)\lambda-\mu\big)H} \Rightarrow \frac{\lambda^2 H(p-n) - \lambda\mu H - \beta(c+H)\lambda}{\big((p-n)\lambda-\mu\big)H} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\lambda\big(\mu H+\beta(c+H)\big)}{H\lambda(p-n)} + \frac{\lambda^2 H(p-n)}{H\lambda(p-n)} < 0 \Rightarrow \lambda < \tilde{\lambda} \qquad (36)$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{\beta(c+H)+\mu H}{H(p-n)}. \qquad (37)$$

Исследование трех фазовых траекторий, при параметрах системы, удовлетворяющих неравенству (36), показывает, что данные траектории будут соответствовать процессу сокращению долга, но не полной его выплаты, а также снижению предложения товара до нуля. (Рис. 2.)

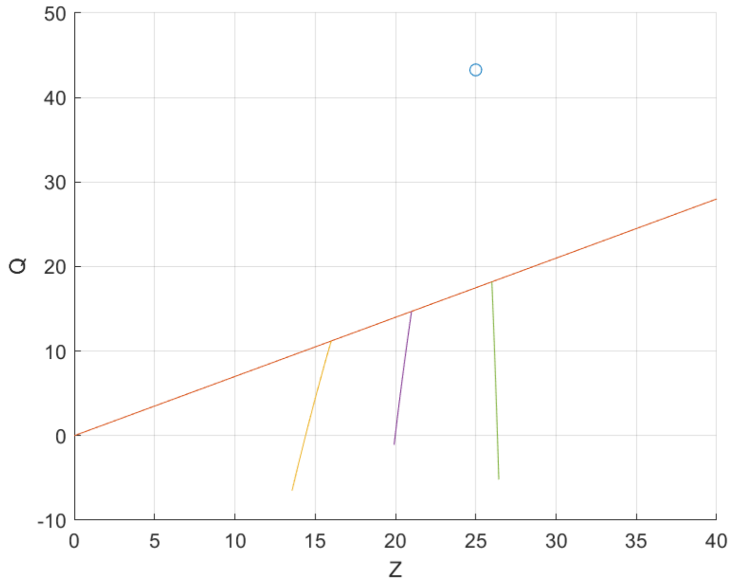

Рис. 2. Фазовые траектории системы (32) при начальных условиях (34) в случае выполнения неравенства (36)

Такой вариант развития событий нежелателен, поскольку необходимый выпуск продукции не достигнут и задолженность перед банком не погашена. То есть фирма работает в убыток.

2.3.2. Расположение равновесного значения на прямой $Q = \lambda z$

Вторая ситуация, когда точка (z_e, Q_e) проходит через прямую $Q = \lambda z$, соответствует равенству

$$\lambda = \frac{Q_e}{z_e} \implies \lambda = \tilde{\lambda}. \quad (38)$$

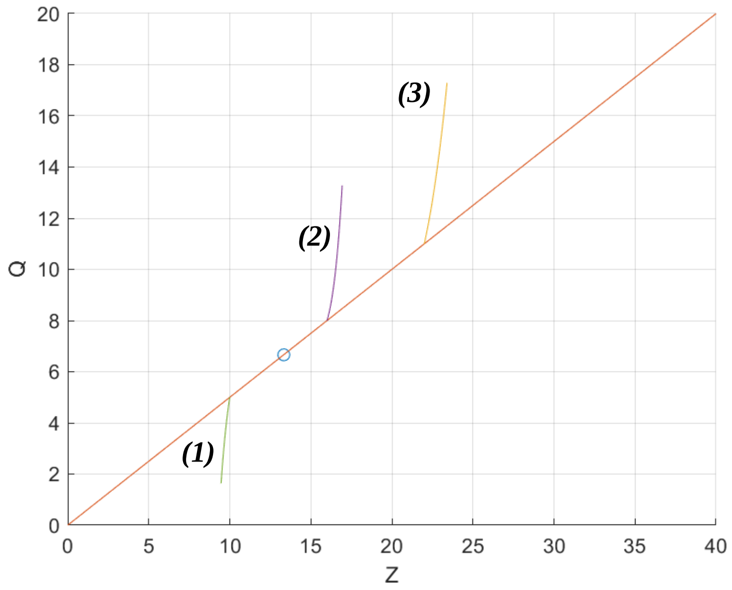

Рис. 3. Фазовые траектории системы (32) при начальных условиях (34) в случае выполнения неравенства (38)

Фазовая траектория (1), аналогично тому, как и фазовые траектории предыдущего варианта, соответствует снижению выпуска товара и невозможности выплатить долг целиком. Для фазовых траекторий (2) и (3) можно наблюдать уже увеличение объемов производимой продукции. Но, тем не менее, данная ситуация также не будет являться благоприятной для предприятия, так как задолженность перед банком по-прежнему остается невыплаченной. Более того, если во всех предыдущих вариантах, величина долга либо оставалась неизменной, либо удавалось уменьшить ее на небольшую сумму, то здесь же вместе с увеличением выпуска продукции, долг также будет расти.

2.3.3. Расположение равновесного значения ниже прямой $Q = \lambda z$

В случае, когда точка (Q_e, z_e) находится под прямой $Q = \lambda z$ справедливо неравенство:

$$\lambda > \frac{Q_e}{z_e} \Longrightarrow \lambda > \tilde{\lambda}. \tag{39}$$

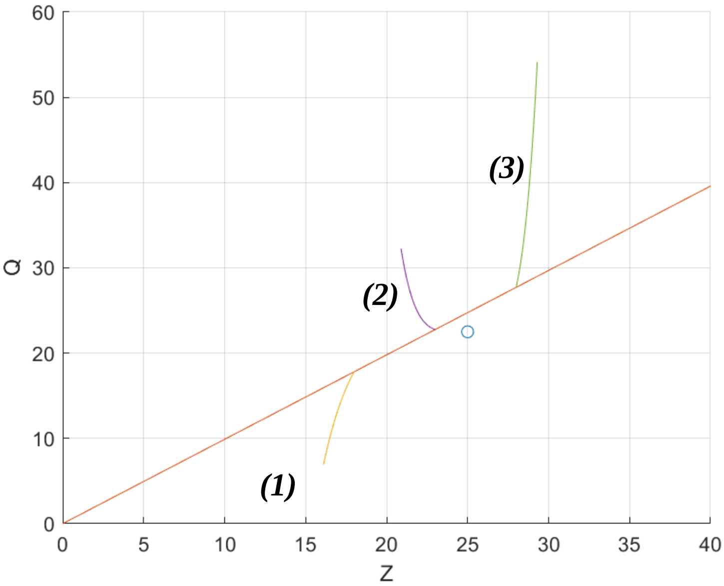

Рис. 4. Фазовые траектории системы (32) при начальных условиях (34) в случае выполнения неравенства (39).

На графике (Рис. 4.) можно увидеть, что траектория (2) представляет собой оптимальный вариант работы фирмы. Именно она иллюстрирует ситуацию при одновременном росте производства выпускаемой продукции и сокращении долга. Траектории (1) и (3) аналогичны рассмотренным выше вариантам и также показывают неблагоприятную ситуацию, при которой предприятие не может покрыть долг. Он либо увеличивается, либо остается не до конца выплаченным, а значит, работу фирмы нельзя считать успешной.

2.4. Неблагоприятные варианты развития фирмы и возможные способы их улучшения

Анализ фазового портрета системы (32) показал, что на вид фазовых траекторий влияет величина параметра λ, то есть при прогнозировании развития предприятия, в зависимости от коэффициента фондоотдачи возможны разные случаи. Также было выяснено, какая именно траектория будет показывать успешную стратегию фирмы по производству товара и устранению долга. Но, важно учитывать, что не всегда есть возможность сразу следовать наиболее благоприятному согласно предварительному расчёту плану. К примеру, в силу нехватки необходимой суммы на выплату долга. Тогда целесообразно придерживаться следующей стратегии: изначально пустить все возможные ресурсы на производство товара, и только после того, как объемы производимой продукции достигнут определённой величины, которая позволяет предприятию выплачивать долг, не в ущерб своему финансовому состоянию, можно увеличить выплаты по кредиту.

Рассмотрим математическую интерпретацию описанной тактики.

Пусть выбрана начальная точка $(z_1, Q_1) -$ с нее будет начинаться фазовая траектория, описывающая работу компании. Предположим, что руководителем было принято решение достигнуть объема производства товара равному величине $\tilde{Q}$. При этом ежемесячная сумма выплаты долга равна сумме H_{CR}. Данные условия приводят к величине задолженности $\tilde{z}$. Точка $(\tilde{z}, \tilde{Q})$ достигается в некоторый момент времени $\tilde{t}$.

Далее следует отметить, что часть суммы, идущая на покрытие долга и цена продукции может варьироваться и устанавливается владельцем фирмы. Поэтому после достижения величины $(\tilde{z}, \tilde{Q})$ увеличиваем платеж по задолженности: $\widetilde{H_{CR}} = H_{CR} + P$. Помимо суммы, идущей на выплаты по кредиту, часть прибыли также составляет личный доход руководителя компании (H_F), поэтому переменную P, можно рассчитывать как процент от личного дохода, который руководитель решает добавить к ежемесячному платежу. Причем $P \leq H_F$.

После того как параметр H_{CR} изменён на $\widetilde{H_{CR}}$, рассматриваем систему с новыми начальными условиями $\big(z(\tilde{t}), Q(\tilde{t})\big) = \big(\tilde{z}, \tilde{Q}\big)$. Теперь продолжаем выплаты до тех пор, пока задолженность не будет полностью погашена. То есть пока $z > 0$.

Рассматриваем новую систему:

$$\begin{cases} Q'(\tilde{t}) = \lambda\big(pQ(\tilde{t}) - nQ(\tilde{t}) - c - \widetilde{H_{CR}}\big) - \mu Q(\tilde{t}), \\ z'(\tilde{t}) = \beta(z(\tilde{t}) - \tilde{z}_e), \end{cases} \quad \tilde{z}_e = \frac{\widetilde{H_{CR}}}{\beta}$$

Доход можно распределить так:

$$H_t = \begin{cases} H_F + H_{CR}, если\ \tilde{t} < \tilde{T}_{CR}, \\ H_F + \widetilde{H_{CR}}, \text{если } \tilde{t} \leq \tilde{T}_{CR}, \\ H_F, если\ \tilde{t} > \tilde{T}_{CR}. \end{cases}$$

Время, когда ежемесячные выплаты будут увеличены, определяется:

$$z(\tilde{t}) = \tilde{z}_e - (\tilde{z}_e - z_0)e^{\beta\tilde{t}} \Rightarrow \tilde{t} = \frac{1}{\beta} ln \frac{\tilde{z}_e - z(\tilde{t})}{\tilde{z}_e - z_0}$$

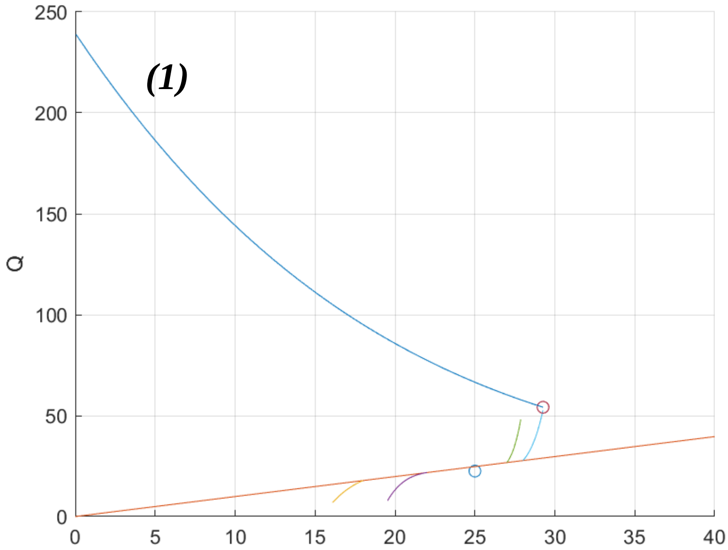

Рис. 5. Фазовые траектории системы (32) при начальных условиях (34) в случае изменения стратегии ежемесячных выплат.

На Рис. 5. траектория (1) показывает наиболее успешный ход развития фирмы и соответствует описанной выше стратегии по распределению финансов.

1. Устанавливается максимальная величина объема выпускаемого товара.
2. В силу того, что сумма, ежемесячно выплачиваемая банку, устанавливается владельцем предприятия и может быть изменена, за счет уменьшения его личного дохода в момент времени $\tilde{t}$ происходит перерасчет прибыли.
3. С учетом новых параметров рассматривается система и с помощью программы строится фазовая плоскость с соответствующими кривыми, при помощи которых проводится анализ и составляется наилучшая стратегия.

Заключение

В работе были получены следующие результаты:

- Изучены различные методы математического моделирования в экономике;
- Рассмотрены задачи, решаемые с помощью экономико-математического моделирования;
- Рассмотрена динамическая модель Лебедева, позволяющая оценить перспективы развития компании;
- С помощью модели Лебедева проанализированы варианты работы фирмы, выявлены наиболее благоприятные из них;
- Описана оптимальная стратегия развития, которая учитывает возможность перераспределения прибыли;
- В среде MATLAB написаны программы, реализующие построение выбранной модели.

Список литературы

1. Лебедев В.В., Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: Изограф, 1997. 224 с.
2. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Исследование кредитного механизма, используемого для развития рынка новой продукции, на основе математического моделирования // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VI Международной школы-симпозиума АМУР–2012, Севастополь, 17–23 сентября 2012 / отв. ред. М.Ю. Куссый, А.В. Сигал. Симф.: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2012. С. 328–334.
3. A. Byanjankar, M. Heikkilä, J. Mezei. Predicting credit risk in peer-to-peer lending: A neural network approach // *Computational Intelligence 2015 IEEE Symposium Series*, 2015, pp. 719–725.
4. A. Namvar and M. Naderpour. Handling Uncertainty in Social Lending Credit Risk Prediction with a Choquet Fuzzy Integral Model // *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Rio de Janeiro, 2018, pp. 1–8.
5. Т.В. Веремеенко, Высшая математика : учеб.-метод. пособие. В 4 ч. Ч. 4. Математическое программирование / авт.-сост. Т. В. Веремеенко ; под ред. Л. Г. Третьяковой. 2-е изд., испр. Минск : ГИУСТ БГУ, 2010. 158 с.
6. Юдин Д.Б., Линейное программирование: Теория, методы и приложения / Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1969. Серия «Экономико-математическая библиотека».
7. Альсевич В.В., Оптимизация линейных экономических моделей. / Габасов Р., Глушенков В.С. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 211 с.
8. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 606 с.

9. Терпугов А.Ф. Экономико-математические модели. Томск: ТГПУ,1999. 118 с.
10. Юдин Д.Б., Математические методы управления в условиях неполной информации: Задачи и методы стохастического программирования. М.: Издательство «Советское радио»: Редакция кибернетической литературы, 1974. 57 с.
11. Розанова Л.Ф., Розанова Ж.Б., Чендулаева К.Б. Стохастическое программирование в задачах планирования на предприятиях с непрерывным процессом производства // Управление экономическими системами: электроннный научный журнал, №. 4 (64), 2014, С. 9.
12. Шелобаев С.И., Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 367 с.

Приложения

Приложение 1. Интегрирование системы дифференциальных уравнений, вывод фазовых траекторий.

```
function MatModel
c=0.66;    z0=10;
H=13;      Hcr=3;     Hf=7;
beta=0.12; lyambda=0.99;
p=2;
n=0.69;    myu=0.696;
r=(p-n)*lyambda-myu;
Qe=((c+H)*lyambda)/((p-n)*lyambda-myu);
ze=Hcr/beta;
Tcr=(1/beta)*log(ze/(ze-z0));
disp(Tcr)
disp('Время кредита');
grid on;hold on;
xlabel('Z');
ylabel('Q');
epsilon=0.5;

start=[Qe-1.7, ze];
Tcr=(1/beta)*log(ze/(ze-z0));
[T,Y]=ode45(@fun,[0 Tcr],start);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

start=[Qe, ze-3.5];
Tcr=(1/beta)*log(ze/(ze-z0));
[T,Y]=ode45(@fun,[0 Tcr],start);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

Tcr=(1/beta)*log(ze/(ze-z0));
[~,Y]=ode45(@fun,[10 Tcr],[z0*lyambda,z0]);
Y(:,2)=[0  40];
Y(:,1)=lyambda.*Y(:,2);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 4],[18*lyambda,18]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 8],[23*lyambda,23]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 5],[28*lyambda,28]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

function F=fun(z,Q)
F=[r.*(Q(1)-Qe); beta.*(Q(2)-ze)];
```

Приложение 2. Вывод фазовых траекторий для системы с альтернативной стратегией развития.

```
function F_1=fun1(z,Q)
c=4;
c=0.66;z0=20;
```

```
H=13;Hcr=12;
Hf=7;beta=0.12;
lyambda=0.99;
p=2;n=0.69;
myu=0.696;
r=(p-n)*lyambda-myu;
Qe=((c+H)*lyambda)/((p-n)*lyambda-myu);
ze=Hcr/beta;
F_1=[r.*(Q(1)-Qe); beta.*(Q(2)-ze)];

Tcr=(1/beta)*log(ze/(ze-z0));%45
[~,Y]=ode45(@fun,[10 Tcr],[z0*lyambda,z0]);
Y(:,2)=[0 40];
Y(:,1)=lyambda.*Y(:,2);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 4],[18*lyambda,18]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 7],[22*lyambda,22]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

[T,Y]=ode45(@fun,[2 5],[27*lyambda,27]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

Q_max=70;

[T,Y]=ode45(@fun,[2 5],[28*lyambda,28]);
y1=[];
q=[];
y1=Y(:,1);
for i=1:length(y1)-1
    if y1(i)<=Q_max;
        q(i)=y1(i);
        i=i+1;
        j=i;
        nach1=y1(i);
    end
end

y2=Y(:,2);
c=[];
for i=1:j-1
    c(i)=y2(i);
    nach2=y2(i);
end
plot(c,q);
plot(nach2,nach1,'o');

[T,Y]=ode45(@fun1,[1 3.8],[nach1,nach2]);
plot(Y(:,2),Y(:,1));

t_time=[];
t_time=T(:,1);
m=size(T,1);
disp('Время(2)=');
disp(t_time(m));
```