

Санкт–Петербургский государственный университет

Зачкова Алёна Николаевна

Выпускная квалификационная работа

*Разработка программного комплекса для
численного решения задач оптимального
управления с приложением к эпидемиологии*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная
математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Математическое моделирование систем
и процессов управления»

Научный руководитель:

доцент, кафедра вычислительных методов
механики деформируемого тела,
к. т. н. Громов Дмитрий Валерьевич

Рецензент:

доцент, кафедра информационных систем,
к. ф.-м. н. Еремин Алексей Сергеевич

Санкт-Петербург

2020 г.

Содержание

Введение	3
Постановка задачи и цели работы	6
Глава 1. Эпидемиологические модели	7
1.1. Модель эпидемии	7
1.2. Возникновение эпидемии. Основное репродуктивное число	9
1.3. SIR и SIRS модели с учетом демографических процессов .	12
1.4. Эпидемиологическая модель с управлением	14
Глава 2. Задача оптимального управления эпидемической мо- делью	15
2.1. Постановка задачи	15
2.2. Структура программы для численного решения задачи оптимального управления	18
Глава 3. Результаты численных экспериментов	21
Глава 4. Заключение	26
Список литературы	27

Введение

Эпидемиология как наука зародилась еще в древние времена. Опасные болезни с глубочайшей древности представляли собой самые тяжелые бедствия человечества. Уже тогда было понятно, что не стоит судить об эпидемиях только на основе знаний об отдельных заболеваниях, поэтому изначально в медицине параллельно с изучением болезней человека шло изучение заболеваемости населения.

В статье «Парадигма современной эпидемиологии» [2] Н.И. Брико описывает основные этапы развития этой науки и их характеристики, а также подчеркивает важность эпидемиологии и доказательной медицины в решении проблем на организменном и популяционном уровнях.

Первой эпидемией, описанной историками, была чума в Афинах в 430—426 годах до нашей эры. Когда в столице древней Греции возникла эпидемия, туда был вызван Гиппократ. Он и является основоположником эпидемиологии как науки. В своих сочинениях «Семь книг об эпидемиях» он описывает факторы, которые влияли на распространение болезни в то время.

Несмотря на то, что эта наука зародилась очень давно, математическому изучению болезней и их распространению примерно 350 лет. Первые статистические исследования инфекционных заболеваний произвел Джон Граунт. В 1663 году он выпустил книгу «Естественные и политические наблюдения над списками умерших», которая посвящена статистике заболеваний. Спустя сто лет Даниэль Бернулли использовал математические методы для анализа смертности от оспы [7]. Бернулли утверждал, что прививка живым вирусом снизит уровень смертности и, следовательно, увеличит популяцию, независимо от того, что сама прививка может быть смертельной.

В конце 1800-х годов наука наконец смогла объяснить механизм того, как человек заболевает. Стало известно, что передача заболевания происходит через контакт между инфицированным и здоровым человеком. Это проложило путь для математического моделирования инфекционных заболеваний.

В 1927 году математическая эпидемиология поднялась на новый уровень. Шотландские ученые А. Маккендрик и У. Кермак в своей работе [1] впервые ввели классическую эпидемиологическую модель SIR (susceptible–infected–recovered), которая описывает динамику перехода между здоровыми, инфицированными и выздоровевшими особями одной популяции. В наше время существует множество вариаций этой модели. В классической монографии «Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль» английских ученых Р. Андерсона и Р. Мэя [14], на её основе построены и исследованы математические модели, описывающие различные варианты взаимоотношений человека с инфекцией на популяционном уровне.

Несмотря на то, что математическая эпидемиология является общепризнанной научной дисциплиной, существует лишь небольшое количество русскоязычной литературы на эту тему. Это особенно заметно в сравнении с количеством соответствующих изданий, выпущенных в последнее время за рубежом. В связи с этим существует потребность в систематизированном изложении основ применения математических методов в биологии для более широкой аудитории. Книга «Динамические системы и модели биологии» А. С. Братуся, А. С. Новожилова и А. П. Платонова [3] успешно решает эту задачу. В данной книге авторы показывают разнообразие математических моделей, описывающих биологические сообщества, а также описывают основные математические методы качественного анализа нелинейных систем.

С конца 1950-х годов официальные лица в области здравоохранения уделяют много внимания использованию математических методов для контроля инфекционных заболеваний. Введение антибиотиков, санитарии и прививок принесло хорошие результаты. Тем не менее, такие факторы, как устойчивость к лекарственным препаратам со стороны микроорганизмов и увеличение миграции, привели к появлению новых инфекционных заболеваний. Математическое моделирование показывает, что комбинации изоляции, карантина, вакцинации и лечения необходимы для того, чтобы устранить большинство инфекционных болезней. Однако, если управляющее воздействие не будет использовано в нужное время, ликвидация заболеваний останется трудной задачей. Теория оптимального управления

оказалась успешным инструментом в понимании способов сокращения распространения инфекционных заболеваний путем разработки оптимальных стратегий вмешательства в развитие эпидемии.

В качестве одного из примеров применения методов оптимального управления приведем статью [5]. В ней авторы О. Шароми и Т. Малик показывают, как можно применить теорию оптимального управления к эпидемиологическим моделям и разработать оптимальную стратегию вмешательства в эпидемию. Они рассчитывают оптимальную стратегию, направленную на сокращение распространения инфекционного заболевания. В статье [4] численные методы оптимального управления были использованы для определения оптимальных стратегий инвестирования в различные программы лечения и профилактики.

Постановка задачи и цели работы

Цель работы: разработать программный комплекс для численного решения задач оптимального управления динамикой распространения эпидемий.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- Исследовать математические методы решения задач оптимального управления.
- Реализовать численный метод вычисления оптимального управления на основе метода ортогональных коллокаций.
- Исследовать задачу управления динамикой распространения эпидемии в популяции.
- Сформулировать задачу оптимального управления распространением заболевания и получить численные решения с использованием программы, разработанной в системе MATLAB.
- Проанализировать полученные результаты.

Глава 1. Эпидемиологические модели

1.1 Модель эпидемии

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, подразделяется в каждый момент времени t на три группы:

- $S(t)$ (susceptible) — восприимчивые особи, которые находятся в группе риска и могут заразиться;
- $I(t)$ (infected) — инфицированные особи, которые являются переносчиками инфекции;
- $R(t)$ (removed) — «выбывшие» особи, к которым относятся выздоровевшие особи, приобретшие иммунитет к данной болезни, а также умершие.

Число людей в каждом из этих классов меняется со временем. Общая численность населения N является суммой этих трех классов:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$$

Таким образом, типичная эволюция особи во время эпидемии описывается диаграммой, представленной на рисунке 1:

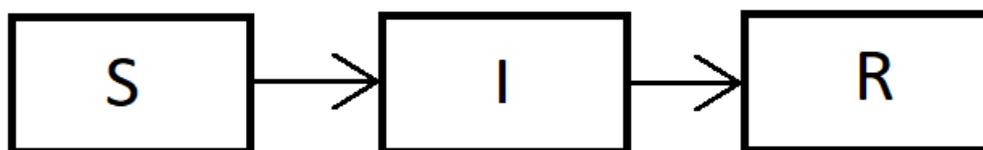


Рис. 1

Эпидемиологические модели состоят из систем дифференциальных уравнений, которые описывают динамику перехода индивидуумов между группами. Классическая модель эпидемии (SIR-модель) описывает динамику перехода между здоровыми, инфицированными и выздоровевшими

особями. Чтобы ее сформулировать нужно сделать несколько предположений:

- Пусть популяция замкнута и имеет постоянный размер N .
- Промежуток времени, в течении которого заболевший может передавать инфекцию, распределен по экспоненциальному закону со средним $1/\gamma$.
- Все контакты в популяции случайны и равновероятны.

Тогда дифференциальные уравнения модели SIR принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\lambda S, \\ \dot{I} &= -\lambda S - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I,\end{aligned}\tag{1}$$

где λ — сила инфекции, которая равна произведению количества контактов в единицу времени, сделанных одним здоровым индивидуумом (пусть это будет cN), вероятности передать инфекцию при контакте p и вероятности встретить заболевшего $\frac{I(t)}{N}$.

Задавая $\beta = cp$ мы можем переписать систему (1) в виде

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\frac{\beta}{N}SI, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{2}$$

Это классическая модель SIR. Подверженные воздействию индивидуумы приобретают инфекцию и становятся инфицированными после эффективного контакта с зараженными индивидуумами со скоростью β . Зараженные особи выздоравливают и переходят в класс выздоровевших со скоростью γ .

SIR-модель получила большую популярность в силу простоты построения и использования. Ее применение позволяет точно моделировать эпидемии гриппа и других заболеваний, вводить новые параметры и анализировать разные сценарии.

1.2 Возникновение эпидемии. Основное репродуктивное число

Появляется вопрос: при каких условиях возникает эпидемия? Попробуем ответить на этот вопрос в рамках модели (2).

Фазовым пространством системы будем считать треугольник $S(t) + I(t) \leq N$. Из первых двух уравнений системы (2) имеем:

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{(\beta S/N - \gamma)I}{\beta SI/N} = -1 + \frac{\sigma}{S} \quad (I \neq 0),$$

где $\sigma = \frac{\gamma N}{\beta}$. Учтем начальные условия $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, тогда:

$$I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0. \quad (3)$$

Так как выражение (3) является первым интегралом для системы (2), с его помощью можно построить фазовые кривые на плоскости (S, I) (см. рис. 2).

Из второго выражения системы (2) следует, что при $S_0\sigma^{-1} > 1$ число зараженных растет, при $I_{\max} = N - \sigma + \sigma \ln(\sigma/S_0)$ достигает максимального значения, и когда $S_0\sigma^{-1} < 1$ число заболевших уменьшается (см. рис. 3).

Из первого и третьего уравнения системы (2) следует, что

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\sigma} \Rightarrow S = S_0 \exp\left\{-\frac{R}{\sigma}\right\}$$

Так как $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $R(\infty) = N - S(\infty)$

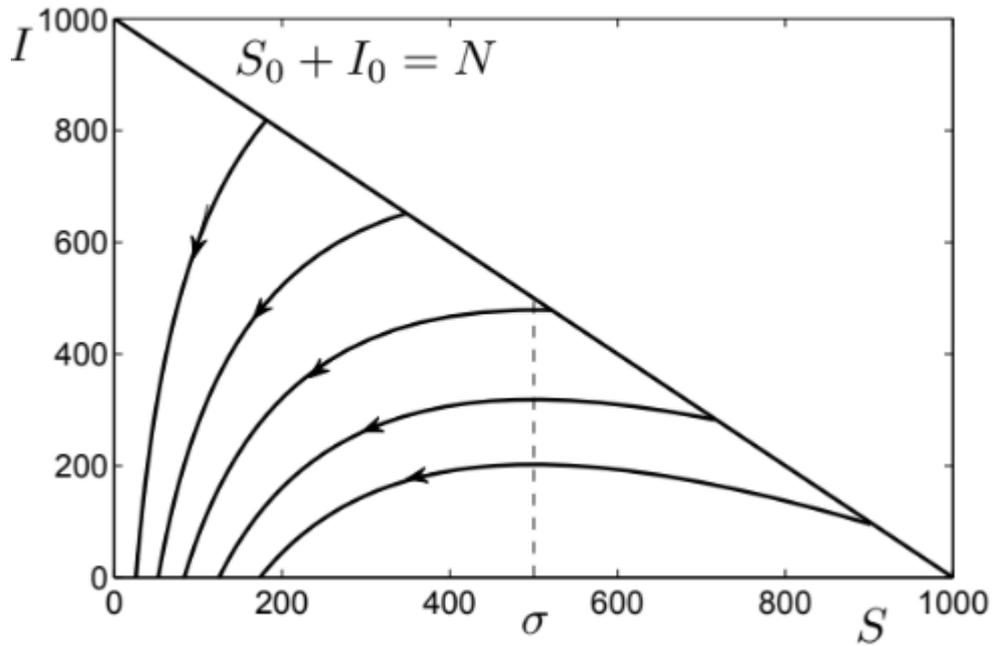


Рис. 2: Фазовый портрет SIR модели [3]

Таким образом, для нахождения числа здоровых особей, которые избежали болезни ($S(\infty)$), получим уравнение

$$S(\infty) = S_0 \exp \left\{ -\frac{N - S(\infty)}{\sigma} \right\} \quad (4)$$

Перейдем в уравнении (4) от абсолютных величин к относительным. Пусть $z = S(\infty)/N$ и $S_0 = N$. Получим

$$z = e^{-R_0(1-z)}, \quad (5)$$

где $R_0 = N\sigma^{-1} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Уравнение (5) — стандартное уравнение для финального размера эпидемии. Базовое репродуктивное число R_0 является мерой того, насколько легко передается болезнь. Оно отображает среднее число людей, которых сможет заразить один инфицированный. Величина R_0 определяет, будет ли инфекция распространяться экспоненциально, вымрет или же будет постоянной:

- Если $R_0 > 1$, то каждый больной человек в среднем заражает более одного здорового индивидуума. Для крайне заразных заболеваний

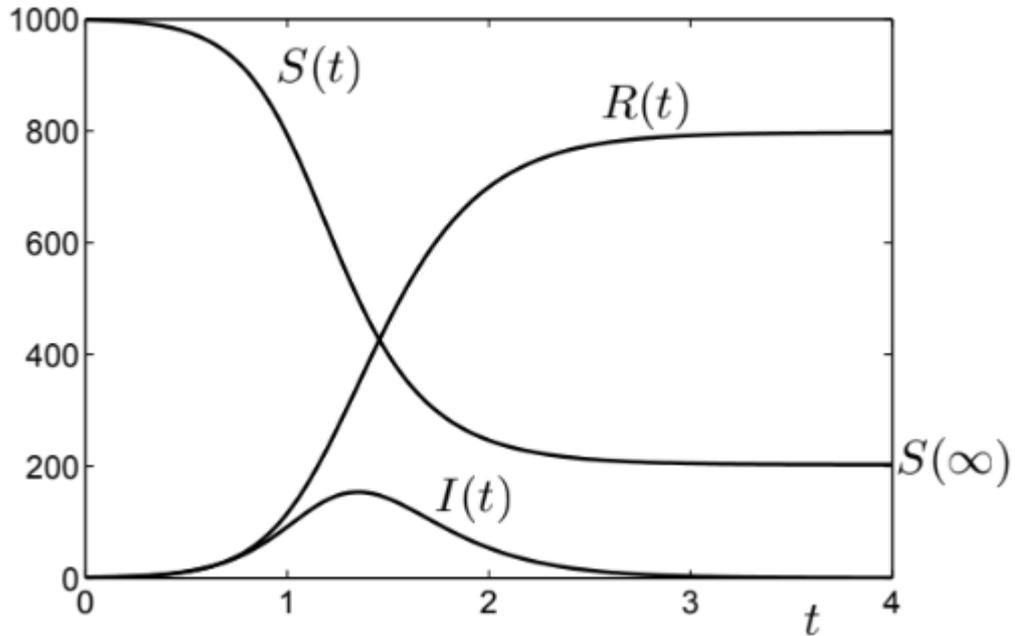


Рис. 3: Поведение модели SIR при $N = 1000$, $R_0 = 2$, $\sigma = 500$, $\gamma = 5$ [3]

величина $R_0 > 10$ (корь: 12–18 [10], ветряная оспа: 10–12 [9], грипп: 1.4–2.8 [11]).

- Если $R_0 < 0$, то в ходе контактов зараженного индивидуума с здоровыми особями популяции в среднем заболевает меньше одного человека и это значит, что болезнь будет вымирать.
- Если $R_0 = 0$, то каждый человек заразит ровно одного другого человека, так что инфекция будет эндемичной, то есть будет перемещаться по всей популяции, но не будет вымирать или прогрессировать.

Также R_0 позволяет посчитать порог достижения коллективного иммунитета, то есть процент переболевших или привитых в популяции, начиная с которого болезнь больше не распространяется.

1.3 SIR и SIRS модели с учетом демографических процессов

Ранее мы рассматривали модель SIR (2), предполагая, что популяция замкнута (без процессов демографии и миграции). Такие модели можно использовать, если среднее время продолжительности болезни в популяции достаточно мало по сравнению со средним временем смены поколений. Тем не менее, многие заболевания существуют в популяции в течение многих лет.

Рассмотрим модель SIR с учетом демографических процессов. Пусть смертность в популяции полностью уравнивается рождаемостью и все индивидуумы рождаются здоровыми. Учитывая, что $N = S(t) + I(t) + R(t) = \text{const}$

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \mu N - \frac{\beta}{N}SI - \mu S, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R,\end{aligned}\tag{6}$$

где μ — коэффициент рождаемости и смертности

Модель SIR (6) предполагает, что после выздоровления люди обретают пожизненный иммунитет. К некоторым заболеваниям, например, сезонному гриппу, иммунитет человека со временем может ослабнуть и человек вернется в класс восприимчивых. В таком случае эволюция особи во время эпидемии описывается диаграммой, представленной на рисунке 4. Такие

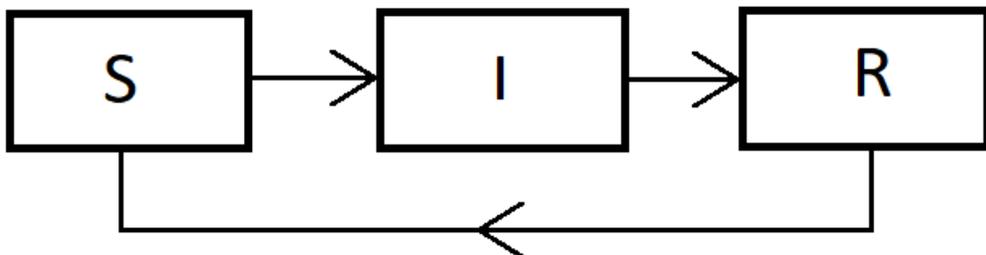


Рис. 4

заболевания описываются моделью SIRS («Susceptible–Infected–Recovered–Susceptible»):

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \mu N - \frac{\beta}{N}SI - \mu S + \xi R, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R - \xi R,\end{aligned}\tag{7}$$

где ξ – скорость, с которой иммунитет ослабевает к данному заболеванию, а $N = S + I + R$.

В модели SIRS (7) у всех особей со временем иммунитет ослабевает и они снова возвращаются в класс к восприимчивым. Однако существуют болезни, например, ветрянка, в которых инфицированная особь может как получить пожизненный иммунитет, так и не получить.

1.4 Эпидемиологическая модель с управлением

Рассмотрим расширенную модель с управлением. В модели SIR (2) появляется новый класс: индивидуумы, находящиеся на лечении (T). Эволюция типичной особи в такой эпидемии описывается диаграммой, представленной на рисунке 5:

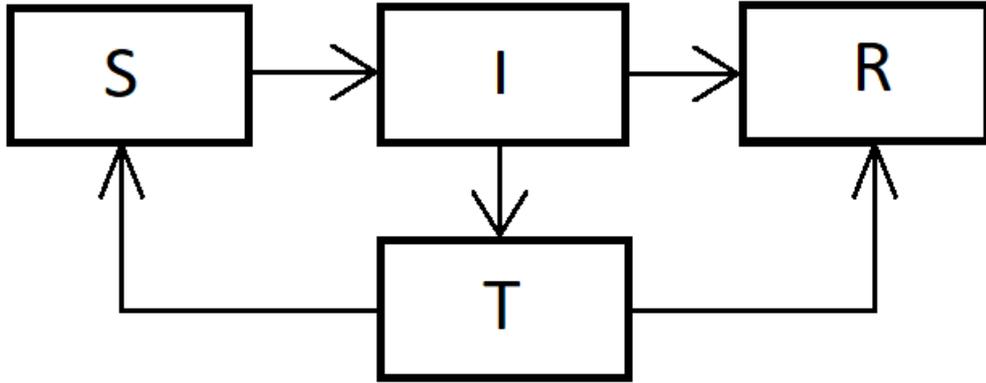


Рис. 5

Индивидуумы, покидающие класс T по окончании лечения, переходят в класс восприимчивых со скоростью $p\gamma$ и в класс выздоровевших со скоростью $(1-p)\gamma$, где p — вероятность того, что вылечившийся индивидуум не разовьет иммунитет, а $1/\gamma$ — длительность лечения:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta}{N}IS - \gamma pT \\ \dot{I} = \frac{\beta}{N}IS - \delta I - u(t)I, \\ \dot{R} = \delta I + (1-p)\gamma T, \\ \dot{T} = u(t)I - \gamma T. \end{cases} \quad (8)$$

Управление $u(t)$ описывает долю заболевших, которые подвергаются лечению. Отметим, что в отличие от классических линейных задач управления, данная модель представляет собой билинейную систему, в которой управление умножается на переменную состояния.

Глава 2. Задача оптимального управления эпидемической моделью

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим расширенную модель SIR с управлением (8). Поскольку $N = \text{const}$, мы можем сделать замену переменных $\tilde{S} = \frac{S}{N}$, $\tilde{I} = \frac{I}{N}$, $\tilde{R} = \frac{R}{N}$, $\tilde{T} = \frac{T}{N}$, где \tilde{S} , \tilde{I} , \tilde{R} и \tilde{T} – доли популяции. Тогда система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{S}} = -\beta\tilde{I}\tilde{S} + \gamma p\tilde{T} \\ \dot{\tilde{I}} = \beta\tilde{I}\tilde{S} - \delta\tilde{I} - u(t)\tilde{I} \\ \dot{\tilde{R}} = \delta\tilde{I} + (1-p)\gamma\tilde{T} \\ \dot{\tilde{T}} = u(t)\tilde{I} - \gamma\tilde{T} \end{cases} \quad (9)$$

В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем опускать тильду и записывать переменные S , I , R и T , имея в виду, что это не абсолютные числа индивидуумов в каждой группе, а соответствующие доли популяции.

Пусть $X = (S, I, R, T)^T \in R^4$ – вектор переменных состояния системы, а $u(t) \in R$ – вектор управлений в момент времени t : $0 \leq t \leq T$. Мы полагаем, что функция управления удовлетворяет ограничениям: $0 < u(t) < 0,5$. Конечные условия свободные, в качестве начальных условий выберем $x(0) = (0,99, 0,01, 0, 0)^T$. Это соответствует случаю, когда в начальный момент времени 99% популяции здоровы и только 1% заражен болезнью.

Более компактно рассматриваемую систему дифференциальных уравнений (9) можно переписать в векторной форме (10):

$$\dot{X} = F(X, u), \quad (10)$$

где $\dot{X} = (\dot{S} \ \dot{I} \ \dot{R} \ \dot{T})^T$, а $F(X, u)$ – значение правых частей системы (9).

Наша задача уменьшить суммарное число инфицированных индивидуумов, поэтому целевой функционал будет иметь вид:

$$J = \int_0^T I(t) dt, \quad (11)$$

где T – это интервал времени, на котором рассматривается процесс. Функционал (11) не учитывает затраты на управление, поэтому наряду с (11) мы будем использовать модифицированный функционал вида

$$J = \int_0^T (I(t) + au(t)) dt, \quad (12)$$

где $a > 0$ – это параметр, который описывает относительный вклад управления. Таким образом, минимизация функционала (11) соответствует одновременному уменьшению числа больных и сокращению затрат. А параметр a определяет степень важности критериев. Если $a \approx 0$, то задача сводится к сокращению общего числа больных, а если $a \rightarrow \infty$, то минимизируются исключительно затраты на лечение.

В отличие от классических постановок задач оптимального управления, в функционалах (11) и (12) подынтегральные выражения не содержат квадратов переменных состояния и управлений. Это связано с тем, что как на переменные состояния, так и на управление наложено ограничение неотрицательности.

Наконец, заметим, что описанная задача оптимального управления может быть альтернативно решена с помощью принципа максимума Понтрягина [5]. Однако нелинейная структура уравнений (9) не позволяет найти оптимальное управление аналитически. Поэтому при использовании принципа максимума Понтрягина нам все равно пришлось бы использовать численные методы решения, но для системы, состоящей из большего числа дифференциальных уравнений. Поэтому, для того, чтобы минимизировать целевые функционалы (11) и (12), мы будем использовать прямой метод оптимального управления, основанный на использовании ортогональных

коллокаций. Детали программной реализации указанного метода изложены в работе А. Гуменюк [13]. Ниже мы кратко опишем структуру реализованного программного комплекса.

2.2 Структура программы для численного решения задачи оптимального управления

Задача нахождения оптимального управления формулируется как проблема нахождения минимума нелинейной функции и решается с помощью функции `fmincon` пакета MATLAB.

Функция `fmincon` ищет минимум нелинейной функции нескольких переменных с линейными и нелинейными ограничениями, которые заданы в виде равенств и неравенств. В качестве стартового значения используется начальное приближение вектора переменных.

Вектор начальных значений переменных имеет вид:

$$x_0 = \left(S_1, \dots, S_{n_{cp}}, I_1, \dots, I_{n_{cp}}, R_1, \dots, R_{n_{cp}}, T_1, \dots, T_{n_{cp}}, u \right)^T,$$

где $S_i = S(\tau_i)$, $I_i = I(\tau_i)$, $R_i = R(\tau_i)$, $T_i = T(\tau_i)$, u – вещественная константа, удовлетворяющая ограничениям для функции управления, τ_i – узловые точки, $i = 1, \dots, n_{cp}$.

В качестве нелинейных ограничений типа равенства используется система $4n_{cp}$ алгебраических уравнений

$$DX = \mathbf{F}(X, u), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{F} = \left(F^T(X_1, u), F^T(X_2, u), \dots, F^T(X_{n_{cp}}, u) \right).$$

X представляет собой матрицу размерности $[n_{cp} \times 4]$, содержащую дискретные значения переменных состояния в узлах интерполяционной сетки, а D – матрица дифференцирования:

$$D = \begin{pmatrix} L'_1(t_1) & L'_2(t_1) & \dots & L'_{n_{cp}}(t_1) \\ L'_1(t_2) & L'_2(t_2) & \dots & L'_{n_{cp}}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L'_1(t_{n_{cp}}) & L'_2(t_{n_{cp}}) & \dots & L'_{n_{cp}}(t_{n_{cp}}) \end{pmatrix},$$

где $L(t)$ – базисные полиномы Лагранжа. Система нелинейных алгебра-

ических уравнений (13) представляет собой дискретную аппроксимацию дифференциальных уравнений (9).

В качестве ограничения типа неравенства на функцию управления $u(t)$ наложим ограничение: $u_{min} < u < u_{max}$, где $u_{min} = 0$ и $u_{max} = 0,5$. В дальнейшем мы будем рассматривать упрощенную постановку задачи, в которой полагается, что управляющее воздействие постоянно на интервале управления: $u(t) \equiv u$ для всех $t \in [0, T]$. Более сложные случаи можно анализировать путем выбора управляющего воздействия из некоторого класса функций, параметризованных конечным набором параметров, рассматривая данные параметры в качестве переменных задачи оптимизации.

Аналогично тому, как мы аппроксимировали дифференциальные уравнения (9), для использования с функцией `fmincon` целевой функционал (11) (или (12)) необходимо представить в виде алгебраического выражения. Для этого будет использован метод гауссовых квадратур, который позволяет представить интеграл в виде конечной суммы значений подинтегральной функции в узлах неравномерной сетки, домноженных на некоторые весовые коэффициенты. В квадратурах Гаусса, интеграл на отрезке $[-1, 1]$ аппроксимируется следующим выражением:

$$J = \int_{-1}^1 I(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n_{cp}-1} \omega_i I(x_i),$$

где ω_i – веса, с которыми берутся значения в точках x_i . Веса ω_i и узловые точки x_i вычисляем с помощью функции MATLAB `legs.m` [8]. Мы работаем на интервале $[0, T]$, а значит необходимо сделать замену переменных. Выражение для пересчета узловых точек имеет вид $t = 0,5T(1+x)$, соответственно, минимизируемая функция (11) записывается следующим образом:

$$J = \int_0^T I(t) dt \approx \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{n_{cp}-1} \omega_i I(t_i), \quad (14)$$

где $t_i = 0,5T(1 + x_i)$, $i = 1, \dots, n_{cp}$.

Итак, решение задачи оптимального управления заключается в минимизации функции (14) при наличии нелинейных ограничений (13) и ограничений, обусловленных требованиями на значения переменных состояния и управления. В следующей главе приведены результаты численных экспериментов вычисления оптимального управления для различных постановок задачи.

Глава 3. Результаты численных экспериментов

При помощи написанного скрипта в системе MATLAB было проведено несколько экспериментов, которые различаются между собой выбором целевого функционала, параметром p и количеством узлов неравномерной сетки n_{cp} .

Зададим константы таким образом, чтоб они удовлетворяли неравенству $R_0 > 1$, где $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$. В таком случае динамика системы будет соответствовать процессу возникновения эпидемии. Пусть эффективная скорость контакта $\beta = 5$. Скорость, с которой зараженные особи выздоравливают, $\delta = 2$ и длительность лечения $\gamma = 3$. Вероятность того, что вылечившийся индивидум не разовьет иммунитет, т. е. p , будет варьироваться. В качестве сетки рассматриваем неравномерную сетку с узлами Лежандра – Гаусса – Радо.

Минимизируемый функционал для первой серии экспериментов имеет вид:

$$J = \int_0^T I(t) dt$$

В первой серии экспериментов посмотрим, как меняются результаты для разных p при увеличении числа узлов неравномерной сетки. Для наглядности продемонстрируем графики, которые получились для одного из этих случаев. Все полученные результаты будем записывать в таблицы. $fval$ — минимальное значение, которое будет принимать целевой функционал при заданных параметрах. u^* — оптимальное управление.

- Полученные при $n_{cp} = 15$ результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

p	0.1	0.5	0.9
u^*	0.5	0.5	0.5
fval	0.3264	0.3463	0.3693

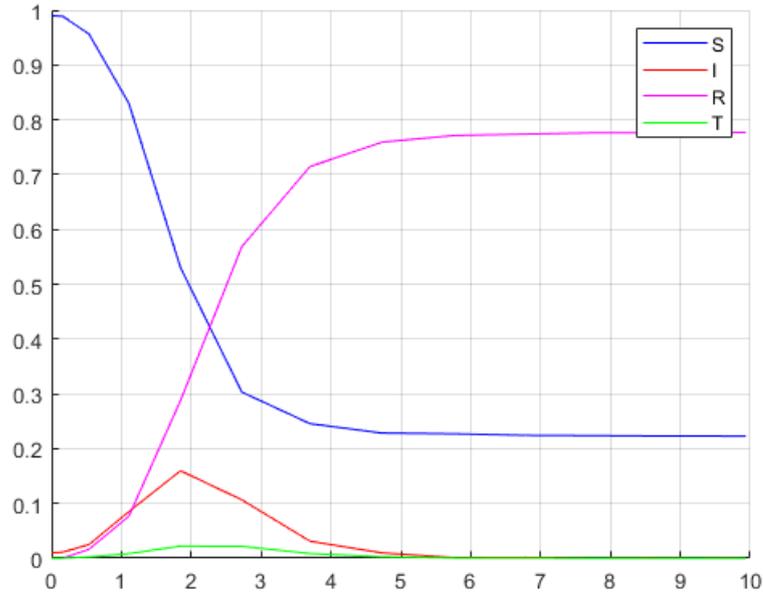


Рис. 6: Решение системы примет такой вид при $p = 0.5$, $n_{cp} = 15$

Можно заметить, что для данного функционала значение p не влияет на значение оптимального управления u^* .

Усложним целевой функционал путем добавления в него функции управления $u(t)$. Тогда он примет вид:

$$J = \int_0^T I(t) + au(t) dt,$$

где a – положительный параметр, который мы будем варьировать.

Проведем две серии экспериментов для такого функционала, в которых мы будем варьировать параметр a и наблюдать за тем, как меняются результаты при увеличении числа узлов неравномерной сетки. Эксперименты будут отличаться между собой параметром p . В таком случае мы можем посмотреть меняется ли структура решений при разных p .

Проведем серию экспериментов при $p = 0,7$:

- Полученные при $n_{cp} = 15$ результаты представлены в таблице 2;
- Полученные при $n_{cp} = 20$ результаты представлены в таблице 3;
- Полученные при $n_{cp} = 25$ результаты представлены в таблице 4.

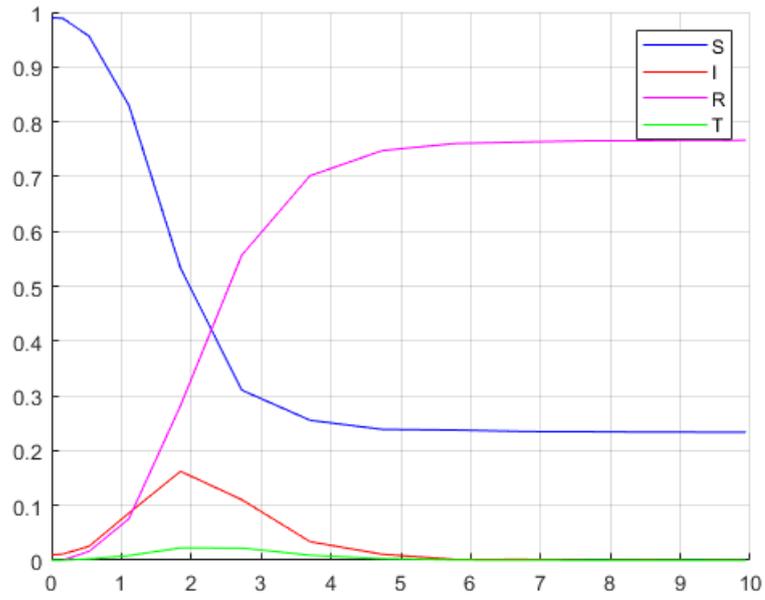


Рис. 7: Решение системы примет такой вид при $p = 0,7$, $n_{cp} = 15$, $a = 1$

Таблица 2

a	1	5	10	15	20
u^*	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
fval	5.3573	25.3573	50.3573	75.3573	100.3573

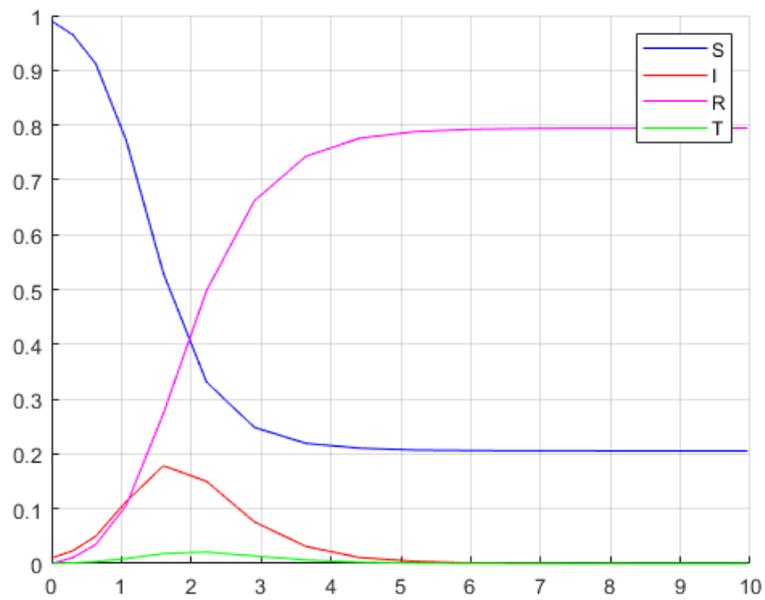


Рис. 8: Решение системы примет такой вид при $p = 0,7$, $n_{cp} = 20$, $a = 1$

Таблица 3

a	1	5	10	15	20
u^*	0.3857	0.5	0.1848	0.5	0.5
fval	4.2318	25.3555	18.8906	75.3555	100.3555

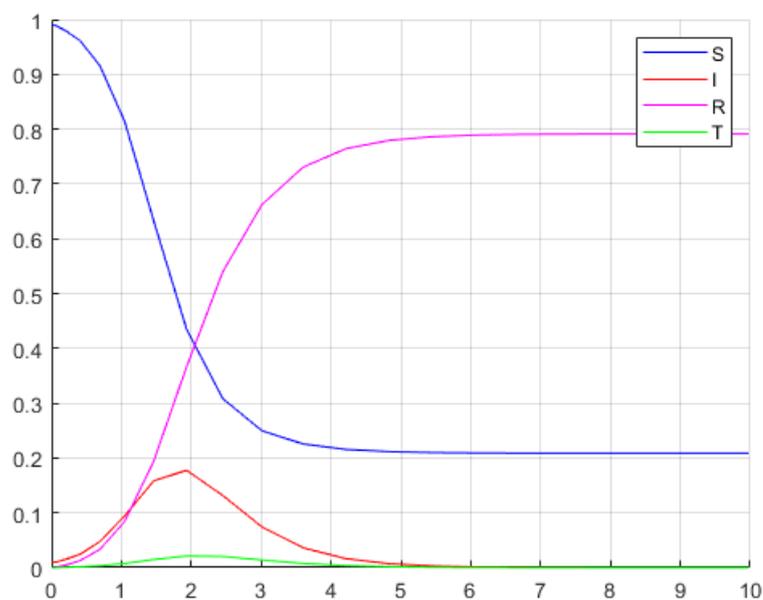


Рис. 9: Решение системы примет такой вид при $p = 0.7$, $n_{cp} = 25$, $a = 1$

Таблица 4

a	1	5	10	15	20
u^*	0.3965	0.3312	0.1929	0.3580	0.3666
fval	4.3382	16.9472	19.6079	54.0819	73.6997

Сравнив результаты в таблицах, мы нашли численные аппроксимации оптимальных управлений для различных a при $p = 0,7$. Результаты представлены в таблице 5:

Далее проведем точно такой же эксперимент, но поменяем параметр p . Пусть $p = 0,5$:

- Полученные при $n_{cp} = 15$ результаты представлены в таблице 6;
- Полученные при $n_{cp} = 20$ результаты представлены в таблице 7;

Таблица 5

a	1	5	10	15	20
u^*	0.3857	0.3312	0.1848	0.3580	0.3666
fval	4.2318	16.9472	18.8906	54.0819	73.6997

Таблица 6

a	1	5	10	15	20
u^*	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
fval	5.3463	25.3463	50.3463	75.3463	100.3463

Таблица 7

a	1	5	10	15	20
u^*	0.4825	0.5	0.5	0.5	0.4564
fval	5.1723	25.3444	50.3463	75.3444	91.6315

- Полученные при $n_{cp} = 25$ результаты представлены в таблице 8.

Таблица 8

a	1	5	10	15	20
u^*	0.2919	0.3068	0.4278	0.4440	0.4326
fval	3.3042	15.7229	43.1390	66.9613	86.8688

Проанализировав полученные результаты, можно заметить:

1. С увеличением числа узловых точек получаются все более точные результаты. Это особенно видно в последней серии экспериментов, в которой целевой функционал при $n_{cp} = 25$ имеет минимальное значения для всех параметров a .
2. В то же время, в ряде случаев, оптимизационный процесс сходил-ся к локальным экстремумам, как видно из сравнения результатов оптимизации. Преодоление этой проблемы потребует дальнейшей до-работки используемого численного алгоритма.
3. Также можно заметить, что с изменением величины p структура оп-тимальных решений меняется. При $p = 0,5$ оптимальное управление растет с увеличением параметра a , а при $p = 0,7$ оптимальное управ-ление изменяется нелинейно.

Глава 4. Заключение

В представленной выпускной квалификационной работе были рассмотрены классические модели распространения эпидемий SIR, представляющая собой систему дифференциальных уравнений, фазовые переменные которой (S — susceptible, I — Infected, R — removed) являются долями некоторой однородной популяции, а сами уравнения отображают динамику перемещения особей популяции между этими группами, и SIRS, которая является расширением модели SIR с тем условием, что особи популяции могут не получать долговременный иммунитет. Был установлен критерий возникновения эпидемии и определено базовое репродуктивное число в рамках системы SIR.

На основе классических моделей была предложена новая расширенная модель SIRT, учитывающая возможность управления долей зараженных индивидуумов, отправленных на лечение.

Для расширенной модели была сформулирована задача поиска оптимального управления. Для решения этой задачи в среде Matlab был реализован программный комплекс, основанный на использовании метода ортогональных коллокаций. Был проведен ряд численных экспериментов, направленных на вычисление численных аппроксимаций оптимального управления для различных постановок задач. Была исследована зависимость полученных оптимальных управлений от параметров модели и от параметров алгоритма (число коллокационных точек).

Список литературы

- [1] Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society. 1927. No 115. P.700—721.
- [2] Брико Н.И.. Парадигма современной эпидемиологии // Журнал Медици-
Аль. 2014. Т 3(13) , С. 8–36.
- [3] Братусь А.С., Новожилов А.С.,Платонов А.П. Динамические системы
и модели биологии М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. 151–177 с.
- [4] Gromov D. V., Bulla I., Romero-Severson E. O., Serea O. S. Numerical
optimal control for HIV prevention with dynamic budget allocation //
Mathematical Medicine and Biology. 2016. Vol. 35. No 4. P. 469-491.
- [5] Sharomi O., Malik T. Optimal control in epidemiology // Springer
Science+Business Media New York. 2015. P. 3–5.
- [6] Ногин В. Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое
пособие — СПб: ЮТАС, 2008. 92 с.
- [7] D. BERNOULLI, An attempt at a new analysis of the mortality caused by
smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it, reprint, Rev.
Med. Virol., 14 2004, P. 275–288.
- [8] Shen J., Tang T., Wang L.-L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and
Applications / Vol. 41 of Springer Series in Computational Mathematics —
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 472 p.
- [9] Михеева И.В., Герасимов А.Н., Салтыкова Т.С., Ермоленко М.В., Во-
ронин Е.М. Применение математического моделирования для анали-
за вспышек ветряной оспы в детских организованных коллективах. //
Эпидемиология и вакцинопрофилактика. 2013. Т. 1(68). С. 69–73.
- [10] Guerra, Fiona M.; Bolotin, Shelly; Lim, Gillian; Heffernan, Jane; Deeks,
Shelley L.; Li, Ye; Crowcroft, Natasha S. The basic reproduction number

- (R0) of measles: a systematic review. // The Lancet Infectious Diseases. 2017. Vol. 17. No. 12. P. 420–428.
- [11] Ferguson N.M. Strategies for mitigating an influenza pandemic. // Nature. 2006. Vol.42 No. 7101 P. 448–452.
- [12] Berrut J-P., Trefethen L. N. Barycentric Lagrange interpolation. // SIAM Review. 2004. Vol. 46. No 3. P. 501–517.
- [13] Гуменюк А.С., Выпускная квалификационная работа: «Разработка программного комплекса для численной идентификации эпидемиологических моделей на основе данных наблюдений». Факультет ПМ-ПУ, СПбГУ, 2020.
- [14] Андерсон Р., Мэй Р. Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль. М.: Научный мир, 2004. 784 с.