

Санкт–Петербургский государственный университет

Новгородцев Виталий Александрович

Выпускная квалификационная работа

Излучение гравитационных волн точечным телом

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Процессы управления и высокопроизводительные вычислительные системы»

Научный руководитель:
профессор кафедры теории систем управления электрофизической
аппаратурой,
д.ф. - м.н. Дривотин Олег Игоревич

Рецензент:
доцент, университет ИТМО,
д.ф. - м.н. Холодова Светлана Евгеньевна

Санкт-Петербург

2020 г.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Математический аппарат, применяемый для описания пространства-времени	5
1.1. Многообразие	5
1.2. Тензоры	7
1.3. Дифференциальные формы	9
1.4. Метрический тензор	13
1.5. Структура пространства-времени и системы отсчёта	16
Глава 2. Сферические гравитационные волны	18
2.1. Уравнение гравитационного поля	18
2.2. Законы сохранения	20
2.3. Постановка задачи	22
2.4. Волновое решение	22
2.5. Потоки энергии и импульса	28
Заключение	37
Список литературы	38

Введение

Математическое описание гравитационного поля привлекает внимание исследователей с давних времен. И. Ньютон предложил статическое описание в рамках концепции дальнего действия [11], которое в настоящее время известно как закон всемирного тяготения. В рамках этого описания гравитационные волны невозможны. Позже Лаплас, описывая вековое ускорение Луны, предположил, что гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью [10]. Но ему не удалось записать уравнение, описывающее гравитационное поле. Новый подход к описанию гравитации появился в 20 веке, когда Г. Минковским была предложена концепция пространства-времени [20], а А. Эйнштейн [18] сформулировал дифференциальное уравнение гравитационного поля, которое известно как уравнение Эйнштейна.

Существование гравитационных волн предсказал еще А. Эйнштейн, анализируя решения уравнения гравитационного поля [19]. В рамках этого уравнения гравитационное поле описывается как искривление пространства-времени. Распространение искривления в пространстве-времени и есть гравитационная волна. Долгое время гравитационные волны исследовались только теоретически. Только спустя 100 лет в 2015 году удалось их обнаружить экспериментально [14]. Зарегистрировавшие их учёные за это открытие получили Нобелевскую премию.

Гравитационным волнам посвящено большое количество работ [7]. Во всех этих работах гравитационные волны рассматриваются как решения уравнения Эйнштейна [18]. А. Эйнштейн указал на неоднозначность решений уравнения для гравитационного поля и на необходимость дополнительных условий на координаты в пространстве-времени [17]. В его работах использовалось, например, условие равенства определителя матрицы компонент метрического тензора минус единице. Позже использовались и другие условия на координаты (см., например, [9, 13]). Так, в работе [9] и других рассматривались волновые решения при некоторых дополнительных нековариантных условиях на координаты. При этом смысл удовлетворяющих этому условию координат неясен. В работах [3, 16] было

предложено условие, означающее что используемые координаты являются пространственно-временными. При этом компоненты метрического тензора имеют простой физический смысл.

Целью данной работы является применение подхода, предложенного в работах [3, 16] для нахождения волновых решений уравнения Эйнштейна. Применение именно такого подхода является актуальным, поскольку он ранее не применялся. Другая задача, рассматриваемая в работе, – вычисление потоков импульса, переносимых гравитационной волной. Эта задача также является актуальной в связи с упоминавшейся экспериментальной регистрацией гравитационных волн. Ранее при описании потоков энергии и компонент импульса использовался некоторый нековариантный объект, называемый "тензором энергии-импульса" (напр., [9]). Отсутствие соответствующего ковариантного объекта, т.е. тензора энергии-импульса, характеризующего плотности потоков энергии и компонент импульса, отмечено в работе [15]. В настоящем исследовании используется тензор, впервые предложенный в работе [3], и ранее не использовавшийся при решении таких задач. Поэтому вычисления с использованием такого тензора также актуальны.

Глава 1. Математический аппарат, применяемый для описания пространства-времени

1.1 Многообразиие

В основе современной физической теории лежит концепция пространства - времени, которое рассматривается как четырехмерное многообразие. На этом многообразии задаются различные алгебраические структуры, такие как тензоры, в частности, дифференциальные формы и метрический тензор. В настоящем параграфе мы и рассмотрим эти понятия [2, 3, 5, 6, 8].

Назовём n -мерным многообразием M хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, такое что у любой точки существует окрестность D_α гомеоморфная некоторой связной области содержащейся в R^n , то есть существует отображение $f_\alpha : D_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset R^n$.

Рассмотрим пересечение этих окрестностей: $D_\alpha \cap D_\beta$. Композиция отображений $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$, действующая из $f_\beta(D_\alpha \cap D_\beta)$ в $f_\alpha(D_\alpha \cap D_\beta)$ будет непрерывным отображением, так как это композиция непрерывных отображений. Если эта композиция ещё и непрерывно дифференцируема, то многообразие называется гладким.

Пару (D_α, f_α) называют картой. Примерами многообразий могут служить: евклидово пространство R^n , k -мерная поверхность в R^n (то есть определение покрывает достаточно широкий класс множеств), например, сфера в $R^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, является двумерным многообразием, так как окрестность любой точки можно отобразить в R^2 .

Если применить отображение f_α к некоторой точке $x \in U_\alpha$, то мы получим элемент $f_\alpha(x) \in R^n$, которому можно сопоставить набор чисел $(x^1, \dots, x^n)^T$, где T обозначает транспонирование. Такой набор называют координатами точки x . Пару (D_α, f_α) будем называть системой координат, а функции $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$, осуществляющие переход от одной системы координат в другую, функциями перехода.

Воспользуемся подходом, как в [6], для определения касательного вектора. Рассмотрим кривую лежащую на многообразии M , то есть гладкое отображение отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в M . Если кривая находится в области

D_α , в которой задана система координат x_α^k , то мы можем записать кривую в виде:

$$x_\alpha^k = x_\alpha^k(\tau), \tau \in [a, b], k = 1, \dots, n.$$

Вектор скорости для этой кривой будет иметь вид: $\dot{x}_\alpha = (\dot{x}_\alpha^1, \dots, \dot{x}_\alpha^n)^T$. Если мы рассмотрим область действия пересечения координатных областей $D_\alpha \cap D_\beta$, то мы можем записать кривую в виде двух представлений: через координаты x_α^k области D_α и координаты x_β^k области D_β , при этом имеет место следующее тождество $x_\alpha^k(x_\beta^1(\tau), \dots, x_\beta^n(\tau)) \equiv x_\alpha^k(\tau)$.

Таким образом для скорости получаем:

$$\dot{x}_\alpha^k = \sum_i \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i} \dot{x}_\beta^i.$$

С помощью этой формулы введём определение касательного вектора. Касательным вектором к многообразию M в произвольной точке x называется вектор, компоненты которого при переходе от системы координат x_β^k к x_α^k меняются по закону:

$$\tilde{v}_\alpha^l = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_\alpha^l}{\partial x_\beta^i} \right)_x v_\beta^i.$$

Такой закон преобразования называется контравариантным, а вектора называются контравариантными. Множество касательных векторов к n - мерному многообразию в точке x образует n -мерное линейное пространство TM_x , которое называется касательным, при этом базис в этом пространстве задаётся выбором координат (x^k) в окрестности точки x . Базисными элементами в этом случае будут: $e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Такой базис называется координатным.

Везде далее по повторяющимся индексам знак суммирования будет опускаться в соответствие с правилом суммирования Эйнштейна. Рассмотрим пространство TM_x^* сопряжённое пространству TM_x . Его называют кокасательным пространством. Элементами этого пространства являются всевозможные линейные формы в точке x , заданные на векторах из TM_x . Действие линейной формы ω на вектор v определяется равенством:

$(\omega, v) = \omega_i v^i = \tilde{\omega}_i \tilde{v}^i$, где тильда означает, что элемент записан в новых координатах. Это равенство имеет место, так как скаляр является инвариантной величиной. Используя это равенство можно легко увидеть, что компоненты линейной формы при преобразовании координат меняются по закону: $\tilde{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \omega_j$. Такой закон преобразования называется ковариантным. Вектора, компоненты которых меняются по ковариантному закону, называются ковариантными векторами или ковекторами.

Базис в пространстве TM_x^* можно выбрать с помощью нахождения таких элементов $h^{(j)}$, что

$$(h^{(j)}, e_{(i)}) = \delta_i^j, \delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Элементы дуального базиса будут иметь вид $h^{(j)} = (\delta_1^j, \dots, \delta_n^j)$, $j = \overline{1, n}$, но эти выражения совпадают с градиентами координат для данной системы координат: $dx^j = (\delta_1^j, \dots, \delta_n^j)$, $j = \overline{1, n}$. Итак, базисными элементами дуального пространства являются dx^i , тогда любую линейную форму можно представить в виде $\omega = \omega_i dx^i$. Если вектор или линейная форма задана в некоторой области многообразия, тогда будем говорить, что в этой области задано векторное поле или поле линейных форм. В случае линейных форм из кокасательного пространства можно также говорить, что задана дифференциальная форма первой степени. Градиент некоторой функции также является дифференциальной формой, а её компоненты имеют вид: $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

1.2 Тензоры

Рассмотрим полилинейную форму T типа $\begin{pmatrix} K' \\ K \end{pmatrix}$, то есть отображение, ставящее в соответствие K упорядоченным векторам из линейного пространства V и K' упорядоченным линейным формам из сопряжённого пространства V^* некоторое число, то есть имеем:

$$T(v_{(1)}, \dots, v_{(K)}, \omega_{(1)}, \dots, \omega_{(K')}).$$

Очевидно, что векторы являются полилинейными формами типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а линейные формы - полилинейными формами типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Полилинейные формы называют также тензорами. Компоненты полилинейной формы - это её значения на базисных элементах, при этом базисом сопряжённого пространства является базис сопряжённый базису исходного пространства. Полилинейные формы типа $\begin{pmatrix} K' \\ K \end{pmatrix}$ образуют линейное пространство размерности $n^{K+K'}$, при этом базисом будет являться набор полилинейных форм, которые действуют по правилу:

$$e_{(i_1, \dots, i_{K'})}^{(j_1, \dots, j_K)} = h^{j_1}(v_1) \cdot \dots \cdot h^{j_K}(v_K) \cdot e_{i_1}(\omega_{(1)}) \cdot \dots \cdot e_{i_{K'}}(\omega_{(K')}). \quad (1)$$

Определим тензорное произведение как в [1]. Возьмём для начала два вектора x и y и построим тензорное произведение для них. Возьмём переменную пару ковекторов (ξ, χ) , которые независимо друг от друга пробегают сопряжённое пространство V^* , и построим отображение f :

$$f(\xi, \chi) = (\xi, x) \cdot (\chi, y).$$

Отображение f является билинейным, а тогда является некоторым тензором типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, который обозначается $x \otimes y$ и называется тензорным произведением векторов x и y . Формулой $x \otimes y(\xi, \chi) = (\xi, x) \cdot (\chi, y)$ он определён инвариантно. Очевидно, что можно обобщить результат на произвольное количество векторов, при этом необязательно, чтобы вектора были из одного пространства, например, можно брать и ковектора. Тензорное произведение не коммутативно, но ассоциативно.

Перепишем базисные элементы в пространстве тензоров, представленные в виде (1), используя операцию тензорного произведения:

$$e_{(i_1, \dots, i_{K'})}^{(j_1, \dots, j_K)} = h^{(j_1)} \otimes \dots \otimes h^{(j_K)} \otimes e_{(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{(i_{K'})}.$$

Тогда любой тензор T можно разложить по базису:

$$T = T_{j_1 \dots j_K}^{i_1 \dots i_{K'}} h^{(j_1)} \otimes \dots \otimes h^{(j_K)} \otimes e_{(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{(i_{K'})}. \quad (2)$$

Если рассмотреть некоторую область D многообразия M и задать в каждой её точке полилинейную форму, то в этом случае будем говорить, что задано поле полилинейных форм. Если в этой области задать систему координат, а в качестве базисов в пространствах TM_x и TM_x^* выбрать координатный и ему сопряжённый, то закон преобразования компонент тензора при преобразовании координат будет иметь вид:

$$\tilde{T}_{m_1 \dots m_K}^{k_1 \dots k_{K'}} = \frac{\partial \tilde{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{k_{K'}}}{\partial x^{i_{K'}}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \tilde{x}^{m_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{j_K}}{\partial \tilde{x}^{m_K}} \cdot T_{j_1 \dots j_K}^{i_1 \dots i_{K'}}.$$

Это легко получить из (2), если учесть закон преобразования векторов и ковекторов и что получающееся выражение не должно зависеть от системы координат.

Ещё одна операция на тензорах - это свёртка. Если взять тензор типа $\begin{pmatrix} K' \\ K \end{pmatrix}$, при этом $K \neq 0$ и $K' \neq 0$, выбрать два индекса - верхний и нижний и затем просуммировать все компоненты, где эти индексы совпадают, то мы как раз и получим сумму, называемую свёрткой тензора по этим индексам. Результат свёртки также является тензором, но уже ранга $\begin{pmatrix} K' - 1 \\ K - 1 \end{pmatrix}$. Можно последовательно выполнять несколько операций над тензорами, например, взять тензорное произведение, а потом свёртку. Если взять тензорное произведение вектора v и ковектора ω , а потом полученный тензор свернуть по верхнему и нижнему индексу, то мы получим $\omega_i v^i$.

1.3 Дифференциальные формы

Рассмотрим полилинейную форму T типа $\begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$ антисимметричную по всем переменным. Это означает, что если мы переставим местами любые два аргумента в T , в данном случае аргументами являются вектора из

TM_x , то форма поменяет знак, то есть имеем:

$$T(\dots, v_{(i)}, \dots, v_{(j)}, \dots) = -T(\dots, v_{(j)}, \dots, v_{(i)}, \dots).$$

Такая форма называется внешней формой степени K , а множество таких форм будем обозначать $A_K(R^n, R)$ (тут учтён момент, что так как TM_x конечномерно, то его можно отождествить с R^n). Если внешняя форма определена в некоторой области D многообразия M , то тогда её называют дифференциальной формой степени K . Множество дифференциальных форм степени p будет обозначаться далее как E_p .

Введём понятие внешнего произведения дифференциальных форм. Рассмотрим $\omega \in E_p$ и $\chi \in E_k$. Внешним произведением форм ω и χ будем называть:

$$\omega \wedge \chi([v]) = \sum_{i=1}^{\frac{(p+k)!}{p!k!}} \varepsilon(\sigma_i) \omega \otimes \chi([\sigma_i v]). \quad (3)$$

где в $[\cdot]$ стоит набор векторов, σ обозначает перестановку этого набора, ε обозначает чётность перестановки. Число $\frac{(p+k)!}{p!k!}$ берётся из того, что берутся только те перестановки, которые сохраняют порядок следования аргументов в дифференциальных формах ω и χ , то есть $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+k)$. Если этого не учитывать, то возникнут дополнительные одинаковые члены, которых будет $p!k!$, это происходит за счёт того, что, например, если взять только первые p аргументов у формы ω и начать их переставлять, то за счёт того, что форма умножается на чётность такой перестановки и при этом чётность перестановки всех аргументов тоже меняется при перестановке только первых p аргументов, получаем, что если взять все перестановки, то за счёт перестановок первых p аргументов возникнет $p!$ одинаковых слагаемых. Аналогично для последних k аргументов. Если просто взять и тензорно умножить две формы, то в результате получится полилинейная форма, антисимметричная по первым p и по последним k аргументам, поэтому необходимо было результат привести к антисимметричной по всем аргументам форме, чтобы операция была замкнута. Внешнее произведение ассоциативно и антикоммутативно, то есть: $\omega \wedge \chi = (-1)^{pk} \chi \wedge \omega$. Это следует из того, что можно

рассматривать правую часть, как левую только действующую на аргументы, идущие в другом порядке. Тогда необходимо поменять местами первые r и последние k аргументов местами, а для этого необходимо произвести rk перестановок соседних аргументов. В частности, для форм первых степеней имеем: $\omega \wedge \omega = 0$

Любую форму степени r можно разложить по базису, который называется каноническим разложением:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (4)$$

Из разложения можно заметить, что максимальная степень формы заданной на n -мерном многообразии равна n . Размерность пространства форм степени E_p равна $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Введём следующую операцию на дифференциальных формах – операцию внешнего дифференцирования. Внешней производной формы $\omega \in E_p$ будем называть форму $d\omega \in E_{p+1}$ такую, что:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (5)$$

Чтобы получить такое представление, можно рассмотреть дифференциальную форму степени r как отображение заданное на некоторой области пространства R^n в пространство внешних форм степени r [8], заданных на касательном пространстве TM_x , то есть имеем

$$\omega : D \rightarrow A_p(R^n, R).$$

Если это отображение класса C^n , $n \geq 1$, то можно рассмотреть производное отображение ω' , которое будет принадлежать классу C^{n-1} :

$$\omega' : D \rightarrow \mathcal{L}(R^n; A_p(R^n, R)).$$

Для всех точек $x \in D$ $(\omega'(x) \cdot \xi_0) \cdot (\xi_1, \dots, \xi(p)) \in R$ будет непрерывной полилинейной формой от векторов $\xi_0, \dots, \xi_p \in R^n$, и при этом будет

антисимметричной по последним p векторам. Далее, произведя антисимметризацию по формуле (3) мы получим:

$$d\omega(x; \xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\omega'(x) \cdot \xi_i) \cdot (\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p).$$

Очевидно, что операция взятия внешней производной линейна. Можно показать, что для любой дифференциальной формы ω выполнено

$$d(d\omega) = 0. \quad (6)$$

Кроме того, для форм $\alpha \in E_p$ и $\beta \in E_q$ имеет место правило Лейбница:

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta). \quad (7)$$

Тогда, если применить внешнюю производную к форме, записанной в каноническом виде (4), и учесть (6) и (7) и линейность операции, то мы как раз и получим (5).

Формы α , такие что $d\alpha = 0$ называются замкнутыми формами. Если рассмотреть формы вида $\beta = d\alpha$, то можно заметить, что $d\beta = 0$. Такие формы β называются точными. Возникает вопрос: если форма замкнута, то будет ли она точной?

Лемма Пуанкаре: Пусть дифференциальная форма α степени $p > 0$ задана в некоторой области D (это может быть односвязная область с достаточно гладкой границей), для которой существует гомеоморфизм на открытый шар единичного радиуса лежащего в R^n , тогда если α замкнута, то существует форма β , такая что $\alpha = d\beta$.

Возникает задача интегрирования формы α , тогда форму β называют первообразной формой. Если многообразие ориентировано, то тогда можно проинтегрировать форму по некоторой области многообразия. Если же у нас имеется некоторая функция, то в начале нужно её умножить на форму объёма, а затем проинтегрировать.

1.4 Метрический тензор

Рассмотрим теперь один очень важный пример тензора, а именно метрический тензор, который широко применяется в физике. Следуя [3], рассмотрим многообразие M и гладкую кривую L на нём, то есть дано гладкое отображение $m : [a, b] \rightarrow M$. Кривая является одномерным многообразием, при этом касательное пространство $TM_{x,L}$ будет одномерным и являться подпространством пространства $TM_{x,M}$. Можно задать ориентацию кривой L , выбрав векторное поле $v(x) \in TM_{x,L}$, $x \in L$. Один из концов назовём началом кривой. Если на многообразии M будет задан некоторый невырожденный дважды ковариантный тензор Q , то его редукция на кривую L будет иметь вид:

$$\xi = \pm \sqrt{Q(\chi, \chi)},$$

где χ это элемент из $TM_{x,L}$. Знак $+$ выбирается, если направление совпало с ориентацией, а минус, если нет. Полученная редукция является дифференциальной формой. Пусть для любой кривой L на M задана некоторая функция θ , определённая на этой кривой, значениями которой на точках кривой L будут некоторые величины, отсчитываемые от начала кривой. Тогда θ можно рассматривать как функцию, заданную на многообразии L . Метрическим тензором g назовём такой невырожденный симметрический дважды ковариантный тензор, что его редукция на кривую L даст $d\theta$. То есть имеем $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$. Симметричность гарантирует, что тензор g можно ортогональным преобразованием привести к диагональному виду в окрестности точки $x \in M$. Таким образом, можно добиться получения такого вида g :

$$g = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1).$$

Если рассматривается длина линии, тогда в малой окрестности точки x соответствующая квадратичная форма будет положительно определённой,

и длина кривой в этой малой окрестности будет вычисляться:

$$\delta\theta^2 = \sum_{i=1}^n (\delta x^i)^2.$$

В общем случае длина линии в малой окрестности точки x будет вычисляться:

$$\delta\theta^2 = g_{ij}\delta x^i\delta x^j.$$

Если мы хотим вычислить всю длину кривой, то получаем:

$$S = \int_a^b \sqrt{g(\dot{m}(t), \dot{m}(t))} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(m(t)) \frac{dm^i}{dt} \frac{dm^j}{dt}} dt.$$

Если на многообразии задан метрический тензор, то такое многообразие называется римановым. Если хотя бы один элемент на диагонали равен -1 , то метрический тензор называют псевдометрическим, а многообразие псевдоримановым. Например, в специальной теории относительности рассматривается 4-мерное псевдориманово многообразие с элементами длины $\delta l^2 = (\delta x^0)^2 - (\delta x^1)^2 - (\delta x^2)^2 - (\delta x^3)^2$. В общей же теории относительности имеем $\delta l^2 = g_{ij}\delta x^i\delta x^j$.

Можно определить контравариантный метрический тензор. Контравариантный метрический тензор - это такой тензор, что если взять его тензорное произведение с метрическим тензором, а потом сделать свёртку по паре индексов, то мы получим тензор, компонентами которого являются символы Кронеккера. Из определения следует, что компоненты контравариантного метрического тензора определяются из системы уравнений:

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

Рассмотрим операцию опускания и поднимания индексов. С помощью метрического тензора можно ставить в соответствие тензорам типа $\begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$ тензоры типа $\begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$. Для этого необходимо K раз тензорно умножить метри-

ческий тензор g на тензор W из $\begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$, а затем K раз свернуть, то есть получаем:

$$T_{p_1 \dots p_K} = g_{i_1 p_1} \cdot \dots \cdot g_{i_K p_K} T^{i_1 \dots i_K}.$$

Аналогично можно использовать контравариантный метрический тензор для установления соответствия между K раз ковариантными тензорами и K раз контравариантными. Если мы хотим опустить или поднять индекс у тензора смешанного типа, то нужно обговаривать на каких местах записывать опускаемые или поднимаемые индексы.

С помощью метрического тензора введём ещё одно важное понятие – форма объёма. Для начала рассмотрим локально декартовую систему координат в точке x , то есть такую систему координат, что матрица метрического тензора является единичной, и параллелепипед, у которого одна из вершин совпадает с точкой x , а рёбра задаются векторами смещения $\delta x_{(i)}$, то есть векторами получающимися, если рассмотреть разность двух близких точек, соединённых одной кривой. Считаем, что такая система векторов смещения является правоориентированной, потому что в любом случае можно составить такую комбинацию векторов, что полученная система будет правоориентированной. При переходе от одной системы с правоориентированным базисом к другой системе тоже с правоориентированным базисом якобиан замены положителен, то есть $J > 0$. Объём такого параллелепипеда в локально декартовых координатах будет равен:

$$\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n (\delta x_{(1)}, \dots, \delta x_{(n)}).$$

Если задана форма равная степени многообразия с компонентой $T_{1, \dots, n}$, то при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ она преобразуется так: $T_{1, \dots, n} = T_{1', \dots, n'} J$. Если рассмотреть преобразование корня от определителя метрического тензора, то получим: $\sqrt{|\det(g)|} = \sqrt{|\det(g')|} J$. Получаем тензор, разложение которого по базису имеет вид $\sqrt{|\det(g)|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (единственным базисным элементом является $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, где x^1, \dots, x^n — координаты для правоориентированного базиса). Этот тензор и называется формой объёма.

1.5 Структура пространства-времени и системы отсчёта

Пространство-время - это гладкое четырёхмерное ориентируемое псевдориманово многообразие с сигнатурой метрики $\langle 1, 3 \rangle$, при этом точки этого многообразия называют событиями. В окрестности любой точки можно ввести 4 координаты: x^0, x^1, x^2, x^3 . Гладкость даёт возможность выбора достаточно широкого класса преобразования координат, то есть допустимы все диффеоморфизмы. Но есть координаты, которые имеют физическое основание, а именно, пространственно-временные координаты.

Следуя работам [3, 16] введем понятия системы отсчета и пространственно -временных координат. Рассмотрим некоторое точечное тело с часами, то есть такое тело, что для каждого момента времени, показанного часами, положение тела описывается четырьмя координатами. Движению тела ставится в соответствие некоторая гладкая кривая: $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{0, 3}$, которая называется мировой линией точечного тела. Точечное тело с часами будем далее называть наблюдателем. Рассмотрим область D пространства-времени такую, что для всякого события из этой области будет существовать событие, которое лежит на мировой линии наблюдателя, которого мы назовём главным, и при этом одновременное с ним. Иначе мы не сможем измерить время. Далее будем считать, что область D неограничена. Если бы она была ограничена, то время мы смогли бы измерить только локально, то есть считаем, что есть возможность глобального измерения времени.

Временным слоем назовём множество τ_t всех событий, которые произошли в момент времени t . Каждый временной слой является трёхмерным многообразием. В силу предыдущих предположений всё пространство-время Ψ можно представить как объединение всех временных слоёв: $\Psi = \cup_t \tau_t$. Рассмотрим некоторую точку $x \in \Psi$. Существует наблюдатель, мировая линия которого проходит через эту точку. Перебирая всё множество Ψ получаем, что всё Ψ пронизывается непересекающимися мировыми линиями наблюдателей. Системой отсчёта назовём систему наблюдателей, главного наблюдателя и набор диффеоморфизмов на некоторый фиксиро-

ванный временной слой τ_0 , который назовём конфигурационным пространством, $F_t: \tau_t \rightarrow \tau_0$. При этом эти отображения работают так: пусть $x \in \tau_t$, найдётся наблюдатель, мировая линия w_x которого проходит через эту точку, тогда $F_t(x) = w_x \cap \tau_0$. Получается, что точкам, лежащим на мировой линии наблюдателя, соответствует одна и та же точка конфигурационного пространства.

Таким образом, каждое событие в системе отсчёта принадлежит некоторому временному слою τ_t , тогда можно этому событию сопоставить время t и точку конфигурационного пространства. Тогда, если задать систему координат в конфигурационном пространстве, мы получим три пространственные координаты x^1, x^2, x^3 , которые вместе с выбором временной координаты $x^0 = t$ будут образовывать координаты события, ассоциированные с данной системой отсчёта и системой координат в конфигурационном пространстве данной системы отсчёта.

Таким образом компоненты метрического тензора в таких координатах будут иметь вид:

$$g_{0j} = 0, j = \overline{1, 3}.$$

При этом компонента g_{00} не обязательно равна 1, так как она характеризует скорость хода часов локального наблюдателя по сравнению с часами главного наблюдателя.

Таким образом, чтобы описать гравитационное поле достаточно найти метрический тензор. Уравнения, которые описывают гравитационное поле, должны быть записаны в ковариантной форме, то есть иметь вид тензорного равенства.

Глава 2. Сферические гравитационные волны

2.1 Уравнение гравитационного поля

Гравитационные волны описываются уравнением Эйнштейна [3, 18], которое имеет вид

$$R = 0. \quad (8)$$

Здесь R – тензор Риччи, компоненты которого равны

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln |g|}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^m} - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m,$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$, $g_{ij}g^{ik} = \delta_j^k$ (δ_j^k символы Кронеккера). Здесь и далее по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование от 0 до 3. Величины x^0, x^1, x^2, x^3 – это координаты, заданные на пространстве-времени, которое рассматривается как гладкое ориентируемое псевдориманово четырёхмерное многообразие с сигнатурой метрики $\langle 1, 3 \rangle$, а $\Gamma_{ij,k}$ и Γ_{ij}^k символы Кристоффеля 1 и 2 рода соответственно, определяемые из соотношений:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$
$$\Gamma_{ij}^k = g^{km} \Gamma_{ij,m}.$$

Уравнение (8) может быть получено из принципа наименьшего действия [3, 18] при вариации функционала:

$$S = S_g + S_m,$$

где $S_g = \int_D L_g$ – действие гравитационного поля с лагранжианом $L_g = -\alpha \bar{R} \Omega$, $\alpha = \frac{c^3}{16\pi k}$, D – некоторая область многообразия, $\bar{R} = g^{ij} R_{ij}$ – скалярная кривизна, а $\Omega = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ – четырёхмерная форма объёма, то есть дифференциальная форма 4 степени, заданная на многообразии; S_m – действие материи (равно 0, так как его в данном случае не рассматриваем). Кроме того, было учтено, что так как масса точечная, тогда и распределение энергии и импульса будет вырожденным, поэтому в правой

части можно писать 0, в точках где нет этой массы.

Требуется найти симметричный тензор $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, который и является метрическим (метрикой), удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям. Здесь \otimes обозначает тензорное произведение, то есть произведение, введённое на пространстве тензоров [1]. Ещё А. Эйнштейн в своей работе [17] обратил внимание на то, что решение уравнения (8) определено неоднозначно, и необходимо накладывать дополнительные условия на метрический тензор. Как правило, на компоненты метрического тензора накладывают нековариантные и не имеющие физического основания условия (см., например, [9, 13, 18]). В настоящей работе используются результаты работ [3, 16], в которых показано, что в пространственно-временных координатах, ассоциированных с некоторой системой отсчета, всегда выполнены равенства:

$$g_{0i} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

где 0 - индекс временной координаты, а остальные - пространственных. Условия (9) мы и используем в качестве дополнительных условий к уравнению (8). Кроме того, имеют место ещё одни краевые условия на бесконечности:

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то есть на бесконечности пространство не искривлено (гравитационного поля нет).

Также в дальнейшем необходим следующий результат: в 1916 году Карлом Шварцшильдом было найдено [21] точное решение уравнения (8), описывающее гравитационное поле покоящегося точечного источника:

$$\|g_{ij}\| = \text{diag}\left(1 - \frac{2\lambda}{r}, -\frac{1}{1 - 2\lambda/r}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta\right).$$

Здесь $\lambda = 2Gm/c^2$, где G – гравитационная постоянная, m – масса источника поля. Это решение записано в координатах $x^0 = ct$, r , θ и φ , где t

– время бесконечно удаленного наблюдателя, θ и φ обычные углы сферических координат, а r выбирается так, чтобы площадь сферы $x^0=\text{const}$; $r=\text{const}$ равнялась бы $4\pi r^2$. Если линеаризовать этот тензор при достаточно большом r , то полученный тензор тоже будет решением уравнения (8) с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$\|g_{ij}\| = \text{diag}\left(1 - \frac{2\lambda}{r}, -1 - \frac{2\lambda}{r}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta\right). \quad (11)$$

2.2 Законы сохранения

Следуя работе [3], рассмотрим выражение для вариации действия для гравитационного поля S_g и вспомогательное векторное поле W :

$$\delta S_g = -\alpha \int_D (R_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{ik}) \delta g^{ik} \Omega - \alpha \int_D g^{ik} \delta R_{ik} \Omega,$$

$$W^l = -g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l + g^{il} \delta \Gamma_{im}^m,$$

где $\delta \Gamma_{ik}^l$ обозначает вариацию символа Кристоффеля при вариации метрического тензора, которая также является тензором [3]. Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$(W^l)_{;l} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (d^* W)_{0123},$$

где ${}_{;l}$ обозначает ковариантную производную по координате x^l , символ $*$ обозначает оператор Ходжа [3], то есть оператор, устанавливающий взаимнооднозначное соответствие между поливекторами степени k и дифференциальными формами степени $n - k$, n – это размерность многообразия, а d обозначает внешнее дифференцирование, то есть оператор дифференцирования, заданный на дифференциальных формах [3, 8]. Кроме того, будет полезна ещё одна формула [3], которая устанавливает связь между дивергенцией векторного поля W и $g^{ik} \delta R_{ik}$:

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - g^{ik} (\delta \Gamma_{il}^l)_{;k} = g^{ik} (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - g^{il} (\delta \Gamma_{im}^m)_{;l} =$$

$$= (g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - (g^{il} \delta \Gamma_{im}^m)_{;l} = -W_{;l}^l.$$

Этими выражениями можно воспользоваться для описания того, как меняется лагранжиан гравитационного поля L_g , то есть дифференциальная форма 4 степени, при сдвиге вдоль некоторого векторного поля v [3]:

$$\delta \lambda \cdot L_v L_g = -(R_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{ik}) \delta \lambda \cdot L_v g^{ik} + \delta \lambda \cdot d^* W_v.$$

Здесь и далее

$$W^l = -g^{ik} L_v \Gamma_{ik}^l + g^{il} L_v \Gamma_{im}^m, \quad (12)$$

а L_v обозначает производную Ли, которая характеризует скорость изменения тензора при сдвиге вдоль некоторого гладкого векторного поля v [3, 5]. Если массы нет, то выражение в скобках в первом члене правой части равно 0, если присутствует масса, в качестве v возьмём векторное поле Киллинга v , то есть такое поле, что вдоль него производная метрического тензора равна нулю: $L_v g^{ik} = 0$. Далее, используем формулу гомотопии [3]:

$$L_v = di_v + i_v d,$$

где i_v обозначает внутреннее произведение, то есть операцию, в результате применения которой получаем дифференциальную форму степени на единицу меньше, чем изначальная: $i_v \omega = \omega(v, \dots, \cdot)$. Воспользуемся тем, что форма Ω имеет максимальную степень на многообразии, то есть она является замкнутой, а тогда её внешняя производная обращается в 0: $d\Omega = 0$. Тогда получаем [3]:

$$d(*W_v - \bar{R} i_v \Omega) = 0.$$

Введём новый тензор T_v^g :

$$T_v^g = *W_v - \bar{R} i_v \Omega.$$

Тогда получаем:

$$dT_v^g = 0.$$

Если внешняя производная дифференциальной формы обращается в

0, то это выражает некоторый закон сохранения [3, 12]. В данном случае всё зависит от выбора векторного поля, например, если взять в качестве векторного поля $v = (1, 0, 0, 0)^T$, то получаем закон сохранения энергии. Кроме того, можно брать другие базисные поля, например, пространственных координат, тогда будем получать законы сохранения компонент импульса, соответствующих выбранной координате. Кроме того, компоненты вектора W в этом случае можно отождествить с плотностью импульса и плотностью потоков импульса. Таким образом, получаем канонический тензор энергии-импульса гравитационного поля, ассоциированный с векторным полем Киллинга v .

Если материя отсутствует, то мы получим:

$$T_v^g = {}^* W_v.$$

2.3 Постановка задачи

Рассматривается точечное тело массы m , расположенное в начале координат и смещающееся вдоль оси под большим ускорением a . Смещение тела относительно начала координат равно $F(t)$. Требуется найти волновое решение краевой задачи (8) при условиях (9), (10), такое, чтобы при $F \equiv 0$ оно совпадало бы с решением (11). Это решение и будет представлять гравитационные волны, излучаемые этим телом. Требуется также найти потоки энергии и компонент импульса в направлении осей Ox , Oy , Oz . В качестве координат возьмем координаты, в которых записывается решение Шварцшильда. При этом θ – угол, отсчитываемый против часовой стрелки (см. рис. 1), а φ – угол, отсчитываемый вокруг оси x .

2.4 Волновое решение

Для поиска решения в виде слабой сферической волны возьмём за основу решение (11). Если вместо r в тензор (11) подставить $r - F(r - x^0)\cos\theta$ и затем линеаризовать, при условии, что $r \gg \lambda$, $F \ll r$, при этом,

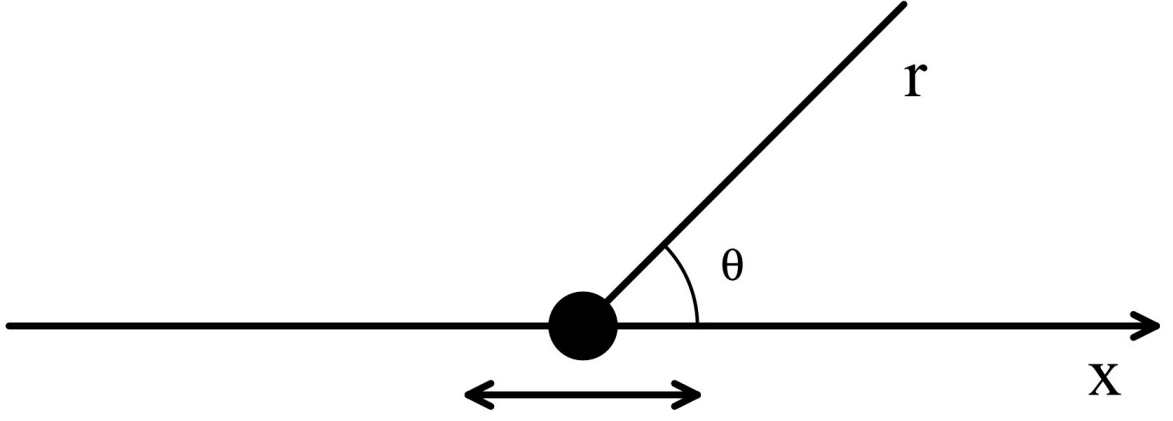


Рис. 1: Движение излучающего тела

считая, что главными членами являются λ/r и F/r , то получим тензор:

$$\|g_{ij}\| = \text{diag}\left(1 - \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda}{r^2}F(r - x^0) \cos \theta, \right. \\ \left. -1 - \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda}{r^2}F(r - x^0) \cos \theta, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta\right). \quad (13)$$

В полученном тензоре также учтён эффект запаздывания, который выражает конечность скорости распространения гравитационных волн. Проверим, является ли полученный тензор решением уравнения (8). Для этого будем считать, что главными являются здесь члены, содержащие F'' . Оставляя только члены первого порядка, получаем следующие выражения для g^{ij} , $\Gamma_{ij,k}$ и Γ_{ij}^k :

$$\|g^{ij}\| = \text{diag}\left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda}{r^2}F(r - x^0) \cos \theta, \right. \\ \left. -1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda}{r^2}F(r - x^0) \cos \theta, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right), \\ \Gamma_{00,0} = \Gamma_{rr,0} = -\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\ \Gamma_{00,r} = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^3} - \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\ \Gamma_{00,\theta} = \Gamma_{r\theta,r} = \frac{\lambda F \sin \theta}{r^2},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0r,0} &= \frac{\lambda}{r^2} - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{0\theta,0} &= \Gamma_{rr,\theta} = -\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{rr,r} &= \frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^3} - \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{r0,r} &= \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{\theta\theta,r} &= r, \\
\Gamma_{\theta r,\theta} &= -r, \\
\Gamma_{\varphi\varphi,r} &= r \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{\varphi\varphi,\theta} &= \frac{r^2 \sin 2\theta}{2}, \\
\Gamma_{\varphi r,\varphi} &= -r \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{\varphi\theta,\varphi} &= -\frac{r^2 \sin 2\theta}{2}, \\
\Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{rr}^0 = \Gamma_{r0}^r = -\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{rr}^r &= -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{0r}^0 &= \Gamma_{00}^r = \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{00}^\theta &= -\frac{\lambda F \sin \theta}{r^4}, \\
\Gamma_{0\theta}^0 &= \Gamma_{r\theta}^r = -\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}, \\
\Gamma_{rr}^\theta &= \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r}, \\
\Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta + \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r},
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{2},$$

$$\Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \operatorname{ctg} \theta.$$

Тензор Риччи можно записать также в виде [3]

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m.$$

Подставляя сюда полученные выражения и считая, что главными членами здесь являются члены, содержащие F'' и λ в первой степени, получаем, что тензор (13) является решением уравнения (8):

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{00}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{0k}^k}{\partial x^0} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{00}^m - \Gamma_{m0}^k \Gamma_{0k}^m = \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{00}^{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial x^0} + \\ &+ \Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0r}^r) + \Gamma_{00}^r (\Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}) + \Gamma_{00}^{\theta} (\Gamma_{\theta 0}^0 + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi}) - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \\ &- \Gamma_{00}^r \Gamma_{0r}^0 - \Gamma_{00}^{\theta} \Gamma_{0\theta}^0 - \Gamma_{r0}^0 \Gamma_{00}^r - \Gamma_{r0}^r \Gamma_{0r}^r - \Gamma_{\theta 0}^{\theta} \Gamma_{00}^{\theta} = \frac{-2\lambda}{r^3} - \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \\ &+ \left(\frac{-\lambda F \cos \theta}{r^4} \right) - \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \left(\frac{-\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{-\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) + \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda}{r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{-\lambda F \sin \theta}{r^4} \right) \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} + \operatorname{ctg} \theta \right) - \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(\frac{\lambda}{r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} \right) \approx \frac{-2\lambda}{r^3} + \\ &+ \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} - \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r^4} + \frac{2\lambda}{r^3} - \frac{\lambda^2}{r^4} \approx 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{\partial \Gamma_{rr}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{rk}^k}{\partial r} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{rr}^m - \Gamma_{mr}^k \Gamma_{rk}^m = \frac{\partial \Gamma_{rr}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{rr}^{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial r} - \\ &- \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}}{\partial r} + \Gamma_{rr}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0r}^r) + \Gamma_{rr}^r (\Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi}) + \Gamma_{rr}^{\theta} (\Gamma_{\theta 0}^0 + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi}) - \\ &- \Gamma_{0r}^0 \Gamma_{r0}^0 - \Gamma_{0r}^r \Gamma_{rr}^0 - \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{r0}^r - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rr}^{\theta} \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{rr}^{\theta} - \Gamma_{\theta r}^{\theta} \Gamma_{r\theta}^{\theta} - \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \\ &= \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \frac{\lambda F \cos \theta}{r^4} - \left(-\frac{2\lambda}{r^3} - \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-\frac{1}{r^2} \right) - \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \\ &+ \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) + \left(-\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} + ctg\theta \right) - \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(\frac{-\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \\
& \cdot \left(\frac{-\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} \approx \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \frac{2\lambda}{r^3} - \\
& - \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r^4} - \frac{2\lambda}{r^3} - \frac{\lambda^2}{r^4} - \frac{2}{r^2} \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0r} &= \frac{\partial \Gamma_{0r}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{0k}^r}{\partial r} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{0r}^m - \Gamma_{mr}^k \Gamma_{0k}^m = \frac{\partial \Gamma_{0r}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial r} + \Gamma_{0r}^0 (\Gamma_{00}^0 + \\
& + \Gamma_{0r}^r) + \Gamma_{0r}^r (\Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) - \Gamma_{0r}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{0r}^r \Gamma_{0r}^0 - \Gamma_{rr}^0 \Gamma_{00}^r - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{0r}^r = \\
& = -\frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} - \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) + \\
& + \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \approx -\frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \\
& + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0\theta} &= \frac{\partial \Gamma_{0\theta}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{0k}^\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{0\theta}^m - \Gamma_{m\theta}^k \Gamma_{0k}^m = \frac{\partial \Gamma_{0\theta}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial \theta} + \Gamma_{0\theta}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0r}^r) - \\
& - \Gamma_{0\theta}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{0r}^r = \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} + \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \cdot \\
& \cdot \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \left(-\frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) \approx 0,
\end{aligned}$$

$$R_{0\varphi} = \frac{\partial \Gamma_{0\varphi}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{0k}^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{0\varphi}^m - \Gamma_{m\varphi}^k \Gamma_{0k}^m = 0,$$

$$\begin{aligned}
R_{r\theta} &= \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{rk}^\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{r\theta}^m - \Gamma_{m\theta}^k \Gamma_{rk}^m = \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial \theta} \\
& - \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial \theta} + \Gamma_{r\theta}^r (\Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) + \Gamma_{r\theta}^\theta (\Gamma_{\theta 0}^0 + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta \varphi}^\varphi) - \Gamma_{\theta 0}^0 \Gamma_{r0}^0 - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{rr}^r - \\
& - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{rr}^\theta - \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \left(\frac{2\lambda F \sin \theta}{r^3} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \right) + 0 - \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \right) - \\
& - \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \right) - 0 - 0 + \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} + ctg\theta \right) - \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r} \right).
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} - ctg\theta \cdot \frac{1}{r} \approx \frac{ctg\theta}{r} - \frac{ctg\theta}{r} = 0,$$

$$R_{r\varphi} = \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{rk}^k}{\partial \varphi} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{r\varphi}^m - \Gamma_{m\varphi}^k \Gamma_{rk}^m = 0,$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\theta k}^k}{\partial \theta} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{\theta\theta}^m - \Gamma_{m\theta}^k \Gamma_{\theta k}^m = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta\theta}^r (\Gamma_{r0}^0 + \\ &+ \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi) - \Gamma_{\theta\theta}^0 \Gamma_{\theta\theta}^0 - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{\theta r}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \left(-1 - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r}\right) - \left(-\frac{\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta}\right) + \left(-r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r}\right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r}\right) - \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) \cdot \\ &\cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) - \left(-r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} - ctg\theta \cdot ctg\theta \approx -1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 + \frac{2\lambda}{r} + 1 - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{r} - ctg^2\theta = -1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\varphi k}^k}{\partial \varphi} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{\varphi\varphi}^m - \Gamma_{m\varphi}^k \Gamma_{\varphi k}^m = \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r (\Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \\ &+ \Gamma_{r\varphi}^\varphi) + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta (\Gamma_{\theta\theta}^0 + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi) - \Gamma_{r\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{\varphi r}^\varphi - \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = (-\sin^2 \theta - \\ &- \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\lambda F' \cos \theta \sin^2 \theta}{r}) + (-\cos 2\theta) + (-r \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta + \\ &+ \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r}) \cdot \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{r}\right) + \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} - \right. \\ &- \left. \frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) - \left(-r \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta + \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} - \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \cdot ctg\theta \approx \\ &\approx -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{2\lambda \sin^2 \theta}{r} + \sin^2 \theta - \frac{2\lambda \sin^2 \theta}{r} + \cos^2 \theta = 0, \end{aligned}$$

$$R_{\theta\varphi} = \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\theta k}^k}{\partial \varphi} + \Gamma_{mk}^k \Gamma_{\theta\varphi}^m - \Gamma_{m\varphi}^k \Gamma_{\theta k}^m = 0.$$

Чтобы член F'' был главным, необходимо выполнение следующего условия:

$$|F'|/r \ll |F''|.$$

Поскольку $F' = v/c$, $F'' = a/c^2$, где v и a – компоненты скорости и ускорения вдоль оси x , это условие означает, что $r \gg |vc/a|$.

Однако можно рассматривать промежуток времени, когда тело ещё только начинает двигаться. Тогда ускорение может быть любым, так как $F' = F'' \Delta t$, и его можно сделать сколь угодно малым за счёт того, что промежуток времени можно сделать сколь угодно малым, а F' мало.

2.5 Потоки энергии и импульса

Полученную в параграфе 2.2 конструкцию можно применить и к найденному в предыдущем параграфе полю для подсчёта потоков импульса. Начнём с потоков импульса вдоль оси Ox . Для этого возьмём базисное векторное поле координаты $x: (0, 1, 0, 0)^T$. Хотя производная Ли определена на тензорах, но тем не менее её можно применять и к символам Кристоффеля, несмотря на то что они не являются тензорами:

$$L_v \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^l + \frac{\partial v^l}{\partial x^j} \Gamma_{lk}^i + \frac{\partial v^l}{\partial x^k} \Gamma_{jl}^i. \quad (14)$$

В силу того, что наше решение записано в сферических координатах, а наше векторное поле записано в декартовых, то необходимо перевести базисное поле координаты x тоже в сферические координаты. Так как векторное поле является 1 раз контравариантным тензорным полем, то тогда применима формула преобразования тензоров [3]:

$$\tilde{v}^i = \frac{d\tilde{x}^i}{dx^j} v^j, \quad (15)$$

где \tilde{v}^i – компонента контравариантного вектора в новых координатах; v^i – компонента вектора в исходных координатах; набор \tilde{x}^i – это новые координаты, а x^j – набор старых координат. Эта формула справедлива, если преобразование является диффеоморфизмом. Используем такое преобра-

зование:

$$\begin{cases} x^0 = \tilde{x}^0, \\ x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

Обратное преобразование будет иметь вид:

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = x^0, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \end{cases} \quad (16)$$

Используя формулы (15) и (16), получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^0 &= \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x} = 0, \\ \tilde{v}^r &= \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \\ \tilde{v}^\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\ \tilde{v}^\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Итак, получили наше исходное поле в сферических координатах:

$$v = \left(0, \cos \theta, -\frac{\sin \theta}{r}, 0\right)^T.$$

Теперь найдём вектор W , используя представление(12) и формулу (14). Везде далее оставляем только члены, содержащие F'' , и члены со степенью r в знаменателе не больше 2.

$$\begin{aligned} W_v^0 &= -g^{ii} L_v \Gamma_{ii}^0 + g^{00} L_v \Gamma_{0m}^m = -g^{rr} L_v \Gamma_{rr}^0 + g^{00} L_v \Gamma_{0r}^r, \\ L_v \Gamma_{rr}^0 &= \frac{\partial \Gamma_{rr}^0}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^0}{\partial x^l} \Gamma_{rr}^l + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{lr}^0 + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{rl}^0 = \frac{\partial \Gamma_{rr}^0}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{rr}^0}{\partial \theta} v^\theta = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} - \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \cos \theta + \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \approx -\frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2},$$

$$\begin{aligned} L_v \Gamma_{0r}^r &= \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \Gamma_{0r}^l + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{lr}^r + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{0l}^r = \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial \theta} v^\theta = \\ &= \left(\frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} - \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \cos \theta + \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \approx -\frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_v^0 &= -\left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \left(-\frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(-\frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}\right) \approx \frac{-2\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_v^r &= -g^{ii} L_v \Gamma_{ii}^r + g^{rr} L_v \Gamma_{rm}^m = -g^{00} L_v \Gamma_{00}^r - g^{rr} L_v \Gamma_{rr}^r - g^{\theta\theta} L_v \Gamma_{\theta\theta}^r - g^{\varphi\varphi} L_v \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \\ &\quad + g^{rr} L_v \Gamma_{rr}^r + g^{rr} L_v \Gamma_{r0}^0 + g^{rr} L_v \Gamma_{r\theta}^\theta + g^{rr} L_v \Gamma_{r\varphi}^\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_v \Gamma_{00}^r &= \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \Gamma_{00}^l + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{l0}^r + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{0l}^r = \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial \theta} v^\theta - \\ -\frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{00}^\theta &= \left(-\frac{2\lambda}{r^3} - \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \cos \theta + \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2}\right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) - \\ &\quad - (-\sin \theta) \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^4}\right) \approx \frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_v \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \Gamma_{\theta\theta}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{l\theta}^r + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{\theta l}^r = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial \theta} v^\theta + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{r\theta}^r + \\ + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{\theta\theta}^r &= \left(-1 - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2} + \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r}\right) \cdot \cos \theta - \frac{2\lambda F \sin \theta}{r} \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) + \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) \cdot (-\sin \theta) + \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \cdot \left(-r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r}\right) \approx \\ &\quad \approx -\frac{2\lambda \cos \theta}{r} + \frac{2\lambda F' \cos^2 \theta}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_v \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \Gamma_{\varphi\varphi}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{l\varphi}^r + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{\varphi l}^r = \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \\ &= \left(-\sin^2 \theta - \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\lambda F' \cos \theta \sin^2 \theta}{r}\right) \cdot \cos \theta + \left(-2r \sin \theta \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + 4\lambda \sin \theta \cos \theta + \frac{2\lambda F(2 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) - (-\sin \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \approx \frac{2\lambda F' \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r} - \frac{4\lambda \sin^2 \theta \cos \theta}{r}, \\
L_v \Gamma_{r0}^0 &= \frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^0}{\partial x^l} \Gamma_{r0}^l + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{l0}^0 + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{rl}^0 = \frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial \theta} v^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{\theta 0}^0 = \\
&= \left(-\frac{2\lambda}{r^3} - \frac{2\lambda F' \cos \theta}{r^3} + \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \cos \theta + \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2}\right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) + \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) \approx \frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}, \\
L_v \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^\theta}{\partial x^l} \Gamma_{r\theta}^l + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{l\theta}^\theta + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{rl}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{r\theta}^r - \\
&-\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{r\theta}^\theta + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{rr}^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{r\theta}^\theta = -\frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} + \\
&\quad + (-\sin \theta) \cdot \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} + \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\cos \theta}{r^2}, \\
L_v \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^\varphi}{\partial x^l} \Gamma_{r\varphi}^l + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{l\varphi}^\varphi + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{rl}^\varphi = \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial \theta} v^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \\
&= -\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} ctg\theta = 0, \\
W_v^r &= -\left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2} - \left(-\frac{1}{r^2}\right) \cdot \left(-\frac{2\lambda \cos \theta}{r} + \frac{2\lambda F' \cos^2 \theta}{r}\right) - \\
&-\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \left(\frac{2\lambda F' \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r} - \frac{4\lambda \sin^2 \theta \cos \theta}{r}\right) + \left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \\
&\cdot \frac{\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2} + \left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \left(-\frac{\cos \theta}{r^2}\right) \approx -\frac{2\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
W_v^\theta &= -g^{kk} L_v \Gamma_{kk}^\theta + g^{\theta\theta} L_v \Gamma_{\theta m}^\theta = -g^{00} L_v \Gamma_{00}^\theta - g^{rr} L_v \Gamma_{rr}^\theta - g^{\varphi\varphi} L_v \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta + \\
&\quad + g^{\theta\theta} L_v \Gamma_{\theta 0}^\theta + g^{\theta\theta} L_v \Gamma_{\theta r}^\theta + g^{\theta\theta} L_v \Gamma_{\theta\varphi}^\theta, \\
L_v \Gamma_{00}^\theta &= \frac{\partial \Gamma_{00}^\theta}{\partial x^l} - \frac{\partial v^\theta}{\partial x^l} \Gamma_{00}^l + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{l0}^\theta + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{0l}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{00}^\theta}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{00}^\theta}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{00}^r - \\
&-\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{00}^\theta = \left(\frac{4\lambda F \sin \theta}{r^5} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^4}\right) \cdot \cos \theta + \left(-\frac{\lambda F \cos \theta}{r^4}\right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) - \frac{\sin \theta}{r^2} \left(\frac{\lambda}{r^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^4}\right) \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v \Gamma_{rr}^\theta &= \frac{\partial \Gamma_{rr}^\theta}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^\theta}{\partial x^l} \Gamma_{rr}^l + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{lr}^\theta + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{rl}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{rr}^\theta}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{rr}^\theta}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{rr}^r - \\
&\quad - \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{rr}^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{\theta r}^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{r\theta}^\theta = \left(-\frac{4\lambda F \sin \theta}{r^5} + \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^4} \right) \cdot \cos \theta + \frac{\lambda F \cos \theta}{r^4} \cdot \\
&\quad \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) - \frac{\sin \theta}{r^2} \left(\frac{-\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) - \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \cdot \frac{\lambda F \sin \theta}{r^4} + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^\theta}{\partial x^l} \Gamma_{\varphi\varphi}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{l\varphi}^\theta + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{\varphi l}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \\
&= -\cos 2\theta \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) - \frac{\sin \theta}{r^2} \left(-r \sin^2 \theta + 2\lambda \sin^2 \theta + \frac{2\lambda F \cos \theta \sin^2 \theta}{r} \right) - \\
&\quad - \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \cdot \left(-\frac{\sin 2\theta}{2} \right) \approx -\frac{2\lambda \sin^3 \theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v \Gamma_{\theta\theta}^0 &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^0}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^0}{\partial x^l} \Gamma_{\theta\theta}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{l\theta}^0 + \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \Gamma_{\theta l}^0 = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^0}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} v^\theta + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{r\theta}^0 + \\
&\quad + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{\theta\theta}^0 = \left(\frac{2\lambda F \sin \theta}{r^3} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \right) \cdot \cos \theta + \left(-\frac{\lambda F \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) + \\
&\quad + (-\sin \theta) \cdot \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) + \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) \approx -\frac{\lambda \sin \theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v \Gamma_{\theta r}^r &= \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \Gamma_{\theta r}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{lr}^r + \frac{\partial v^l}{\partial r} \Gamma_{\theta l}^r = \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial r} v^r + \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial \theta} v^\theta - \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{\theta r}^\theta + \\
&\quad + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{rr}^r + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{\theta r}^r + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} \Gamma_{\theta\theta}^r = \left(\frac{2\lambda F \sin \theta}{r^3} - \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} \right) \cdot \cos \theta + \left(-\frac{\lambda F \cos \theta}{r^2} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) - (-\sin \theta) \cdot \frac{1}{r} + (-\sin \theta) \cdot \left(-\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda F' \cos \theta}{r^2} \right) + \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \cdot \left(-\frac{\lambda F \sin \theta}{r^2} \right) + \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \left(-r + 2\lambda + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r} \right) \approx \frac{3\lambda \sin \theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial x^l} v^l - \frac{\partial v^\varphi}{\partial x^l} \Gamma_{\theta\varphi}^l + \frac{\partial v^l}{\partial \theta} \Gamma_{l\varphi}^\varphi + \frac{\partial v^l}{\partial \varphi} \Gamma_{\theta l}^\varphi = \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial \theta} v^\theta + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Gamma_{r\varphi}^\varphi + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \\
&= \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) + (-\sin \theta) \cdot \frac{1}{r} + \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \cdot \text{ctg} \theta = 0,
\end{aligned}$$

$$W_v^\theta = \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \cdot \left(-\frac{2\lambda \sin^3 \theta}{r^2} \right) + \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \left(-\frac{\lambda \sin \theta}{r^2} \right) + \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{2\lambda \sin \theta}{r^2} \approx 0,$$

$$W_v^\varphi = -g^{kk} L_v \Gamma_{kk}^\varphi + g^{\varphi\varphi} L_v \Gamma_{\varphi\varphi}^k = 0.$$

Итак, получаем вектор W :

$$W^v = \left(-\frac{2\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2}, -\frac{2\lambda F'' \cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2}, 0, 0 \right)^T.$$

Чтобы найти суммарный поток x компоненты импульса через сферу радиуса R в единицу времени, необходимо сопоставить этому векторному полю дифференциальную форму, чтобы потом проинтегрировать её. С этой целью найдём $*W_v$ [3] по формуле:

$$*W_v = W_v^l \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 l} \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3}, \quad (17)$$

где тензор $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ равен 1, если перестановка индексов чётная (если отсчитывать от $(0, r, \theta, \varphi)$), -1 если нечётная, 0 если хотя бы одна пара индексов совпадает. \wedge обозначает внешнее произведение, то есть произведение, заданное на дифференциальных формах, оно антикоммутативно [8]. В нашем случае, опуская все члены большего порядка малости, имеем: $\sqrt{|g|} \approx \sqrt{|-r^4 \sin^4 \theta|} = r^2 \sin \theta$. Итак, получаем:

$$\begin{aligned} *W_v = & -6(-2\lambda F''' \cos^2 \theta \sin \theta) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi + 6(-2\lambda F''' \cos^2 \theta \sin \theta + \\ & + \cos \theta \sin \theta) dx^0 \wedge d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Теперь необходимо проинтегрировать эту дифференциальную форму 3 степени. Для этого необходимо выделить ячейки, образующие вектора которых будут образовывать правую тройку: $-(e_0 - e_r); e_\theta; e_\varphi$, где e_i - базисный вектор координаты i . Теперь необходимо каждый из этих векторов умножить на приращения параметров: $\delta\Phi = \delta(x^0 - r)$, то есть это приращение фазы; $\delta\theta$; $\delta\varphi$ и подставить в форму. В результате получим :

$$*W_v(-(e_0 - e_r)\delta\Phi, e_\theta\delta\theta, e_\varphi\delta\varphi) = (24\lambda F''' \cos^2 \theta \sin \theta - 6 \cos \theta \sin \theta)\delta\Phi\delta\theta\delta\varphi.$$

Тогда полный поток x компоненты импульса в единицу времени через сферу радиуса R будет равен:

$$\begin{aligned} S_x &= 24 \frac{a\lambda}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{24a\lambda}{c^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{32a\lambda}{c^2}. \end{aligned}$$

Здесь также было учтено соотношение $F'' = \frac{a}{c^2}$.

Теперь рассмотрим поток импульса вдоль оси Oy . Для этого возьмём базисное векторное поле координаты y : $(0, 0, 1, 0)^T$. Также как и в случае базисного векторного поля координаты x , необходимо перевести это поле из декартовых координат в сферические, используя формулы (15) и (16), получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^0 &= \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial y} = 0, \\ \tilde{v}^r &= \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi, \\ \tilde{v}^\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \\ \tilde{v}^\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{r(1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Вычислим суммарный поток y -компоненты импульса через сферу радиуса R , используя формулы (12), (14) и (17). В формуле (14) главными членами являются члены, содержащие F'' и λ делённые на r^2 , и они умножаются на компоненты и производные компонент векторного поля v . Можно заметить, что среди этих слагаемых в итоге останется одно – умноженное на v^r , так как остальные умножаются на компоненты векторного поля, в которых в знаменателе стоит r или r^2 . Далее после применения формулы (12), мы получим векторное поле W , компонентами которого будут являться функции, умноженные на $\sin \varphi$. Применяя формулу (17) и затем интегрируя полученную дифференциальную форму по сфере, можно заметить, что в полученной сумме интегралы разбиваются на две части: первая – это интеграл некоторой функции зависящей от θ по $d\theta$, а вторая

- это $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$. Таким образом, мы получаем, что сумма интегралов равна нулю.

Теперь рассмотрим поток z-компоненты импульса через сферу. Для этого возьмём базисное векторное поле координаты z: $(0, 0, 0, 1)^T$. Переведём это векторное поле из декартовых координат в сферические, используя формулы (15) и (16). В результате получим:

$$\begin{aligned}\tilde{v}^0 &= \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial z} = 0, \\ \tilde{v}^r &= \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \sin \theta \cos \varphi, \\ \tilde{v}^\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \\ \tilde{v}^\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi}{r(1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}.\end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как и для потока y-компоненты импульса, получаем, что в итоговой сумме интегралов интегралы разбиваются на две части, в которых вторая - это $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. В итоге получаем, что суммарный поток z-компоненты импульса через сферу радиуса R равен нулю.

Вычислим теперь полный поток энергии через сферу радиуса R. Для этого используем векторное поле $v: (1, 0, 0, 0)^T$. Используя формулу (12) и учитывая момент, что высчитывание производных Ли символов Кристоффеля вдоль векторного поля v с применением формулы (14) в данном случае сводится просто к частной производной по x^0 , получаем:

$$\begin{aligned}W^0 &= -g^{00} \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} - g^{rr} \frac{\partial \Gamma_{rr}^0}{\partial x^0} + g^{00} \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + g^{00} \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial x^0} = -\left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} \approx \frac{2\lambda F'' \cos \theta}{r^2}, \\ W^r &= -g^{00} \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial x^0} - g^{rr} \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial x^0} - g^{\theta\theta} \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial x^0} - g^{\varphi\varphi} \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial x^0} + g^{rr} \left(\frac{\partial \Gamma_{r0}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial x^0} +\right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial x^0}) = -\left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \left(-\frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2}\right) - \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(-\frac{2\lambda F' \cos \theta}{r}\right) - \\
& - \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \cdot \left(-\frac{2\lambda F' \cos \theta \sin^2 \theta}{r}\right) + \left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \left(-\frac{\lambda F'' \cos \theta}{r^2} + \right. \\
& \left. + 0 + 0\right) \approx \frac{2\lambda F'' \cos \theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^\theta = & -g^{00} \frac{\partial \Gamma_{00}^\theta}{\partial x^0} - g^{rr} \frac{\partial \Gamma_{rr}^\theta}{\partial x^0} - g^{\varphi\varphi} \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta}{\partial x^0} + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial x^0}\right) = -\left(1 + \frac{2\lambda}{r} - \right. \\
& \left. - \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \cdot \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^4} - \left(-1 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2\lambda F \cos \theta}{r^2}\right) \left(-\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^4}\right) + \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda F' \sin \theta}{r^2} + 0\right) \approx 0,
\end{aligned}$$

$$W^\varphi = -g^{ii} \frac{\partial \Gamma_{ii}^\varphi}{\partial x^0} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial \Gamma_{\varphi m}^m}{\partial x^0} = 0.$$

Итоговое векторное поле имеет вид: $\left(\frac{2\lambda F'' \cos \theta}{r^2}, \frac{2\lambda F'' \cos \theta}{r^2}, 0, 0\right)^T$. Применим формулу (17):

$${}^*W_v = -6(2\lambda F'' \cos \theta \sin \theta) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi + 6(2\lambda F'' \cos \theta \sin \theta) dx^0 \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Далее подействуем на эту форму векторами $-(e_0 - e_r); e_\theta; e_\varphi$, умноженными на соответствующие приращения:

$${}^*W_v = -24\lambda F'' \cos \theta \sin \theta \delta\Phi \delta\theta \delta\varphi.$$

Таким образом суммарный поток энергии через сферу радиуса R оказывается равен 0:

$$S_E = -24\lambda \frac{a}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

Заключение

В работе рассмотрено гравитационное поле точечного тела, движущегося с ускорением при условии, что смещение тела от его положения в начальный момент мало по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается поле. Получено решение уравнения Эйнштейна в виде сферической слабой гравитационной волны на основе подхода, который был предложен в работах [3, 16]. В рамках этого подхода на компоненты метрического тензора накладываются дополнительные условия, означающие, что рассматривается решение в пространственно-временных координатах, ассоциированных с некоторой системой отсчета. Для построения решения было введено запаздывание в известное решение Шварцшильда, которое рассматривалось в приближении слабого поля. При подстановке рассматриваемого решения в тензор Риччи оказывается, что все компоненты этого тензора обращаются в ноль с точностью до членов более высокого порядка малости, что означает, что уравнение Эйнштейна удовлетворяется. Оценки порядка малости показывают, что данное решение применимо, если рассматривать движение на достаточно малом промежутке времени, или на больших расстояниях от источника, если тело движется с достаточно большим ускорением.

В работе также исследованы потоки энергии и компонент импульса на основе подхода, предложенного в работе [3], где был введен тензор, описывающий плотность потока импульса, ассоциированного с некоторым векторным полем. Если рассматриваемое векторное поле представляет собой базисное векторное поле временной координаты, то этот тензор дает плотность потока энергии. Были вычислены плотности потоков энергии и импульса, переносимых сферической гравитационной волной, которую описывает найденное в работе решение. Оказалось, что полный поток энергии, переносимый волной, равен нулю, хотя плотности потока энергии в различных направлениях и не равны нулю. Аналогичным образом, полные потоки поперечных компонент импульса также оказываются равными нулю. Единственный ненулевой поток – это полный поток продольной компоненты импульса.

Список литературы

- [1] Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. М: Мир, 1976. 648 с.
- [2] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
- [3] Дривотин О.И. Математические основы теории поля. СПб: Изд-во СПбГУ, 2010. 168 с.
- [4] Дривотин О.И., Новгородцев В.А. Излучение гравитационных волн точечным телом // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 78-82.
- [5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Изд. 6-е. М.: УРСС, Книжный дом "Либроком", 2013. 236 с.
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Том 2: Геометрия и топология многообразий. Изд. 6-е. М.: УРСС, Книжный дом "Либроком", 2013. 304 с.
- [7] Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972. 200 с.
- [8] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М: Мир, 1971 г. 392с.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [10] Лаплас П.С. Изложение системы мира. Л.: Наука, 1972. 376 с.
- [11] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
- [12] Петрова Л. И. Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. Изд. 3-е, испр. М.: Ленанд, 2017. 160 с.

- [13] Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. Москва: ГИТТЛ, 1956. 504 с.
- [14] Abbot B.P. et al.(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) // Physical Review Letters. 2016. V.116. Iss. 6. P. 061102.
- [15] Carrol S. Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. San Fransisco: Addison Wesley, 2004. 513 с.
- [16] Drivotin O.I. Rigorous definition of the reference frame // Вестн.С.Петербур. ун-та. Сер.10. Прикл. Математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 4. С. 25-36.
- [17] Einstein A. Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 2, 1914. P. 1030-1085. (пер.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т.1. Москва:Наука, 1965. С. 326-384).
- [18] Einstein A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie // Ann. d. Phys. 49, 1916. P. 769 (пер.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т.1.Москва: Наука, 1965. С. 452-504).
- [19] Einstein A. Naherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1, 1916. P. 688-696.
- [20] Minkowski H. Raum und Zeit. Berlin: Teubner, 1909. 22 p.
- [21] Schwarzschild K. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften V.1. 1916. Pp. 189-196.