

Санкт–Петербургский государственный университет  
Кафедра теории управления

Уразов Дилшод Расулович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Определение максимального запаса устойчивости для  
уравнений с запаздыванием**

Направление 01.03.02

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель:

доцент кафедры теории управления  
к. ф.-м. н. Егоров Алексей Валерьевич

Рецензент: доцент

к. ф.-м. н. Еремин Алексей Сергеевич

Санкт-Петербург

2020

Saint-Petersburg State University

Urazov Dilshod Rasulovich

**Determination of the maximal stability margin for  
time-delay equations**

Applied mathematics, fundamental informatics and programming

Scientific supervisor:

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Associate Professor A.V. Egorov

Reviewer:

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Associate Professor A. S. Eremin

Saint-Petersburg

2020

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Постановка задачи</b> . . . . .	5
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	6
<b>Глава 1. Скалярное уравнение</b> . . . . .	7
1.1. Постановка задачи . . . . .	7
1.2. Анализ корней квазиполинома . . . . .	7
1.3. Область $\alpha$ -устойчивости . . . . .	9
1.4. Критерии максимума . . . . .	11
1.5. Частный случай: прямоугольник . . . . .	12
1.6. Примеры . . . . .	13
1.6.1 Случай отрезка . . . . .	13
1.6.2 Случай прямоугольника . . . . .	14
1.6.3 Случай круга . . . . .	14
<b>Глава 2. Линейная система уравнений</b> . . . . .	16
2.1. Анализ характеристической функции . . . . .	16
2.2. Кривая кратного корня . . . . .	19
2.3. Связь кривой кратного корня с запасом устойчивости . . . . .	25
<b>Выводы</b> . . . . .	27
<b>Заключение</b> . . . . .	28
<b>Список литературы</b> . . . . .	29

## Введение

В предложенной работе рассматривается дифференциально-разностное линейное уравнение первого порядка запаздывающего типа. Такого рода уравнения широко применяются в химии, физике, биологии и других областях знания. Предполагается, что коэффициенты уравнения и величина запаздывания принадлежат некоторому компактному.

Характеристическая функция рассматриваемого уравнения представляет собой квазиполином. Квазиполиномы, все корни которых лежат в левой открытой комплексной полуплоскости, называются квазиполиномами Гурвица. Рассматриваются ограничения на коэффициенты уравнения, при выполнении которых уравнение является экспоненциально устойчивым, то есть его характеристический квазиполином гурвицев. Определяется его запас устойчивости как максимальная вещественная часть корней характеристического уравнения, взятая с обратным знаком.

Для скалярного случая установлена непосредственная связь максимального запаса устойчивости и существования корня максимальной кратности характеристического квазиполинома. Эта связь мотивирует на изучение линейной системы из нескольких дифференциально-разностных уравнений. Характеристическая функция системы представляет собой квазиполином степени, равной размерности системы.

## Постановка задачи

В пространстве параметров (коэффициенты и величина запаздывания) линейной системы дифференциально-разностных уравнений задан компакт. Требуется построить метод, позволяющий найти точку из этого компакта, соответствующую максимальному запасу устойчивости. Эта задача сводится к максимизации расстояния корней характеристического квази-полинома от мнимой оси.

## Обзор литературы

Теория дифференциальных уравнений с запаздыванием хорошо представлена в книгах [1], [4]. В [1], в частности, описаны и свойства характеристических квазиполиномов, используемых для изучения устойчивости систем. Результаты, связанные с исследованием систем дифференциальных уравнений с запаздыванием при помощи функционалов Ляпунова-Красовского, представлены в [3], [5], [6]. Работа [3] содержит исследование экспоненциальной устойчивости с помощью матриц Ляпунова. В ней же можно найти различные оценки связанных с устойчивостью характеристик. Такой характеристикой, в частности, является запас устойчивости. Простейшие системы с запаздывающим аргументом описаны в [2].

Одним из подходов к анализу устойчивости систем с запаздыванием является функция Ламберта. В статье [7] можно найти обзор этого подхода. Имея выражение собственных чисел системы через функцию Ламберта, удобно вычислять запас устойчивости. Но непосредственная максимизация вещественной части этой функции — задача нетривиальная. Некоторые важные свойства функции Ламберта описаны в [8].

При моделировании систем с отклонением по времени появляется задача численного нахождения собственных чисел. Связанные с этим алгоритмы можно найти в книге [9]. В ней описан подход к изучению устойчивости систем с запаздыванием на основе спектра. Там же приведены примеры приложения уравнений с запаздывающим аргументом в биологии и электронике.

# Глава 1. Скалярное уравнение

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим скалярное линейное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - h), \quad (1)$$

где  $h > 0$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Характеристическая функция для уравнения (1) имеет вид [1]

$$f(s) = s - a_0 - a_1e^{-sh}. \quad (2)$$

Границы области устойчивости  $\Omega$  в пространстве коэффициентов имеют вид [2]

$$a_1 = -a_0, \quad a_0 \leq \frac{1}{h}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_0 = \theta \frac{\cos h\theta}{\sin h\theta}, \\ a_1 = -\frac{\theta}{\sin h\theta}, \end{cases} \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{h}). \quad (4)$$

Пусть  $\Lambda = \{s \mid f(s) = 0\}$  — спектр уравнения (1). Если уравнение (1) экспоненциально устойчиво, тогда  $Re(\lambda) < 0, \lambda \in \Lambda$ . В этом случае, запасом устойчивости будем называть число  $\alpha = \min_{\lambda \in \Lambda} |Re(\lambda)|$ .

Пусть  $(a_0, a_1) \in \Delta$ ,  $h \in [h, \bar{h}]$ , где  $\Delta \subset R^2$  — компактное множество. Требуется подобрать такие  $a_0, a_1, h$ , чтобы запас устойчивости уравнения (1) был максимальным. Компактность множества  $\Delta$  гарантирует существование искомой точки.

## 1.2 Анализ корней квазиполинома

Квазиполином (2) имеет бесконечное множество корней. Рассмотрим производные квазиполинома (2). Они имеют вид:

$$f'(s) = 1 + a_1he^{-sh},$$

$$f''(s) = -a_1h^2e^{-sh}.$$

У второй производной нет корней, за исключением тривиального случая  $a_1 = 0$ . Но тогда нет корней у первой производной. Следовательно, максимальная кратность собственных чисел равна двум.

**Лемма 1.** *Все кратные корни характеристической функции (2) вещественны.*

**Доказательство.** Рассмотрим корни первой производной

$$f'(s) = 1 + a_1 h e^{-sh}.$$

Очевидно, что  $f'(s) = 0$  тогда и только тогда, когда

$$a_1 = -\frac{1}{h} e^{sh}.$$

Следовательно,

$$sh = \ln(-a_1 h) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$-a_1 h = r e^{i\phi}, \quad \phi \in \{0, \pi\}.$$

Таким образом,

$$s = \frac{1}{h} \ln(r) + i \frac{\phi + 2k\pi}{h}.$$

Подставив данные выражения для  $a_1$  и  $s$  в (2), получаем

$$\widehat{f}(r, \phi) = \frac{1}{h} \ln(r) + i \frac{\phi + 2k\pi}{h} - a_0 + \frac{1}{h}.$$

Мнимая часть  $\widehat{f}$  равна нулю тогда и только тогда, когда  $k = \phi = 0$ .

Лемма 1 доказана.

Пусть  $s = -\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  — кратное собственное число уравнения (1). Выразив коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  из системы  $f(-\alpha) = f'(-\alpha) = 0$ , получаем параметрическую кривую

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{h} - \alpha, \\ a_1 = -\frac{1}{h} e^{-\alpha h}, \end{cases} \quad \alpha \geq 0. \quad (5)$$

Очевидно, что квазиполином (2) имеет кратный корень тогда и только тогда, когда коэффициенты квазиполинома лежат на кривой (5).

Рассмотрим корни квазиполинома на границах области устойчивости. Квазиполином (2) с коэффициентами на границе (3) области устойчивости имеет корень  $s = 0$ :

$$f(0) = 0 - a_0 + a_0 e^{-0h} = 0.$$

Квазиполином (2) с коэффициентами на границе (4) области устойчивости имеет пару чисто мнимых корней:

$$\begin{aligned} f(\pm i\theta) &= \pm i\theta - \theta \frac{\cos h\theta}{\sin h\theta} + \frac{\theta}{\sin h\theta} e^{\mp i\theta h} = \\ &= \pm i\theta - \theta \frac{\cos h\theta}{\sin h\theta} + \frac{\theta}{\sin h\theta} (\cos h\theta \mp i \sin h\theta) = 0. \end{aligned}$$

В точке  $(\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})$  существует корень 0 кратности 2.

### 1.3 Область $\alpha$ -устойчивости

Сделаем в квазиполиноме (2) замену  $s = z - \alpha$ ,

$$f(z - \alpha) = g(z) = z - \underbrace{(a_0 + \alpha)}_{\tilde{a}_0} - \underbrace{a_1 e^{\alpha h}}_{\tilde{a}_1} e^{-zh}.$$

При такой замене корни исходного квазиполинома сдвигаются параллельно вправо на величину  $\alpha$ . Коэффициенты квазиполинома  $g(z)$  суть непрерывные функции от  $\alpha$

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 = a_0 + \alpha, \\ \tilde{a}_1 = a_1 e^{\alpha h}. \end{cases} \quad (6)$$

Будем рассматривать эти выражения как параметрическое задание некоторой кривой. Пусть  $\alpha = \alpha_0$  — наименьшее положительное значение параметра, при котором кривая (6) пересекает (3)-(4). Это означает, что у квазиполинома  $g(z)$  появляется корень на мнимой оси. Таким образом, величина  $\alpha_0$  есть запас устойчивости для  $f(s)$  и характеризует расстояние

точки до границы области устойчивости.

Отступим от каждой точки границы по соответствующей кривой (6) внутрь области  $\Omega$  на расстояние  $\alpha = -\alpha_0, \alpha_0 \geq 0$ . Получим новую границу, которая описывается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 = a_0 - \alpha_0, \\ \tilde{a}_1 = -a_0 e^{-\alpha_0 h}, \end{cases} \quad a_0 \leq \frac{1}{h}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 = \theta \frac{\cos h\theta}{\sin h\theta} - \alpha_0, \\ \tilde{a}_1 = -\frac{\theta}{\sin h\theta} e^{-\alpha_0 h}, \end{cases} \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{h}]. \quad (8)$$

Кривые (7), (8) всегда имеют общую точку  $(\frac{1}{h} - \alpha_0, -\frac{1}{h} e^{-\alpha_0 h})$ , которая лежит на кривой кратного корня (5). Очевидно, что квазиполином (2) имеет запас устойчивости  $\alpha_0$  тогда и только тогда, когда его коэффициенты принадлежат множеству (7)-(8). Пусть  $\Omega(\alpha_0, h)$  — область, ограниченная кривыми (7)-(8), которая не содержит положительных значений  $a_0$ . Заметим, что  $\Omega = \Omega(0, h)$ .

**Лемма 2.** Коэффициенты квазиполинома (2) принадлежат области  $\Omega(\alpha_0, h)$  тогда и только тогда, когда квазиполином (2) имеет запас устойчивости больше  $\alpha_0$ .

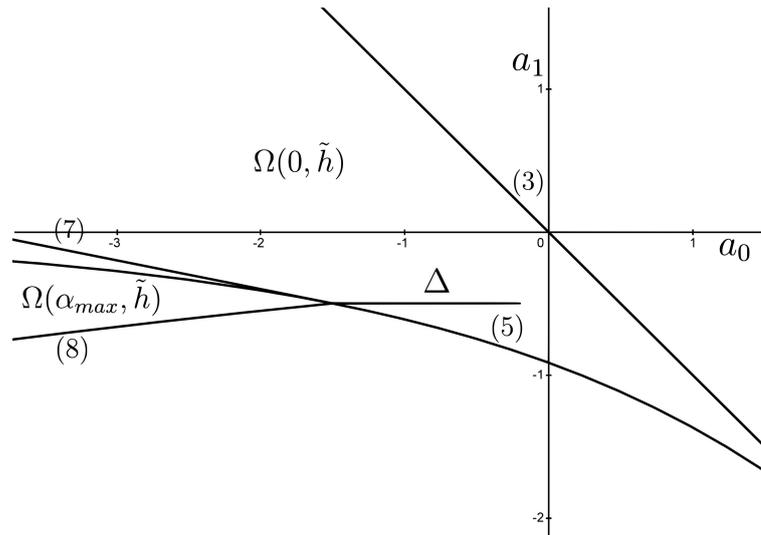


Рис. 1. Исследуемые множества

**Доказательство.** Системы (7) и (8) непрерывно зависят от парамет-

ра  $\alpha_0$  и имеют общее решение  $(\frac{1}{h} - \alpha_0, -\frac{1}{h}e^{-\alpha_0 h})$ , которое лежит на кривой кратного корня (5). При возрастании  $\alpha_0$  эта точка сдвигается вглубь области  $\Omega(\alpha_0, h)$ . Тангенс угла наклона прямой (7) и тангенс угла наклона касательной к кривой (8)

$$k_1 = e^{-\alpha_0 h}, \quad k_2 = e^{-\alpha_0 h} \frac{h\theta \cos h\theta - \sin h\theta}{\cos h\theta \sin h\theta - h\theta}$$

стремятся к 0 при  $\alpha_0 \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\partial\Omega(\eta, h) \subset \Omega(\xi, h)$  и  $\Omega(\eta, h) \subset \Omega(\xi, h)$  при  $\eta > \xi$ .

Лемма 2 доказана.

## 1.4 Критерии максимума

Рассмотрим случай фиксированного запаздывания.

**Теорема 1.** Пусть  $\Delta$  — некоторое компактное множество точек в пространстве коэффициентов  $a_0, a_1$  и  $\Delta \cap \Omega \neq \emptyset$ , а  $h$  — фиксировано. Тогда максимальным запасом устойчивости  $\alpha_{max}$  обладает квазиполином (2) с коэффициентами  $A = (a_0, a_1)$  такими, что  $A \in \partial\Omega(\alpha_{max}, h)$  и  $\Delta \cap \Omega(\alpha_{max} + \varepsilon, h) = \emptyset$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

**Доказательство.** Доказательство следует из леммы 2. Пусть квазиполином с коэффициентами  $A = (a_0, a_1)$  имеет запас устойчивости  $\hat{\alpha}$ . Следовательно,  $A \in \partial\Omega(\hat{\alpha}, h)$ . Если существует  $B \in \Delta$  такая, что  $B \in \Omega(\hat{\alpha} + \varepsilon, h)$  при  $\varepsilon > 0$ , то запас устойчивости квазиполинома с коэффициентами  $B = (b_0, b_1)$  равен  $\tilde{\alpha} > \hat{\alpha} + \varepsilon > \hat{\alpha}$ . А значит  $\hat{\alpha} \neq \alpha_{max}$ . Другими словами, максимальному запасу устойчивости отвечает точка, которая последней входит в область  $\Omega(\alpha, h)$  при непрерывном увеличении  $\alpha$ .

Теорема 1 доказана.

Для случая максимизации по запаздыванию имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Для квазиполинома с фиксированными коэффициентами  $A = (a_0, a_1)$  максимальному запасу устойчивости  $\alpha_{max}$  отвечает запаздывание  $\tilde{h} \in [\underline{h}, \bar{h}]$  такое, что  $A \in \partial\Omega(\alpha_{max}, \tilde{h})$ , и для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\hat{h} \in [\tilde{h} - \varepsilon, \tilde{h} + \varepsilon] \cap [\underline{h}, \bar{h}]$   $A \notin \Omega(\alpha_{max}, \hat{h})$ .

**Доказательство.** Системы (7) и (8) непрерывно зависят также и от параметра  $h$ . Пусть при некотором  $h_0 \in [\underline{h}, \bar{h}]$  точка  $A$  отвечает запасу устойчивости  $\alpha(h_0)$ . Следовательно,  $A \in \partial\Omega(\alpha(h_0), h_0)$ . Если  $A \in \Omega(\alpha(h_0), h_0 + \varepsilon)$  при некотором  $\varepsilon$ , то по лемме 2 точка  $A$  отвечает запасу устойчивости большему чем  $\alpha(h_0)$  при  $h = h_0 + \varepsilon$ .

Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Рассмотрим одно важное свойство кривой кратного корня (5). Пусть  $a_1 \in [\underline{a}_1, \bar{a}_1]$ ,  $a_0 = \tilde{a}_0$ ,  $h = \tilde{h}$  и  $I = [\underline{a}_1, \bar{a}_1] \times a_0 \subset \Omega(0, \tilde{h})$ . Тогда по теореме 1 максимальному запасу устойчивости на отрезке  $I$  будет отвечать точка пересечения этого отрезка с кривой кратного корня (5), так как она последней входит в область  $\Omega(\alpha, \tilde{h})$  при непрерывном увеличении  $\alpha$ . При этом точка отвечает максимальному запасу устойчивости и для вертикальной прямой, содержащей отрезок  $I$ . Это верно для произвольного отрезка, пересекающего кривую (5). Таким образом, кривая кратного корня есть геометрическое место точек, отвечающих максимальному запасу устойчивости для вертикальных прямых, проходящих через эти точки.

**Замечание 2.** Рассмотрим другое важное свойство кривой кратного корня. Пусть дана точка  $A = (a_0, a_1)$ . Максимально возможному запасу устойчивости отвечает значение запаздывания  $\tilde{h}$ , при котором  $A$  лежит на кривой кратного корня (5). Заметим, что этого значения запаздывания может и не существовать.

## 1.5 Частный случай: прямоугольник

Интересным является случай, когда  $\Delta = [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \times [\underline{a}_1, \bar{a}_1]$ ,  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ .

Если левая сторона прямоугольника  $\Delta$  при любом  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$  лежит ниже кривой (5), тогда максимальному запасу устойчивости отвечает точка  $(\underline{a}_0, \bar{a}_1)$  и запаздывание  $h = \underline{h}$ .

Если левая сторона прямоугольника  $\Delta$  при любом  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$  лежит выше кривой (5), тогда максимальному запасу устойчивости отвечает точка  $(\underline{a}_0, \underline{a}_1)$  и запаздывание  $h = \bar{h}$  при  $\underline{a}_1 \geq 0$ , иначе  $h = \underline{h}$ .

Если левая сторона прямоугольника  $\Delta$  при любом  $h \in [\underline{h}_0, \bar{h}_0] \subset [\underline{h}, \bar{h}]$  пересекает кривую (5), тогда максимальному запасу устойчивости отвечает

запаздывание  $\underline{h}_0 = \max_{h \in [\underline{h}_0, \bar{h}_0]} \left( \frac{1}{h} - \underline{a}_0 \right)$  и точка  $(\underline{a}_0, a_1)$ , которая лежит на кривой (5) при  $h = \underline{h}_0$ .

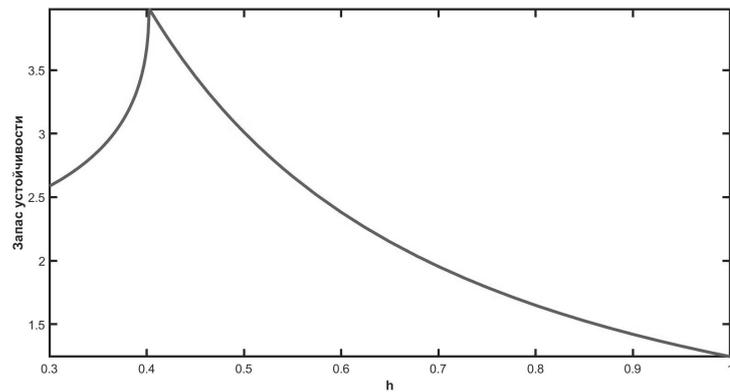
Таким образом, в этом случае максимальный запас устойчивости достигается либо в угловых точках, либо на кривой кратного корня (5).

## 1.6 Примеры

Рассмотрим три примера.

### 1.6.1 Случай отрезка

Этот случай изображен на рис 1. Пусть  $a_0 \in [-1.5, -0.25]$ ,  $a_1 = -0.5, h \in [0.3, 1]$ . Теореме 1 удовлетворяет только левая крайняя точка  $(-1.5, -0.5)$  вне зависимости от  $h$ . Теореме 2 для этой точки удовлетворяет  $h$ , при котором она лежит на кривой кратного корня (5). Это запаздывание  $h = \tilde{h}$  равно 0.40236. Запас устойчивости  $\alpha_{max} = 3.985$ . На рис. 2 представлен график зависимости запаса устойчивости при  $a_0 = -1.5, a_1 = -0.5$  от запаздывания, построенный в среде MATLAB. С шагом  $10^{-5}$  был численно найден запас устойчивости как момент пересечения кривой (6) и границы (7)-(8).



**Рис. 2.** Зависимость запаса устойчивости от запаздывания

## 1.6.2 Случай прямоугольника

Этот случай изображен на рисунке 3. Пусть  $a_0 \in [-1.5, -0.25]$ ,  $a_1 \in [-0.5, -0.2]$ ,  $h \in [0.3, 1]$ . Теореме 1 может удовлетворять только левая сторона прямоугольника, то есть отрезок  $a_1 \in [-0.5, -0.2]$ ,  $a_0 = -1.5$ . Теореме 2 удовлетворяют все  $h \in [0.40236, 0.671]$  с  $a_0(h), a_1(h)$ , которые лежат на соответствующей кривой (5). При остальных значениях  $h$  кривая (5) не пересекает левую сторону прямоугольника. Из первого уравнения системы (5) напрямую следует, что запас устойчивости квазиполиномов, коэффициенты которых лежат на кривой (5), определяется формулой  $\alpha = \frac{1}{h} - a_0$ . Найдем  $\alpha_{max} = \max_{h \in [0.40236, 0.671]} (\frac{1}{h} + 1.5) = 3.985$  при  $h = 0.40236$ .

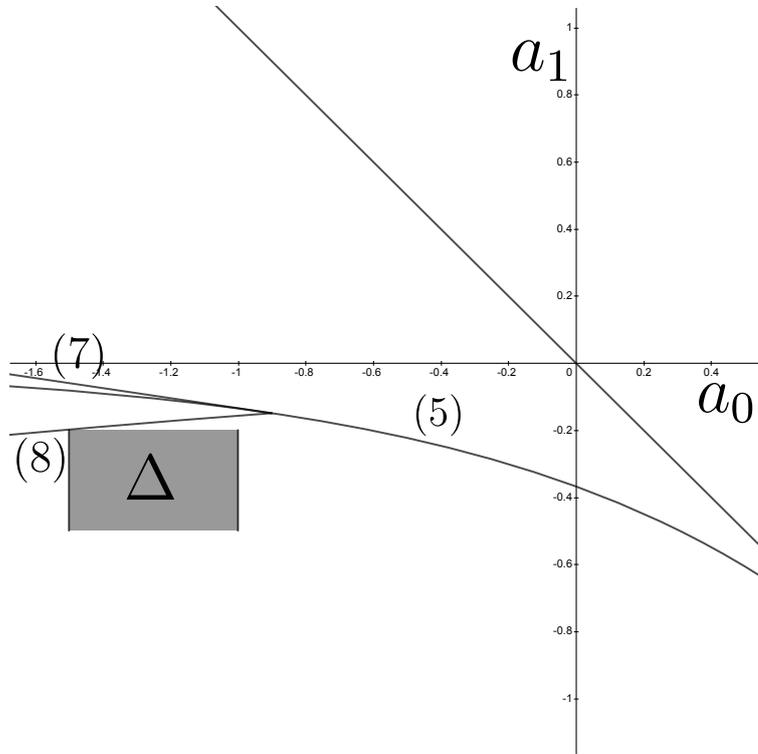


Рис. 3. Положение прямоугольника и кривых при  $h = 0.40236, \alpha = 3.985$

## 1.6.3 Случай круга

Пусть  $\Delta = \{(a_0, a_1) \mid (a_0 + 1)^2 + (a_1 + 0.5)^2 \leq 0.1\}$ ,  $h \in [0.5, 0.6]$ . Теореме 1 удовлетворяют точки  $(a_0(h), a_1(h)) \in \partial\Delta$ , которые лежат на кривой кратного корня (5) при соответствующем  $h$ . Кривая кратного корня имеет две точки пересечения с окружностью, максимальному запасу устойчивости

соответствует точка, с наименьшей координатой  $a_0$ . Таким образом, мы получаем подмножество границы  $\Delta$ , которое отвечает максимальному запасу устойчивости при соответствующем  $h$ . Найдем  $\alpha_{max} = \max_{h \in [0.5, 0.6]} (\frac{1}{h} - a_0(h)) = 3.2945$  при  $h = 0.5$ . Итак, максимальному запасу устойчивости отвечает точка  $(-1.2945, -0.3848)$  при значении запаздывания  $h = 0.5$ .

## Глава 2. Линейная система уравнений

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

где  $A, B$  — вещественные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $h > 0$ . Характеристическая функция системы (9) имеет вид [3]

$$f(s) = \det(sI - A - e^{-sh}B). \quad (10)$$

Пусть  $\Lambda = \{s \mid f(s) = 0\}$  — спектр системы (9). Если система (9) экспоненциально устойчива, то  $Re(\lambda) < 0, \lambda \in \Lambda$ . Для экспоненциально устойчивых систем запасом устойчивости будем называть вещественное число  $\alpha = \min_{\lambda \in \Lambda} |Re(\lambda)|$ .

### 2.1 Анализ характеристической функции

Характеристическая функция (10) — это определитель следующей матрицы размерности  $n \times n$ :

$$Y(s) = \begin{pmatrix} s - a_{11} - b_{11}e^{-sh} & -a_{12} - b_{12}e^{-sh} & \dots & -a_{1n} - b_{1n}e^{-sh} \\ -a_{21} - b_{21}e^{-sh} & s - a_{22} - b_{22}e^{-sh} & \dots & -a_{2n} - b_{2n}e^{-sh} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} - b_{n1}e^{-sh} & -a_{n2} - b_{n2}e^{-sh} & \dots & s - a_{nn} - b_{nn}e^{-sh} \end{pmatrix},$$

где  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — элементы матриц  $A$  и  $B$  соответственно. Очевидно, что характеристическая функция (10) является некоторой линейной комбинацией линейно независимых функций вида  $e^{-ksh}, s^k, s^k e^{-jsh}$ . Коэффициенты в этой линейной комбинации являются полиномиальными выражениями от элементов матриц  $A, B$ .

Вычислим эти коэффициенты. Очевидно, что коэффициенты при слагаемых вида  $e^{-ksh}$  зависят от обеих матриц  $A, B$ . Введем следующие обо-

значения:

$$G(\Gamma) = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}, \quad g^i = \begin{cases} b^i, & i \in \Gamma \\ a^i, & i \notin \Gamma \end{cases}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |\Gamma| \leq n,$$

где  $a^i, b^i$  обозначают строки с номером  $i$  матриц  $A, B$  соответственно,  $\Gamma \subset \{1, 2, \dots, n\}$ . Так

$$G(\emptyset) = A, \quad G(\{1, 2, \dots, n\}) = B.$$

Пусть

$$D_k = \sum_{|\Gamma|=k} \det(G(\Gamma)).$$

Суммирование в правой части ведется по всем подмножествам множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  размера  $k$ .

Очевидно, что коэффициенты при слагаемых вида  $s^k$  зависят только от матрицы  $A$ . В связи с этим определим

$$P_k = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} M(A, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k).$$

Здесь суммирование проводится по всем сочетаниям  $k$  элементов множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Обозначим как  $M(A, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  минор матрицы  $A$ , полученный вычеркиванием строк и столбцов с номерами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Пусть  $P_n$  — минор порядка 0, и положим его равным 1.

Также очевидно, что коэффициенты при слагаемых вида  $s^k e^{-jsh}$  зависят от обеих матриц  $A, B$ . Пусть

$$Q_{kj} = \sum_{|\Gamma|=k} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j} M(G(\Gamma), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j).$$

В этом случае суммирование проводится по всем подмножествам множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  и по всем сочетаниям  $j$  элементов множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Пусть  $M(G(\Gamma), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)$  — минор матрицы  $G(\Gamma)$ , полученный вычер-

квиванием строк и столбцов с номерами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ .

Используя введенные обозначения, получаем явный вид характеристической функции (10)

$$f(s) = (-1)^n \sum_{k=0}^n D_k e^{-ksh} + \sum_{i=1}^n P_i s^i + \sum_{p+j \leq n} Q_{pj} s^p e^{-jsh}, \quad (11)$$

из которого видно, что характеристическая функция является квазиполиномом степени  $n$ .

Аналогично скалярному случаю имеет место утверждение относительно максимальной кратности корней.

**Теорема 3.** *Максимальная кратность корней характеристической функции (10) равна  $N = \sum_{k=1}^n (k+1)$ .*

**Доказательство.** Перегруппировав слагаемые в выражении (11), получим следующую форму записи характеристической функции

$$f(s) = \sum_{k=0}^n e^{-ksh} p_{n-k}(s), \quad (12)$$

где  $p_{n-k}(s)$  — полиномы степени  $n-k$  от комплексной переменной  $s$ . Причем  $p_n(s) = s^n + p_{n,n-1}s^{n-1} + \dots + p_{n,1}s + p_{n,0}$ . Используя формулу Лейбница для производной произведения, найдем производную порядка  $n+1$  функции (12)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(s) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+1}{i} (-kh)^{n+1-i} e^{-ksh} p_{n-k}^{(i)}(s) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} e^{-ksh} \tilde{p}_{n-k-i}(s) = 0. \end{aligned}$$

Умножим последнее уравнение на  $e^{sh}$ :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} e^{(-k+1)sh} \tilde{p}_{n-k-i}(s) = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что это выражение можно переписать в следующем виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ksh} g_{n-k-1}(s) = 0,$$

где  $g_{n-k}(s)$  — полином степени  $n - k$  от комплексной переменной  $s$ . Повторяя эту процедуру  $n - 1$  раз, мы приходим к следующему уравнению.

$$s - a - be^{-sh} = 0. \quad (14)$$

Производная второго порядка левой части уравнения (14) имеет вид  $-bh^2e^{-sh}$ . Эта функция не имеет корней. В итоге, было вычислено  $N = (n + 1) + n + \dots + 2$  производных. Производная порядка  $N$  не имеет корней.

Теорема 3 доказана.

Также имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.** *Корни максимальной кратности  $N = \sum_{k=1}^n (k + 1)$  характеристической функции (10) могут быть только вещественными.*

**Доказательство.** В доказательстве теоремы 3 было показано, что на последнем этапе вышеописанной процедуры, получаем уравнение (14). Из леммы 1 следует, что кратные корни данного уравнения могут быть только вещественными.

Лемма 3 доказана.

## 2.2 Кривая кратного корня

Рассмотрим вопрос существования коэффициентов полиномов в выражении характеристической функции (12), при которых она имеет корни максимальной кратности.

**Пример 1.** Исследуем случай  $n = 2, h = 1$  в качестве примера

$$f(s) = s^2 + as + b + dse^{-s} + ge^{-s} + re^{-2s}. \quad (15)$$

Пусть  $s = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . Найдем производные функции (15) от первого до

четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\alpha) &= 2\alpha + a + d(e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}) - ge^{-\alpha} - 2re^{-2\alpha}, \\
f^{(2)}(\alpha) &= 2 + d(-2e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha}) + ge^{-\alpha} + 4re^{-2\alpha}, \\
f^{(3)}(\alpha) &= d(3e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}) - ge^{-\alpha} - 8re^{-2\alpha}, \\
f^{(4)}(\alpha) &= d(-4e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha}) + ge^{-\alpha} + 16re^{-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Получим систему уравнений относительно коэффициентов  $a, b, d, g, r$ , при которых  $\alpha$  будет корнем максимальной кратности  $N = 5$ :

$$\begin{cases}
\alpha^2 + a\alpha + b + d\alpha e^{-\alpha} + ge^{-\alpha} + re^{-2\alpha} = 0, \\
2\alpha + a + d(e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}) - ge^{-\alpha} - 2re^{-2\alpha} = 0, \\
2 + d(-2e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha}) + ge^{-\alpha} + 4re^{-2\alpha} = 0, \\
d(3e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}) - ge^{-\alpha} - 8re^{-2\alpha} = 0, \\
d(-4e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha}) + ge^{-\alpha} + 16re^{-2\alpha} = 0.
\end{cases}$$

Очевидно, что это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a, b, d, g, r$ . Она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
\alpha & 1 & \alpha e^{-\alpha} & e^{-\alpha} & e^{-2\alpha} \\
1 & 0 & e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha} & -e^{-\alpha} & -2e^{-2\alpha} \\
0 & 0 & -2e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} & e^{-\alpha} & 4e^{-2\alpha} \\
0 & 0 & 3e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha} & -e^{-\alpha} & -8e^{-2\alpha} \\
0 & 0 & -4e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} & e^{-\alpha} & 16e^{-2\alpha}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a \\
b \\
d \\
g \\
r
\end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix}
\alpha^2 \\
2\alpha \\
2 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}. \quad (16)$$

Строки матрицы в левой части этой системы линейно независимы при любом значении  $\alpha$ . Следовательно, решение системы единственно. Коэффициенты  $a, b, d, g, r$  могут быть выражены через  $\alpha$ . Таким образом, получаем однопараметрическое множество в пространстве коэффициентов — кривую кратного корня. Параметр  $\alpha$  является корнем максимальной кратности при соответствующих значениях коэффициентов.

Пусть  $\alpha = -1$ . Соответствующие значения коэффициентов  $a, b, d, g, r$  можно найти двумя способами: аналитически выразить их из системы (16)

через параметр  $\alpha$  и подставить значение  $-1$ , либо решить систему (16) при  $\alpha = -1$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -e & e & e^2 \\ 1 & 0 & 2e & -e & -2e^2 \\ 0 & 0 & -3e & e & 4e^2 \\ 0 & 0 & 4e & -e & -8e^2 \\ 0 & 0 & -5e & e & 16e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ g \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значению параметра  $\alpha = -1$  соответствует точка в пространстве коэффициентов

$$\left( -3 \quad \frac{9}{2} \quad -\frac{4}{e} \quad -\frac{12}{e} \quad -\frac{1}{2e^2} \right).$$

Тогда квазиполином (15) будет иметь вид

$$f(s) = s^2 - 3s + \frac{9}{2} - \frac{4}{e}se^{-s} - \frac{12}{e}e^{-s} - \frac{1}{2e^2}e^{-2s}.$$

Соответствующие производные имеют вид

$$\begin{aligned} f^{(1)}(s) &= 2s - 3 - \frac{4}{e}(e^{-s} - se^{-s}) + \frac{12}{e}e^{-s} + 2\frac{1}{2e^2}e^{-2s}, \\ f^{(2)}(s) &= 2 - \frac{4}{e}(-2e^{-s} + se^{-s}) - \frac{12}{e}e^{-s} - 4\frac{1}{2e^2}e^{-2s}, \\ f^{(3)}(s) &= -\frac{4}{e}(3e^{-s} - se^{-s}) + \frac{12}{e}e^{-s} + 8\frac{1}{2e^2}e^{-2s}, \\ f^{(4)}(s) &= -\frac{4}{e}(-4e^{-s} + se^{-s}) - \frac{12}{e}e^{-s} - 16\frac{1}{2e^2}e^{-2s}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что  $s = -1$  действительно является корнем кратности 5.

Пусть  $\alpha = 0$ . Получаем систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ g \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решением данной системы является вектор

$$\left( -5 \quad \frac{8}{2} \quad -4 \quad -8 \quad -\frac{1}{2} \right).$$

У квазиполинома с соответствующими коэффициентами есть корень 0 на мнимой оси. Следовательно, связанная с ним система не является экспоненциально устойчивой.

Докажем существование кривой кратного корня в общем случае.

**Теорема 4.** *Для любой  $\alpha \in \mathbb{R}$  существует единственный набор коэффициентов квазиполинома (12), при которых  $\alpha$  является корнем максимальной кратности.*

**Доказательство.** Квазиполином вида (12) имеет  $N = \sum_{k=1}^n (k+1)$  коэффициентов:

$$p = \begin{pmatrix} p_{n,n-1} \\ p_{n,n-2} \\ \vdots \\ p_{n,0} \\ p_{n-1,n-1} \\ p_{n-1,n-2} \\ \vdots \\ p_{0,0} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $s = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . Квазиполином (12) можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^n + p_{n,n-1}\alpha^{n-1} + \dots + p_{n,0} \\ &+ p_{n-1,n-1}\alpha^{n-1}e^{-\alpha h} + p_{n-1,n-2}\alpha^{n-2}e^{-\alpha h} + \dots + p_{n-1,0}e^{-\alpha h} \\ &+ p_{n-2,n-2}\alpha^{n-2}e^{-2\alpha h} + p_{n-2,n-3}\alpha^{n-3}e^{-2\alpha h} + \dots + p_{n-2,0}e^{-2\alpha h} \\ &+ \dots + p_{1,1}\alpha e^{-(n-1)\alpha h} + p_{1,0}e^{-(n-1)\alpha h} + p_{0,0}e^{-n\alpha h}. \end{aligned}$$

Вычислим  $N - 1$  последовательных производных. Коэффициенты входят линейно в квазиполином и во все его производные. Следовательно, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов квазиполинома, при которых  $\alpha$  будет кор-

нем максимальной кратности  $N$ . Очевидно, что матрица системы обладает характерным свойством — каждая последующая строка является производной предыдущей по параметру  $\alpha$ . Тем же свойством обладает и вектор правой части системы, который имеет вид

$$q = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ n\alpha^{n-1} \\ n(n-1)\alpha^{n-2} \\ n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3} \\ \vdots \\ n! \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу системы в сокращенном виде:

$$V = \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} & \dots & 1 & \dots & e^{-nah} \\ (n-1)\alpha^{n-2} & \dots & 0 & \dots & -ne^{-nah} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (-n)^{N-1}e^{-nah} \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству того, что система  $Vp = q$  имеет единственное решение. Для этого достаточно доказать, что  $\det(V) \neq 0$  ни при каком значении параметра  $\alpha$ . Ведь тогда выполнится условие теоремы Кронекера-Капелли, причем  $\text{rang}(V)$  будет равняться  $N$ .

Ни одна строка матрицы  $V$  не является нулевой ни при каком значении параметра  $\alpha$ , так как, в частности, столбец с номером  $N$  состоит полностью из элементов вида  $ce^{-nah}$ ,  $c \neq 0$ . Также ни один столбец матрицы  $V$  не является нулевым ни при каком значении параметра  $\alpha$ . Действительно, в столбцах с номерами от 1 до  $n$  присутствует элемент  $(n-k)!$ ,  $k = \overline{1, n}$ . В столбцах с номерами от  $n+1$  до  $N$  первый элемент имеет вид  $\alpha^k e^{-mah}$ ,

$k + m \leq n$ . Производная порядка  $k$  от функции  $\alpha^k e^{-m\alpha h}$ ,  $k + m \leq n$  равна

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{k!}{i!} \alpha^i (-mh)^i e^{-m\alpha h}.$$

Очевидно, что 0 является корнем кратности  $k < N$  функции  $\alpha^k e^{-m\alpha h}$ .

Мы предполагаем, что  $n \geq 2$ , так как скалярный случай  $n = 1$  уже был изучен ранее. Столбец с номером  $2n \leq N$  равен

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha h} \\ -he^{-\alpha h} \\ \vdots \\ (-h)^{N-1} e^{-\alpha h} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию его элементов

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i (-h)^i e^{-\alpha h},$$

где  $c_i$  — некоторые вещественные константы. Для того чтобы строки матрицы  $V$  были линейно зависимы, необходимо, чтобы эта линейная комбинация была равна нулю для нетривиального набора  $\{c_i\}$ . Линейная комбинация элементов столбца с номером  $2n+1 \leq N$  с теми же коэффициентами должна быть равна нулю. То есть

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1} c_i (-h)^i e^{-\alpha h} = 0, \\ \sum_{i=0}^{N-1} c_i (-2h)^i e^{-2\alpha h} = 0. \end{cases}$$

Из этого следует, что  $c_i = c_i 2^i$ . Если  $i > 0$ , тогда это возможно только при  $c_i = 0$ ,  $i \in \overline{1, N-1}$ . Линейная комбинация элементов столбца с номером  $n \leq N$  равна  $c_0$ . Таким образом, чтобы строки матрицы  $V$  были линейно зависимы необходимо, чтобы  $c_i = 0$ ,  $i \in \overline{1, N-1}$ . Мы пришли к противो-

речию. Соответственно,  $\det(V) \neq 0$  ни при каком значении параметра  $\alpha$ .

Теорема 4 доказана.

## 2.3 Связь кривой кратного корня с запасом устойчивости

Замечание 1 и замечание 2 мотивируют на исследование связи факта существования корня максимальной кратности и достижения максимального запаса устойчивости на компакте и в случае системы уравнений.

**Пример 2.** Рассмотрим квазиполином второй степени

$$f(s) = (s - a - be^{-sh})^2.$$

Так как всего два коэффициента из возможных пяти свободны, то максимально возможная кратность для системы второго порядка  $N = 5$  не достигается. Производная четвертого порядка равна

$$-2bh^4e^{-sh}(s - a - be^{-sh}) + 6b^2h^4e^{-2sh} + 8bh^3e^{-sh}(1 + be^{-sh}).$$

Действительно, максимально достижимая кратность в данном случае равна 4. Пусть коэффициенты  $a, b$  лежат на кривой кратного корня:

$$f(s) = (s - (\frac{1}{h} + \alpha) + \frac{1}{h}e^{\alpha h}e^{-sh})^2.$$

Число  $\alpha$  — корень кратности 4 квазиполинома  $f(s)$ . При этом число  $-\alpha$  — запас устойчивости.

Рассмотрим квазиполином из примера 1

$$f(s) = s^2 - 3s + \frac{9}{2} - \frac{4}{e}se^{-s} - \frac{12}{e}e^{-s} - \frac{1}{2e^2}e^{-2s},$$

имеющий корень  $s = -1$  кратности  $N = 5$ . Вычисления показывают, что запас устойчивости равен  $\alpha = 1$ . То есть корень  $s = -1$  — ближайший к мнимой оси.

Максимальный запас устойчивости на некотором множестве коэффициентов при фиксированном запаздывании или на множестве величин

запаздывания при фиксированных коэффициентах может быть связан с пересечением точки в пространстве коэффициентов с кривой кратного корня.

## Выводы

В данной работе получены следующие результаты:

1. Разработан метод нахождения коэффициентов и величины запаздывания из компакта, при которых запас устойчивости линейного дифференциального уравнения с одним запаздыванием будет максимальным. Представлен простой алгоритм для случая, когда компакт является прямоугольником. Выявлена связь существования корня максимальной кратности и максимума запаса устойчивости.
2. Для линейной системы дифференциальных уравнений с одним запаздыванием обобщены результаты относительно кратных корней характеристической функции. А именно, сформулированы теоремы о максимальной кратности собственных чисел и существовании коэффициентов, при которых эта кратность достигается. Таким образом, появляется возможность дальнейшего изучения связи существования корня максимальной кратности и максимума запаса устойчивости на компакте.

## Заключение

Для скалярного уравнения сформулированы критерии максимума для коэффициентов уравнения и величины запаздывания. Разработан метод максимизации запаса устойчивости для случая, когда множество параметров ограничено некоторым заданным компактом. В случае, когда компакт является прямоугольником, решение задачи требует минимум вычислений.

В скалярном случае установлена связь максимального запаса устойчивости и существования корня максимальной кратности характеристического квазиполинома. В случае системы найдена максимально возможная кратность корня характеристического квазиполинома. Доказано существование коэффициентов, при которых есть корень максимальной кратности.

## Список литературы

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
- [2] Андронов А. А., Майер А. Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т.7. Вып. 2-3. С. 95–106
- [3] Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Birkhäuser, Basel, 2013. P. 28–37.
- [4] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Ленанд, 2014.
- [5] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.
- [6] Velazquez-Velazquez J. E., Kharitonov V. L. Lyapunov-Krasovskii functionals for scalar neutral type time delay equations // Systems and Control Letters. 2009. Vol. 58(1). P. 17–25.
- [7] Yi S., Duan S., Nelson P., Ulsoy A. The Lambert W function approach to time delay systems and the LambertW-DDE toolbox // Proceedings of the 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems, 2012. Vol. 10. P. 114–119.
- [8] Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics. 1996. Vol. 5. P. 329–359.
- [9] Michiels W., Niculescu S. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.