

Санкт–Петербургский Государственный Университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Барсук Полина Игоревна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Совместное урегулирование загрязнений окружающей
среды методами кооперативных игр**

Направление 01.03.02

Прикладная математика, фундаментальная информатика и
программирование

Научный руководитель,
доктор физ.–мат.н.,
профессор
Громова Е. В.

Санкт–Петербург
2020

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	6
Постановка задачи	7
1. Кооперативная дифференциальная игра с предписанной продолжительностью	9
1.1. Характеристические функции	9
1.1.1. α -характеристическая функция	9
1.1.2. δ -характеристическая функция	9
1.1.3. ζ -характеристическая функция	10
1.1.4. η -характеристическая функция	10
1.2. Динамическая устойчивость кооперативного решения	11
1.2.1. Векторы Шепли и Харшаньи	11
1.2.2. Процедура распределения дележа	12
1.3. Сильная динамическая устойчивость кооперативного решения	13
1.3.1. Первый метод построения	13
1.3.2. Второй метод построения	16
1.4. Модель игры	19
1.4.1. Кооперативное решение	19
1.4.2. Равновесие по Нэшу	20
2. Теоретико-игровая задача управления вредными выбросами в Восточной Сибири	32
2.1. Построение сильно динамически устойчивого решения в рассматриваемой игре трех лиц	38
2.1.1. Первый метод построения	38
2.1.2. Второй метод построения	46
Вывод	51
Заключение	52
Список литературы	53

Приложение	57
2.1.3. Вычисление оптимальных управлений	57
2.1.4. Построение α -характеристической функции	58
2.1.5. Построение δ -характеристической функции	60
2.1.6. Построение ζ -характеристической функции	62
2.1.7. Построение η -характеристической функции	64

Введение

Теория игр позволяет моделировать и анализировать ситуации, которые включают в себя несколько игроков, преследующих разные, но не обязательно противоположные цели. В выпускной квалификационной работе рассматривается кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов с ненулевым коэффициентом поглощения, соответствующим естественной очистке атмосферы. Дифференциальные игры могут применяться для описания процессов в разных областях человеческой жизни, однако кооперативные игры управления вредными выбросами являются важными в решении практических задач. Ведь значительное изменение состава атмосферного воздуха оказывает негативное влияние на климат, а также на развитие хронических заболеваний у человечества.

Наиболее актуальной темой в проблеме загрязнения атмосферы является изучение трансграничных загрязнений. Однако в этом направлении исследований существует проблема: не всегда удается получить точные значения параметров модели, поэтому результаты носят больше теоретический характер.

В работе исследуется класс дифференциальных игр с отрицательными связями, где увеличение управляемых параметров у одних игроков означает уменьшение функций полезности у других игроков. В нашем случае это значит, что чем больше общий уровень загрязнения, тем меньший выигрыш получает каждый игрок в игре с предписанной продолжительностью.

Работа имеет следующую структуру. В I главе описывается построение α , δ , ζ , η -характеристических функций, сформулированы алгоритмы построения сильно динамически устойчивых множеств [14–16]. Для рассматриваемой модели с отрицательными связями строятся оптимальные и равновесные по Нэшу управления и соответствующие им траектории, также находятся аналитические выражения для выбранных характеристических функций, и в общем виде выявляется связь между ними. Вычислены векторы Харшаньи и Шепли и компоненты процедуры распределения дележа для всех четырех способов построения характеристической функции, после чего были выявлены также некоторые взаимосвязи между полученными величинами при любых значениях параметров.

Во II главе рассматривается кооперативная дифференциальная игра

управления вредными выбросами, где игроками являются три алюминиевых завода компании «РУСАЛ». В первую очередь представлены численные значения выигрышей компаний при использовании двух типов управлений и значения характеристических функций. При рассмотрении вектора Шепли в качестве кооперативного решения был изучен вопрос динамической устойчивости, вычислены точные значения вектора Шепли, и графически изображены компоненты процедуры распределения дележа. Кроме того, был изучен вопрос сильной динамической устойчивости C -ядра, а именно: показав сильную динамическую устойчивость C -ядра, используя два алгоритма, пришли к тому, что полученные дележи, обеспечивающие сильную динамическую устойчивость, различны.

Обзор литературы

Описание модели с отрицательными связями, которая рассматривается в данной работе, может быть найдено в работах [1–5].

Построение оптимальных управлений методом максимума Понтрягина, которые необходимо построить для нахождения кооперативного решения, описано в книге [6]. Способы построения характеристической функции были изучены в работах [7–10]. В работе [11] впервые было сформулировано определение динамической устойчивости кооперативного решения, а в [12] подробно изложен теоретический материал касаясь динамической устойчивости кооперативного решения.

В теории игр при исследовании множественных принципов оптимальности актуальным становится вопрос сильной динамической устойчивости, чье определение впервые было дано в [13]. Для построения сильно динамически устойчивого C -ядра использовались два метода [14–16]. Первый метод, предложенный в [14, 15], основан на построении в первую очередь функций, для которых выполняются достаточные условия, чтобы использовать их в качестве процедуры распределения дележа для сильно динамически устойчивого C -ядра, а затем использовать эти функции для построения дележа, входящего во множество опорных решений. Вторым методом, изложенным в [16], основан на проверке двух условий, при выполнении которых может быть построен дележ, обеспечивающий сильную динамическую устойчивость C -ядра, но он применим только для неантагонистических игр с двумя или тремя участниками. Также свойство сильной динамической устойчивости C -ядра было исследовано в работе [17].

В работе использовались данные трех предприятий «РУСАЛ» за 2016 год, которые были найдены с использованием таких источников как [18–26].

Постановка задачи

Рассмотрим теоретико–игровую модель управления вредными выбросами, основанную на работах [1–5]. Предполагается, что на территории рассматриваемого региона n стационарных источников загрязнения воздуха, то есть в игре участвуют n игроков (предприятий). Каждый игрок имеет промышленное производство на своей территории. Пусть производство предприятия i пропорционально объему вредных выбросов u_i . Таким образом, стратегией игрока i является выбор объема вредных выбросов u_i в атмосферу в единицу времени, где $u_i \in [0, b_i]$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим общий уровень загрязнения через $x(t)$ и предположим, что n источников загрязнения «способствуют» одному объему загрязнения. Динамика общего уровня загрязнения $x(t)$ описывается дифференциальным уравнением (1) с начальным условием (2):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) - \delta x(t), \quad \delta \neq 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где δ — коэффициент поглощения, соответствующий естественной очистке атмосферы. Также существуют модели, когда этот коэффициент равен нулю, например, как в [27].

Чистый доход i -го игрока в момент времени t определяется квадратичной функцией:

$$R_i(u_i(t)) = u_i(t) \left(b_i - \frac{1}{2} u_i(t) \right), \quad t \in [t_0, T], \quad (3)$$

где $u_i \in [0, b_i]$ — объем вредных выбросов, $b_i > 0$ — коэффициент, равный отношению общего дохода от производства i -ой компании к объему общего загрязнения соответствующей компании, $d_i > 0$ — величина налога (штрафа), который зависит от суммарного загрязнения.

Каждый игрок платит штраф в размере $d_i x(t)$. Следовательно, доход игрока i в момент времени t $R_i(u_i(t)) - d_i x(t)$.

Целью i -го игрока, где $i = \overline{1, n}$, является максимизация функциона-

ла, который задает выигрыш данного игрока:

$$K_i(x_0, T - t_0, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = \int_{t_0}^T (R_i(u_i) - d_i x(t)) dt \rightarrow \max. \quad (4)$$

Рассматривается кооперативный вариант игры, когда игроки договариваются об использовании таких оптимальных управлений $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, что $\sum_{i=1}^n K_i \rightarrow \max$.

Задача оптимизации имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \rightarrow \max_{u_1, u_2, \dots, u_n}, \quad (5)$$

где $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием (2). И обозначим значение, при котором достигается максимум (5), как $V(N, x(t_0), T - t_0)$.

Траекторию $x^*(t)$ будем считать кооперативной, если на ней достигается максимум выражения (5). Пусть $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, существует и единственна. В данной работе будем искать решение в классе программных управлений $u_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [t_0, T]$.

Для определения кооперативной игры необходимо построить характеристическую функцию $V(S, x(t_0), T - t_0)$ для каждой коалиции $S \in N$, которая описывает претензии и амбиции коалиции S . То есть надо построить отображение множества всех возможных коалиций на множество платежей:

$$\begin{aligned} V(\cdot) : 2^N &\rightarrow R, \\ V(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

В случае, когда $S = N$, имеем $V(N, x(t_0), T - t_0)$.

Глава 1.

Кооперативная дифференциальная игра с предписанной продолжительностью

§ 1.1. Характеристические функции

1.1.1. α -характеристическая функция

В данной работе будет рассмотрено построение четырех типов характеристической функции, технические аспекты построения которых подробно описаны в [28–30].

Основным подходом для построения характеристической функции является подход Неймана–Моргенштерна [7], где коалиция S действует в качестве максимизирующего игрока, а коалиция $N \setminus S$ — минимизирующего:

$$V^\alpha(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Данная характеристическая функция в общем случае обладает свойством супераддитивности:

$$V(S_1 \cup S_2, x_0, T - t_0) \geq V(S_1, x_0, T - t_0) + V(S_2, x_0, T - t_0), \quad \forall S_1, S_2 \subseteq N, S_1 \cap S_2 = \emptyset, \quad (1.2)$$

но имеет вычислительные сложности.

1.1.2. δ -характеристическая функция

Построение δ -характеристической функции состоит из двух этапов: сначала необходимо найти равновесие по Нэшу $u^{NE} = \{u_i^{NE}\}_{i=\overline{1, n}}$, чтобы использовать данные стратегии для игроков, входящих в коалицию $N \setminus S$,

а на следующем шаге находим оптимальные управления для коалиции S :

$$V^\delta(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}^{NE}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (1.3)$$

Данная характеристическая функция в общем случае не является супераддитивной, но более проста в построении.

1.1.3. ζ -характеристическая функция

ζ -характеристическая функция, описанная в работе [8], строится по правилу:

$$V^\zeta(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset, \\ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S^*, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (1.4)$$

То есть игроки из S используют оптимальные стратегии $u_S^* = \{u_i^*\}_{i \in S}$ из оптимального набора u^* , где $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ — управления, при которых достигается максимум $\sum_{i=1}^n K_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Ранее в работе [8] была доказана супераддитивность ζ -характеристической функции в общем случае.

1.1.4. η -характеристическая функция

Преимуществом данной характеристической функции [9] является упрощение вычислительного процесса, так как игроки из коалиции S используют построенные ранее оптимальные стратегии $u_S^* = \{u_i^*\}_{i \in S}$ из оптимального набора u^* , а игроки из $N \setminus S$ действуют аналогично тому, как при построении δ -характеристической функции, то есть используют u_i^{NE} :

$$V^\eta(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S^*, u_{N \setminus S}^{NE}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (1.5)$$

§ 1.2. Динамическая устойчивость кооперативного решения

1.2.1. Векторы Шепли и Харшаньи

Рассмотрим вектор Шепли $Sh = \{Sh_i\}_{i=\overline{1,n}}$ [12] в качестве кооперативного принципа оптимальности в заданной игре:

$$Sh_i(x_0, T-t_0) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} [V(S, x_0, T-t_0) - V(S \setminus \{i\}, x_0, T-t_0)]. \quad (1.6)$$

Он представляет собой дележ, который удовлетворяет свойствам индивидуальной и коллективной рациональности.

Для игры из трех участников вектор Шепли имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Sh_1(x_0, T-t_0) &= \frac{1}{3}V(\{1\}, x_0, T-t_0) + \frac{1}{6}[V(\{1, 2\}, x_0, T-t_0) + \\ &+ V(\{1, 3\}, x_0, T-t_0) - V(\{2\}, x_0, T-t_0) - V(\{3\}, x_0, T-t_0)] + \\ &+ \frac{1}{3}[V(N, x_0, T-t_0) - V(\{2, 3\}, x_0, T-t_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_2(x_0, T-t_0) &= \frac{1}{3}V(\{2\}, x_0, T-t_0) + \frac{1}{6}[V(\{1, 2\}, x_0, T-t_0) + \\ &+ V(\{2, 3\}, x_0, T-t_0) - V(\{1\}, x_0, T-t_0) - V(\{3\}, x_0, T-t_0)] + \\ &+ \frac{1}{3}[V(N, x_0, T-t_0) - V(\{1, 3\}, x_0, T-t_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_3(x_0, T-t_0) &= \frac{1}{3}V(\{3\}, x_0, T-t_0) + \frac{1}{6}[V(\{1, 3\}, x_0, T-t_0) + \\ &+ V(\{2, 3\}, x_0, T-t_0) - V(\{1\}, x_0, T-t_0) - V(\{2\}, x_0, T-t_0)] + \\ &+ \frac{1}{3}[V(N, x_0, T-t_0) - V(\{1, 3\}, x_0, T-t_0)], \end{aligned}$$

где характеристическая функция может быть построена любым рассмотренным ранее способом.

При построении одноточечных решений, каковым является вектор Шепли, необходимо исследовать его на выполнение свойства динамической устойчивости, впервые сформулированного в [11].

Также рассмотрим вектор Харшаньи, аспекты построения которого описаны в работе [31]. Он идентифицирует избыток, который образует коалиция игроков в кооперативной игре. Чтобы его установить, ценность коалиции корректируется избытком, который уже был посчитан для подмножества рассматриваемой коалиции. В связи с этим вектор $d_V(S)$ коалиции S в игре $\Gamma_V(x_0, T-t_0)$ может быть рекурсивно определен следующим

образом:

$$\begin{aligned}
d_V(\{i\}) &= V(\{i\}, x_0, T - t_0), \\
d_V(\{i, j\}) &= V(\{i, j\}, x_0, T - t_0) - d_V(\{i\}) - d_V(\{j\}), \\
d_V(\{i, j, k\}) &= V(\{i, j, k\}, x_0, T - t_0) - d_V(\{i, j\}) - d_V(\{i, k\}) - d_V(\{j, k\}) - \\
&\quad - d_V(\{i\}) - d_V(\{j\}) - d_V(\{k\}), \\
&\vdots \\
d_V(S) &= V(S, x_0, T - t_0) - \sum_{T \subsetneq S} d_V(T),
\end{aligned}$$

или иначе:

$$d_V(S) = \sum_{T \subsetneq S} (-1)^{|S \setminus T|} V(T, x_0, T - t_0), \quad S \subseteq N. \quad (1.7)$$

Поскольку вектор Харшаньи — это обобщение вектора Шепли из случая игры с трансферабельной полезностью в общий случай, то вектор Шепли можно получить с помощью (1.7):

$$Sh_i(x_0, T - t_0) = \sum_{S \subset N: i \in S} d_V(S) / |S|, \quad i \in N.$$

1.2.2. Процедура распределения дележа

Рассматривая кооперативный вариант игры, когда игроки заключают соглашение о совместных действиях, особое внимание уделяется тому, придерживается ли каждый игрок одному и тому же принципу оптимальности в каждый момент времени. То есть перед началом игры игроки обязаны согласиться с кооперативным решением. Однако в некоторый момент времени какой-то игрок может нарушить соглашение своими действиями. Поэтому нас интересуют устойчивые решения, то есть такие, при которых соглашение не будет пересматриваться на протяжении всей кооперативной игры. Пересмотр решения может возникнуть при условии, если оно не является динамически устойчивым, то есть если общий выигрыш игрока, который предписывается кооперативным решением, меньше накопленного выигрыша к некоторому моменту времени вместе с его ожидаемым выигрышем за оставшееся время, который рассчитан согласно тому же самому принципу оптимальности с этого момента времени. Таким образом, при динамической устойчивости игрокам нецелесообразно начинать придерживаться другого принципа оптимальности. И с целью предотвращения нарушения соглашения в работе [32] была предложена схема выплат, которая называется процедурой распределения дележа.

Вектор-функцию $\beta(\tau) = \{\beta_i(\tau)\}_{i=\overline{1, n}}$, $\tau \in [t_0, T]$, будем называть

процедурой распределения дележа (ПРД) $\alpha \in M(x_0, T - t_0)$, если

$$\alpha_i = \int_{t_0}^T \beta_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n},$$

где $M(x_0, T - t_0)$ — множество всех дележей в данной игре.

В первую очередь в работе в качестве принципа оптимальности будет рассмотрен вектор Шепли (1.6):

$$Sh_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^T \beta_i(\tau) d\tau, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, вектор Шепли $Sh(x_0, T - t_0) = \{Sh_i(x_0, T - t_0)\}_{i=\overline{1, n}}$ называется динамически устойчивым, если существует такая вектор-функция $\beta(\tau) = \{\beta_i(\tau)\}_{i=\overline{1, n}}$, что для $\forall \tau \in [t_0, T]$ компоненты вектора Шепли $\{Sh_i(x_0, T - t_0)\}_{i=\overline{1, n}}$ представимы в виде

$$Sh_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^{\theta} \beta_i(\tau) d\tau + \int_{\theta}^T \beta_i(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{\theta} \beta_i(\tau) d\tau + Sh_i(x^*(t), T - t). \quad (1.8)$$

Дифференцируя (1.8) по t , получаем:

$$\beta_i(t) = -\frac{d}{dt}(Sh_i(x^*(t), T - t)) \quad (1.9)$$

Таким образом, продифференцировав по t (1.8), получим процедуру распределения дележа для каждого игрока согласно формуле (1.9).

§ 1.3. Сильная динамическая устойчивость кооперативного решения

Далее в работе будет рассмотрено C -ядро в качестве принципа оптимальности. И именно при реализации множественных принципов оптимальности актуальным становится вопрос сильной динамической устойчивости [13].

1.3.1. Первый метод построения

В данном методе для сформулированной игры изучается выполнение свойства сильной динамической устойчивости для C -ядра, и из него выде-

ляется подмножество сильно динамически устойчивых решений на основе подхода, описанного в [14, 15]. Опишем подробнее алгоритм, предложенный в вышеупомянутых работах.

1. Необходимо найти такие оптимальные управления $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, при которых $\sum_{i=1}^n K_i \rightarrow \max$, а также соответствующую им оптимальную траекторию $x^*(t)$.
2. Далее строится характеристическая функция $V(S, x^*(t), T-t)$, $S \subseteq N$, одним из описанных выше способов и проверяется на выполнение свойства супераддитивности (1.2). Стоит заметить, что α , ζ -характеристические функции в общем случае обладают этим свойством.
3. Перед построением C -ядра $C(x^*(t), T-t)$ необходимо проверить построенную характеристическую функцию на свойство супермодулярности:

$$\begin{aligned} V(S_1, x^*(t), T-t) + V(S_2, x^*(t), T-t) &\leq \\ &\leq V(S_1 \cup S_2, x^*(t), T-t) + V(S_1 \cap S_2, x^*(t), T-t), \\ &\quad \forall S_1, S_2 \subseteq N. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выполнение данного свойства гарантирует не только непустоту C -ядра, но и принадлежность вектора Шепли построенному $C(x^*(t), T-t)$, ведь данное свойство выполняется далеко не всегда. В данном случае принято говорить об «устойчивости» вектора Шепли. При выполнении (1.10) строим C -ядро.

4. В предположении, что $V(S, x^*(t), T-t)$, $S \subseteq N$, является непрерывно дифференцируемой по t , $t \in [t_0, T]$, вводятся обозначения:

$$W(S, x^*(t), T-t) = -\frac{d}{dt}V(S, x^*(t), T-t), \quad t \in [t_0, T], \quad S \subseteq N. \quad (1.11)$$

Пусть $B(t)$ — множество векторов, такое что

$$\begin{aligned} B(t) = \left\{ \beta(t) = (\beta_1, \dots, \beta_n) : \right. \\ \left. W(N, x^*(t), T-t) - W(N \setminus S, x^*(t), T-t) \geq \sum_{i \in S} \beta_i(t) \geq W(S, x^*(t), T-t), \right. \\ \left. \forall S \subset N, \quad \sum_{i \in N} \beta_i = W(N, x^*(t), T-t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

После построения множества $B(t)$ его необходимо проверить на непустоту согласно следующей лемме:

Лемма 1. (см. [14]) Множество $B(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$, тогда и только тогда, когда характеристическая функция $V(S, x^*(t), T - t)$, $S \subseteq N$, $t \in [t_0, T]$, является непрерывно дифференцируемой функцией по t , $t \in [t_0, T]$, для которой вдоль кооперативной траектории выполнено следующее условие:

$$\frac{d}{dt}V(N, x^*(t), T-t) \leq \frac{d}{dt}[V(N \setminus S, x^*(t), T-t) + V(S, x^*(t), T-t)]. \quad (1.13)$$

5. Введем ряд определений и теорем.

Определение 1. (см. [15]) C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$, если

(a) $C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$;

(b) существует такой дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$ и такая ПРД $\bar{\beta}(\tau) = (\bar{\beta}_1(\tau), \dots, \bar{\beta}_n(\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$, что $\bar{\alpha} = \int_{t_0}^T \bar{\beta}(\tau) d\tau$ и

$$C(x_0, T - t_0) \supseteq \left\{ \int_{t_0}^t \bar{\beta}(\tau) d\tau \right\} \oplus C(x^*(t), T - t), \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Здесь символ \oplus определяется следующим образом: пусть $a \in R^n$, $B \subset R^n$, тогда $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$.

Определение 2. Дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$, гарантирующий сильную динамическую устойчивость C -ядра, будем называть опорным решением.

Определение 3. Пусть $\hat{C}(x_0, T - t_0) \subseteq C(x_0, T - t_0)$ — множество опорных решений в C -ядре $C(x_0, T - t_0)$.

Справедлива следующая теорема о сильной динамической устойчивости:

Теорема 1.1 (см. [15]) Пусть $V(x^*(t), T - t)$ — непрерывно дифференцируемая функция по $t \in [t_0, T]$. Пусть $C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. Если существует дележ $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ и соответствующая ему ПРД $\beta(t) \in B(t)$, $t \in [t_0, T]$, то дележ $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ является опорным решением $\bar{\alpha}$, а C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$. Таким образом, в **теореме 1.1** сформулированы условия защиты от иррационального поведения игроков.

Очевидно, что необходимое и достаточное условие **леммы 1** выполняется и для множества опорных решений.

Далее приведем теорему, адаптированную под Определение 1.

Теорема 1.2 (см. [15]) Пусть $C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. Пусть C -ядро сильно динамически устойчиво в игре $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$. Тогда су-

существует множество дележей $\hat{C}(x_0, T - t) \subseteq C(x_0, T - t_0)$, так что для любого $\bar{\alpha} \in \hat{C}(x_0, T - t)$ ПРД $\beta(t)$, вычисленная как $\beta_i(t) = -\frac{d}{d\tau}\alpha(x^*(t), T - \tau)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} V(N, x^*(t_0), T - t_0) - V(N \setminus S, x^*(t_0), T - t_0) - V(S, x^*(t), T - t) &\geq \\ &\geq \sum_{i \in S} \int_{t_0}^t \beta_i(\tau) d\tau \geq \\ &\geq V(S, x^*(t_0), T - t_0) - V(N, x^*(t), T - t) + V(N \setminus S, x^*(t), T - t), \\ &\quad \forall S \subset N, \\ \sum_{i \in N} \int_{t_0}^t \beta_i(\tau) d\tau &= V(N, x^*(t_0), T - t_0) - V(N, x^*(t), T - t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, **теорема 1.2** позволяет построить множество опорных решений в любой момент времени $t \in [t_0, T]$.

6. Выбираем опорное решение (решения) $\bar{\alpha}$, то есть такой дележ (такие дележи) из $C(x_0, T - t_0)$, что ПРД принадлежит множеству $B(t)$.

1.3.2. Второй метод построения

Метод построения сильно динамически устойчивого ядра, предложенный в работе [16], имеет место для неантагонистических игр двух или трех лиц. В данной работе нам интересна игра трех лиц, поэтому рассмотрим ниже алгоритм именно для этого случая.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = V(\{1, 2\}, x_0, T - t_0) = a, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = V(\{2, 3\}, x_0, T - t_0) = b, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = V(\{1, 3\}, x_0, T - t_0) = c. \end{cases} \quad (1.15)$$

Пусть решение этой системы, которое имеет следующий вид:

$$\alpha_1 = \frac{a - b + c}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{b - c + a}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{c + b - a}{2},$$

удовлетворяет неравенству:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{a + b + c}{2} \leq V(N, x_0, T - t_0).$$

Далее рассмотрим систему уравнений (1.15) на промежутке времени $[t_0, T]$, когда значения характеристической функции $V(\{1, 2\}, x^*(t), T - t) =$

$= a(t)$, $V(\{2, 3\}, x^*(t), T - t) = b(t)$, $V(\{1, 3\}, x^*(t), T - t) = c(t)$ вычисляются вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$. Тогда система (1.15) примет вид:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = V(\{1, 2\}, x^*(t), T - t) = a(t), \\ \alpha_2(t) + \alpha_3(t) = V(\{2, 3\}, x^*(t), T - t) = b(t), \\ \alpha_1(t) + \alpha_3(t) = V(\{1, 3\}, x^*(t), T - t) = c(t), \end{cases} \quad (1.16)$$

решение которой можно представить как:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \frac{a(t) - b(t) + c(t)}{2}, \\ \alpha_2(t) = \frac{b(t) - c(t) + a(t)}{2}, \\ \alpha_3(t) = \frac{c(t) + b(t) - a(t)}{2}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Далее вводятся обозначения. Пусть

$$A(t) = \sum_{i=1}^3 A_i(t) = V(N, x^*(t), T - t) - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t). \quad (1.18)$$

Через $\gamma_i(t)$ обозначим производную $A_i(t)$ с противоположным знаком, предполагая, что эти функции дифференцируемы:

$$\gamma_i(t) = -\frac{d}{dt}A_i(t), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.19)$$

Условие 1. Пусть $A_i(t)$ можно выбрать таким образом, что $\gamma_i(t) \geq 0$ и $\alpha_i(t) \geq V(\{i\}, x^*(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, 3}$.

Пусть

$$\int_{t_0}^T \bar{\beta}_i(\tau) d\tau = \bar{\alpha}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1(t) &= \gamma_1(t) - \frac{d}{dt}\alpha_1(t), \\ \bar{\beta}_2(t) &= \gamma_2(t) - \frac{d}{dt}\alpha_2(t), \\ \bar{\beta}_3(t) &= \gamma_3(t) - \frac{d}{dt}\alpha_3(t). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Нетрудно видеть, что вектор $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ удовлетворяет следую-

ЩИМ УСЛОВИЯМ:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \bar{\alpha}_i &= \int_{t_0}^T \left(\gamma_1(\tau) + \gamma_2(\tau) + \gamma_3(\tau) - \frac{d}{d\tau}(\alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau) + \alpha_3(\tau)) \right) d\tau = \\
&= \int_{t_0}^T \left(-\frac{d}{d\tau}A(\tau) - \frac{d}{d\tau}(\alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau) + \alpha_3(\tau)) \right) d\tau = \\
&= - \int_{t_0}^T \left(\frac{d}{d\tau}V(N, x^*(\tau), T - \tau) \right) d\tau = V(N, x^*(t_0), T - t_0),
\end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_i = \int_{t_0}^T \left(\gamma_i(\tau) - \frac{d}{d\tau}\alpha_i(\tau) \right) d\tau \geq -\alpha_i(T) + \alpha_i(t_0) \geq V(\{i\}, x^*(t_0), T - t_0),$$

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j &= \int_{t_0}^T \left(\gamma_i(\tau) + \gamma_j(\tau) - \frac{d}{d\tau}(\alpha_i(\tau) + \alpha_j(\tau)) \right) d\tau \geq \\
&\geq -\alpha_i(T) - \alpha_j(T) + \alpha_i(t_0) + \alpha_j(t_0) \geq V(\{i, j\}, x^*(t_0), T - t_0), \quad i \neq j = \overline{1, 3},
\end{aligned}$$

так как $\gamma_i(t) \geq 0$ по построению.

Таким образом, вектор $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) \in C(x^*(t_0), T - t_0)$ игры $\Gamma_V(x^*(t_0), T - t_0)$, поскольку выше показано выполнение системы неравенств вида:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \bar{\alpha}_i = V(N, x_0, T - t_0), \\ \bar{\alpha}_i \geq V(\{i\}, x^*(t_0), T - t_0), \quad i \in N, \\ \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \geq V(\{1, 2\}, x^*(t_0), T - t_0), \\ \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 \geq V(\{2, 3\}, x^*(t_0), T - t_0), \\ \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3 \geq V(\{1, 3\}, x^*(t_0), T - t_0). \end{cases} \quad (1.22)$$

В [16] была доказана теорема касаясь сильной динамической устойчивости ядра $C(x_0, T - t_0)$, которая гласит следующим образом:

Теорема 1.3 (см. [16]) *Если выполнено **условие 1**, то C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым, при этом в качестве дележа $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$, который фигурирует в определении сильной динамической устойчивости, можно взять дележ $\bar{\alpha}$ (1.20).*

Таким образом, используя $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3)$ в качестве процедуры распределения дележа, игроки в каждый момент времени перераспределяют

мгновенный суммарный доход.

§ 1.4. Модель игры

1.4.1. Кооперативное решение

Рассмотрим частный случай теоретико-игровой модели управления вредными выбросами, описанной в данной работе ранее, когда $n = 3$, с начальным условием (2) $x(t_0) = 0$.

Для решения задачи (5) используем метод максимума Понтрягина [6]. Для этого строим гамильтониан:

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=1}^3 \left(b_i - \frac{1}{2} u_i(t) \right) u_i(t) - \sum_{i=1}^3 d_i x(t) + \psi(t) \left(\sum_{i=1}^3 u_i(t) - \delta x(t) \right). \quad (1.23)$$

Далее находим частные производные (1.23) по u_i и x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial u_i} &= b_i - u_i(t) + \psi(t), \quad i = \overline{1, 3}, \\ \frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} &= -D_N - \psi(t)\delta, \end{aligned} \quad (1.24)$$

и матрица Гессе $\frac{d^2 H}{du^2}(x, u, \psi)$ отрицательно определена, что говорит о том, что гамильтониан $H(x, u, \psi)$ вогнутый относительно u .

В результате чего (1.25) является оптимальным управлением:

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} b_1 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_2 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_3 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Полученное оптимальное управление, объем вредных выбросов, всегда не превышает величину b_i . Предполагаем, что коэффициент поглощения, соответствующий естественной очистке атмосферы, ограничен снизу величиной: $\delta \geq \frac{D_N}{b_i}$, $i = \overline{1, 3}$. Это условие обеспечивает ограниченность управления снизу нулем, то есть $u_i \in [0, b_i]$, $i = \overline{1, 3}$.

Если же для некоторого i коэффициент поглощения $\delta < \frac{D_N}{b_i}$, то оптимальное управление станет отрицательным при $t < \bar{t}$, где $\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln\left(-\frac{b_i \delta}{D_N} + 1\right)$.

Таким образом, если $\delta < \frac{D_N}{b_i}$ и $\bar{t}_i > t_0$, то оптимальное управление

для игрока i примет вид:

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \bar{t}_i, \\ b_i + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), & \bar{t}_i \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.26)$$

И из (1) получаем оптимальное решение

$$x^*(t) = \frac{3D_N}{2\delta^2}e^{\delta(t-T)} + \frac{3D_N - B_N\delta}{\delta^2}e^{\delta(t_0-t)} - \frac{3D_N}{2\delta^2}e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{3D_N}{\delta^2}, \quad (1.27)$$

где $D_N = d_1 + d_2 + d_3$, $B_N = b_1 + b_2 + b_3$.

Интересно заметить, что

$$\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln \left(1 - \frac{b_i\delta}{D_N} \right) \leq T - \frac{b_i}{D_N}, \quad \forall \delta > 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.28)$$

Действительно, преобразовав (1.28), получаем:

$$e^{-\frac{b_i\delta}{D_N}} + \frac{b_i\delta}{D_N} - 1 \geq 0, \quad \forall \delta > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Из этого вытекает, что если

$$t_0 \geq T - \frac{b_i}{D_N}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.29)$$

то оптимальное управление игрока i в кооперативном случае в любой рассматриваемый момент времени $t \in [t_0, T]$ будет отлично от нуля.

1.4.2. Равновесие по Нэшу

Аналогичным образом можно вычислить равновесие по Нэшу: для каждого игрока $i = \overline{1, 3}$ необходимо решить задачу максимизации (4) при ограничениях вида (1), (2).

Гамильтониан для i -го игрока, $i = \overline{1, 3}$, примет вид:

$$H_i(x, u, \psi) = \left(b_i - \frac{1}{2}u_i(t) \right) u_i(t) - d_i x(t) + \psi_i(u_i(t) - \delta x(t)). \quad (1.30)$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$\frac{\partial H_i(x, u, \psi)}{\partial u_i} = b_i - u_i(t) + \psi_i(t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.31)$$

получаем следующие выражения для оптимальных управлений:

$$u_i^{NE} = b_i + \psi_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.32)$$

Сопряженные переменные $\psi_i(t)$ могут быть найдены из дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial H_i(x, u, \psi)}{\partial x} = -\frac{d\psi_i(t)}{dt}, \quad \psi_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Таким образом, оптимальные управления в данном случае имеют вид:

$$u^{NE}(t) = \begin{pmatrix} b_1 + \frac{d_1}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_2 + \frac{d_2}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_3 + \frac{d_3}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Полученное оптимальное управление всегда не превышает величину b_i . Предполагаем, что коэффициент абсорбции ограничен снизу величиной: $\delta \geq \frac{d_i}{b_i}$, $i = \overline{1, 3}$. Это условие обеспечивает ограниченность управления снизу нулем, то есть $u_i \in [0, b_i]$, $i = \overline{1, 3}$.

Если же для некоторого i коэффициент поглощения $\delta < \frac{d_i}{b_i}$, то оптимальное управление станет отрицательным при $t < \bar{t}_i$, где $\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln(-\frac{b_i \delta}{d_i} + 1)$.

Таким образом, если $\delta < \frac{d_i}{b_i}$ и $\bar{t}_i > t_0$, то оптимальное управление для игрока i примет вид:

$$u_i^{NE}(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \bar{t}_i, \\ b_i + \frac{d_i}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), & \bar{t}_i \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.34)$$

Соответствующая оптимальному управлению траектория примет вид:

$$x^{NE}(t) = \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N - B_N \delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{D_N}{\delta^2}.$$

Также можно заметить, что

$$\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln \left(1 - \frac{b_i \delta}{d_i} \right) \leq T - \frac{b_i}{d_i}, \quad \forall \delta > 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.35)$$

Действительно, преобразовав (1.28), получаем:

$$e^{-\frac{b_i \delta}{d_i}} + \frac{b_i \delta}{d_i} - 1 \geq 0, \quad \forall \delta > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Из данного факта следует, что если

$$t_0 \geq T - \frac{b_i}{d_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.36)$$

то оптимальное управление игрока i в любой рассматриваемый момент времени $t \in [t_0, T]$ будет отлично от нуля.

Для наглядности рассмотрим графики (Рис. 1.1–1.3), иллюстрирующие оптимальные управления и равновесия по Нэшу для каждого игрока.

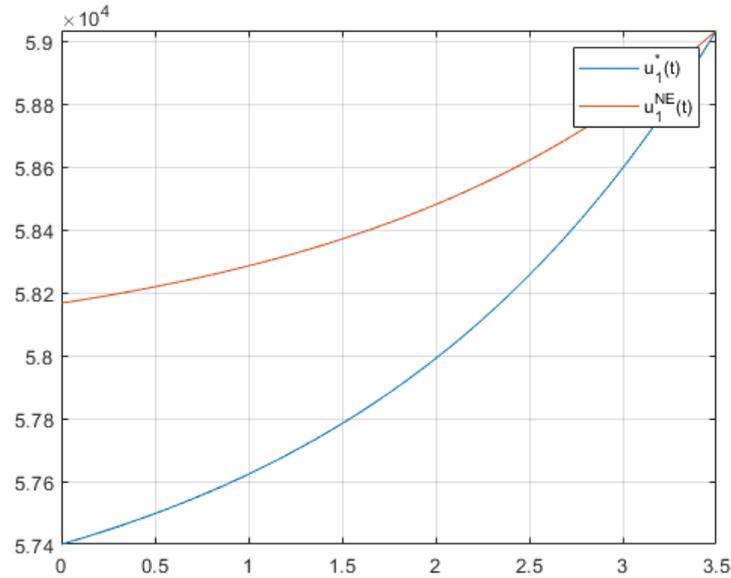


Рис. 1.1: Оптимальное управление и равновесие по Нэшу для первого игрока

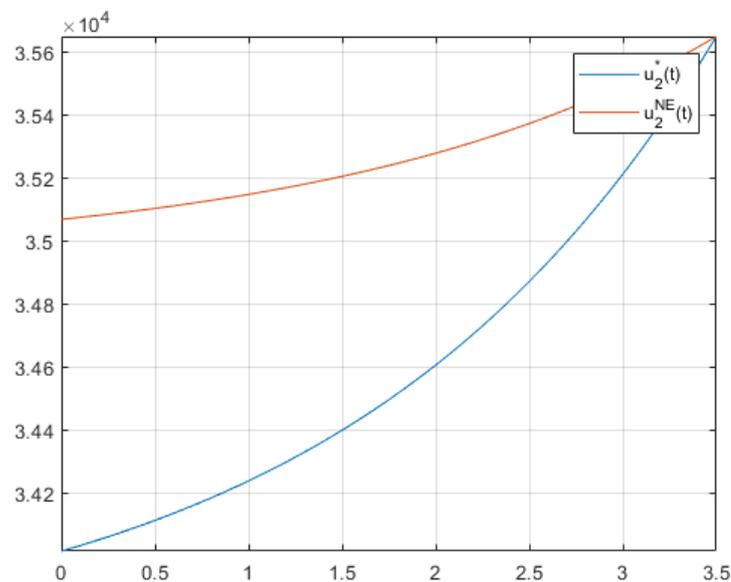


Рис. 1.2: Оптимальное управление и равновесие по Нэшу для второго игрока

То есть общее загрязнение воздуха в кооперативном случае меньше, чем в некооперативном в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$. Рис. 1.4 демонстрирует, что кооперативный вариант игры ведет к снижению уровня загрязнения на промежутке времени $[t_0, T] = [0, 3.5]$.

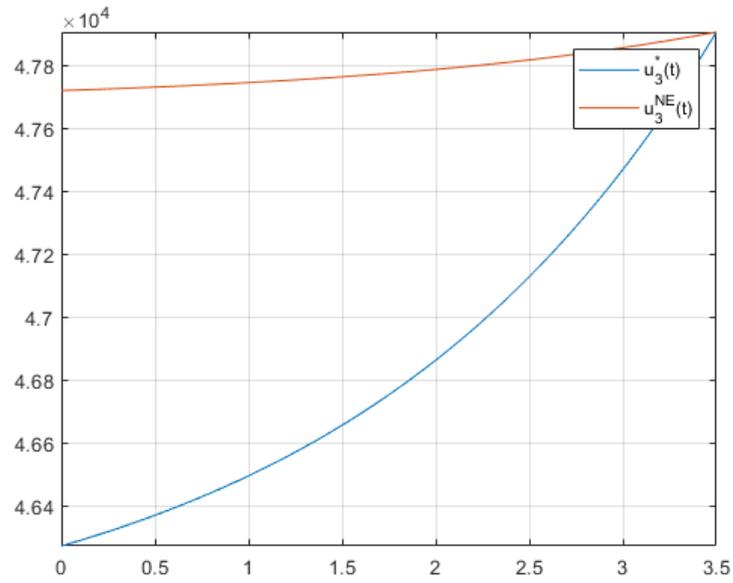


Рис. 1.3: Оптимальное управление и равновесие по Нэшу для третьего игрока

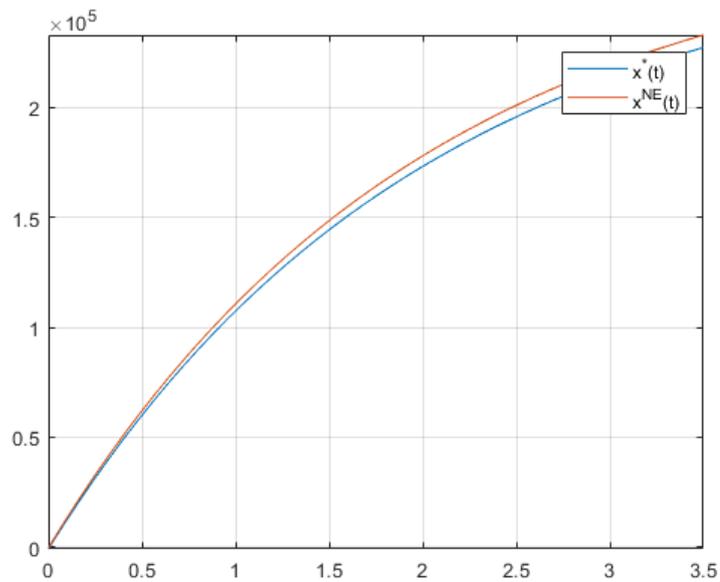


Рис. 1.4: Общий уровень загрязнения для кооперативной и некооперативной игр

Вычислим α , δ , ζ , η -характеристические функции по формулам (1.1), (1.3), (1.4), (1.5) соответственно, где $i \neq j \neq k \in N$.

Выражение для α -характеристической функции для рассматривае-

мой модели:

$$V^\alpha(N, T - t_0) = \left[\frac{\tilde{B}_N}{2} - \frac{D_N}{\delta^2} \left(B_N \delta - \frac{3D_N}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\ + \frac{D_N}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 3D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{3D_N^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}),$$

$$V^\alpha(\{i\}, T - t_0) = \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N \delta - \frac{d_i}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\ + \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - d_i}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}),$$

$$V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) = \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{(d_i + d_j)}{\delta^2} (B_N \delta - (d_i + d_j)) \right] (T - t_0) + \\ + \frac{(d_i + d_j)}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2(d_i + d_j)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{(d_i + d_j)^2}{2\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}),$$

где $\tilde{B}_N = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Для δ -характеристической функции получаем следующие результаты:

$$V^\delta(\{i\}, T - t_0) = \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N \delta - D_N + \frac{d_i}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\ + \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{d_i + B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{2D_N d_i - d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}),$$

$$V^\delta(\{i, j\}, T - t_0) = \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{d_i + d_j}{\delta^2} (B_N \delta - D_N) \right] (T - t_0) + \\ + \frac{d_i + d_j}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{d_i + d_j}{2\delta^3} D_N (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}).$$

ζ -характеристическая представима в виде:

$$\begin{aligned}
V^\zeta(\{i\}, T - t_0) &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left(d_i (B_N \delta - D_N) + \frac{D_N^2}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{D_N^2 + d_i (-2D_N + B_N \delta)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \frac{D_N}{2\delta^3} \left[-\frac{D_N}{2} + d_i \right] (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}), \\
V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0) &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left((d_i + d_j)(B_N \delta - 2D_N) + D_N^2 \right) \right] (T - t_0) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{2D_N^2 + (d_i + d_j)(B_N \delta - 4D_N)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \\
&+ \frac{D_N}{2\delta^3} (-D_N + 2(d_i + d_j)) (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}).
\end{aligned}$$

Для данной задачи η -характеристическая функция:

$$\begin{aligned}
V^\eta(\{i\}, T - t_0) &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{D_N^2}{2} + d_i (B_N \delta - 2D_N + d_i) \right) \right] (T - t_0) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{D_N^2 + d_i (B_N \delta - 2(2D_N - d_i))}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \\
&+ \frac{1}{2\delta^3} \left[-\frac{D_N^2}{2} + d_i (2D_N - d_i) \right] (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}), \\
V^\eta(\{i, j\}, T - t_0) &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} (D_N^2 + (d_i + d_j)(B_N \delta - 2D_N - d_k)) \right] (T - t_0) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{2D_N^2 + (d_i + d_j)(-2(2D_N + d_k) + B_N \delta)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0 - T)}) + \\
&+ \frac{1}{2\delta^3} [-D_N^2 + (d_i + d_j)(2D_N + d_k)] (1 - e^{2\delta(t_0 - T)}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим, как связаны полученные характеристические функции.

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i\}, T - t_0) - V^\alpha(\{i\}, T - t_0) &= \\
&= \frac{d_i(d_j + d_k)}{\delta^2} \left(T - t_0 - \frac{2(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{1 - e^{2\delta(t_0 - T)}}{2\delta} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i, j\}, T - t_0) - V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) &= \\
&= \frac{d_k(d_i + d_j)}{\delta^2} \left(T - t_0 - \frac{2(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{1 - e^{2\delta(t_0 - T)}}{2\delta} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$. В положительности второго слагаемого можно убедиться с помощью Рис. 1.5.

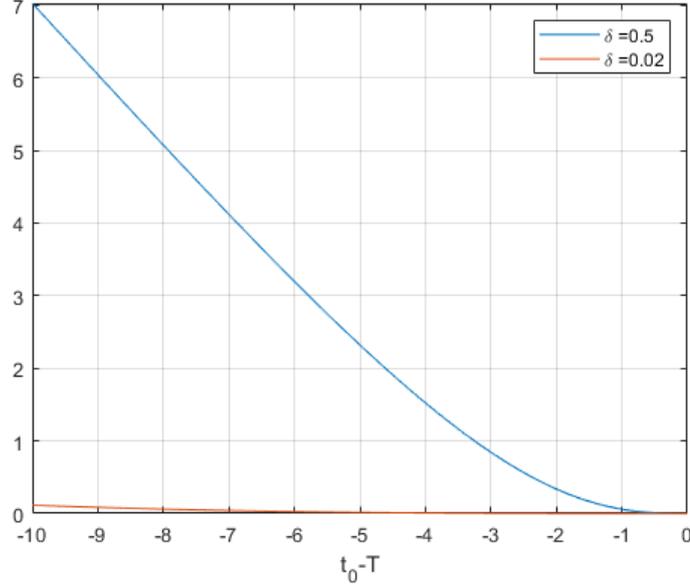


Рис. 1.5: Проверка на положительность второго слагаемого в любой момент времени

Следовательно,

$$V^\delta(S, T - t_0) \geq V^\alpha(S, T - t_0), \quad \forall S \subseteq N.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
V^\alpha(\{i\}, T - t_0) - V^\zeta(\{i\}, T - t_0) &= \\
&= \frac{\left(-d_i D_N + \frac{D_N^2}{2} + \frac{d_i^2}{2}\right)}{\delta^2} \left(T - t_0 - \frac{2(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{1 - e^{2\delta(t_0 - T)}}{2\delta} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) - V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0) &= \\
&= \frac{d_k^2}{\delta^2} \left(T - t_0 - \frac{2(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{1 - e^{2\delta(t_0 - T)}}{2\delta} \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$, получаем, что

$$V^\alpha(S, T - t_0) \geq V^\zeta(S, T - t_0), \quad \forall S \subseteq N.$$

Таким образом, α , δ , ζ -характеристические функции связаны неравенствами:

$$V^\zeta(\cdot) \leq V^\alpha(\cdot) \leq V^\delta(\cdot).$$

Также нетрудно показать справедливость данных неравенств с η -характеристической функцией. Действительно, при замене в неравенствах, написанных выше, α -характеристической функции на η -характеристическую функцию получаем абсолютно аналогичные выражения. Таким образом, δ , ζ , η -характеристические функции связаны неравенствами:

$$V^\zeta(\cdot) \leq V^\eta(\cdot) \leq V^\delta(\cdot).$$

Более того, справедливы следующие равенства:

$$V^\alpha(\cdot) - V^\delta(\cdot) = V^\zeta(\cdot) - V^\eta(\cdot),$$

$$V^\eta(\cdot) - V^\delta(\cdot) = V^\zeta(\cdot) - V^\alpha(\cdot).$$

Тогда вектор Харшаньи, построенный для каждой из четырех характеристических функций при $i \neq j \neq k \in N$, примет вид:

$$d_{V^\alpha}(\{i\}) = V^\alpha(\{i\}, T - t_0),$$

$$d_{V^\alpha}(\{i, j\}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{d_i^2}{2} + 2d_i d_j + \frac{d_j^2}{2} \right] \Psi(\delta, T - t_0),$$

$$d_{V^\alpha}(N) = \frac{1}{\delta^2} [d_i d_j + d_i d_k + d_j d_k] \Psi(\delta, T - t_0);$$

$$d_{V^\delta}(\{i\}) = V^\delta(\{i\}, T - t_0),$$

$$d_{V^\delta}(\{i, j\}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{d_i^2}{2} + \frac{d_j^2}{2} \right] \Psi(\delta, T - t_0),$$

$$d_{V^\delta}(N) = \frac{1}{\delta^2} [d_i d_j + d_i d_k + d_j d_k] \Psi(\delta, T - t_0);$$

$$d_{V^\zeta}(\{i\}) = V^\zeta(\{i\}, T - t_0),$$

$$d_{V^\zeta}(\{i, j\}) = \frac{D_N(d_i + d_j)}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0),$$

$$d_{V^\zeta}(N) = 0;$$

$$\begin{aligned}
d_{V^\eta}(\{i\}) &= V^\eta(\{i\}, T - t_0), \\
d_{V^\eta}(\{i, j\}) &= \frac{1}{\delta^2} [D_N(d_i + d_j) - 2d_i d_j] \Psi(\delta, T - t_0), \\
d_{V^\eta}(N) &= 0,
\end{aligned}$$

где $\Psi(\delta, T - t_0) = (T - t_0) - \frac{2(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{(1 - e^{2\delta(t_0 - T)})}{2\delta}$.

Найдя вектор Харшаньи, построенный по каждой характеристической функции, можем выявить следующие зависимости:

$$\begin{cases}
d_{V^\alpha}(\{i\}) - d_{V^\delta}(\{i\}) = d_{V^\zeta}(\{i\}) - d_{V^\eta}(\{i\}) = -\frac{d_i(d_j + d_k)}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0), \\
d_{V^\eta}(\{i\}) - d_{V^\delta}(\{i\}) = d_{V^\zeta}(\{i\}) - d_{V^\alpha}(\{i\}) = \frac{\left(d_i D_N - \frac{D_N^2}{2} - \frac{d_i^2}{2}\right)}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0),
\end{cases}$$

где $i = \overline{1, 3}$.

$$\begin{cases}
d_{V^\alpha}(\{i, j\}) - d_{V^\delta}(\{i, j\}) = d_{V^\zeta}(\{i, j\}) - d_{V^\eta}(\{i, j\}) = \frac{2d_i d_j}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0), \\
d_{V^\eta}(\{i\}) - d_{V^\delta}(\{i\}) = d_{V^\zeta}(\{i\}) - d_{V^\alpha}(\{i\}) = \frac{\left(\frac{d_i^2}{2} + \frac{d_j^2}{2} + d_k(d_i + d_j)\right)}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0),
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
d_{V^\alpha}(N) - d_{V^\delta}(N) = d_{V^\zeta}(N) - d_{V^\eta}(N) = 0, \\
d_{V^\eta}(N) - d_{V^\delta}(N) = d_{V^\zeta}(N) - d_{V^\alpha}(N) = -\frac{\left(\frac{d_i^2}{2} + 2d_i d_j + \frac{d_j^2}{2}\right)}{\delta^2} \Psi(\delta, T - t_0),
\end{cases}$$

где $i \neq j \neq k = \overline{1, 3}$.

Таким образом, можно заметить, что вектор Харшаньи не является дележом, так как не выполняется условие коллективной рациональности.

Также была замечена интересная взаимосвязь между векторами Шепли, построенными на основе α , δ , ζ , η -характеристических функциях соответственно.

По α -, δ -характеристическим функциям имеем следующие выражения для вектора Шепли, используя (1.6):

$$\begin{aligned}
Sh_i^\alpha(T - t_0) &= \frac{b_i^2}{2}(T - t_0) + \\
&+ \left[3D_N^2 + (d_i + d_j)^2 + (d_i + d_k)^2 - 2(d_j + d_k)^2 + d_i^2 - \frac{d_j^2}{2} - \frac{d_k^2}{2} \right] \times \\
&\times \left(\frac{(T - t_0)}{6\delta^2} - \frac{(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{3\delta^3} + \frac{(1 - e^{2\delta(t_0 - T)})}{12\delta^3} \right) - d_i B_N \left(\frac{(T - t_0)}{\delta} - \frac{(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta^2} \right),
\end{aligned}$$

$$Sh_i^\delta(T-t_0) = \frac{b_i^2}{2}(T-t_0) + \left[3D_N^2 + 4d_iD_N - 2(d_j + d_k)D_N - d_i^2 + \frac{d_j^2}{2} + \frac{d_k^2}{2} \right] \times \\ \times \left(\frac{(T-t_0)}{6\delta^2} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{3\delta^3} + \frac{(1-e^{2\delta(t_0-T)})}{12\delta^3} \right) - d_iB_N \left(\frac{(T-t_0)}{\delta} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{\delta^2} \right),$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Преобразовав оба выражения, имеем равенство:

$$Sh_i^\alpha(T-t_0) = Sh_i^\delta(T-t_0), \quad \forall i = \overline{1,3}. \quad (1.37)$$

Таким образом, мы получили, что выигрыши игроков в кооперативном варианте игры по рассмотренной паре характеристических функций совпадают.

Далее, аналогично для ζ - и η - характеристических функций имеем:

$$Sh_i^\zeta(T-t_0) = \frac{b_i^2}{2}(T-t_0) + [3D_N^2 + 6d_iD_N - 3D_N(d_j + d_k)] \times \\ \times \left(\frac{(T-t_0)}{6\delta^2} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{3\delta^3} + \frac{(1-e^{2\delta(t_0-T)})}{12\delta^3} \right) - d_iB_N \left(\frac{(T-t_0)}{\delta} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{\delta^2} \right),$$

$$Sh_i^\eta(T-t_0) = \frac{b_i^2}{2}(T-t_0) + [D_N^2 + 2d_iD_N - D_N(d_j + d_k)] \times \\ \times \left(\frac{(T-t_0)}{2\delta^2} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{\delta^3} + \frac{(1-e^{2\delta(t_0-T)})}{4\delta^3} \right) - d_iB_N \left(\frac{(T-t_0)}{\delta} - \frac{(1-e^{\delta(t_0-T)})}{\delta^2} \right),$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

В результате приходим к тому, что выигрыши, построенные по ζ - и η - характеристическим функциям, также равны, то есть:

$$Sh_i^\zeta(T-t_0) = Sh_i^\eta(T-t_0), \quad \forall i = \overline{1,3}. \quad (1.38)$$

Таким образом, в условиях данной модели достаточно рассматривать только векторы Шепли, построенные по δ - и η - характеристическим функциям.

Ввиду (1.37), (1.38) для того, чтобы построить процедуры распределения дележа (1.9) по δ , η -характеристическим функциям, необходимо построить $V^\delta(S, x(t), T-t)$, $V^\eta(S, x(t), T-t)$, а также $Sh^\delta(x(t), T-t)$, $Sh^\eta(x(t), T-t)$, $S \subseteq N$, то есть характеристические функции и по-

строенные по ним векторы Шепли, где вместо нулевого начального условия рассматриваем $x(t_0) = x(t)$.

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i\}, x(t), T-t) &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N \delta - D_N + \frac{d_i}{2} \right) \right] (T-t) + \\
&+ \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{d_i + B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{2D_N d_i - d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t-T)}),
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i, j\}, x(t), T-t) &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{d_i + d_j}{\delta^2} (B_N \delta - D_N) \right] (T-t) + \\
&+ \frac{d_i + d_j}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{d_i + d_j}{2\delta^3} D_N (1 - e^{2\delta(t-T)}),
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(N, x(t), T-t) &= \left[\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2} - \frac{D_N}{\delta^2} \left(B_N \delta - \frac{3D_N}{2} \right) \right] (T-t) + \\
&+ \frac{D_N}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 3D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{3D_N^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t-T)}),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
V^\eta(\{i\}, x(t), T-t) &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{D_N^2}{2} + d_i (B_N \delta - 2D_N + d_i) \right) \right] (T-t) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{D_N^2 + d_i (B_N \delta - 2(2D_N - d_i))}{\delta^2} - d_i x(t) \right] (1 - e^{\delta(t-T)}) + \\
&+ \frac{1}{2\delta^3} \left[-\frac{D_N^2}{2} + d_i (2D_N - d_i) \right] (1 - e^{2\delta(t-T)}),
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
V^\eta(\{i, j\}, x(t), T-t) &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} (D_N^2 + (d_i + d_j)(B_N \delta - 2D_N - d_k)) \right] (T-t) + \\
&+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{2D_N^2 + (d_i + d_j)(-2(2D_N + d_k) + B_N \delta)}{\delta^2} - (d_i + d_j)x(t) \right] (1 - e^{\delta(t-T)}) + \\
&+ \frac{1}{2\delta^3} \left[-D_N^2 + (d_i + d_j)(2D_N + d_k) \right] (1 - e^{2\delta(t-T)}),
\end{aligned} \tag{1.43}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

$$\begin{aligned}
Sh_i^{\alpha, \delta}(x(t), T-t) &= \frac{b_i^2}{2}(T-t) + \left[3D_N^2 + 4d_i D_N - 2(d_j + d_k)D_N - d_i^2 + \frac{d_j^2}{2} + \frac{d_k^2}{2} \right] \times \\
&\times \left(\frac{(T-t)}{6\delta^2} - \frac{(1-e^{\delta(t-T)})}{3\delta^3} + \frac{(1-e^{2\delta(t-T)})}{12\delta^3} \right) - \\
&- d_i B_N \left(\frac{(T-t)}{\delta} - \frac{(1-e^{\delta(t-T)})}{\delta^2} \right) - \frac{d_i x(t)}{\delta} (1-e^{\delta(t-T)}), \quad (1.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sh_i^{\zeta, \eta}(x(t), T-t) &= \frac{b_i^2}{2}(T-t) + [D_N^2 + 2d_i D_N - D_N(d_j + d_k)] \times \\
&\times \left(\frac{(T-t)}{2\delta^2} - \frac{(1-e^{\delta(t-T)})}{\delta^3} + \frac{(1-e^{2\delta(t-T)})}{4\delta^3} \right) - \\
&- d_i B_N \left(\frac{(T-t)}{\delta} - \frac{(1-e^{\delta(t-T)})}{\delta^2} \right) - \frac{d_i x(t)}{\delta} (1-e^{\delta(t-T)}), \quad (1.45)
\end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Теперь можно построить процедуры распределения дележа (1.9). Они примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\beta^\alpha(t) = \beta^\delta(t) &= \frac{b_i^2}{2} + \left[3D_N^2 + 4d_i D_N - 2(d_j + d_k)D_N - d_i^2 + \frac{d_j^2}{2} + \frac{d_k^2}{2} \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{6\delta^2} - \frac{e^{\delta(t-T)}}{3\delta^2} + \frac{e^{2\delta(t-T)}}{6\delta^2} \right) - d_i B_N \left(\frac{1}{\delta} - \frac{e^{\delta(t-T)}}{\delta} \right) + \frac{d_i \frac{dx^*(t)}{dt}}{\delta} (1-e^{\delta(t-T)}) - \\
&- d_i x^*(t) e^{\delta(t-T)}, \quad (1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^\zeta(t) = \beta^\eta(t) &= \frac{b_i^2}{2} + [D_N^2 + 2d_i D_N - D_N(d_j + d_k)] \left(\frac{1}{2\delta^2} - \frac{e^{\delta(t-T)}}{\delta^2} + \frac{e^{2\delta(t-T)}}{2\delta^2} \right) - \\
&- d_i B_N \left(\frac{1}{\delta} - \frac{e^{\delta(t-T)}}{\delta} \right) + \frac{d_i \frac{dx^*(t)}{dt}}{\delta} (1-e^{\delta(t-T)}) - d_i x^*(t) e^{\delta(t-T)}, \quad (1.47)
\end{aligned}$$

где $\frac{dx^*(t)}{dt} = \frac{3D_N}{2\delta} e^{\delta(t-T)} - \frac{3D_N - B_N \delta}{\delta} e^{\delta(t_0-t)} + \frac{3D_N}{2\delta} e^{\delta(2t_0-T-t)}$, $i \neq j \neq k \in N$.

Глава 2.

Теоретико–игровая задача управления вредными выбросами в Восточной Сибири

Загрязнение воздуха — это серьезная экологическая проблема, которая с каждым годом приобретает особую важность, ведь в современном мире количество промышленных предприятий становится все больше и больше. А именно эти предприятия в большей степени оказывают неблагоприятный эффект на окружающую среду и качество жизни людей в целом. Таким образом, одна из самых важных проблем экологического менеджмента состоит в снижении выбросов загрязняющих веществ в атмосферу.

Ранее уже была опубликована статья, посвященная проблеме контроля загрязнений в Иркутской области Российской Федерации, [33]. А сейчас рассмотрим экологическую ситуацию в трех городах Восточной Сибири.

Восточная Сибирь является хорошо развитым промышленным регионом России. Она богата природными ресурсами, что совместно с дешевым электричеством привело к развитию энергоэффективной промышленности на данной территории. Однако алюминиевая промышленность заслуживает отдельного внимания, ведь она развита только благодаря гидроэлектростанциям Ангаро–Енисейского каскада. Именно в Красноярске, Саяногорске, Братске и Шелехове были построены самые большие заводы, производящие около 70% алюминия России.

Столь активное развитие промышленности в городах приводит к проблемам загрязнения окружающей среды. Ведь промышленные предприятия, потребляя огромное количество природных ресурсов, являются мощными источниками загрязнения. Большинство населения живет в районах, где концентрация загрязняющих веществ в воздухе превышает максимально допустимый уровень. За последние несколько лет Красноярск, Братск и Шелехов вошли в список городов России с максимальным уровнем загрязнения воздуха [34–36]. Это из-за того, что в этих городах расположены Красноярский, Братский и Иркутский алюминиевые заводы. Более того, повторяющиеся вновь и вновь неблагоприятные погодные условия, которые способствуют увеличению загрязнения, только ухудшают ситуацию. В рассматриваемой модели (1) с начальным условием (2) проблема сокра-

щения выбросов от заводов в период неблагоприятных погодных условий может быть решена с помощью изменения параметра δ , который отвечает за естественную очистку атмосферы.

Вышеупомянутые предприятия принадлежат объединенной компании «РУСАЛ», являющейся одним из основных производителей алюминия в мире.

Сформулируем дифференциальную игру трех лиц, в которой игроки являются упомянутыми выше компаниями. Для подсчета параметров модели b_i , d_i будем использовать данные об источниках загрязнения за 2016 год. Как упоминалось ранее, коэффициент $b_i > 0$ равен отношению общего дохода от производства i -ой компании (P_i) к объему общего загрязнения соответствующей компании (V_i):

$$b_i = \frac{P_i}{V_i}. \quad (2.1)$$

Коэффициент $d_i > 0$ определяет величину налога (штрафа), который зависит от суммарного загрязнения. Для определения штрафа используем данные о платежах компаний за 2016 год. Обозначим через L_i платеж i -ой компании за загрязнение воздуха, тогда:

$$d_i = \frac{L_i}{V_1 + V_2 + V_3}. \quad (2.2)$$

Таблица 2.1 содержит в себе информацию за 2016 год об общих доходах и объемах загрязнения каждой компании. Общие доходы Красноярского алюминиевого завода могут быть найдены в [18]. [19] дает информацию о совместном доходе алюминиевых заводов в Братске и Иркутске, который составляет 4210,43 миллионов рублей. А доход каждой компании в отдельности был оценен пропорционально объему производимого алюминия этими компаниями за 2016 год. В соответствии с [20] Братский алюминиевый завод произвел 1005500 тонн алюминия, а Иркутский — 41500 тонн в 2016 году. Таким образом, общие доходы каждой из этих двух компаний составляют 2979,51 и 1230,92 миллионов рублей соответственно.

По данным за 2016 год платеж за загрязнение воздуха Краснояр-

Таблица 2.1: Данные о предприятиях

Компания	P_i (млн. рублей)	V_i (тонн)
Красноярский алюминиевый завод	3412,23	57800
Братский алюминиевый завод	2979,51	83578,707
Иркутский алюминиевый завод	1230,92	25694,1

ского алюминиевого завода составил $L_1 = 87723,95$ тысяч рублей [37]. В

соответствии с [21] штраф Иркутского алюминиевого завода был равен $L_3 = 18830$ тысячам рублям за этот же период. Плата за экологический ущерб, который включает в себя плату за размещение отходов, Братского алюминиевого завода составила 65278 тысяч рублей [21]. Согласно [22]– [26] платеж завода в Братске за загрязнение воздуха составил приблизительно 90% от всей платы за экологический ущерб. Ввиду этого оцениваем величину штрафа следующим образом: $L_2 = 0,9 \cdot 65278 = 58780,2$ тысяч рублей.

Информация о платежах компаний за загрязнение воздуха представлена в Таблице 2.2.

Используя описанные выше формулы (2.1), (2.2) и значения величин

Таблица 2.2: Величина налога за загрязнение воздуха

Компания	L_i (тыс. рублей)
Красноярский алюминиевый завод	87723,95
Братский алюминиевый завод	58780,2
Иркутский алюминиевый завод	18830

в Таблицах 2.1, 2.2, получаем следующие коэффициенты модели (Таблица 2.3).

Таблица 2.3: Коэффициенты модели

Компания	b_i	d_i
Красноярский алюминиевый завод	59035,12	525,06
Братский алюминиевый завод	35649,15	351,64
Иркутский алюминиевый завод	47906,72	112,71

Рассмотрим некоторые фиксированные числовые параметры, а именно:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad T = 3,5; \quad \delta = 0,5.$$

Неравенства (1.29), (1.36) выполняются для выбранных параметров, таким образом, оптимальные управления игроков при кооперации отличны от нуля.

В Таблице 2.4 представлено численное значение некооперативного решения при выбранных значениях параметров.

Таблица 2.5 показывает общий выигрыш при кооперации и его отличие от суммы выигрышей при использовании равновесных по Нэшу управлений.

Таблицы 2.6–2.7 содержат значения δ , η -характеристических функций для нашего примера.

Таблица 2.4: Выигрыши компаний при использовании равновесных по Нэшу управлений

Компания	$K_i(x_0, T - t_0, u^{NE}), \delta = 0, 5$
Кр. А.З.	5824135318, 9 – 867, 6 x_0
Бр. А.З.	2040066711, 4 – 581, 1 x_0
Ир. А.З.	3957448736, 6 – 186, 3 x_0

Таблица 2.5: Общий выигрыш при кооперации

δ	$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^*)$	$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^*) - \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$
$\delta = 0, 5$	11824891454, 6 – 1635 x_0	3240687, 6

Таблица 2.6: δ -характеристическая функция

	$\delta = 0, 5$
$V^\delta(\{1\}, x_0, T - t_0)$	5824135318, 9 – 867, 6 x_0
$V^\delta(\{2\}, x_0, T - t_0)$	2040066711, 4 – 581, 1 x_0
$V^\delta(\{3\}, x_0, T - t_0)$	3957448736, 6 – 186, 3 x_0
$V^\delta(\{1, 2\}, x_0, T - t_0)$	7865132408, 3 – 1448, 7 x_0
$V^\delta(\{1, 3\}, x_0, T - t_0)$	9782255949, 2 – 1053, 9 x_0
$V^\delta(\{2, 3\}, x_0, T - t_0)$	5997833125, 7 – 767, 3 x_0
$V^\delta(N, x_0, T - t_0)$	11824891454, 6 – 1635 x_0

Таблица 2.7: η -характеристическая функция

	$\delta = 0, 5$
$V^\eta(\{1\}, x_0, T - t_0)$	5823632966 – 867, 6 x_0
$V^\eta(\{2\}, x_0, T - t_0)$	2039119065, 3 – 581, 1 x_0
$V^\eta(\{3\}, x_0, T - t_0)$	3955658048, 1 – 186, 3 x_0
$V^\eta(\{1, 2\}, x_0, T - t_0)$	7865073215 – 1448, 7 x_0
$V^\eta(\{1, 3\}, x_0, T - t_0)$	9781679787, 2 – 1053, 9 x_0
$V^\eta(\{2, 3\}, x_0, T - t_0)$	5996548531, 6 – 767, 3 x_0

Таблицы 2.8–2.9 содержат значения вектора Харшаньи, построенного по δ , η -характеристическим функциям для нашего примера.

Значения вектора Шепли, построенного по δ , η -характеристическим функциям соответственно, представлены в Таблице 2.10.

Также интересно посмотреть, какую выгоду от кооперации получает каждая компания в сравнении с некооперативным случаем. Таблица 2.11 демонстрирует это. И можно заметить, что для каждой компании без исключения выгодно придерживаться кооперативного варианта игры, однако, в разной степени.

Стоит отметить, что при рассмотрении α , δ - и ζ , η -характеристических

Таблица 2.8: Вектор Харшаньи по δ -характеристической функции

$\delta = 0, 5$	
$d_{V^\delta}(\{1\})$	5824135318, 89
$d_{V^\delta}(\{2\})$	2040066711, 44
$d_{V^\delta}(\{3\})$	3957448736, 6
$d_{V^\delta}(\{1, 2\})$	930378
$d_{V^\delta}(\{1, 3\})$	671893, 7
$d_{V^\delta}(\{2, 3\})$	317677, 65
$d_{V^\delta}(N)$	1320738, 29

Таблица 2.9: Вектор Харшаньи по η -характеристической функции

$\delta = 0, 5$	
$d_{V^\eta}(\{1\})$	5823632965, 96
$d_{V^\eta}(\{2\})$	2039119065, 27
$d_{V^\eta}(\{3\})$	3955658048, 06
$d_{V^\eta}(\{1, 2\})$	2321183, 76
$d_{V^\eta}(\{1, 3\})$	2388773, 21
$d_{V^\eta}(\{2, 3\})$	1771418, 32
$d_{V^\eta}(N)$	0

Таблица 2.10: Вектор Шепли

Компания	$Sh_i^{\alpha, \delta}(x_0, T - t_0)$	$Sh_i^{\zeta, \eta}(x_0, T - t_0)$
Кр. А.З.	5825376700, 8 – 867, 6 x_0	5825987944, 4 – 867, 6 x_0
Бр. А.З.	2041130985, 4 – 581, 1 x_0	2041165366, 3 – 581, 1 x_0
Ир. А.З.	3958383768, 4 – 186, 2 x_0	3957738143, 8 – 186, 2 x_0

Таблица 2.11: Разность между вектором Шепли и равновесием по Нэшу

Компания	$Sh_i^{\alpha, \delta} - K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$ $\delta = 0, 5$	$Sh_i^{\zeta, \eta} - K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$ $\delta = 0, 5$
Кр. А.З.	1241381,9	1852625,5
Бр. А.З.	1064274	1098654,9
Ир. А.З.	935031,8	289407,2

функций чем больше величина штрафа d_i , тем для компании более выгодно кооперироваться. Так, в нашем случае Красноярский алюминиевый завод является самым мотивированным для совместных действий. А Иркутский алюминиевый завод заинтересован меньше всех.

Построим графики процедуры распределения дележа (1.46), (1.47) для каждой компании отдельно (Рис. 2.1–2.3).

Из рассмотрения данных графиков можем заключить, что третий игрок, используя α , δ -характеристические функции, получит большие вы-

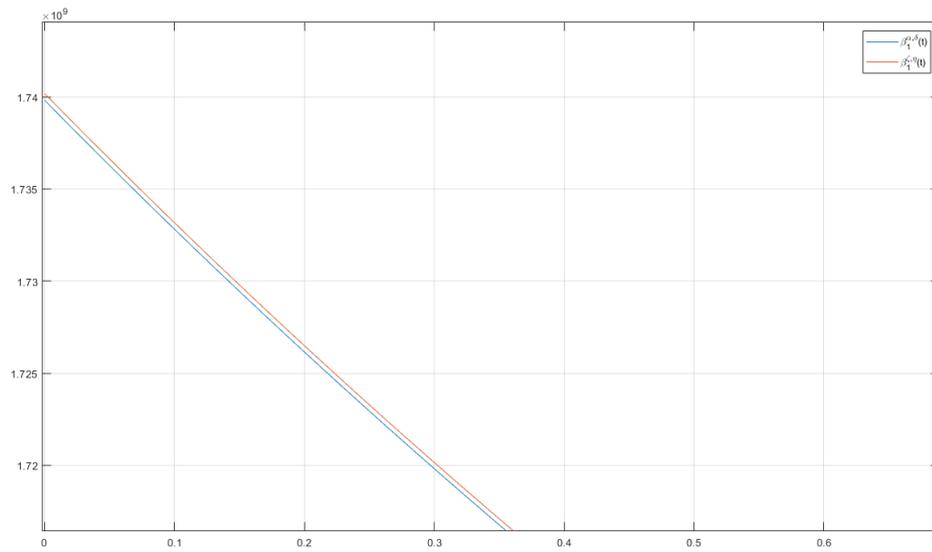


Рис. 2.1: ПРД первого игрока для $\alpha - \eta$ -характеристических функций

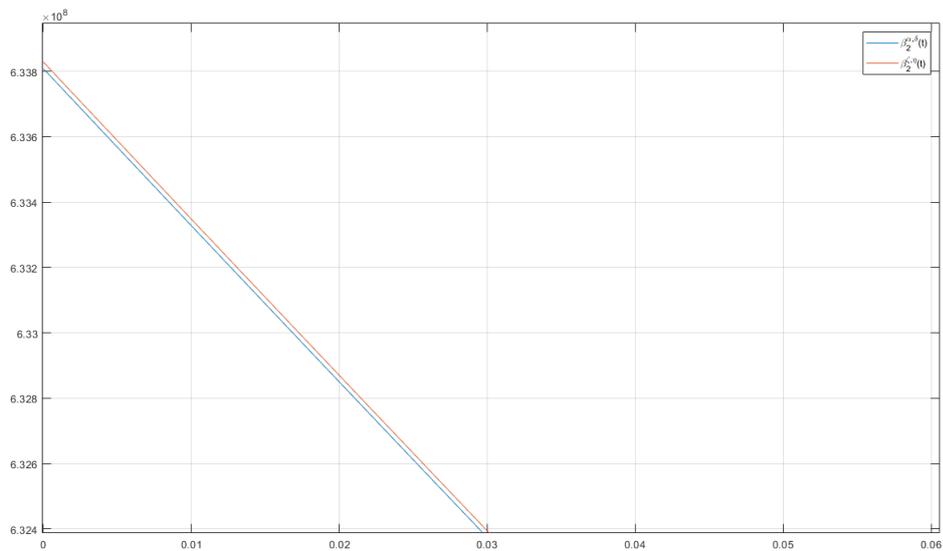


Рис. 2.2: ПРД второго игрока для $\alpha - \eta$ -характеристических функций

игры при кооперации, однако для первого и второго игроков выгоднее использовать ζ, η -характеристические функции. Эта закономерность также видна из Таблицы 2.11.

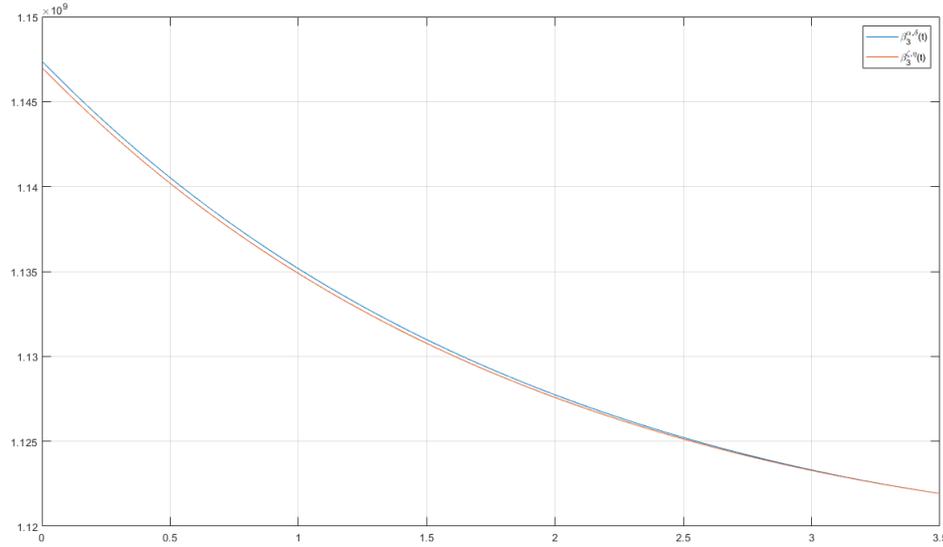


Рис. 2.3: ПРД третьего игрока для $\alpha - \eta$ -характеристических функций

§ 2.1. Построение сильно динамически устойчивого решения в рассматриваемой игре трех лиц

2.1.1. Первый метод построения

Рассмотрим в качестве принципа оптимальности C -ядро.

1. Алгоритм построения решения, обладающего свойством сильной динамической устойчивости, описанный в (1.3.1), начинается с нахождения оптимальных управлений, которые максимизируют суммарный выигрыш всех игроков, а также соответствующей им кооперативной траектории. Оптимальные управления были построены ранее и имеют вид (1.25), а оптимальная траектория будет немного отличаться от (1.27) ввиду рассмотрения начального условия $x(t_0) = x_0$:

$$x^*(t) = \frac{3D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{x_0 + 3D_N - B_N\delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{3D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{3D_N}{\delta^2}.$$

2. Для построения C -ядра необходимо также вычислить значения характеристической функции для всех возможных коалиций из трех игроков. Для простоты вычислений выберем δ -характеристическую функцию [10], которая была построена ранее, (1.39)–(1.41). Однако выбранная характеристическая функция в общем случае не является супераддитивной, поэтому проверим ее на выполнение неравенства (1.2):

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i\} \cup \{j\}) - V^\delta(\{i\}) - V^\delta(\{j\}) &= \\
&= \frac{(d_i^2 + d_j^2)}{\delta^2} \left(\frac{(T-t)}{2} - \frac{(1 - e^{\delta(t-T)})}{\delta} + \frac{(1 - e^{2\delta(t-T)})}{4\delta} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i, j\} \cup \{k\}) - V^\delta(\{i, j\}) - V^\delta(\{k\}) &= \\
&= \frac{(D_N^2 + d_k^2)}{\delta^2} \left(\frac{(T-t)}{2} - \frac{(1 - e^{\delta(t-T)})}{\delta} + \frac{(1 - e^{2\delta(t-T)})}{4\delta} \right),
\end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Первое слагаемое в обоих выражениях ≥ 0 , а положительность второго слагаемого видна из Рис. 2.4. Это доказывает супераддитивность по-

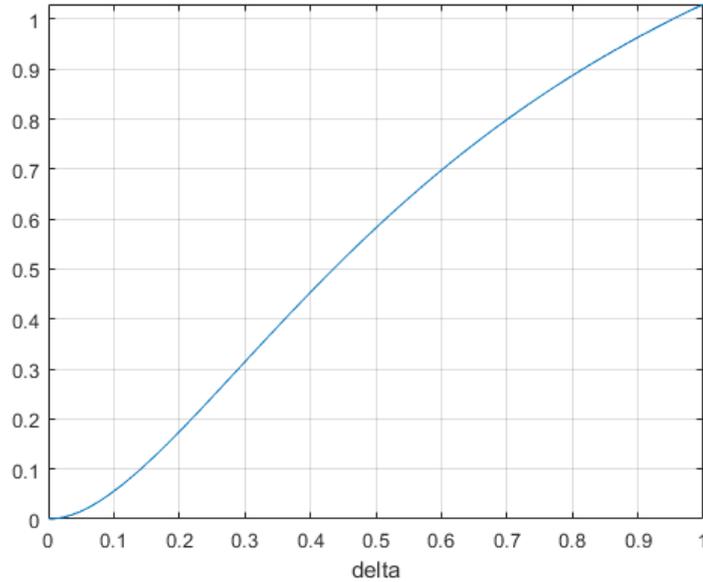


Рис. 2.4: Проверка на положительность второго слагаемого при различных значениях параметра δ и фиксированных t_0, T

строенной $V^\delta(S, x(t), T-t)$, $S \in N$.

3. Более того, для построенной характеристической функции выполняется условие (1.10). Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned}
D \triangleq & V(S_1 \cup S_2, x^*(t), T-t) + V(S_1 \cap S_2, x^*(t), T-t) - \\
& - V(S_1, x^*(t), T-t) - V(S_2, x^*(t), T-t),
\end{aligned}$$

где $S_1, S_2 \subseteq N$.

Обозначим $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$. Тогда получаем:

$$D = (D_N^2 + d_1^2) \frac{(T-t)}{2\delta^2} + \frac{(D_N^2 - d_1^2)}{\delta^3} e^{\delta(t-T)} (1 - e^{\delta(t-T)}) \geq 0.$$

Аналогично для $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2, 3\}$ имеем:

$$D = (D_N^2 + d_2^2) \frac{(T-t)}{2\delta^2} + \frac{(D_N^2 - d_2^2)}{\delta^3} e^{\delta(t-T)} (1 - e^{\delta(t-T)}) \geq 0.$$

В случае $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{2, 3\}$:

$$D = (D_N^2 + d_3^2) \frac{(T-t)}{2\delta^2} + \frac{(D_N^2 - d_3^2)}{\delta^3} e^{\delta(t-T)} (1 - e^{\delta(t-T)}) \geq 0.$$

Таким образом, δ -характеристическая функция является выпуклой без дополнительных ограничений на параметры модели. Значит C -ядро непусто, и вектор Шепли принадлежит ему, то есть является «устойчивым».

Вектор Шепли, построенный на основе δ -характеристической функции, — (1.44). На Рис. 2.5 он обозначен красной сплошной линией, где видно, что он принадлежит C -ядру.

Для выбранных параметров (1.44) примет вид:

$$\begin{aligned} Sh_1^\delta(x^*(t), T-t) &= 288090616e^{-\frac{t}{2}} - 317667e^{\frac{t}{2}} - 78280e^t - 1595427326t + \\ &+ 5538353324, \\ Sh_2^\delta(x^*(t), T-t) &= 192938301e^{-\frac{t}{2}} + 11003e^{\frac{t}{2}} - 62146e^t - 537207539t + \\ &+ 1848693400, \\ Sh_3^\delta(x^*(t), T-t) &= 61841872e^{-\frac{t}{2}} + 395347e^{\frac{t}{2}} - 36941e^t - 1116607381t + \\ &+ 3896327591. \end{aligned} \tag{2.3}$$

4. Докажем, что для построенной δ -характеристической функции справедливо (1.13). Для $i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} V^\delta(N, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{i, j\}, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{k\}, x^*(t), T-t) &= \\ = \frac{D_N^2 + d_k^2}{\delta^2} \left(\frac{(T-t)}{2} - \frac{(1 - e^{\delta(t-T)})}{\delta} + \frac{(1 - e^{2\delta(t-T)})}{4\delta} \right). \end{aligned}$$

Тогда

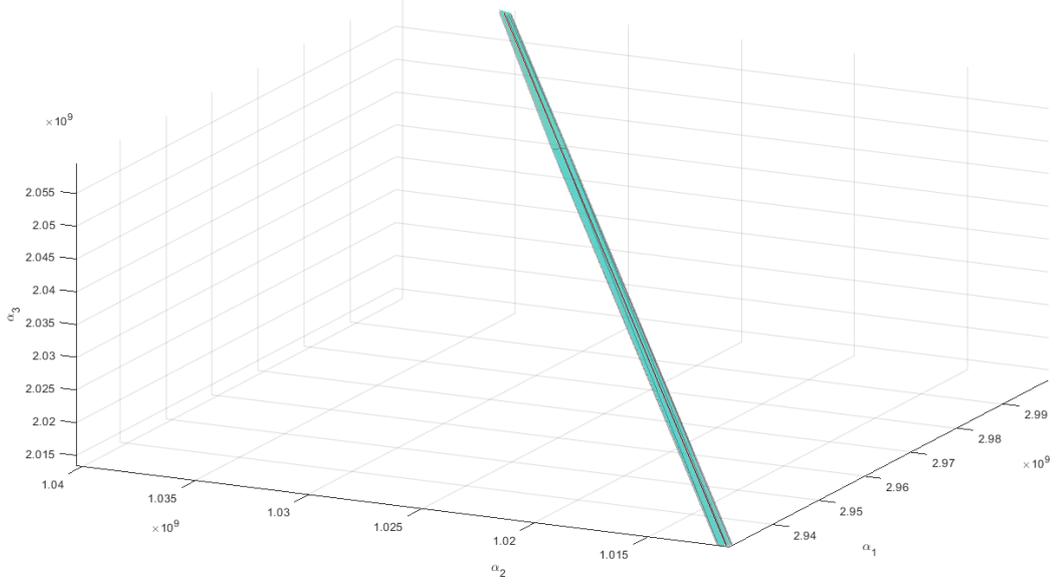


Рис. 2.5: Оси: $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения изменения фрагмента множества $C(x^*(t), T - t)$ во времени

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [V^\delta(N, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{i, j\}, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{k\}, x^*(t), T-t)] = \\ = \frac{D_N^2 + d_k^2}{\delta^2} \left(-\frac{1}{2} + e^{\delta(t-T)} \left(1 - \frac{e^{\delta(t-T)}}{2} \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Получаем, что неравенство всегда выполнено без дополнительных ограничений на параметры модели, то есть множество опорных решений $\hat{C}(x_0, T - t_0)$ непусто.

Для выбранных числовых значений параметров множество $B(t)$ (1.12) примет вид:

$$\begin{aligned} B(t) = \left\{ \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) : \right. & \quad (2.4) \\ 144045308e^{-\frac{t}{2}} + 529200e^{\frac{t}{2}} + 46100e^t + 1594361669 & \leq \beta_1(t) \leq \\ \leq 144045308e^{-\frac{t}{2}} - 342881e^{\frac{t}{2}} + 121872e^t + 1596870909, & \\ 96469150e^{-\frac{t}{2}} + 312025e^{\frac{t}{2}} + 34557e^t + 536293920 & \leq \beta_2(t) \leq \\ \leq 96469150e^{-\frac{t}{2}} - 454376e^{\frac{t}{2}} + 101147e^t + 538499085, & \\ 30920936e^{-\frac{t}{2}} + 81294e^{\frac{t}{2}} + 12703e^t + 1115804708 & \leq \beta_3(t) \leq \\ \leq 30920936e^{-\frac{t}{2}} - 607988e^{\frac{t}{2}} + 72592e^t + 1117787980, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 240514458e^{-\frac{t}{2}} + 563646e^{\frac{t}{2}} + 104775e^t + 2131454266 \leq \beta_1(t) + \beta_2(t) \leq \\
& \leq 240514458e^{-\frac{t}{2}} - 125635e^{\frac{t}{2}} + 164664e^t + 2133437537, \\
& 174966244e^{-\frac{t}{2}} + 410034e^{\frac{t}{2}} + 76220e^t + 2710743160 \leq \beta_1(t) + \beta_3(t) \leq \\
& \leq 174966244e^{-\frac{t}{2}} - 356367e^{\frac{t}{2}} + 142810e^t + 2712948326, \\
& 127390086e^{-\frac{t}{2}} + 298539e^{\frac{t}{2}} + 55495e^t + 1652371336 \leq \beta_2(t) + \beta_3(t) \leq \\
& \leq 127390086e^{-\frac{t}{2}} - 573542e^{\frac{t}{2}} + 131267e^t + 1654880576, \\
& \beta_1(t) + \beta_2(t) + \beta_3(t) = \\
& = 271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245 \}.
\end{aligned}$$

5. Можно показать, что пропорциональное решение, ПРД которого строится как

$$\beta_i^{prop}(t) = \frac{W(\{i\}, x^*(t), T - t)}{\sum_{i \in N} W(\{i\}, x^*(t), T - t)} W(N, x^*(t), T - t), \quad i \in N,$$

принадлежит указанному подмножеству C -ядра $\hat{C}(x^*(t), T - t)$.

Действительно, в данном случае процедура распределения дележа для пропорционального решения примет вид:

$$\begin{aligned}
\beta_1^{prop}(t) &= \frac{(144045308e^{-\frac{t}{2}} + 529200e^{\frac{t}{2}} + 46100e^t + 1594361669)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\
&\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245), \\
\beta_2^{prop}(t) &= \frac{(96469150e^{-\frac{t}{2}} + 312025e^{\frac{t}{2}} + 34557e^t + 536293920)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\
&\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245), \\
\beta_3^{prop}(t) &= \frac{(30920936e^{-\frac{t}{2}} + 81294e^{\frac{t}{2}} + 12703e^t + 1115804708)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\
&\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

И проинтегрировав $\beta_i^{prop}(t)$, $i = \overline{1, 3}$, получим формулу для дележа $\bar{\alpha}_i^{prop}(x^*(t), T - t)$, $i = \overline{1, 3}$, в соответствии с которым игроки разделят суммарный выигрыш $V^\delta(N, x_0, T - t_0) = 11826156420$ следующим образом:

$$\bar{\alpha}^{prop}(x_0, T - t_0) = (5826404564; 2041082218; 3958669638). \tag{2.6}$$

Графически показано на Рис. 2.6, что $\beta^{prop}(t) \in B(t)$ (красная сплошная линия), а на Рис. 2.7 изображено, что пропорциональное решение принадлежит C -ядру $C(x^*(t), T - t)$, откуда следует, что по **теоре-**

ме 1.1 дележ $\bar{\alpha}^{prop}(x^*(t), T - t)$ является опорным решением, то есть $\bar{\alpha}^{prop}(t) \in \hat{C}(x^*(t), T - t)$, а $C(x^*(t), T - t)$ — сильно динамически устойчивое кооперативное решение для $\forall t \in [t_0, T]$.

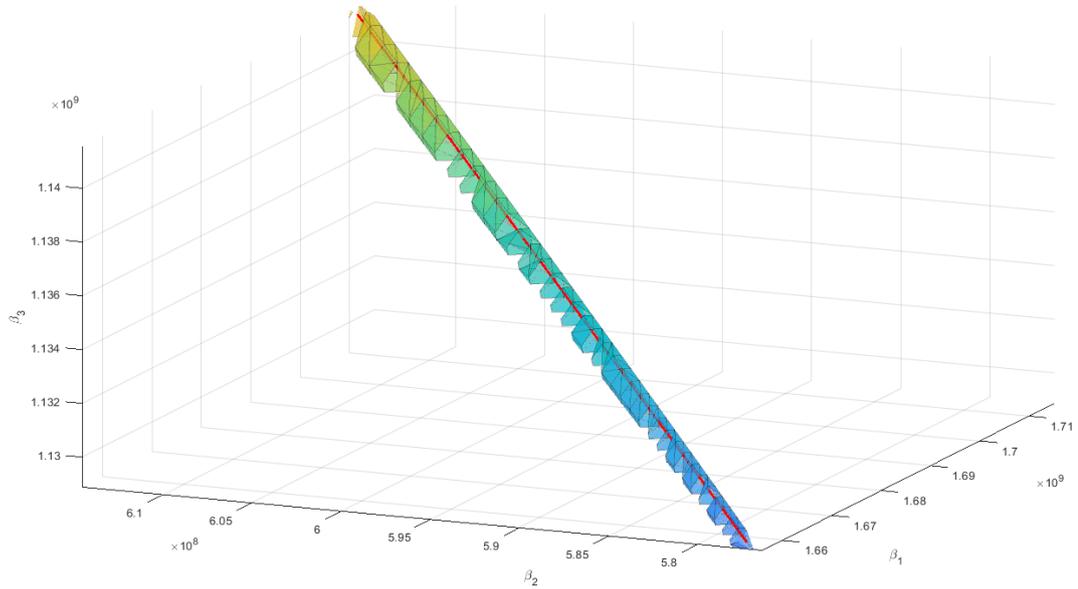


Рис. 2.6: Оси: $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения изменения фрагмента множества $B(t)$ во времени

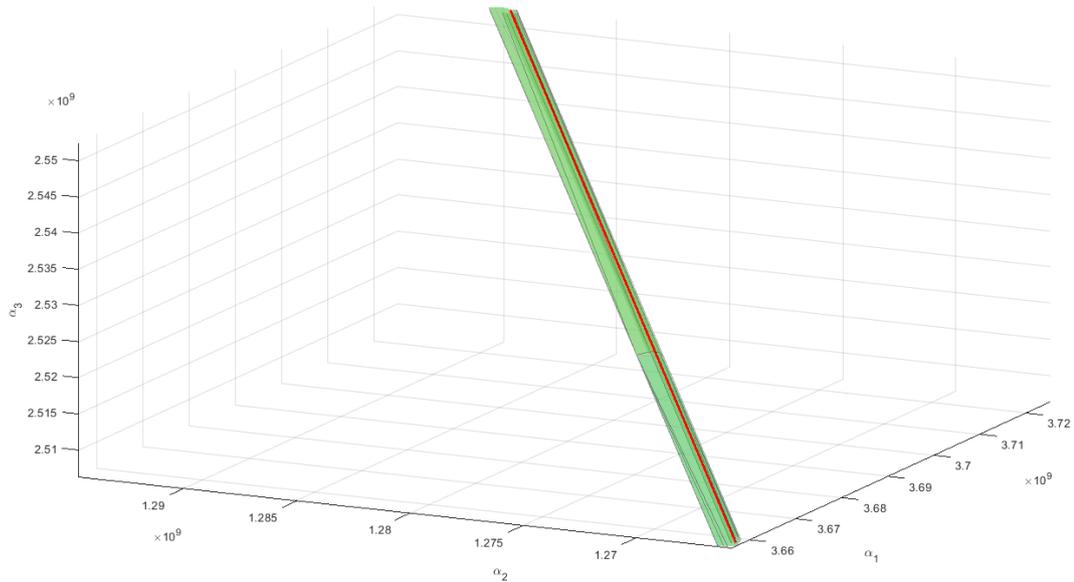


Рис. 2.7: Оси: $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения фрагмента C -ядра $C(x^*(t), T - t)$ во времени

Свойство сильной динамической устойчивости C -ядра можно продемонстрировать на примере пропорционального решения: пусть в нача-

ле игры (в момент времени t_0) игроки договариваются об использовании пропорционального решения (2.5), однако с момента времени $\hat{t} \in [t_0, T]$ они решают использовать вектор Шепли (1.44) $\in \hat{C}(x^*(\hat{t}), T - \hat{t})$. И можно продемонстрировать, что результирующее решение будет принадлежать $C(x_0, T - t_0)$.

Для начала, нетрудно показать, что вектор Шепли (2.3) принадлежит $\hat{C}(x^*(\hat{t}), T - \hat{t})$. Рассчитаем процедуру распределения дележа для вектора Шепли, используя (1.46):

$$\begin{aligned}\beta_1^{Sh}(t) &= 144045308e^{-\frac{t}{2}} + 158833e^{\frac{t}{2}} + 78280e^t + 1595427326, \\ \beta_2^{Sh}(t) &= 96469150e^{-\frac{t}{2}} - 5502e^{\frac{t}{2}} + 62146e^t + 537207539, \\ \beta_3^{Sh}(t) &= 30920936e^{-\frac{t}{2}} - 197674e^{\frac{t}{2}} + 36941e^t + 1116607381.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Нетрудно убедиться в справедливости того, что $\beta^{Sh}(t) \in B(t)$. Следовательно, $Sh(x^*(t), T - t) \in \hat{C}(x^*(\hat{t}), T - \hat{t})$. Пусть $\hat{t} = \frac{7}{3}$. Тогда ПРД для результирующего решения имеет вид:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta^{prop}(t), & t \in [t_0, \hat{t}], \\ \beta^{Sh}(t), & t \in (\hat{t}, T]. \end{cases}\tag{2.8}$$

Интегрируя $\beta(t) = \{\beta_i(t)\}_{i=\overline{1,3}}$ (2.8) по t , получаем $\bar{\alpha}(x^*(t), T - t) = \{\bar{\alpha}_i(x^*(t), T - t)\}_{i=\overline{1,3}}$, в соответствии с которым игроки разделят суммарный выигрыш во всей игре следующим образом:

$$\bar{\alpha}(x_0, T - t_0) = (5826378060; 2041120830; 3958657530).\tag{2.9}$$

На Рис. 2.8, где изображено множество $B(t)$, видно, что ПРД $\beta(t)$ принадлежит этому множеству, где ПРД пропорционального решения обозначено синей пунктирной линией, а вектора Шепли — желтой. Из того, что $\beta(t) \in B(t)$, следует принадлежность $\bar{\alpha}(x^*(t), T - t) \in \hat{C}(x^*(t), T - t)$.

На Рис. 2.9 показана принадлежность результирующего решения C -ядру $C(x^*(t), T - t)$.

Таким образом, удалось продемонстрировать свойство сильной динамической устойчивости $C(x^*(t), T - t)$, где в качестве ПРД для опорного решения использовали (2.8).

Используя **теорему 1.2**, можем построить множество опорных решений в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ и сравнить полученное множество с C -ядром.

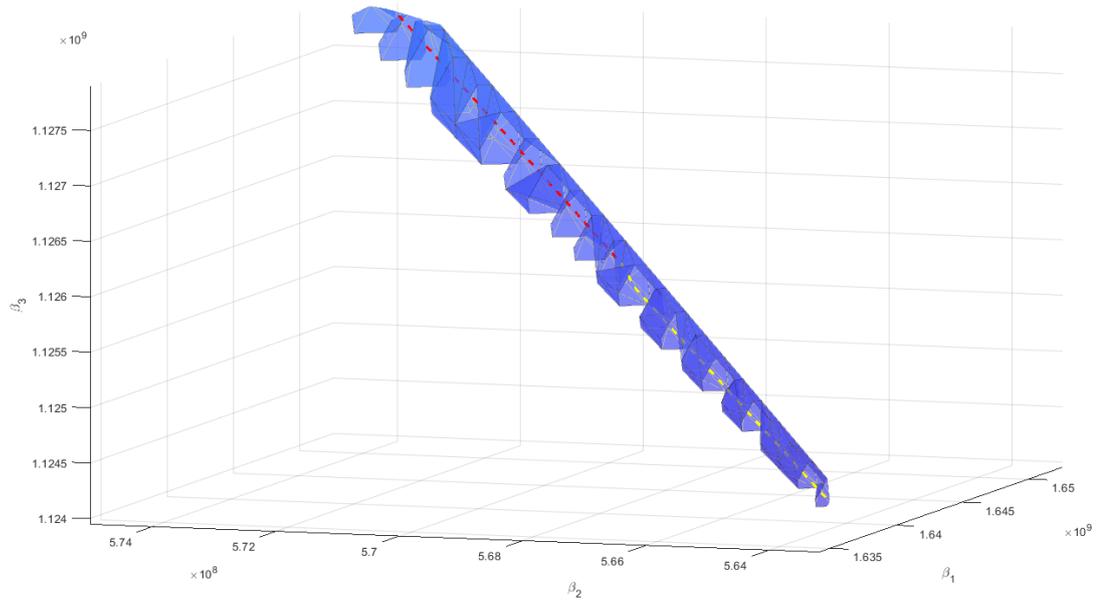


Рис. 2.8: Оси: $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения изменения фрагмента множества $B(t)$ во времени

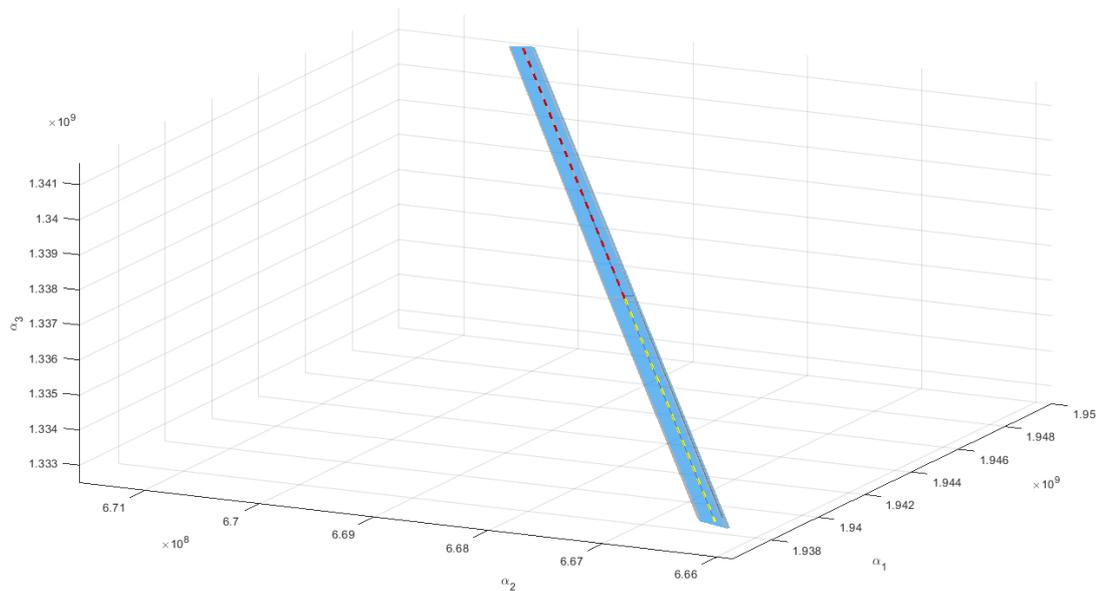


Рис. 2.9: Оси: $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения фрагмента C -ядра $C(x^*(t), T - t)$ во времени

Выберем моменты времени, например, такие как

$$t_1 = 0, 7; \quad t_2 = 2, 1; \quad t_3 = 2, 8;$$

и сравним в каждый из этих моментов времени множество опорных решений и C -ядро.

Для удобства сведем рассматриваемую игру к игре в 0 – 1 редуцированной форме, то есть рассмотрим эквивалентную игру, где значения характеристической функции для $S \subseteq N$ вычисляются следующим образом:

$$V'(S) = \frac{V(S) - \sum_{i \in S} V(\{i\})}{V(N) - \sum_{i \in N} V(\{i\})}, \quad S \subseteq N.$$

Данный переход имеет место быть, поскольку $\sum_{i \in N} V(\{i\}) \neq V(N)$.

На Рис. 2.10–2.12 пропорциональное решение обозначено синей точкой, а результирующее – черной. Точкам с координатами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответствуют Красноярский алюминиевый завод, Братский алюминиевый завод и Иркутский алюминиевый завод соответственно.

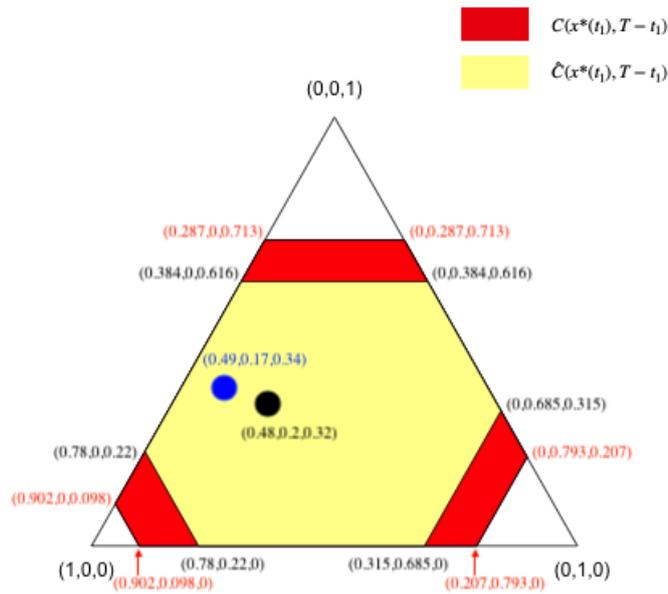


Рис. 2.10: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_1 = 0,7$

Из графиков видно, что множество опорных решений содержится в C -ядре и что при приближении t к моменту времени T множество опорных решений стремится к C -ядру.

2.1.2. Второй метод построения

Построим сильно динамически устойчивое C -ядро, используя алгоритм, описанный в (1.3.2). В данном пункте так же, как и в предыдущем, в качестве способа построения характеристической функции выбираем δ -характеристическую функцию.

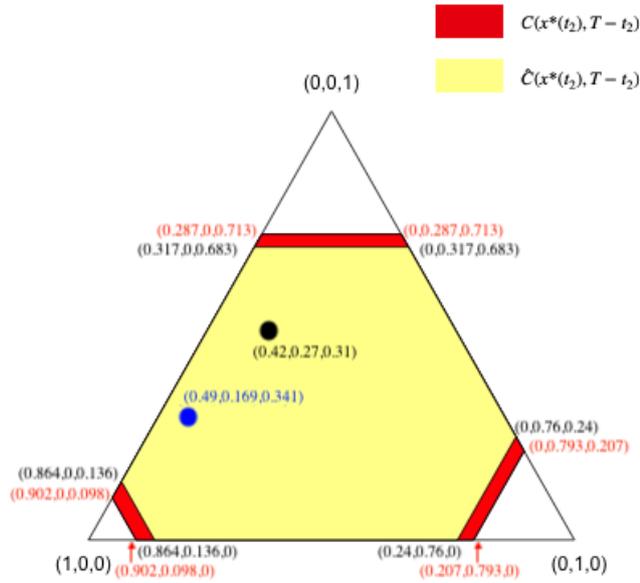


Рис. 2.11: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_2 = 2, 1$

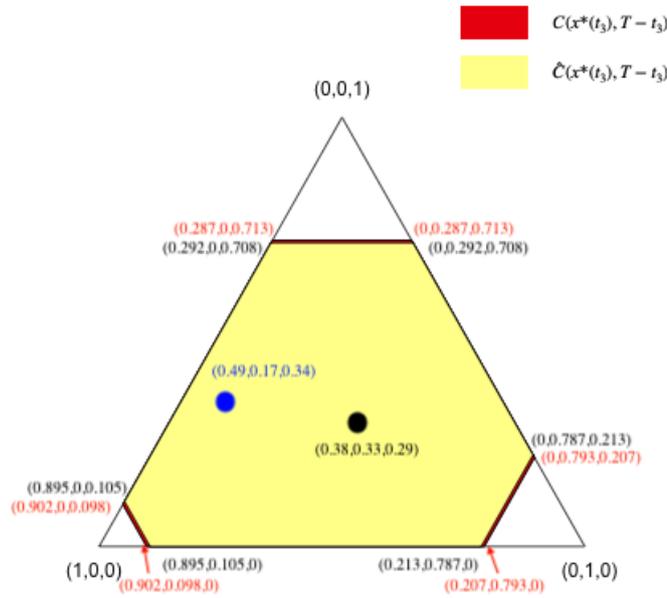


Рис. 2.12: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_2 = 2, 8$

Составляем систему (1.16) для рассматриваемой модели:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 7949719025 - 486159432e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 3469663e^{t - \frac{7}{2}} - \\ - 2 \left(e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 1 \right) \left(5204494e^{-\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} + 239610053e^{-\frac{t}{2}} - 239836154 \right) - 2131454266t, \\ \alpha_2(t) + \alpha_3(t) = 6042634991 - 257497584e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 1837730e^{t - \frac{7}{2}} - \\ - 2 \left(e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 1 \right) \left(2756595e^{-\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} + 126911062e^{-\frac{t}{2}} - 127030818 \right) - 1652371336t, \\ \alpha_1(t) + \alpha_3(t) = 9843789890 - 353664767e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 2524064e^{t - \frac{7}{2}} - \\ - 2 \left(e^{\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} - 1 \right) \left(3786096e^{-\frac{t}{2} - \frac{7}{4}} + 174308319e^{-\frac{t}{2}} - 174472800 \right) - 2710743160t. \end{cases}$$

В общем виде решение этой системы можно представить как:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &= \frac{b_1^2}{2}(T-t) - \frac{d_1(B_N\delta - D_N)}{\delta^2}(T-t) - \frac{d_1x^*(t)}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) + \\
&+ \frac{d_1}{\delta^3}(B_N\delta - 2D_N)(1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{d_1D_N}{2\delta^3}(1 - e^{2\delta(t-T)}), \\
\alpha_2(t) &= \frac{b_2^2}{2}(T-t) - \frac{d_2(B_N\delta - D_N)}{\delta^2}(T-t) - \frac{d_2x^*(t)}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) + \\
&+ \frac{d_2}{\delta^3}(B_N\delta - 2D_N)(1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{d_2D_N}{2\delta^3}(1 - e^{2\delta(t-T)}), \\
\alpha_3(t) &= \frac{b_3^2}{2}(T-t) - \frac{d_3(B_N\delta - D_N)}{\delta^2}(T-t) - \frac{d_3x^*(t)}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) + \\
&+ \frac{d_3}{\delta^3}(B_N\delta - 2D_N)(1 - e^{\delta(t-T)}) + \frac{d_3D_N}{2\delta^3}(1 - e^{2\delta(t-T)}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

При выбранных значениях параметров (2.10) примет вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &= 288090616e^{-\frac{t}{2}} - 675141e^{\frac{t}{2}} - 62750e^t - 1594913045t + 5538096183, \\
\alpha_2(t) &= 192938301e^{-\frac{t}{2}} - 452152e^{\frac{t}{2}} - 42025e^t - 536541221t + 1848360241, \\
\alpha_3(t) &= 61841872e^{-\frac{t}{2}} - 144927e^{\frac{t}{2}} - 13470e^t - 1115830115t + 3895938958.
\end{aligned}$$

Тогда $A(t)$ (1.18):

$$A(t) = -0,00000003e^{-\frac{t}{2}} + 1360903e^{\frac{t}{2}} - 59122e^t - 1957864t + 978932. \tag{2.11}$$

Можно заметить, что производная построенной функции $A(t)$ с противоположным знаком на выбранном промежутке времени $[t_0, T]$ положительна (см. Рис. 2.13).

Для выполнения **условия 1** в (1.3.2) построим функции $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, (1.19) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= K_1 \frac{d}{dt}(-V^\delta(N, x^*(t), T-t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)), \\
\gamma_2(t) &= K_2 \frac{d}{dt}(-V^\delta(N, x^*(t), T-t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)), \\
\gamma_3(t) &= K_3 \frac{d}{dt}(-V^\delta(N, x^*(t), T-t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)),
\end{aligned}$$

а так как $-\frac{d}{dt}A(t) \geq 0 \forall t \in [t_0, T]$, то можно выбрать $\forall K_1, K_2, K_3 \in [0, 1]$, $K_1 + K_2 + K_3 = 1$. Такой выбор коэффициентов позволяет построить множество опорных решений, которое является подмножеством C -ядра.

Пусть

$$K_1 = 0, 5; \quad K_2 = 0, 3; \quad K_3 = 0, 2.$$

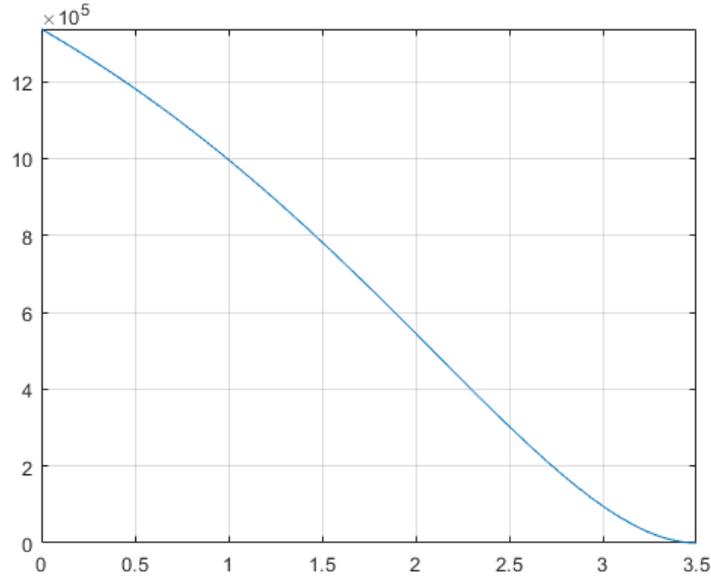


Рис. 2.13: Изменение $-\frac{d}{dt}A(t)$ во времени $t \in [t_0, T]$

Тогда:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= -0,000000009e^{-\frac{t}{2}} - 340226e^{\frac{t}{2}} + 29561e^t + 978932, \\ \gamma_2(t) &= -0,000000005e^{-\frac{t}{2}} - 204135e^{\frac{t}{2}} + 17737e^t + 587359, \\ \gamma_3(t) &= -0,000000004e^{-\frac{t}{2}} - 136090e^{\frac{t}{2}} + 11824e^t + 391573.\end{aligned}$$

Выполнение второго пункта **условия 1** нетрудно показать в общем виде $\forall \delta > 0$, учитывая Рис. 2.4:

$$\alpha_i(t) - V^\delta(\{i\}, x^*(t), T-t) = \frac{d_i^2}{\delta^2} \left(\frac{T-t}{2} - \frac{1-e^{\delta(t-T)}}{\delta} + \frac{1-e^{2\delta(t-T)}}{4\delta} \right) \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

Тогда ПРД (1.21) в общем случае примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1(t) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{V^\delta(N, x^*(t), T-t)}{2} - \frac{\alpha_1(t)}{2} + \frac{\alpha_2(t)}{2} + \frac{\alpha_3(t)}{2} \right), \\ \bar{\beta}_2(t) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{3V^\delta(N, x^*(t), T-t)}{10} + \frac{3\alpha_1(t)}{10} - \frac{7\alpha_2(t)}{10} + \frac{3\alpha_3(t)}{10} \right), \\ \bar{\beta}_3(t) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{V^\delta(N, x^*(t), T-t)}{5} + \frac{\alpha_1(t)}{5} + \frac{\alpha_2(t)}{5} - \frac{4\alpha_3(t)}{5} \right),\end{aligned}$$

а для рассматриваемых параметров получим следующее:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1(t) &= 144045308e^{-\frac{t}{2}} - 2655e^{\frac{t}{2}} + 92311e^t + 1595891977, \\ \bar{\beta}_2(t) &= 96469150e^{-\frac{t}{2}} + 21940e^{\frac{t}{2}} + 59761e^t + 537128580, \\ \bar{\beta}_3(t) &= 30920936e^{-\frac{t}{2}} - 63627e^{\frac{t}{2}} + 25294e^t + 1116221688.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Проинтегрировав (2.12) по t , получим дележ $\bar{\alpha}(t) \in C(x^*(t), T - t)$, что продемонстрировано на Рис. 2.14. И при этом $C(x^*(t), T - t)$ обладает свойством сильной динамической устойчивости по **теореме 1.3** $\forall t \in [t_0, T]$. В соответствии с $\bar{\alpha}(t)$ игроки разделят суммарный выигрыш во всей игре согласно (2.13):

$$\bar{\alpha}(x_0, T - t_0) = (5826589264; 2041488580; 3958078576). \quad (2.13)$$

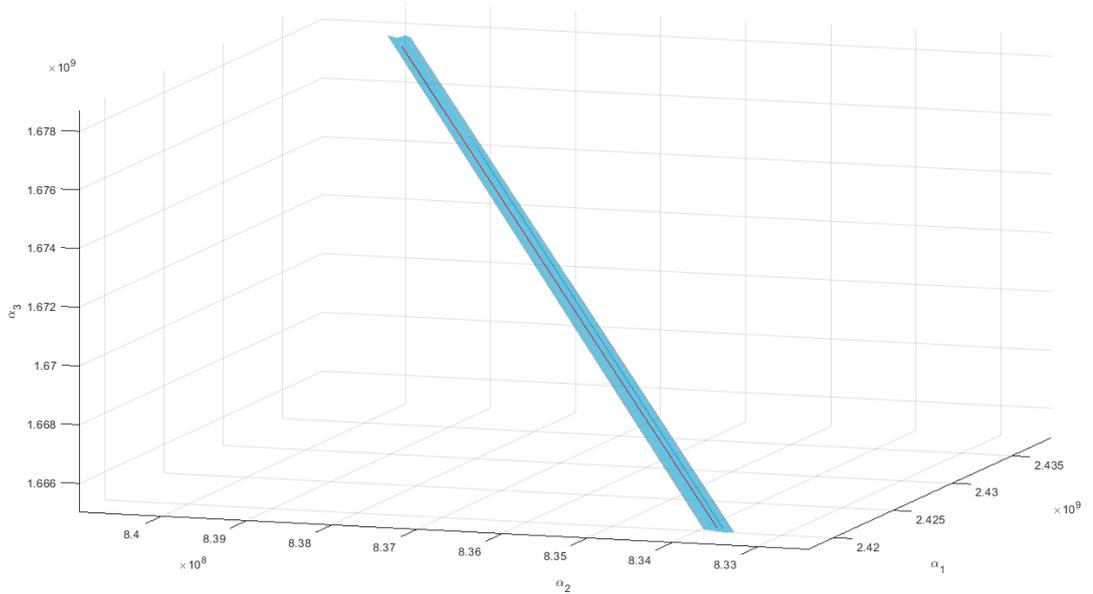


Рис. 2.14: Оси: $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$. Добавлена виртуальная ось t для отображения изменения фрагмента C -ядра $C(x^*(t), T - t)$ во времени

Нетрудно заметить, что при определенном выборе коэффициентов K_i в $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, можно получить дележ $\bar{\alpha}(x_0, T - t_0)$, соответствующий вектору Шепли, который был построен ранее. Действительно, если $K_1 = 0.2627$, $K_2 = 0.3403$, $K_3 = 0.397$, то мы получим в точности $Sh(x^*(t_0), T - t_0)$.

Таким образом, двумя способами было доказано свойство сильной динамической устойчивости C -ядра $C(x^*(t_0), T - t_0)$. Однако построенные дележи — опорные решения, (2.6), (2.9), (2.13), фигурирующие в определении сильной динамической устойчивости, различны.

Вывод

В работе была изучена теоретико-игровая модель управления объемами вредных выбросов с ненулевой абсорбцией на основе реальных данных компании «РУСАЛ» за 2016 год. Рассматривался кооперативный вариант игры с построением α , δ , ζ , η -характеристических функций, между которыми были выявлены некоторые взаимосвязи. Задача решалась в программных стратегиях с использованием принципа максимума Понтрягина. Были найдены выражения для четырех типов характеристической функции, упомянутых выше.

Далее, вычислив значения вектора Шепли, построенного по α , δ , ζ , η -характеристическим функциям, был отмечен тот факт, что векторы Шепли, построенные по α - и δ - и по ζ - и η -характеристическим функциям, совпадают соответственно. Между векторами Харшаньи, вычисленными для четырех типов характеристической функции, также были найдены аналогичные взаимосвязи, что и между характеристическими функциями. Выбрав в качестве кооперативного решения одноточечное решение (вектор Шепли), нашли аналитические выражения для процедуры распределения дележа и показали сравнительные графики ПРД каждого игрока, вычисленные на основе разных характеристических функций.

Кроме того, было исследовано выполнение свойства сильной динамической устойчивости для C -ядра, используя два алгоритма, которые предлагают различные методы построения опорного решения. Первый алгоритм позволил построить множество опорных решений, содержащееся в C -ядре, которому принадлежит как пропорциональное решение, так и результирующее, которое является комбинацией пропорционального решения и вектора Шепли. Более того, было замечено, что при приближении t к последнему моменту времени T множество опорных решений стремится к C -ядру. Затем использовался другой метод построения множества, обладающего рассматриваемым свойством, и был построен дележ, который может быть использован в качестве дележа, фигурирующего в определении сильной динамической устойчивости. Сравнив построенные опорные решения, пришли к выводу, что они различны.

Заключение

Применение теоретико–игрового подхода показало, что решение проблемы образования вредных выбросов при совместном урегулировании может принести экономическую выгоду игрокам, а также улучшить экологическую обстановку в регионе.

Основные исследования в области теории игр показывают, что однократные или мгновенные игры не учитывают фактор времени, что противоречит тому фактору, что загрязнение окружающей среды происходит во времени. Данная проблема рассматривалась в форме дифференциальной игры, где три компании Восточной Сибири выступают в качестве игроков. Данные компании приносят наибольший ущерб экологической обстановке данного региона, а в частности — загрязнение атмосферного воздуха, где параметры качества воздуха превышают допустимые значения.

Актуальность темы исследования демонстрируется изучением модели на основе реальных данных. Развивая промышленные технологии, необходимо сохранять качество окружающей среды и учитывать интересы предприятий по снижению расходов на устранение загрязнений от производства.

Список литературы

- [1] Костюнин С. Ю., Палестини А., Шевкопляс Е. В. Об одной дифференциальной игре, моделирующей разработку невозобновляемого ресурса // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. No 3. С. 73–82.
- [2] Breton M., Zaccour G., Zahaf M. A differential game of joint implementation of environmental projects // Automatica, 2005. Vol. 41, No 10. P. 1737–1749.
- [3] Gromova E. The Shapley Value as a Sustainable Cooperative Solution in Differential Games of Three Players // Recent Advances in Game Theory and Applications, Static and Dynamic Game Theory: Foundations and Applications, 2016. P. 67–91.
- [4] Haurie A., Zaccour G. Differential game models of global environmental management // Annals of Dynamic Games, Boston, 1994. P. 124–132.
- [5] Tur A., Gromova E., Barsuk P. A Pollution Control Problem for the Aluminum Production in Eastern Siberia: Differential Game Approach // submitted to SCP 2020. 2020.
- [6] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов // Москва: Наука, 1983. С. 393.
- [7] von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior // Princeton University Press, 1953.
- [8] Gromova E., Petrosyan L. On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games // Autom Remote Control, 2017. Vol. 78(9). P. 1680–1692.
- [9] Gromova E., Marova E. Coalition and Anti-coalition Interaction in Cooperative Differential Games // IFAC–PapersOnLine, 2018. Vol. 51. P. 479–483.
- [10] Petrosyan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control, 2003. Vol. 27, No 3. P. 381–398.

- [11] Петросян Л. А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестник Ленинградского университета, 1977. No 19. С. 46–52.
- [12] Shapley L. S. A Value for n -person Games // In: H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds., Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 1953. Vol. 28. P. 307–317.
- [13] Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности // Вестник Ленинградского университета, 1993. No 4. С. 35–40.
- [14] Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В. О сильно динамически устойчивом подмножестве C -ядра в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью // МТИП, 2016. 8:4. С. 79–106.
- [15] Громова Е. В. Теоретико-игровые задачи со случайной продолжительностью: диссертация доктора физико-математических наук. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2016.
- [16] Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивые решения в динамических кооперативных играх // Второй Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (CGS 2015). Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2015. С. 264–271.
- [17] Седаков А. А. О сильной динамической устойчивости C -ядра // МТИП, 2015. 7:2. С. 69–84; Autom. Remote Control, 2018. 79:4. P. 757–767.
- [18] Accounting report of JSC «RUSAL Krasoyarsky aluminum smelter», 2016, <https://e-ecolog.ru/buh/2016/2465000141> (in Russian)
- [19] Accounting report of JSC «RUSAL Bratsk», 2016, <https://braz-rusal.ru/> (in Russian)
- [20] Yearly report of JSC «RUSAL Bratsk», 2016, <https://braz-rusal.ru/> (in Russian)
- [21] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2016», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)
- [22] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2011», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)
- [23] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2012», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)

- [24] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2013», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)
- [25] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2014», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)
- [26] State report «About the state and protection of the environment in Irkutsk oblast in 2015», <https://irkobl.ru/sites/ecology/picture/> (in Russian)
- [27] Тур А. В., Громова Е. В. Об оптимальном управлении объемами вредных выбросов на примере крупнейших предприятий Иркутской области Российской Федерации // Математическая теория игр и ее приложения. Т. 2. Вып. 3. С. 150–152.
- [28] Gromova E., Marova E. On the characteristic function construction technique in differential games with prescribed and random duration // Contributions to Game Theory and Management, 2018. Vol. 11. P. 53–66.
- [29] Викулова А. А. О нестандартном построении характеристической функции в кооперативной игре управления вредными выбросами // Процессы управления и устойчивость, 2016. Т. 3, No 1. С. 617–621.
- [30] Викулова А. А. О нестандартном задании характеристической функции в кооперативных играх: выпускная квалификационная работа бакалавра. Санкт–Петербургский государственный университет, Санкт–Петербург, 2016. <https://dspace.spbu.ru/bitstream/11701/4181/1/diploma.pdf>
- [31] Harsanyi John C. A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game // Papers in Game Theory, 1982. P. 44–70.
- [32] Петросян Л. А., Данилов Н. Н. Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия, 1979. No 1. С. 52–79.
- [33] Tur A. V., Gromova E. V. On the optimal control of pollution emissions for the largest enterprises of the Irkutsk region of the Russian Federation, Mat. Teor. Igr Pril., 2018. 10:2. С. 62–89 (in Russian)
- [34] State report «About the state and protection of the environment in Russian Federation in 2016», http://www.mnr.gov.ru/docs/o_sostoyanii_i_ob_okhrane_okruzhayushchey_sredy_rossiyskoy_federatsii/http_new_mnr_gov_ru_docs_gosudarstvennye_doklady/ (in Russian)
- [35] State report «About the state and protection of the environment in Russian Federation in 2017», http://www.mnr.gov.ru/docs/o_sostoyanii_i_ob_okhrane_okruzhayushchey_sredy_rossiyskoy_federatsii/http_new_mnr_gov_ru_docs_gosudarstvennye_doklady/ (in Russian)

- [36] State report «About the state and protection of the environment in Russian Federation in 2018», http://www.mnr.gov.ru/docs/o_sostoyanii_i_ob_okhrane_okruzhayushchey_sredy_rossiyskoy_federatsii/http_new_mnr_gov_ru_docs_gosudarstvennye_doklady/ (in Russian)
- [37] Information from the Department of Rosprirodnadzor for the Volga Federal District on the collection of fees for NVOS, <http://gkeco-nn.ru/?start=20> (in Russian)

Приложение

2.1.3. Вычисление оптимальных управлений

При нахождении оптимальных управлений гамильтониан имеет вид (1.23). Далее составляем систему вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_i} = b_i - u_i + \psi, & i = \overline{1, 3}, \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -D_N - \psi\delta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из первого уравнения системы (2.14) получаем следующие выражения для оптимальных управлений:

$$u_i^* = b_i + \psi, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.15)$$

Используя (2.15), приходим к системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = B_N + 3\psi - \delta x, \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{d\psi}{dt}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Чтобы найти решение системы (2.16), возьмем вторую производную от первого уравнения в этой системе. Учитывая, что $\frac{d\psi}{dt} = D_N + \psi\delta$, $3\psi = \delta x - B_N + \frac{dx}{dt}$, приходим к уравнению второго порядка вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \delta^2x = 3D_N - \delta B_N. \quad (2.17)$$

Разрешив это уравнение относительно x , получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\delta t} + c_2 e^{-\delta t} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{3D_N}{\delta^2}, \\ \psi(t) &= \frac{2c_1}{3} \delta e^{\delta t} - \frac{D_N}{\delta}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из начального условия $x(t_0) = 0$ и условия трансверсальности $\psi(T) = 0$ находим неопределенные коэффициенты c_1, c_2 , что приводит к окончательному ответу:

$$x^*(t) = \frac{3D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{3D_N - B_N\delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{3D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{3D_N}{\delta^2},$$

$$\psi(t) = \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1),$$

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} b_1 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_2 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \\ b_3 + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1) \end{pmatrix}.$$

2.1.4. Построение α -характеристической функции

- Построим α -характеристическую функцию для гранд-коалиции. Поскольку в приложении (2.1.3) было найдено оптимальное управление, которое доставляет максимум суммарному выигрышу всех игроков, то $V^\alpha(N, T - t_0)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\alpha(N, T - t_0) &= \sum_{i=1}^3 K_i(t_0, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \\ &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \left(\tilde{B}_N - \frac{3D_N^2}{\delta^2}(e^{\delta(t-T)} - 1)^2 \right) - D_N x^*(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} V^\alpha(N, T - t_0) &= \left[\frac{\tilde{B}_N}{2} - \frac{D_N}{\delta^2} \left(B_N \delta - \frac{3D_N}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\ &+ \frac{D_N}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 3D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \frac{3D_N^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

- Для построения $V^\alpha(\{i\}, T - t_0)$, $i = \overline{1, 3}$, первоначально нужно найти такие управления u_j, u_k , $i \neq j \neq k \in N$, что достигается $\min_{u_j, u_k} K_i(t_0, u_i, u_j, u_k)$. С помощью метода максимума Понтрягина были найдены такие управления:

$$u_j = b_j, \quad u_k = b_k.$$

Далее необходимо, используя тот же метод, найти управление u_i , такое что достигается $\max_{u_i} \min_{u_j, u_k} K_i(t_0, u_i, u_j, u_k)$. Это управление имеет вид:

$$u_i = b_i + \frac{d_i}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1).$$

Соответствующая траектория $\hat{x}(t)$ находится из дифференциального

уравнения (2.19):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{d_i}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.19)$$

Решив (2.19), получаем следующее выражение:

$$\hat{x}(t) = \frac{d_i}{2\delta^2}e^{\delta(t-T)} + \frac{d_i - B_N\delta}{\delta^2}e^{\delta(t_0-t)} - \frac{d_i}{2\delta^2}e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{d_i}{\delta^2}.$$

Теперь можно перейти к построению $V^\alpha(\{i\}, T - t_0)$, $i \in N$:

$$\begin{aligned} V^\alpha(\{i\}, T - t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \left(b_i^2 - \frac{d_i^2}{\delta^2}(e^{\delta(t-T)} - 1)^2 \right) - d_i \hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N\delta - \frac{d_i}{2} \right) \right] (T - t_0) + \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{B_N\delta - d_i}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \\ &\quad + \frac{d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

- Аналогичным образом строится $V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0)$, $i, j \in N$: сначала находится управление u_k , $i \neq j \neq k \in N$, такое что достигается $\min_{u_k} (K_i(t_0, u_i, u_j, u_k) + K_j(t_0, u_i, u_j, u_k))$. При помощи принципа максимума Понтрягина получаем, что

$$u_k = b_k.$$

Однако управления u_i, u_j , доставляющие $\max_{u_i, u_j} \min_{u_k} (K_i(t_0, u_i, u_j, u_k) + K_j(t_0, u_i, u_j, u_k))$, имеют вид:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{d_i + d_j}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= b_j + \frac{d_i + d_j}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1). \end{aligned}$$

Траектория $\hat{x}(t)$ для найденных управлений находится из дифференциального уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{2(d_i + d_j)}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.20)$$

Решив (2.20), получаем следующее выражение для $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \frac{(d_i + d_j)}{\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{2(d_i + d_j) - B_N \delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{(d_i + d_j)}{\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{2(d_i + d_j)}{\delta^2}.$$

Тогда характеристическая функция для коалиции $S = \{i, j\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} V^\alpha(\{i, j\}, T - t_0) &= \\ &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2}(b_i^2 + b_j^2) - \frac{(d_i + d_j)^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 - (d_i + d_j)\hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{(d_i + d_j)}{\delta^2} (B_N \delta - (d_i + d_j)) \right] (T - t_0) + \frac{(d_i + d_j)^2}{2\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0-T)}) + \\ &\quad + \frac{(d_i + d_j)}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2(d_i + d_j)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

2.1.5. Построение δ -характеристической функции

Процесс построения δ -характеристической функции является более упрощенным, поскольку игроки, не входящие в коалицию S , для которой строится характеристическая функция, используют в качестве своих стратегий равновесие по Нэшу. Здесь лишь необходимо найти управления u_S , $S \subseteq N$, которые максимизируют $\sum_{i \in S} K_i(t_0, u_S, u_{N \setminus S})$.

- Таким образом, при построении $V^\delta(\{i\}, T - t_0)$, $i \in N$, используем следующие управления, где u_i находили, используя принцип максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{d_i}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= u_j^{NE} = b_j + \frac{d_j}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k + \frac{d_k}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Соответствующая траектория $\hat{x}(t)$ может быть найдена из дифференциального уравнения (2.21):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.21)$$

Решив (2.21), получаем следующее выражение для $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N - B_N\delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{D_N}{\delta^2}.$$

Тогда $V^\delta(\{i\}, T - t_0)$, $i \in N$, можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i\}, T - t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \left(b_i^2 - \frac{d_i^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 \right) - d_i \hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N\delta - D_N + \frac{d_i}{2} \right) \right] (T - t_0) + \frac{2D_N d_i - d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{2\delta(t_0-T)}) + \\ &\quad + \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{d_i + B_N\delta - 2D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

- При построении $V^\delta(\{i, j\}, T - t_0)$, $i, j \in N$, используем следующие управления, где u_i, u_j находили, используя принцип максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{(d_i + d_j)}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= b_j + \frac{(d_j + d_i)}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k + \frac{d_k}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Траектория $\hat{x}(t)$ для найденных управлений находится из дифференциального уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{(D_N + d_i + d_j)}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.22)$$

Решив (2.22), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{(D_N + d_i + d_j)}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N + d_i + d_j - B_N\delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \\ &\quad - \frac{(D_N + d_i + d_j)}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{(D_N + d_i + d_j)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Тогда можно перейти к непосредственному построению δ -характерис-

тической функции для коалиции $S = \{i, j\} \subset N$, $V^\delta(\{i, j\}, T - t_0)$:

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i, j\}, T - t_0) &= \\
&= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2}(b_i^2 + b_j^2) - \frac{(d_i + d_j)^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 - (d_i + d_j)\hat{x}(t) \right) dt = \\
&= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{d_i + d_j}{\delta^2} (B_N \delta - D_N) \right] (T - t_0) + \frac{d_i + d_j}{2\delta^3} D_N (1 - e^{2\delta(t_0-T)}) + \\
&\quad + \frac{d_i + d_j}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}).
\end{aligned}$$

2.1.6. Построение ζ -характеристической функции

При построении ζ -характеристической функции для коалиции $S \subset N$ в качестве $u_{S \subset N}$ используем уже найденные оптимальные управления (1.25), а $u_{N \setminus S}$ — такие, что достигается $\min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(t_0, u_S^*, u_{N \setminus S})$.

- Построение $V^\zeta(\{i\}, T - t_0)$:

Для данного случая получаем управления вида:

$$\begin{aligned}
u_i &= b_i + \frac{D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\
u_j &= b_j, \\
u_k &= b_k,
\end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Траектория $\hat{x}(t)$ для найденных управлений находится из дифференциального уравнения (2.23):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \quad (2.23)$$

решение которого может быть представлено как:

$$\hat{x}(t) = \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N - B_N \delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{D_N}{\delta^2}.$$

Тогда $V^\zeta(\{i\}, T - t_0), i \in N$, можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\zeta(\{i\}, T - t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \left(b_i^2 - \frac{D_N^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 \right) - d_i \hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left(d_i (B_N \delta - D_N) + \frac{D_N^2}{2} \right) \right] (T - t_0) + \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{D_N^2 + d_i (-2D_N + B_N \delta)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \frac{D_N}{2\delta^3} \left[-\frac{D_N}{2} + d_i \right] (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

- Построение $V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0)$:

С помощью принципа максимума Понтрягина находим управление $u_k, i \neq j \neq k \in N$, минимизирующее суммарный выигрыш, откуда получаем следующие выражения для управлений:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= b_j + \frac{D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_k &= b_k. \end{aligned}$$

Соответствующая траектория $\hat{x}(t)$ находится из (2.24):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{2D_N}{\delta} (e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.24)$$

Решив (2.24), получаем следующее выражение для $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \frac{D_N}{\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{2D_N - B_N \delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{D_N}{\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{2D_N}{\delta^2}.$$

Тогда $V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0), i, j \in N$, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} V^\zeta(\{i, j\}, T - t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} (b_i^2 + b_j^2) - \frac{D_N^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 - (d_i + d_j) \hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} ((d_i + d_j)(B_N \delta - 2D_N) + D_N^2) \right] (T - t_0) + \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{2D_N^2 + (d_i + d_j)(B_N \delta - 4D_N)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \\ &+ \frac{D_N}{2\delta^3} (-D_N + 2(d_i + d_j)) (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

2.1.7. Построение η -характеристической функции

Вычислительный процесс η -характеристическая функция является самым упрощенным среди всех описанных ранее способов построения характеристической функции, который не требует дополнительных вычислений после нахождения $u^*(t)$, $u^{NE}(t)$.

- Построение $V^\eta(\{i\}, T - t_0)$:

В данном рассматриваемом случае используем управления вида:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= u_j^{NE} = b_j + \frac{d_j}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k + \frac{d_k}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Траектория $\hat{x}(t)$ для найденных управлений находится из уравнения (2.25):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{(D_N + d_j + d_k)}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1). \quad (2.25)$$

Решение уравнения (2.25) имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{(D_N + d_j + d_k)}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N + d_j + d_k - B_N\delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \\ &\quad - \frac{(D_N + d_j + d_k)}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{(D_N + d_j + d_k)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Тогда $V^\eta(\{i\}, T - t_0)$, $i \in N$, можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\eta(\{i\}, T - t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \left(b_i^2 - \frac{D_N^2}{\delta^2} (e^{\delta(t-T)} - 1)^2 \right) - d_i \hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{D_N^2}{2} + d_i (B_N\delta - 2D_N + d_i) \right) \right] (T - t_0) + \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left[\frac{D_N^2 + d_i (B_N\delta - 2(2D_N - d_i))}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\delta^3} \left[-\frac{D_N^2}{2} + d_i (2D_N - d_i) \right] (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$

- Построение $V^\eta(\{i, j\}, T - t_0)$:

В данном рассматриваемом случае используем управления вида:

$$\begin{aligned} u_i &= b_i + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_j &= b_j + \frac{D_N}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \\ u_k &= u_k^{NE} = b_k + \frac{d_k}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \end{aligned}$$

где $i \neq j \neq k \in N$.

Траектория $\hat{x}(t)$ для найденных управлений находится из дифференциального уравнения (2.26):

$$\frac{dx}{dt} + \delta x = B_N + \frac{(2D_N + d_k)}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1), \quad (2.26)$$

Таким образом, траектория $\hat{x}(t)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{(2D_N + d_k)}{2\delta^2}e^{\delta(t-T)} + \frac{2D_N + d_k - B_N\delta}{\delta^2}e^{\delta(t_0-t)} - \\ &\quad - \frac{(2D_N + d_k)}{2\delta^2}e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{(2D_N + d_k)}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Тогда $V^\eta(\{i, j\}, T-t_0)$, $i, j \in N$, можно построить следующим образом:

$$\begin{aligned} V^\eta(\{i, j\}, T-t_0) &= \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2}(b_i^2 + b_j^2) - \frac{D_N^2}{\delta^2}(e^{\delta(t-T)} - 1)^2 - (d_i + d_j)\hat{x}(t) \right) dt = \\ &= \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{1}{\delta^2}(D_N^2 + (d_i + d_j)(B_N\delta - 2D_N - d_k)) \right] (T - t_0) + \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left[\frac{2D_N^2 + (d_i + d_j)(-2(2D_N + d_k) + B_N\delta)}{\delta^2} \right] (1 - e^{\delta(t_0-T)}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\delta^3} [-D_N^2 + (d_i + d_j)(2D_N + d_k)] (1 - e^{2\delta(t_0-T)}). \end{aligned}$$