Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории экономических решений

Хафизов Руслан Юрьевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Исследование эффективных решений в многоцелевой оптимизации

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
ООП «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
заведующий кафедрой МТЭР
Колбин В. В.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Мышков С. К.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение

В любой экономической среде возникают проблемы вложения средств, проблемы инвестиций с целью получения максимального эффекта от капиталовложений. В экономических системах происходит оборот денежных средств, и от того, насколько правильным будет распределение средств по различным направлениям или отраслям, зависит преуспевание экономики. Рационально вложенные средства повлекут за собой увеличение прибыли, а это, в свою очередь, даст возможность выделить большее количество средств на производство и на его развитие. Поэтому при отработанной схеме производства существует бесчисленное множество вариантов по вложению средств в его развитие. Можно, например, увеличить объем производства путем вложения средств в закупку сырья или вкладывать средства на внедрение новых технологий.

Таким образом, распределение ресурсов — первоочередная задача для любой экономической системы [6]. Необходимо системное рассмотрение этих проблем, основанное на комплексах экономико-математических моделей и математической теории принятия решений. Для решения подобных задач необходимо сначала построить соответствующую модель, ввести необходимые ограничения, а затем уже заниматься поиском и анализом оптимального решения. В настоящей выпускной квалификационной работе рассматривается задача принятия решения о распределении ресурсов с использованием двух целевых функционалов (критериев).

Как правило, исходная информация для планирования, проектирования и управления в экономике, технике недостаточно достоверна. Поэтому процесс принятия решения происходит в условиях неполной информации, что заставляет вносить корректировки в первоначальный набор технико-экономических показателей развития объектов.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование многоэтапных стохастических задач принятия решений долгосрочного распределения ресурсов.

В первой главе текущей работы ставится задача о распределении ресурсов в общем виде, рассматривается процесс представления исходной модели двухэтапной задачей стохастического программирования и построение двухцелевого детерминированного эквивалента. Это оказывается возможным, так как распределение случайного параметра в моделях математического программирования происходит по нормальному закону, и справедливы соответствующие теоремы существования и единственности детерминированного эквивалента.

Во второй главе описывается построение скаляризованного эквивалента двухцелевой задачи. Рассматривается проблема нормализации, возникающая в результате того, что целевые функционалы могут иметь различные единицы измерения, и проблема свертки, смысл которой заключается в скаляризации полученного двухцелевого детерминированного эквивалента с целью преобразования его в одноцелевую задачу. А также вводится правило (принцип выбора), которое указывает, в каком смысле понимается оптимум по двухцелевому показателю. Также в этой главе идет речь о практическом поиске решения задачи оптимизации с помощью методов нелинейного программирования. И, наконец, рассматривается вопрос о свойствах решений.

Третья глава имеет прикладной характер, она посвящена конкретному примеру практического применения модели. В приложении к выпускной квалификационной работе приведены результаты решения практической задачи в таблицах и наглядных цветовых диаграммах.

Глава I.

Общая двухцелевая стохастическая постановка задачи

1.1. Общая постановка задачи

Рассмотрим оптимизационную модель распределения ресурсов в общем виде:

$$\begin{cases} F(y_1(t), \dots, y_n(t);\ \overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}) \to extr, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), \\ x_i(t) \geq 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t)x_i(t) + d_i(t), \\ R_i(t) \geq 0, \\ i = \overline{1, n},\ \ t \in (1, T), \end{cases}$$

где $y_i(t)$ — состояние i-направления в момент времени t,

$\overline{y_i} = y_i(T)$ — состояние i-направления в момент времени T,

$x_i(t)$ — объем средств или ресурсов, вкладываемых в i-направление в момент времени t,

$R_i(t)$ — эффективность вложения средств в i-направление на единицу вкладываемых средств в момент времени t,

$C(t)$ — суммарный объем ресурсов в момент времени t,

$d_i(t)$ — внешний фактор (влияние внешней среды),

$F(y_1(t), \dots, y_n(t);\ \overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})$ — критерий оптимальности оптимизационной модели принятия решений.

Далее конкретизируем нашу задачу, рассматривая конкретный критерий оптимальности с использованием двух целевых функционалов. Пусть у нас заданы два функционала оптимальности:

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\overline{y_i} - y_i(t)}{\overline{y_i}} \right\} \to \min,$$

$$f_2 = \max_j \left\{ \xi_j \frac{x_j(t)\overline{y_j}(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(t)}{\overline{y_i}} - y_j(t)}{\overline{y_j}(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(t)}{\overline{y_i}}} \right\} \to \min.$$

Первый выражает принцип классического утилитаризма, а второй — принцип распределения ресурсов пропорционально уровню развития. Принцип утилитаризма направлен на развитие наиболее перспективных отраслей. Поэтому применение данного принципа в течение длительного времени может привести к исчезновению малоэффективных направлений. Смысл второго функционала — достижение эталона для отраслей с высоким уровнем развития [2].

Тогда при использовании этих функционалов исходная модель имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\overline{y_i} - y_i(t)}{\overline{y_i}}\right\} \to min; \\ \max_j \left\{ \xi_j \frac{x_j(t)\overline{y_j}(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(t)}{\overline{y_i}} - y_j(t)}{\overline{y_j}(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(t)}{\overline{y_i}}} \right\} \to min, \\ \sum_{j=1}^{n}\xi_j = 1, \quad \xi_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), \quad x_i(t) \ge 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t)x_i(t) + d_i(t), \quad R_i(t) \ge 0, \\ i = \overline{1,n}, \ t \in (1,T). \end{cases} \tag{1}$$

На практике очень часто приходится корректировать принятое решение, которое было получено при наличии неполной информации. В этом случае принято рассматривать постановку задачи двухэтапного стохастического программирования, которая позволяет не только учесть неопределенность исходных величин, но при необходимости произвести корректировку решения.

Будем рассматривать двухэтапную задачу стохастического программирования со случайным вектором ограничений и приведенными выше принципами оптимальности:

$$
\begin{cases}
f_1 \to \min, \\
f_2 \to \min, \\
\sum_{j=1}^{n} \xi_j = 1, \qquad \xi_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t,\omega), \qquad x_i(t) \geq 0, \\
y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t,\omega)x_i(t) + d_i(t,\omega), \qquad R_i(t,\omega) \geq 0, \\
i = \overline{1,n}, \ \ t \in (1,T), \ \ \omega \in \Omega.
\end{cases} \tag{2}
$$

На первом этапе выбирается предварительный план, позволяющий произвести необходимые подготовительные работы. На втором этапе производится компенсация невязок, выявленных после наблюдения реализованных значений случайных параметров условий задачи. Естественно, что предварительный план и план-компенсация должны быть согласованы таким образом, чтобы обеспечить минимум среднего значения суммарных затрат, возникающих на обоих этапах решения задачи.

1.2. Построение двухцелевого детерминированного эквивалента

Для полученной задачи (2) можем построить двухцелевой детерминированный эквивалент. Это возможно, так как распределение случайного параметра происходит по нормальному закону.

Итак, рассматриваем задачу (2). Сначала выбираем предварительный план $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Область определения y задается выпуклым многогранным множеством $K = K_1 \cap K_2$, где

$$
K_1 = \left\{ y \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t)x_i(t) + d_i(t), \right.
$$

$$
\left. y_i(t) \geq 0, \qquad i = \overline{1,n} \right\}
$$

— множество, высекаемое фиксированными ограничениями, $K_2 = R^2$ — множество, высекаемое индуцированными ограничениями.

Затем производим компенсацию невязок:

$$\begin{cases} B\beta_1 = C(t,\omega) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \\ B\beta_2 = A(t,\omega) - y_i(t), \\ \beta_1 \geq 0, \ \ \beta_2 \geq 0, \end{cases}$$

где B — матрица компенсации, которая после соответствующей перестановки строк и столбцов может быть представлена в виде $B = (E, -E)$, E — единичная матрица размера $n \times n$, $\beta_1 = (\beta_1^+, \beta_1^-)$, $\beta_2 = (\beta_2^+, \beta_2^-)$ — n-мерные векторы, компенсирующие невязки, через $A(t,\omega)$ обозначено

$$A(t,\omega) = y_i(t-1) + R_i(t,\omega)x_i(t) + d_i(t,\omega).$$

За нарушение условий задачи (2) устанавливаются штрафы $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 = (q_1^+, q_1^-)$, $q_2 = (q_2^+, q_2^-)$ — n-мерные векторы, зависящие от составляющих векторов β_1 и β_2. Векторы, компенсирующие невязки, выбираются таким образом, чтобы обеспечить минимальные штрафы за компенсацию невязок условий задачи.

Тогда после разбиения векторов β_1 и β_2 с помощью перестановки строк и столбцов матрицы B на части β_i^+ и β_i^- $(i = 1,2)$, соответствующие подматрицам E и $-E$ матрицы B, задача (2) принимает вид:

$$\begin{cases} Q_1(x) = f_1 + \min \mathbf{M} P_1(y_i, C(t)) \to \min, \\ Q_2(x) = f_2 + \min \mathbf{M} P_2(y_i, A(t)) \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), \qquad x_i(t) \geq 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t)x_i(t) + d_i(t), \ \ y_i(t) \geq 0, \\ i = \overline{1,n}, \ \ t \in (1,T), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} P_1\big(y_i, C(t)\big) = \{\min(q_1^+\beta_1^+ + q_1^-\beta_1^-)\,|\beta_1^+ - \beta_1^-\} = C(t,\omega) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \\ P_2\big(y_i, A(t)\big) = \{\min(q_2^+\beta_2^+ + q_2^-\beta_2^-)\,|\beta_2^+ - \beta_2^-\} = A(t,\omega) - y_i(t), \\ \beta_i^+ \geq 0, \ \ \beta_i^- \geq 0, \ \ i = 1,2, \end{cases} \tag{4}$$

где (3) — простейшая постановка двухэтапной задачи со случайным вектором ограничений, (4) — задача второго этапа.

Пусть $K_2 \neq \emptyset$. Для разрешимости задачи (4) необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая система неравенств:

$$\begin{cases} \{z_1|z_1B \le q_1\} = \{z_1|z_1(E,-E) \le q_1\} = \{z_1|-q_1^- \le z_1 \le q_1^+\} \ne \emptyset, \\ \{z_2|z_2B \le q_2\} = \{z_2|z_2(E,-E) \le q_2\} = \{z_2|-q_2^- \le z_2 \le q_2^+\} \ne \emptyset. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, для разрешимости задачи второго этапа в простейшей постановке двухэтапной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$q_1^+ + q_1^- \ge 0, \qquad q_2^+ + q_2^- \ge 0.$$

Задача, двойственная к задаче (4), имеет вид:

$$\begin{cases} Q_1\big(y_i, C(t)\big) = \{\max z_1 (C(t) - \sum_{i=1}^n x_i(t)) \,|{-q_1^-} \le z_1 \le q_1^+\}, \\ Q_2\big(y_i, A(t)\big) = \{\max z_2\big(A(t) - y_i(t)\big) \,|{-q_2^-} \le z_2 \le q_2^+\}. \end{cases} \quad (6)$$

Решением задачи (6) являются функции:

$$Q_1\big(y_i, C(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} Q_{1i}\big(y_i, C_i(t)\big),$$

$$Q_2\big(y_i, A(t)\big) = \sum_{i=1}^n Q_{2i}\big(y_i, A_i(t)\big), \text{ где}$$

$$Q_{1i}\big(y_i, C_i(t)\big) = \begin{cases} [C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)]q_{1i}^+, & \text{если } C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \ge 0, \\ [C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)]q_{1i}^-, & \text{если } C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \le 0, \end{cases}$$

$$Q_{2i}\big(y_i, A_i(t)\big) = \begin{cases} [A_i(t) - y_i(t)]q_{2i}^+, & \text{если } A_i(t) - y_i(t) \ge 0, \\ [A_i(t) - y_i(t)]q_{2i}^-, & \text{если } A_i(t) - y_i(t) \le 0. \end{cases}$$

Таким образом, для задачи (2) можем построить двухцелевой детерминированный эквивалент:

$$\begin{cases} \mathbf{M}f_1 + \mathbf{M}\sum_{i=1}^n Q_{1i}\big(y_i, C_i(t)\big) \to \min, \\ \mathbf{M}f_2 + \mathbf{M}\sum_{i=1}^n Q_{2i}\big(y_i, A_i(t)\big) \to \min, \\ \sum_{j=1}^n \xi_j = 1, \ \xi_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^n x_i(t) = C(t), \ x_i(t) \ge 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t)x_i(t) + d_i(t), \ \ y_i(t) \ge 0, \\ i = \overline{1,n}, \ \ t \in (1,T), \end{cases} \quad (7)$$

Эквивалентная детерминированная задача (7) является задачей выпуклого программирования [15].

1.3. Теорема существования и единственности двухцелевого детерминированного эквивалента

Теорема 1.1 [7]. *Для стохастической задачи* (2) *существует единственная эквивалентная детерминированная задача вида* (7).

Доказательство. Существование следует из вышеизложенных построений, а единственность — из условий минимизации значений целевых функционалов. Ч.т.д.

Теорема 1.2 [15]. *Пусть матрица B имеет* $n+1$ *столбец и удовлетворяет условиям:*

$$\text{(a) имеет ранг } n, \qquad \text{(b) } -B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} g_j B_j,\ g_j > 0, j = \overline{1,n}.$$

При этих условиях задача (4) *имеет конечное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{n} g_j q_{1j} + q_{1,n+1} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} g_j q_{2j} + q_{2,n+1} \geq 0. \tag{8}$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть задача (4) разрешима. Тогда множество планов двойственной к ней задачи (6) не пусто. Пусть вектора z_{01}, z_{02} удовлетворяют условиям (5), т.е.

$$z_{01} B_j \leq q_{1j}, \qquad z_{02} B_j \leq q_{2j}, \qquad j = \overline{1, n+1}. \tag{$*$}$$

Отсюда при $g_j > 0$ получаем

$$\sum_{j=1}^{n} g_j z_{01} B_j \leq \sum_{j=1}^{n} g_j q_{1j}, \quad \sum_{j=1}^{n} g_j z_{02} B_j \leq \sum_{j=1}^{n} g_j q_{2j}. \tag{$**$}$$

Из $(*)$ и условия *(b)* для $j = n+1$ следует

$$\begin{aligned} z_{01} B_{n+1} &= -\sum_{j=1}^{n} z_{01} g_j B_j \leq q_{1,n+1}, \\ z_{02} B_{n+1} &= -\sum_{j=1}^{n} z_{02} g_j B_j \leq q_{2,n+1}. \end{aligned} \tag{$***$}$$

Из $(**)$ и $(***)$ получаем (8).

Достаточность. Пусть имеет место (8), но функции $P_1\big(y_i, C(t)\big)$ и $P_2\big(y_i, A(t)\big)$ не ограничены на множестве планов задачи. Тогда множество планов задачи (6), двойственной к задаче второго этапа (4), пусто:

$$\{z_1|z_1B \le q_1\} = \emptyset, \quad \{z_2|z_2B \le q_2\} = \emptyset. \tag{A}$$

Из линейной независимости векторов $B_1, \dots, B_n$ следует, что каждая из систем

$$z_1B_j = q_{1j},\ j = \overline{1,n}, \qquad z_2B_j = q_{2j},\ j = \overline{1,n}, \tag{B}$$

имеет единственное решение z_{01}, z_{02}, соответственно. В силу соотношения *(A)*:

$$z_{01}B_{n+1} > q_{1,n+1}, \qquad z_{02}B_{n+1} > q_{2,n+1}. \tag{C}$$

Из *(B), (C)* и условия *(b)* теоремы получаем:

$$z_{01}B_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} z_{01}g_jB_j = -\sum_{j=1}^{n} g_jq_{1j} > q_{1,n+1},$$

$$z_{02}B_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} z_{02}g_jB_j = -\sum_{j=1}^{n} g_jq_{2j} > q_{2,n+1},$$

что противоречит (8). Ч.т.д.

Теорема 1.3 [15]. *Пусть матрица B имеет ранг n, и существуют числа* $g_j > 0$ ($j = \overline{1,n}$) *и* $g_j \ge 0$ ($j = \overline{n+1, n_1},\ n_1 - \mathrm{n} > 1$) *такие, что*

$$\sum_{j=n+1}^{n_1} g_jB_j = -\sum_{j=1}^{n} g_jB_j.$$

Для того, чтобы задача (4) *имела конечное решение, необходимо, чтобы выполнялись условия:*

$$\sum_{j=1}^{n} g_jq_{1j} \ge -\sum_{j=n+1}^{n_1} g_jq_{1j}, \qquad \sum_{j=1}^{n} g_jq_{2j} \ge -\sum_{j=n+1}^{n_1} g_jq_{2j}.$$

Теорема 1.4 [15]. *Пусть множество* $K_2 \ne \emptyset$. *Тогда для разрешимости задачи* (4) *при любых реализациях* $\sum_{i=1}^{n} x_i(t),\ C(t),\ y(t),\ A(t)$, *и любом предварительном плане* $y_i,\ i = \overline{1,n}$, *необходимо и достаточно, чтобы была* *разрешима система неравенств* (5).

Доказательство. По условию теоремы множество планов задачи (4) не пусто. Согласно теореме двойственности линейного программирования функции $P_1(y_i, C(t))$, $P_2(y_i, A(t))$ ограничены снизу в том и только в том случае, когда область определения задачи (6) для каждого y_i, $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, $C(t)$, $y(t)$, $A(t)$ не пуста. Поскольку область определения задачи (6) не зависит от y_i, $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, $C(t)$, $y(t)$, $A(t)$, то при выполнении условий (5) задача (4) разрешима при всех y_i, $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, $C(t)$, $y(t)$, $A(t)$, а при нарушении этого условия не имеет решения ни при каких y_i, $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, $C(t)$, $y(t)$, $A(t)$. Функции $P_1(y_i, C(t))$, $P_2(y_i, A(t))$ в этом случае не ограничены снизу для всех y_i, $i = \overline{1,n}$, и задача (2) теряет смысл. Ч.т.д.

Глава II.
Построение скаляризованного эквивалента двухцелевой задачи

В дальнейших рассуждениях целесообразно рассматривать задачу (7) на максимум. Поэтому сделаем следующие переобозначения:

$$g_i = -f_i,\ i=1,2.$$

Тогда задача (7) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \mathbf{M}g_1 + \mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}\big(y_i, C_i(t)\big) \to \max, \\ \mathbf{M}g_2 + \mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} Q_{2i}\big(y_i, A_i(t)\big) \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t),\ \ x_i(t) \ge 0, \\ y_i(t) = A(t),\ \ y_i(t) \ge 0, \\ i = \overline{1,n},\ \ t \in (1,T). \end{cases} \tag{9}$$

Так как, исходя из экономической интерпретации, мы стремимся к тому, чтобы эталонное состояние $\overline{y_i}$ было не меньше текущего y_i, то не возникают проблемы с дифференцированием g_i. Тогда можно с уверенностью сказать, что мы действуем в предположении, что функции g_1 и g_2 непрерывно дифференцируемые и вогнутые.

2.4. Процедура свертки

Прежде всего введем ряд определений, касающихся общей теории принятия решений и многоцелевой оптимизации.

Определение 2.1 [8]. Элемент $x^0 \in X$ называется *оптимальным по Парето (не улучшаемым)*, если не существует такого $x \in X$, что $g_i(x) \ge g_i(x^0)$ для всех $i = 1,2$, причем хотя бы одно из этих неравенств — строгое. При этом пишут, что $x^0 \in P_g(X)$.

Определение 2.2 [8]. Элемент $x^0 \in X$ называется *слабо оптимальным по Парето (оптимальным по Слейтеру)*, если не существует такого $x \in X$, что $g_i(x) > g_i(x^0)$ для всех $i = 1,2$. При этом пишут, что $x^0 \in S_g(X)$.

Очевидно, что $P_g(X) \subseteq S_g(X)$.

Определение 2.3 [13]. *Сверткой* компонент многоцелевого показателя называется отображение, которое преобразует совокупность компонент многоцелевого показателя, соответствующих целевым функционалам, в скалярный целевой показатель.

Таким образом, смысл применения свертки заключается в скаляризации исходной многоцелевой задачи с целью преобразования ее в одноцелевую задачу. Существуют свертки различных видов: линейные, минимизационные, максимизационные и другие. Вид свертки для поиска Парето-оптимальных решений помогают определить следующие теоремы.

Теорема 2.5 [10]. *Если* $x^0 \in P_g(X)$, *множество* X *— выпукло, а функции* g_1 *и* g_2 *— вогнуты, то существует число* $\alpha \in [0;1]$, *для которого выполнено*

$$\max_{x\in X} \Lambda_\alpha(x) = \Lambda_\alpha(x^0),$$

где $\Lambda_\alpha(x) = \alpha g_1(x) + (1-\alpha) g_2(x)$ *— линейная свертка.*

Доказательство. Рассмотрим следующее множество:

$$U = \{g_1(x) - g_1(x^0),\ \ g_2(x) - g_2(x^0) \mid x \in X\}.$$

Это множество не содержит положительных элементов, так как в противном случае было бы $g_i(x) > g_i(x^0)$ для всех $i = 1,2$, что противоречило бы тому, что $x^0 \in P_g(X)$. Но тогда из вогнутости функционалов g_1 и g_2 следует, что множество $U_1 = conv(U)$ также не содержит положительных элементов, а значит, через начало координат можно провести гиперплоскость, разделяющую множества U_1 и E_+^2, причем не существует такого вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2) \neq 0$, что

$$\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 \leq 0,\ \ (z_1, z_2) \in U_1,$$

$$\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 \geq 0,\ \ (z_1, z_2) \in E_+^2.$$

Пусть далее $\alpha = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}$, тогда $1-\alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}$, а значит,

$$\alpha\big(g_1(x) - g_1(x^0)\big) + (1-\alpha)(g_2(x) - g_2(x^0)) \leq 0, \qquad \forall x \in X.$$

Ч.т.д.

Теорема 2.6 [10]. *Если для* $x^0 \in X$ *и некоторого* $\alpha \in [0;1]$ *выполняется*

$$\max_{x \in X} \Lambda_\alpha(x) = \Lambda_\alpha(x^0),$$

то $x^0 \in S_g(X)$. *Если это условие выполняется для некоторого* $\alpha \in (0;1)$, *то* $x^0 \in P_g(X)$.

Доказательство. Заметим, что если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то, соответственно,

$$\max_{x \in X} \Lambda_\alpha(x) = \max_{x \in X} g_2(x), \qquad \max_{x \in X} \Lambda_\alpha(x) = \max_{x \in X} g_1(x),$$

а значит, $x^0 \in S_g(X)$.

Пусть теперь $\alpha \in (0;1)$ и предположим противное: $x^0 \notin S_g(X)$. Тогда существует такой вектор $x \in X$, что $g_i(x^0) \le g_i(x)$ для всех $i = 1,2$, причем хотя бы одно из этих неравенств — строгое. Умножая первое из них на $\alpha > 0$, а второе на $(1-\alpha) > 0$, имеем:

$$\alpha g_1(x^0) + (1-\alpha) g_2(x^0) < \alpha g_1(x) + (1-\alpha) g_2(x),$$

а значит, функция $\Lambda_\alpha(x)$ не достигает в точке x^0 своего максимального значения. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Данные теоремы обосновывают правомерность использования линейной свертки оптимизационных критериев g_1 и g_2, и утверждают, что поиск решений, принадлежащих $S_g(X)$ или $P_g(X)$, равносилен оптимизации функционала $\Lambda_\alpha(x)$ на множестве X при всех $\alpha \in (0;1)$.

2.5. Принцип выбора

Задача (9) в такой постановке не доопределена, так как неясно, что понимать под оптимальным решением. Необходимо ввести правило, которое будет указывать в данной задаче, каким образом находить оптимальное решение. Это правило называется принципом выбора. Существует несколько принципов выбора, которые применяются в подобных задачах. В данной работе рассматривается задача распределения ресурсов с принципом выбора λ-критерия.

Важно также отметить необходимость нормализации в нашей задаче, поскольку в ее постановке подразумевается оптимизация распределения ресурсов различного вида, каждый из которых имеет свои единицы измерения. Под нормализацией понимается однозначное отображение G в G, которое преобразует целевой функционал $g \in G$ в другой элемент пространства G. Существует несколько основных способов нормализации: приведение к одной размерности, сведение к безразмерным величинам, естественная нормализация, относительная нормализация, нормализация сравнения, и др. В дальнейшем, когда мы будем вводить определение принципа выбора λ-критерия, нам придется столкнуться с одним из способов нормализации.

Вполне очевидно, что независимо от принципа выбора, оптимальное решение должно принадлежать множеству оптимальных по Парето элементов, ибо иначе это решение можно будет улучшить хотя бы по одному из критериев без ухудшения качества по другим, и, следовательно, говорить об оптимальности будет нельзя. Таким образом, мы получаем сужение множества допустимых решений нашей задачи и можем распространить утверждения о Парето-оптимальных решениях на необходимый нам принцип выбора. В данном случае речь пойдет о принципе выбора λ-критерия.

Пусть λ_g представляет собой естественную нормализацию функционалов, которая производится по правилу

$$\lambda_g = \frac{g(x) - \min\limits_{x \in X} g(x)}{\max\limits_{x \in X} g(x) - \min\limits_{x \in X} g(x)}.$$

Определение 2.4 [10]. Оптимальный по Парето элемент $x^0 \in X$ называется *оптимальным по принципу выбора λ-критерия*, если $x^0 \in X_{\lambda^0}$, где:

$$X_{\lambda^0} = \{x \in X : \lambda_{g_i} \geq \lambda^0, \forall i = 1,2\}.$$

Величина λ^0 представляет собой наилучшее возможное приближение к оптимуму по всем компонентам многоцелевого показателя одновременно.

Таким образом, наша задача — определить максимально возможный уровень λ^0, или, иными словами, необходимо решить задачу вида:

$$\lambda^0 = \max_{0 \le \lambda \le 1} (\lambda \mid X_\lambda \neq \emptyset).$$

Для поиска величины λ^0 может быть использована следующая теорема.

Теорема 2.7 [10]. *Принцип λ-критерия совпадает с принципом максимина, т.е.*

$$\lambda^0 = \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x).$$

Доказательство этой теоремы основано на двух леммах.

Лемма 2.1 [10]. *Имеет место неравенство:* $\lambda^0 \ge \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x)$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что

$$\lambda^0 \ge \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x^0) = \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x).$$

Лемма 2.2 [10]. *Имеет место неравенство:* $\max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x) \ge \lambda^0$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что в силу определения X_{λ^0} и выполнения условий $X_{\lambda^0} \neq \emptyset$, $X_{\lambda^0} \subseteq X$ имеем

$$\max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x) \ge \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x) \ge \lambda^0.$$

Также можно показать эквивалентность решений, оптимальных по принципу выбора λ-критерия и по принципу выбора Парето-оптимальности. Таким образом, мы можем использовать для нашего критерия все утверждения, справедливые для Парето-оптимальности.

Теперь можно записать задачу (9) в одноцелевой постановке с применением принципа выбора:

$$\begin{cases} G = \{\alpha g_1 + (1-\alpha) g_2\} \to max, \;\; \alpha \in (0;1), \\ \lambda_{g_i}(x^0) \ge \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{g_i}(x), \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), \;\; x_i(t) \ge 0, \\ y_i(t) = A(t), \;\; y_i(t) \ge 0, \\ i = \overline{1,n}, \;\; t \in (1,T), \end{cases} \tag{10}$$

где в качестве g_1 и g_2 выступают введенные ранее функционалы.

2.6. Свойства решений

2.6.1. Существование и единственность решения

Вопросы существования и единственности решения нашей оптимизационной задачи рассматривают соответствующие теоремы, изложенные ниже. Сначала отметим несколько фактов, необходимых для формулировки этих теорем.

Поскольку g_1 и g_2 непрерывны, то G тоже непрерывна, так как эта функция является линейной сверткой непрерывных компонент. Множество допустимых решений X, очевидно, не пусто, иначе наша задача не имела бы смысла. Так как множество допустимых решений высекается системой нестрогих неравенств, то X — замкнутое множество. А из того, что $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t)$ и $y_i(t) = A(t)$, следует ограниченность множества X. Таким образом, X — непустой компакт.

Определение 2.5 [11]. Объект $a^0 \in A$ называется *максимальным по* P *относительно* B, если в B не существует объекта a, строго более предпочтительного, чем a^0, т.е. $a\ P\ a^0$ не имеет места ни при каком $a \in B$.

Определение 2.6 [11]. Обозначим множество максимальных по P объектов из B через $Max_P B$. Множество $Max_P B$ называется *внутренне устойчивым*, если для $\forall a, b \in Max_P B$ не может быть ни $a\ P\ b$, ни $b\ P\ a$. Множество $Max_P B$ называется *внешне устойчивым*, если для всякого объекта $a \in B$, который не является максимальным, найдется более предпочтительный максимальный объект из B, т.е. для $\forall a \in B$: $a \notin Max_P B$ $\exists a^0 \in Max_P B$, такой, что $a^0\ P\ a$.

Теорема 2.8 [9]. *Если X — непустой компакт, а F — полунепрерывная сверху (покомпонентно) на X вектор-функция, то все виды эффективных* *точек существуют, причем множество $P_g(X)$ — внешне устойчиво.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^* \in X$, зафиксируем некоторое $\alpha \in (0;1)$, и рассмотрим полунепрерывную сверху скалярную функцию $\langle \alpha, g(x) \rangle$. Эта функция достигает своего наибольшего значения на компакте

$$\{x \in X \mid g(x) \geq g(x^*)\}.$$

Точка максимума x^0, как нетрудно убедиться, рассуждая «от противного», принадлежит множеству $P_g(X)$. А поскольку $g(x^0) \geq g(x^*)$ для $\forall x^* \in X$, то $P_g(X)$ — внешне устойчивое множество. Ч.т.д.

Необходимо отметить, что каждая из точек, которые получаются при некотором фиксированном α в свертке, в условиях теоремы — единственна. Но если мы будем варьировать α, то мы будем получать другие решения. Поэтому можно говорить, что все такие точки единственны с точностью до эквивалентности целевых критериев.

Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировки теоремы единственности:

$$b_i = \sup_{x \in X} g_i(x), \quad i = 1,2,$$

$$X_1^* = \{x \in X \mid g_1(x) = b_1\},$$

$$a_2 = \begin{cases} \sup\{g_2(x) \mid x \in X_1^*\}, & \text{если } X_1^* \neq \emptyset, \\ \inf\{g_2(x) \mid x \in X\}, & \text{если } X_1^* \neq \emptyset. \end{cases}$$

Теорема 2.9 [9]. *Для того, чтобы каждое решение задачи*

$$max\{g_1(x) \mid x \in X,\ g_2(x) \geq \gamma\}, \text{ при } \gamma \in (a_2; b_2) \qquad (11)$$

было единственным с точностью до эквивалентности g, а значит, и эффективным, достаточно выполнения условий: множество X выпукло, функция g_1 строго вогнута, функция g_2 вогнута.

Доказательство. Допустим, что решение x^0 задачи (11) не является единственным с точностью до эквивалентности g, т.е. найдется $x' \in X$ для которого

$$g_1(x') = g_1(x^0), \quad g_2(x') > g_2(x^0). \qquad (*)$$

Если $g_1(x') = b_1$, то в силу определения числа a_2 приходим к противоречию: $a_2 \geq g_2(x') > g_2(x^0) \geq \gamma \geq a_2$.

Предположим, что $g_1(x') < b_1$. Тогда в силу определения числа b_1 существует такая точка $x^* \in X$, что $g_1(x^*) > g_1(x')$. Благодаря вогнутости g_2 и выпуклости X для любого $\lambda \in (0;1)$ имеем:

$$g_2(\lambda x' + (1-\lambda)x^*) \geq \lambda g_2(x') + (1-\lambda)g_2(x^*).$$

В силу $(*)$ при λ^0, достаточно близком к единице, получаем:

$$\lambda^0 g_2(x') > g_2(x^0) - (1-\lambda^0)g_2(x^*).$$

Поэтому $g_2(\lambda^0 x' + (1-\lambda^0)x^*) > g_2(x^0) \geq \gamma$. А благодаря строгой вогнутости g_1 имеем: $g_1(\lambda^0 x' + (1-\lambda^0)x^*) > g_1(x^0)$.

Последние два неравенства противоречат тому, что x^0 — решение задачи (11). Ч.т.д.

В исходной задаче распределения ресурсов, где в качестве целевых критериев выбраны принцип утилитаризма и принцип пропорционального распределения ресурсов, применительно к данным функционалам нельзя гарантировать свойство строгой вогнутости, потому что они являются линейными функциями. Тем не менее, приведенную теорему можно использовать в задаче распределения ресурсов и с более сложными функционалами.

2.6.2. Эффективность решений

Теперь рассмотрим условия эффективности решений для вогнутой задачи. Для начала приведем некоторые определения, касающиеся вогнутых функций и множеств, а затем приведем и докажем необходимые теоремы о свойствах решений.

Определение 2.7 [5]. Множество $X \subseteq E^n$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок, т.е. если

$$(\lambda x + (1-\lambda)x') \in X, \quad \forall x, x' \in X, \forall \lambda \in [0;1].$$

Определение 2.8 [5]. Пусть числовая функция h определена на выпуклом множестве $X \subseteq E^n$. Функция h называется *вогнутой*, если для любого $\lambda \in [0;1]$ и любых $x, x' \in X$ выполняется неравенство:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(x').$$

Если же для любого $\lambda \in (0;1)$ и любых $x, x' \in X$, где $x \neq x'$, имеет место строгое неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') > \lambda h(x) + (1-\lambda)h(x'),$$

то функция h называется *строго вогнутой*.

Необходимо отметить свойство вогнутой дифференцируемой функции: дифференцируемая функция h вогнута тогда и только тогда, когда для любых $x, x' \in X$ выполняется неравенство:

$$h(x') - h(x) \leq \langle \nabla h(x), (x' - x) \rangle,$$

где через $\nabla h(x)$ обозначен градиент функции h, вычисленный в точке x.

Определение 2.9 [5]. Дифференцируемую на X функцию h называют *псевдовогнутой*, если для любых $x, x' \in X$ неравенство

$$\langle \nabla h(x), (x' - x) \rangle \leq 0$$

влечет за собой $h(x') \leq h(x)$.

Каждая вогнутая дифференцируемая функция является псевдовогнутой, но не наоборот.

Определение 2.10 [5]. Если для любого $\lambda \in [0;1]$ и любых $x, x' \in X$ справедливо неравенство:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \min\{\, h(x), h(x')\, \},$$

то функцию h называют *квазивогнутой*.

Квазивогнутая функция обладает тем свойством, что для любого числа α множество $\{x \in X \mid h(x) \geq \alpha\}$ всегда выпукло.

Определение 2.11 [5]. Если для любого $\lambda \in (0;1)$ и любых $x, x' \in X$, где $x \neq x'$, имеет место строгое неравенство:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') > \min\{\, h(x), h(x')\,\},$$

то функцию h называют строго *квазивогнутой*.

Строго вогнутая функция — строго квазивогнута, псевдовогнутая функция — квазивогнута, но не наоборот. Если строго квазивогнутая функция достигает своего максимального значения на множестве X, то точка максимума — единственна.

Определение 2.12 [5]. Функцию h называют *сильно квазивогнутой*, если для любого $\lambda \in (0;1)$ и любых $x, x' \in X$, таких, что $h(x) \neq h(x')$, имеет место строгое неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') > \min\{\, h(x), h(x')\,\}.$$

Каждая псевдовогнутая функция является сильно квазивогнутой. Если функция h полунепрерывна сверху и сильно квазивогнута, то она квазивогнута. Сильно квазивогнутая функция обладает тем свойством, что всякий ее локальный максимум является глобальным.

Если функция $(-h)$ вогнута (псевдовогнута, и т.п.), то саму функцию h называют выпуклой (псевдовыпуклой, и т.п.). В том случае, если все компоненты некоторой вектор-функции являются вогнутыми (псевдовогнутыми, и т.п.), то данную вектор-функцию будем называть вогнутой (псевдовогнутой, и т.п.).

Определение 2.13 [11]. Множество $Y = f(x)$ будем называть *эффективно выпуклым*, если выпукло множество $Y_* = Y - E^m_{\geq}$.

Перед формулировкой теоремы о свойстве оценки приведем лемму, результат которой будет использован в теореме.

Лемма 2.3 [11]. *Если множество X выпукло, а функция f вогнута, то множество Y, является эффективно выпуклым.*

Введем обозначения для следующих множеств:

$$M = \left\{\mu \in E^m_{>} \mid \sum\nolimits_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right\}, \qquad \bar{M} = \left\{\mu \in E^m_{\geq} \mid \sum\nolimits_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right\}.$$

Теорема 2.10 [11]. *Пусть множество Y эффективно выпукло. Оценка* $y^0 \in Y$ *эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор* $\mu \in \overline{M}$, *при котором*

$$\langle \mu, y^0 \rangle \geq \langle \mu, y \rangle \text{ для всех } y{=}1{,}2.$$

Из леммы 2.3 и теоремы 2.10 вытекает следующий результат.

Теорема 2.11 [9]. *Пусть множество X выпукло, а функция f вогнута. Для эффективности точки* $x^0 \in X$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* $\mu \in \overline{M}$, *при котором имеет место равенство*

$$\langle \mu, f(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle.$$

Приведем еще одну вспомогательную теорему.

Теорема 2.12 [9]. *Пусть множество Y эффективно выпукло. Оценка* $y^0 \in Y$ *собственно эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор* $\mu \in M$, *при котором*

$$\langle \mu, y^0 \rangle \geq \langle \mu, y \rangle \text{ для всех } y{=}1{,}2.$$

Опираясь на лемму 2.3 и теорему 2.12, получаем еще один результат.

Теорема 2.11 [9]. *Пусть множество X выпукло, а функция f вогнута. Для собственной эффективности точки* $x^0 \in X$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор* $\mu \in M$, *при котором имеет место равенство*

$$\langle \mu, f(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle.$$

2.7. Применение вогнутого алгоритма отсечений

Поставленная задача (10) может быть решена с помощью алгоритмов нелинейного программирования.

Определение 2.14 [3]. Задача программирования вида

$$max q^T x \text{ при } Ax = b, x \geq 0,$$

где A — матрица размера $m \times n$, является *задачей линейного* *программирования.*

Определение 2.15 [4]. Задача, в которой ищется оптимальная точка x^* (решение), в которой достигается

$$maxg(x) \text{ при } \varphi_i(x) \geq 0,\ i = \overline{1,m},$$

где функции $g : E^n \to E^1$ и $\varphi_i : E^n \to E^1$, $i = \overline{1,m},$ называется *задачей нелинейного программирования*.

Для удобства в дальнейшем мы будем рассматривать задачу в переобозначениях, где все условия сосредоточены в одной вогнутой и непрерывно-дифференцируемой вектор-функции ограничений $\varphi_k(x)$:

$$\begin{cases} G = \left\{\alpha g_1 + (1-\alpha) g_2\right\} \to max,\ \alpha \in (0;1), \\ \varphi_k(x) \geq 0,\ k = \overline{1,m}, \\ x \in \tilde{X} \subseteq E^n_+. \end{cases} \qquad (12)$$

Помимо предположения о вогнутости целевых функционалов g_1 и g_2, потребуем выпуклости множества $\tilde{X}$. Таким образом, множество допустимых решений нашей задачи

$$X = \{x \in \tilde{X} \mid \varphi_k(x) \geq 0, k = \overline{1,m}\}$$

является также выпуклым.

2.8. Алгоритмы отсечений. Общая теория

Для практического решения задачи рассмотрим алгоритмы отсечений, а точнее, вогнутый алгоритм отсечений. Методы отсечений интересны тем, что алгоритмическое отображение по данному множеству, отсекая от него часть, образует новое множество. Таким образом, точки, на которые действует отображение, представляют собой множества в E^n.

Перед детальным рассмотрением вогнутого алгоритма отсечений познакомимся с общей теорией методов отсечений, а также приведем и докажем теорему сходимости непосредственно для этого класса методов.

Основная цель данного класса алгоритмов заключается в поиске точки из некоторого множества X, где X — или допустимая область, или некоторое другое множество, связанное с задачей нелинейного программирования. Однако, чаще всего, бывает довольно трудно работать с множеством X, поэтому в алгоритмах вместо непосредственного рассмотрения множества X в начале процедуры рассматривают более простое множество z^1, которое аппроксимирует множество X.

С помощью множества z^1 и некоторого специального отображения $\mathcal{T}$мы вычисляем тестовую точку

$$\omega^1 \in \mathcal{T}(z^1),$$

такую, что $\omega^1 \in z^1$. Точка ω^1 подвергается некоторой проверке, называемой тестом решения, чтобы определить, входит ли она во множество X. Если ω^1 проходит эту проверку, то процедура завершает свою работу, так как мы достигли точки из X.

Если ω^1 не проходит тест решения, то применяем второе отображение $\Delta : E^{n_1} \to E^{n_2}$ и определяем точку

$$\theta^1 \in \Delta(\omega^1).$$

С помощью точки θ^1 построим полупространство $H(\theta^1) \subset E^{n_1}$, которое обладает свойством $\omega^1 \notin H(\theta^1)$. Затем рассмотрим множество:

$$z^2 = z^1 \cap H(\theta^1).$$

Из того, что $\omega^1 \in z^1$ следует, что z^2 содержится во множестве z^1, но не совпадает с ним: $z^2 \subset z^1$.

Множество z^2 аппроксимирует множество X лучше, чем z^1. С помощью z^2 определим точку

$$\omega^2 \in \mathcal{T}(z^2),$$

такую, что $\omega^2 \in z^2$. Если ω^2 проходит тест решения, то работа алгоритма завершается. В противном случае процедура продолжается аналогичным образом.

В общем случае по данному множеству z^k определяется тестовая точка

$$\omega^k \in \mathcal{T}(z^k), \ \ \omega^k \in z^k.$$

Если полученная тестовая точка проходит тест решения, то поиск завершается. В противном случае мы определяем точку

$$\theta^k \in \Delta(\omega^k)$$

и соответствующие множества $H(\theta^k)$ и $z^{k+1} = z^k \cap H(\theta^k)$. Очевидно, что множество z^{k+1} обладает свойством:

$$z^{k+1} \subset z^k \subset z^1 \text{ для всех } k. \tag{13}$$

Таким образом, в общем случае получаем последовательность множеств $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}$ и соответствующие последовательности точек $\{\omega^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\theta^k\}_{k=1}^{\infty}$. Заметим, что поскольку алгоритм вырабатывает $\omega^k \in z^k$, то из (13) следует, что $\omega^{k+1} \in z^k$ для $\forall l \geq 0$.

Множества $H(\theta^k)$ в общем случае имеют вид:

$$H(\theta^k) = \{x \mid (a(\theta^k) + b(\theta^k)^T x) \geq 0\}, \tag{14}$$

где a и b — функции вида $a : E^{n_2} \to E^1, \ b : \ E^{n_1} \to E^{n_1}$.

В нашем алгоритме будет задан тест решения для $\omega \in \mathcal{T}(z)$, такой, что любое ω, проходящее эту проверку, будет решать задачу нелинейного программирования.

Теперь сформулируем общую теорему сходимости методов отсечений.

Теорема 2.14 [14]. *Пусть некоторый алгоритм отсечений вырабатывает последовательность множеств* $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}$ *и соответствующие последовательности точек* $\{\omega^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\theta^k\}_{k=1}^{\infty}$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *все точки* ω^k *входят в некоторое компактное множество, и все точки* θ^k *также содержатся в некотором компактном множестве;*
2) *для любого* z^k *из того,* $\omega^k \in \mathcal{T}(z^k)$ *следует* $\omega^k \in z^k$;
3) *для любого* ω^k*, не прошедшего тест, отображение* $\Delta(\omega^k)$ *замкнуто и, кроме того, функции a и b непрерывны;*
4) *если* ω^k *не проходит тест решения, то для любого* $\theta^k \in \Delta(\omega^k)$

выполняется:

$$\omega^k \notin H(\theta^k) = \{x \mid (a(\theta^k) + b(\theta^k)^T x) \geq 0\}, \quad z^k \cap H(\theta^k) \neq \emptyset;$$

Если алгоритм удовлетворяет этим условиям, то для некоторого множества индексов K будет выполнено $\omega^k \to \omega^\infty,\ k \in K$, где ω^∞ проходит тест решения.

Доказательство. Из условия 4) следует, что все z^k существуют и не пусты. А благодаря условию 1) должно существовать K, для которого

$$\omega^k \to \omega^\infty,\ k \in K, \tag{15}$$

$$\theta^k \to \theta^\infty,\ k \in K. \tag{16}$$

Используя условие 2), находим, что

$$\omega^l \in H(\theta^k) \text{ для всех } l \geq k+1,$$

и, следовательно,

$$a(\theta^k) + b(\theta^k)^T \omega^l \geq 0 \text{ для всех } l \geq k+1.$$

Тогда из (15) имеем

$$a(\theta^k) + b(\theta^k)^T \omega^\infty \geq 0$$

И, используя условие 3) и (16), получаем

$$a(\theta^\infty) + b(\theta^\infty)^T \omega^\infty \geq 0,$$

что эквивалентно тому, что

$$\omega^\infty \in H(\theta^\infty). \tag{*}$$

Теперь предположим, что ω^∞ не проходит тест. Тогда, применяя условие 3) и принимая во внимание, что Δ — замкнутое отображение, получаем

$$\theta^\infty \in \Delta(\omega^\infty).$$

Но для такого ω^∞ условие 4) гарантирует, что

$$\omega^\infty \notin H(\theta^\infty).$$

Так как это противоречит $(*)$, то предположение неверно, и, следовательно, ω^∞ проходит тест решения. Ч.т.д.

Во всех алгоритмах отсечений основой является отображение T. Для данного множества z это отображение дает решение подзадачи $\max\limits_{x \in z} q^T x$, точнее говоря,

$$\mathcal{T}(z) = \left\{x^* \mid x^* = arg\max_{x \in z} q^T x\right\}. \quad (17)$$

Причем для всех методов отсечений максимизирующая точка будет существовать.

В рассматриваемом нами алгоритме множество z^1 имеет вид:

$$z^1 = \{x \mid Ax \geq b\}.$$

Следовательно, задача нахождения $\omega^1 \in \mathcal{T}(z^1)$ является задачей линейного программирования. Более того, поскольку

$$z^2 = z^1 \cap H(\theta^1),$$

то из вида множества $H(\theta^1)$ (14) следует, что задача нахождения $\omega^2 \in \mathcal{T}(z^2)$ тоже является задачей линейного программирования. Нетрудно видеть, что в конечном итоге задача нахождения $\omega^k \in \mathcal{T}(z^k)$ также представляет собой задачу линейного программирования. Таким образом, рассматриваемый метод отсечений сводит решение задачи нелинейного программирования к решению некоторой последовательности задач линейного программирования.

Теперь перейдем непосредственно к рассмотрению вогнутого алгоритма отсечений.

2.9. Вогнутый алгоритм отсечений

Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$\begin{gathered} \max g(x), \\ \varphi_i(x) \geq 0,\ i = 1, \dots, m, \\ \text{где } x \in E^n. \end{gathered} \quad (18)$$

Введем скалярную величину ω. Легко видеть, что исходная задача эквивалента задаче

$$\max \omega,$$

$$\begin{cases} g(x) - \omega \geq 0, \\ \varphi_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Иными словами, добавив одно ограничение и одну переменную, мы заменили исходную задачу (18) задачей с линейной целевой функцией ω.

Обозначим через $\varphi(x, \omega) = \min[g(x) - \omega, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)]$. Тогда предыдущая задача эквивалента следующей:

$$\max \omega,$$

$$\varphi(x, \omega) \geq 0.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу (18) к задаче с одним ограничением и линейной целевой функцией.

Вводя переобозначения в полученной задаче, видим, что (18) эквивалентна задаче

$$\begin{gathered} \max q^T x, \\ \varphi(x) \geq 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\varphi(x)$ — вогнутая функция. Таким образом, мы построили вогнутый метод отсечений для решения исходной задачи.

Вогнутый алгоритм отсечений для задачи (19) предполагает, что допустимое множество X этой задачи содержится в компактном множестве U, где

$$X \subseteq U = \{x \mid Ax \leq b\} \subset E^n.$$

Будем также считать, что функция ограничения $\varphi(x)$ — непрерывна, и для заданного ω существует такой равномерно ограниченный на U вектор $u(\omega)$, что

$$\varphi(x) \leq \varphi(\omega) + u(\omega)^T (x - \omega), \ \ \forall x \in U. \tag{20}$$

В данном контексте равномерная ограниченность означает, что существует такое положительное число L, что

$$\|u(\omega)\| \leq L, \ \ \forall \omega \in U.$$

Перейдем к детализации алгоритма, непосредственно рассматривая отображения, составляющие вогнутый алгоритм отсечений.

При заданном множестве z составляем подзадачу вида

$$\max_{x\in z} q^T x. \qquad (21)$$

Тогда отображение $\mathcal{T}$ будет иметь вид (17).

Тест решения для заданной точки $\omega \in \mathcal{T}(z)$ заключается в том, чтобы проверить, имеет ли место включение $\omega \in X$, где X — допустимое множество задачи (19).

Отображение Δ определяется с помощью ω и соответствующего вектора $u(\omega)$, удовлетворяющего условию (20):

$$\Delta(\omega) = \big(\omega, u(\omega)\big).$$

Тогда точка $\theta \in \Delta(\omega)$ имеет вид $\theta = \big(\omega, u(\omega)\big)$. Наконец, множество $H(\theta)$ определим как

$$H(\theta) = \{x \mid \varphi(\omega) + u(\omega)^T(x - \omega) \geq 0\}.$$

Для того, чтобы начать поиск, положим $z^1 = U$. Таким образом, мы полностью определили алгоритм.

Рассмотрим, как происходит формирование z^{k+1} по z^k. Пусть при заданном z^k точка $\omega^k \in z^k$ решает задачу (21). Если окажется, что $\omega^k \in X$, то поиск завершается. В противном случае после нахождения $u(\omega^k)$ строится множество

$$H(\theta^k) = \{x \mid \varphi(\omega^k) + u(\omega^k)^T(x - \omega^k) \geq 0\},$$

и множество $z^{k+1} = z^k \cap H(\theta^k)$.

Как было отмечено ранее, все подзадачи являются задачами линейного программирования. Важно также отметить, что метод выбора вектора $u(\omega)$ должен быть таким, чтобы отображение Δ было замкнутым для всех $\omega \in U$.

Приступая к доказательству сходимости вогнутого алгоритма отсечений, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.4 [14]. *Для всех k справедливо включение: $X \subset z^k$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, тогда $\varphi(x) \geq 0$. Из условия (20) при $\omega = \omega^k$ следует, что

$$0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(\omega^k) + u(\omega^k)^T(x - \omega^k).$$

Следовательно, $x \in H(\theta^k), \forall k,$ и в силу произвольности $x \in X$, получаем

$$X \subset H(\theta^k), \quad \forall k.$$

Так как по предположению $X \subset U = z^1$, и множество z^k можно представить в виде $z^k = z^1 \bigcap_{j=1}^{k} H(\theta^j)$, то $X \subset z^k$ для всех k.

Лемма доказана.

Сходимость метода докажем с помощью общей теоремы сходимости для методов отсечений, приведенной выше. Таким образом, для доказательства сходимости алгоритма достаточно проверить выполнение всех условий теоремы 2.14.

Условие 1) Для всех k выполнено $\omega^k \in z^1 = U$, а множество U по предположению компактно. Кроме того, нетрудно показать, что все точки $\theta^k = (\omega^k, u(\omega^k))$ также содержатся в компактном множестве.

Условие 2) Следует из определения отображения T.

Условие 3) Легко видеть, что отображение Δ является замкнутым.

Непрерывность функций

$$a(\theta^k) = \varphi(\omega^k) - u(\omega^k)^T \omega^k, \quad b(\theta^k) = u(\omega^k)$$

следует из непрерывности функции $\varphi(x)$ и $\theta^k = (\omega^k, u(\omega^k))$.

Условие 4) Если ω не проходит тест решения, то $\omega \notin X$, т.е. $\varphi(\omega) \le 0$.

Следовательно, получаем

$$\omega \notin H(\theta) = \{x \mid \varphi(\omega) + u(\omega)^T (x - \omega) \ge 0\}.$$

Кроме того, согласно доказанной лемме $X \subset z^k \cap H(\theta^k), \quad \forall k$.

Таким образом, алгоритм сходится.

Сходимость алгоритма понимается следующим образом. Пусть x^* — решение задачи (19). Тогда из леммы 2.4 и вида задачи (19) следует, что

$$q^T x^* \le q^T \omega^k \text{ для всех } k.$$

Значит, если $\omega^k \in X$, то ω^k должно быть решением задачи (19). Поэтому вогнутый метод отсечений дает точку, оптимальную для задачи (19), а значит, и для задачи (18).

В заключение хотелось бы отметить, что вогнутый метод отсечений существенно зависит от вогнутости функций g и φ_i $(i = \overline{1,m})$. Алгоритм может не работать даже в том случае, если допустимая область выпукла, но ограничения выражены не вогнутыми функциями. Но в нашем случае нет повода для беспокойства, так как все необходимые условия для применения данного метода при решении нашей задачи выполнены.

Глава III.
Прикладные аспекты оптимизационной модели распределения ресурсов

Рассмотрим прикладную задачу на примере распределения ресурсов крупной компании в области нефти и газа. Из открытых источников была получена информация о факторах производства товарной нефти и чистой прибыли, которую можно получить. Требуется определить, какое количество ресурсов необходимо вложить в каждый из факторов, чтобы получить оптимальное производство при заданном бюджете.

Рассмотрим нашу задачу, используя конкретную модель распределения ресурсов:

$$\begin{cases} F = \{\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2\} \to min, \ \ \alpha \in (0;1), \\ \lambda_{f_i}(x^0) \geq \max_{x \in X} \min_{i=1,2} \lambda_{f_i}(x), \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), \qquad x_i(t) \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1, \qquad \xi_i \geq 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + R_i(t) x_i(t) + d_i(t), \ \ y_i(t) \geq 0, \\ i = \overline{1,n}, \ \ t \in (T1, T10), \end{cases}$$

где в качестве функционалов f_1 и f_2 выступают классический утилитаризм и функционал со сдвигом пропорционально состоянию соответственно.

В условиях нашей практической задачи:

$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\bar{y_i} - y_i(t)}{\bar{y_i}} \right\}$, $f_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left| \frac{\bar{y_i} - y_i(t)}{\bar{y_i}} \right|$;

$i = \overline{1,n}$ — направление вложения средств;

$t \in (T1, T10)$ — этап планирования;

$\bar{y_i}$ — эталонное значение фактора типа i;

$y_i(t)$ — итог полезного отпуска ресурса в зависимости от фактора типа i на период t;

$x_i(t)$ — затраты на развитие i-направления на период t;

$C(t)$ — объем выделенных средств на период t;

ξ_i — отдаваемое предпочтение i-направлению;

$R_i(t)$ — эффективность вложения средств в i-направление на период t; (измеряется в натуральных показателях).

Зафиксируем $\alpha = 0.5$ в свертке целевых функционалов. Таким образом, мы получили практическую задачу о распределении финансовых средств, выделенных на «товарную нефть» и «чистую прибыль» по 12 направлениям.

Решая задачу оптимизации с помощью программных средств Microsoft Excel, было получено решение, которое позволяет распределить ресурсы между факторами производства согласно конкретной модели. Результаты практического применения наглядным образом представлены в Приложении в виде таблиц данных и цветовых диаграмм.

Заключение

В настоящей выпускной квалификационной работе рассматривалось преобразование некорректной многоцелевой задачи математического программирования в одноцелевую задачу для возможного поиска оптимального решения.

Были сформулированы и доказаны утверждения, по которым строился одноцелевой эквивалент. Сформулирован детерминированный эквивалент к стохастической задаче. Изложен практический поиск решения задачи оптимизации с помощью методов нелинейного программирования. Исследованы свойства решений: существование и единственность, устойчивость.

Полученные результаты могут успешно применяться для экономического анализа деятельности различных предприятий, в сфере распределения ресурсов, принятия решений, при планировании в целом, а также в дальнейших исследованиях в области принятия решений. Также результаты исследований были использованы при практическом применении модели. Результаты применения приведены в Приложении.

Список литературы

1. Вилкас Э.Й., Маймикас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981.
2. Волкович В.Л. Методы принятия решений по множеству критериев оптимальности: Обзор. // Сложные системы управления. Киев: Наук. думка, вып.1, 1968.
3. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961.
4. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Советское радио, 1973.
5. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.
6. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
7. Колбин В.В. Стохастическое программирование. М., 1970.
8. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
9. Ногин В.Д. О существовании эффективных и собственно эффективных точек для линейной вектор-функции. М.: ВИНИТИ, 1975
10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
11. Подиновский В.В., Методы многокритериальной оптимизации. Вып.1. Эффективные планы. М., 1971.
12. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974.
13. Хоменюк В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации. М.: Наука, 1983.
14. Эрроу К., Гурвиц Л. Исследования по линейному и нелинейному программированию. ИЛ, 1962. многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

15. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио, 1974.
16. Зубов В.И., Петросян Л.А. Математические методы в планировании. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982

ПРИЛОЖЕНИЕ

Факторы	Эталоны $\bar{y}$	Предельная эффективность (R)	y(T0)	y(T1)	y(T2)	y(T3)	y(T4)	y(T5)	y(T6)	y(T7)	y(T8)	y(T9)	y(T10)
Товарная нефть, тыс.тонн			1500,00	1744,103291	1769,30251	2012,916	2178,6581	2201,7354	2223,2742	2247,1208	2266,3519	2284,8138	2303,2756
Условно-постоянные затраты, млн.руб.	37	0,0005	40,00	40,00051534	40,00051534	40,001311	40,002138	40,003328	40,004438	40,005667	40,006659	40,007611	40,008563
- в т.ч. закачка ПНГ в пласт, млн.м3	0,33	0,15	0,10	0,147688855	0,465283859	0,5641825	0,6212467	0,6212467	0,6212467	0,6212467	0,6212467	0,6212467	0,6212467
Штрафы за сверхнормативное сжигание ПНГ, млн.руб.	0,11	5076,3	0,10	0,109980433	0,109980433	0,1099804	0,1099804	0,1099804	0,1099804	0,1099804	0,1099804	0,1099804	0,1099804
Доля валютных кап.вложений (Финансирование), %	0,06	0,45	0,05	0,05	0,071505346	0,0715053	0,0715053	0,0715053	0,0715053	0,0715053	0,0715053	0,0715053	0,0715053
Добыча ПНГ, млн.м3	0,12	0,18	0,10	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651	0,1431651
Доля получаемого из Товарного Конденсата ШФЛУ, %	0,2	0,14	0,05	0,05	0,050034157	0,0500342	0,0500342	0,0500342	0,0500342	0,0500342	0,0500342	0,0500342	0,0500342
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ), шт.	70	0,00046	50,00	50,00013789	50,00013789	50,000241	50,000341	50,000456	50,000563	50,000682	50,000778	50,00087	50,000962
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...), млн.руб.	6	1344,8	5,00	5,993587048	5,993587048	5,9936015	5,9936015	5,9936015	5,9936015	5,9936015	5,9936015	5,9936015	5,9936015
- в т.ч. целевые программы, млн.руб.	6	477,35	5,00	6,02167836	7,188165092	7,1888935	7,1888935	7,1888935	7,1888935	7,1888935	7,1888935	7,1888935	7,1888935
Проценты по кредитам, млн.руб.	0,07	85887	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
Остаточная стоимость на 01.01.2019, млн.руб.	800	0,000024	750,00	750,0000072	750,0000072	750,00001	750,00002	750,00002	750,00003	750,00004	750,00004	750,00005	750,00005
затраты на персонал, млн. рублей	65	15,31	57,00	61,73346422	65,28879317	65,288793	67,306889	69,151092	70,872349	72,778025	74,314861	75,790224	77,265586

Таблица 1. Основные факторы, влияющие на выпуск товарной нефти.

Факторы	Эталоны $\overline{y}$	Пре-дельная эффек-тивность (R)	y(T0)	y(T1)	y(T2)	y(T3)	y(T4)	y(T5)	y(T6)	y(T7)	y(T8)	y(T9)	y(T10)
Чистая при-быль, млн.руб.			700,00	1019,283906	510,3301339	628,10368	764,46781	993,96922	1208,1705	1445,322	1636,5731	1820,1743	2003,7754
Условно-посто-янные затраты, млн.руб.	37	9,55	40,00	49,84303295	49,84303295	65,032718	80,832345	103,5568	124,76629	148,24823	167,18527	185,36484	203,5444
- в т.ч. закачка ПНГ в пласт, млн.м3	0,33	0,05	0,10	0,115896285	0,221761286	0,2547275	0,2737489	0,2737489	0,2737489	0,2737489	0,2737489	0,2737489	0,2737489
Штрафы за сверхнорматив-ное сжигание ПНГ, млн.руб.	0,11	8357,4	0,10	0,116431352	0,116431352	0,1164314	0,1164314	0,1164314	0,1164314	0,1164314	0,1164314	0,1164314	0,1164314
Доля валютных кап.вложений (Финансирова-ние), %	0,06	0,2093	0,05	0,05	0,060002375	0,0600024	0,0600024	0,0600024	0,0600024	0,0600024	0,0600024	0,0600024	0,0600024
Добыча ПНГ, млн.м3	0,12	0,09	0,10	0,12158255	0,12158255	0,1215826	0,1215826	0,1215826	0,1215826	0,1215826	0,1215826	0,1215826	0,1215826
Доля получае-мого из Товар-ного Конденсата ШФЛУ, %	0,2	613,9	0,05	0,05	0,199777866	0,1997779	0,1997779	0,1997779	0,1997779	0,1997779	0,1997779	0,1997779	0,1997779
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ), шт.	70	0,0002	50,00	50,00005995	50,00005995	50,000105	50,000148	50,000198	50,000245	50,000297	50,000338	50,000378	50,000418
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...), млн.руб.	6	0,0017	5,00	5,000001256	5,000001256	5,0000013	5,0000013	5,0000013	5,0000013	5,0000013	5,0000013	5,0000013	5,0000013
- в т.ч. целевые программы, млн.руб.	6	218,1	5,00	5,466802242	5,999767061	6,0000999	6,0000999	6,0000999	6,0000999	6,0000999	6,0000999	6,0000999	6,0000999
Проценты по кредитам, млн.руб.	0,07	7956,3	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
Остаточная сто-имость на 01.01.2019, млн.руб.	800	0,000014	750,00	750,0000042	750,0000042	750,00001	750,00001	750,00001	750,00002	750,00002	750,00002	750,00003	750,00003
затраты на пер-сонал, млн. руб-лей	65	4,8	57,00	58,48403842	59,5987072	59,598707	60,231422	60,809617	61,349267	61,946735	62,428565	62,891122	63,353678

Таблица 2. Основные факторы, влияющие на чистую прибыль.

Факторы	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
Условно-постоянные затраты, млн.руб.	1,030684079	0	1,590543	1,654411181	2,37952408	2,220889	2,458842	1,982937	1,903619	1,903619
- в т.ч. закачка ПНГ в пласт, млн.м3	0,317925698	2,117300031	0,659324	0,380427834	0	0	0	0	0	0
Штрафы за сверхнормативное сжигание ПНГ, млн.руб.	1,96608E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Доля валютных кап.вложений (Финансирование), %	0	0,047789658	0	0	0	0	0	0	0	0
Добыча ПНГ, млн.м3	0,239806113	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Доля получаемого из Товарного Конденсата ШФЛУ, %	0	0,000243978	0	0	0	0	0	0	0	0
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ), шт.	0,299764293	0	0,225069	0,216673903	0,25001105	0,233344	0,258345	0,208343	0,200009	0,200009
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...), млн.руб.	0,000738836	0	1,08E-08	0	0	0	0	0	0	0
- в т.ч. целевые программы, млн.руб.	0,002140313	0,002443672	1,53E-06	0	0	0	0	0	0	0
Проценты по кредитам, млн.руб.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Остаточная стоимость на 01.01.2019, млн.руб.	0,299764031	0	0,225062	0,216671546	0,25000745	0,23334	0,258341	0,20834	0,200006	0,200006
затраты на персонал, млн. рублей	0,309174671	0,232222662	1,38E-08	0,131815537	0,12045742	0,112427	0,124473	0,100381	0,096366	0,096366

Таблица 3. Прогнозируемое распределение ресурсов в производственные факторы.

Диаграмма 1. Прогнозируемое распределение ресурсов в производственные факторы в период с Т1 по Т10.

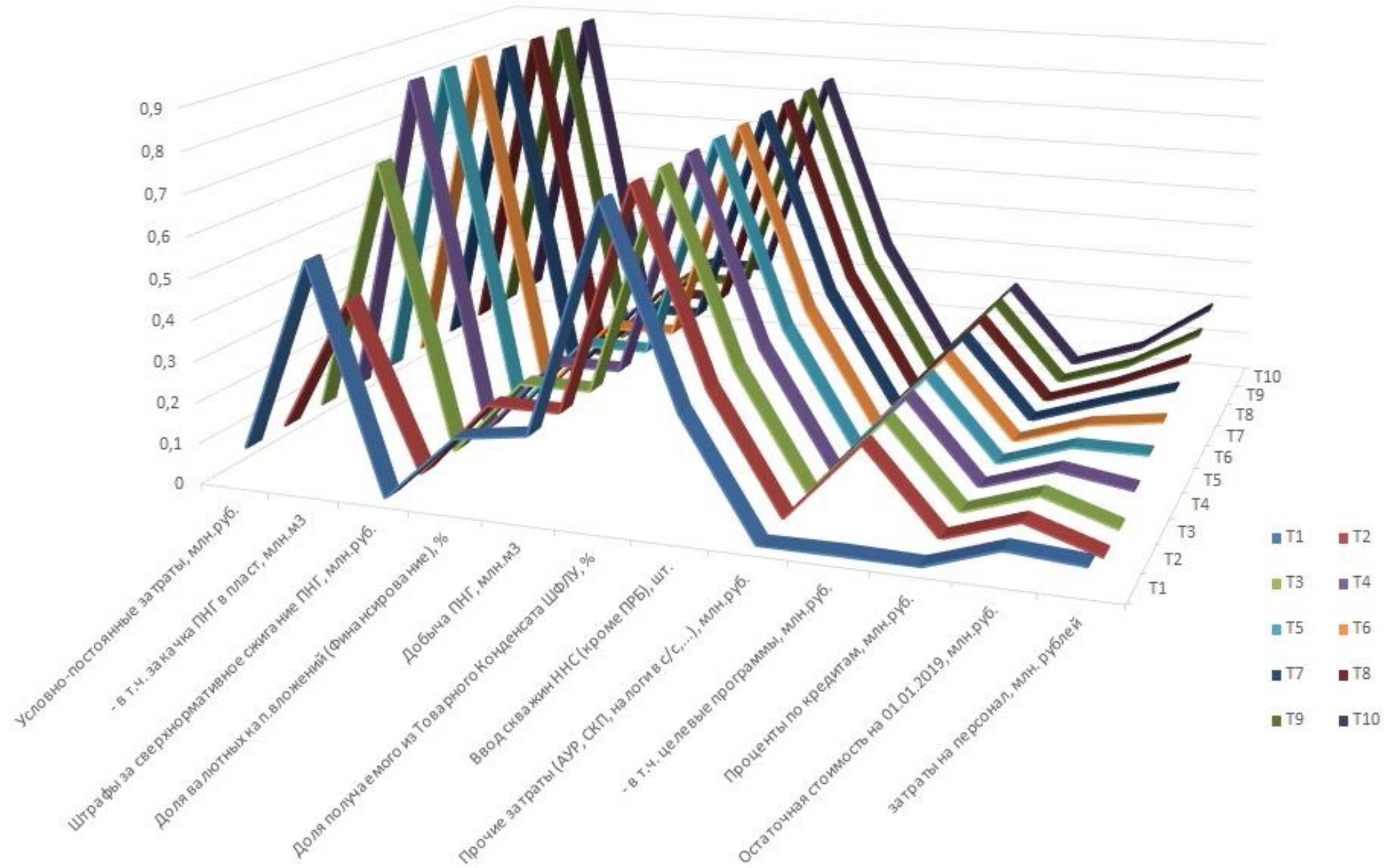

Диаграмма 2. Уровень развития направлений, влияющих на выпуск товарной нефти.

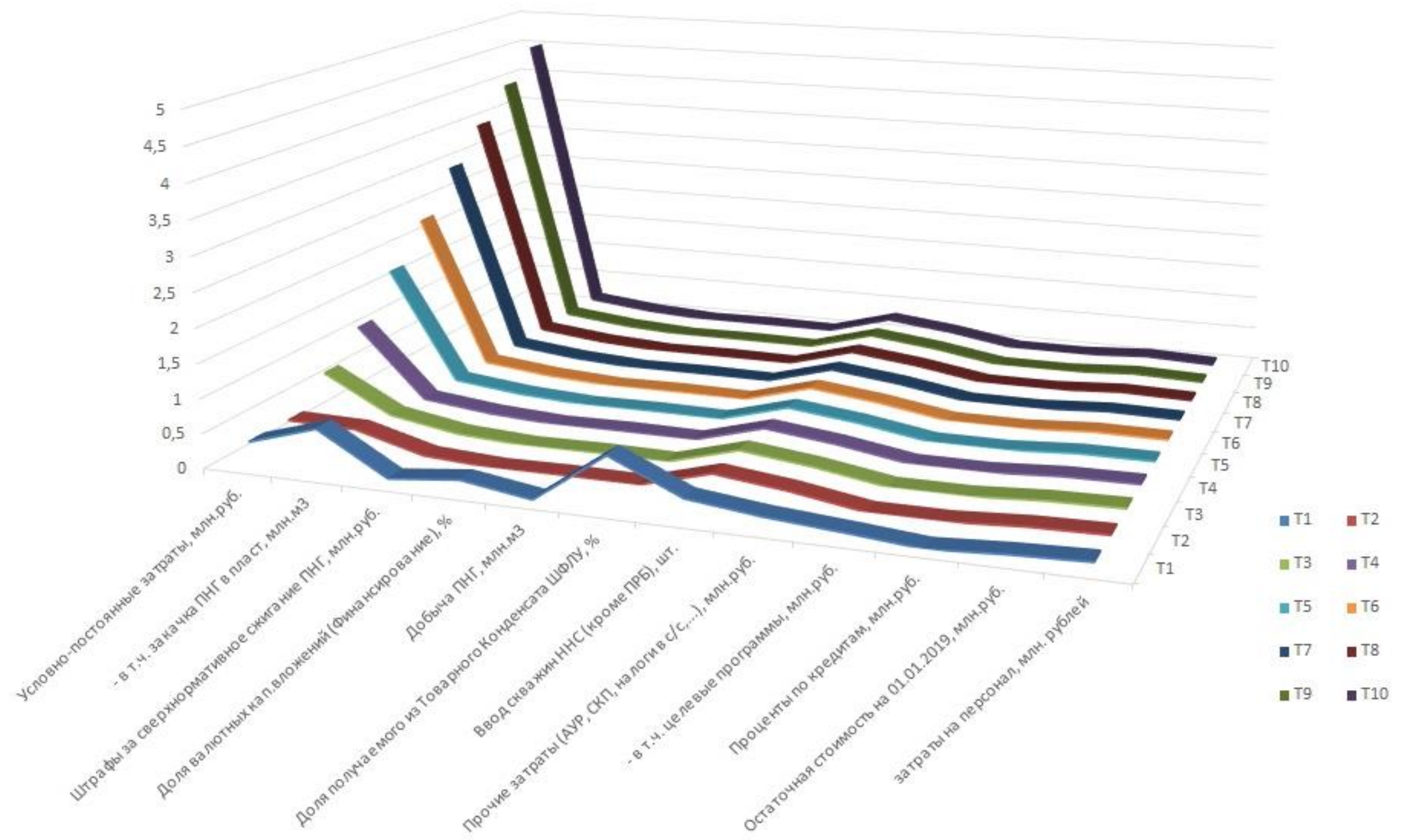

Диаграмма 3. Уровень развития направлений, влияющих на объем чистой прибыли.

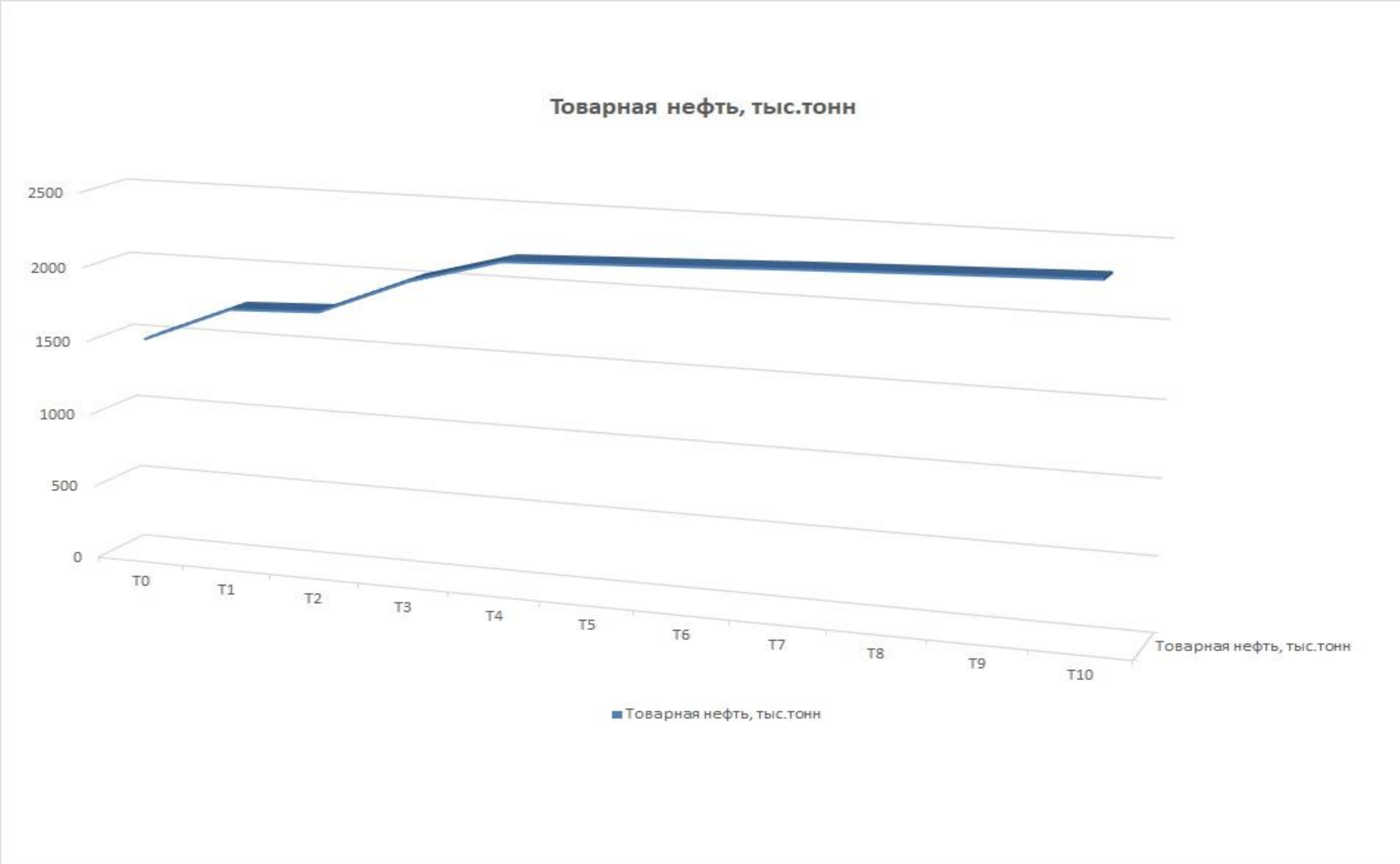

Диаграмма 4. Выпуск товарной нефти.

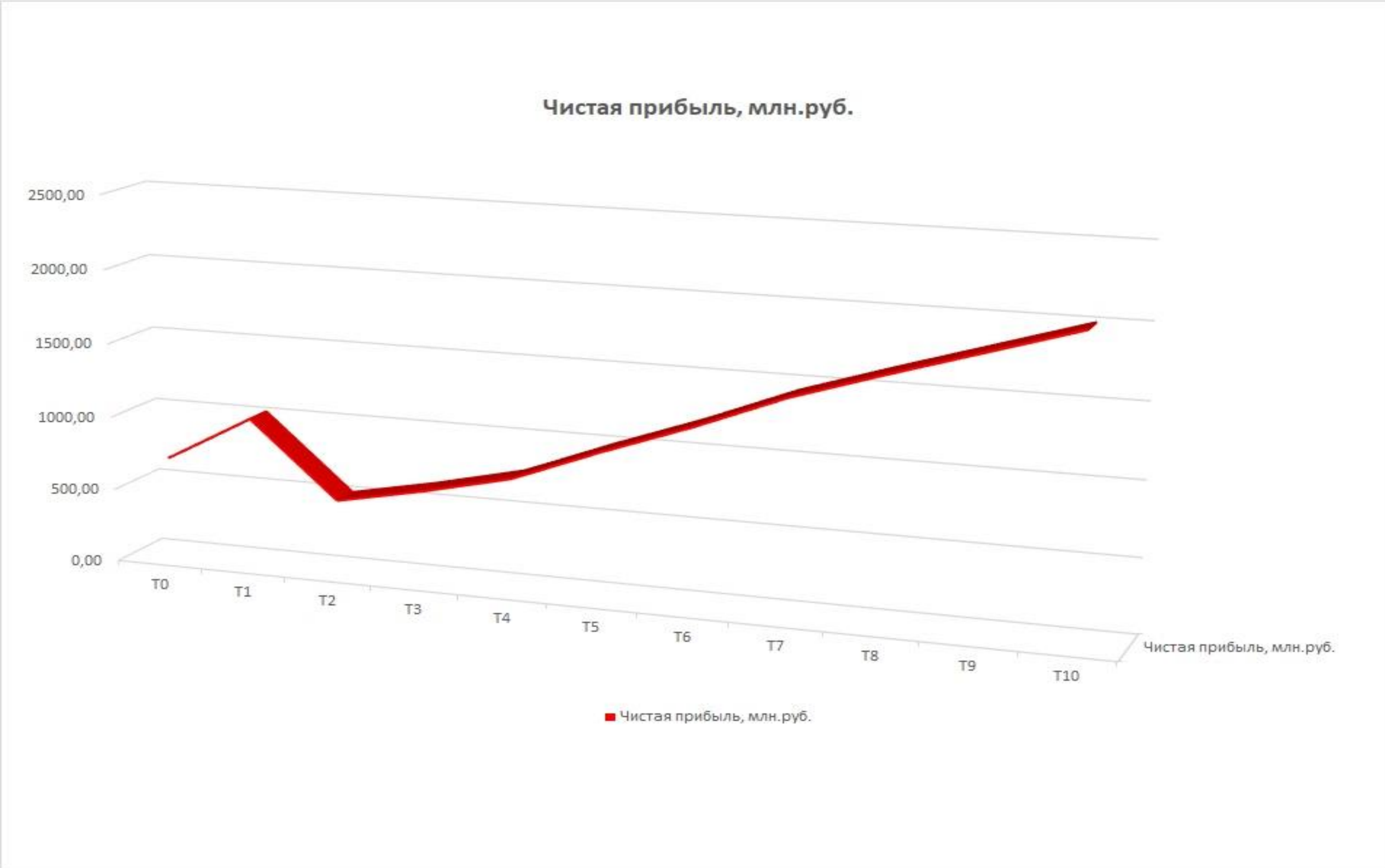

Диаграмма 5. Объем чистой прибыли.