

Санкт-Петербургский государственный университет

**ГУМЕНЮК Денис Евгеньевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**Синтез нелинейных асимптотических наблюдателей**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль: «Исследование и проектирование систем управления и обработки сигналов»

Научный руководитель:

заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Веремей Е.И.

Рецензент:

заведующий кафедрой моделирования экономических систем,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Смирнов Н.В.

Санкт-Петербург

2020

# Содержание

Содержание.....	2
Введение.....	3
Обзор литературы .....	5
1. Содержательная постановка задачи.....	6
2. Математическая постановка задачи синтеза.....	9
2.1. Математическая модель объекта управления.....	9
2.2. Постановка задачи синтеза наблюдателя.....	11
3. Методика решения задачи синтеза.....	15
3.1. Возможность упрощения уравнений динамики .....	15
3.2. Преобразование исходных уравнений динамики.....	17
3.3. Нахождение константы Липшица.....	20
3.4. Модальный метод настройки наблюдателя .....	23
4. Практический пример для двухзвенного робота .....	29
4.1. Компьютерная модель системы .....	29
4.2. Анализ упрощенной математической модели .....	31
4.3. Расчет асимптотического наблюдателя.....	33
4.4. Результаты компьютерного моделирования.....	35
Выводы.....	39
Заключение .....	40
Список литературы .....	41
Приложение А .....	42

## Введение

В настоящее время существенное внимание в научной литературе уделяется рассмотрению вопросов, связанных с формированием нелинейных обратных связей на базе реальных измеряемых сигналов, что существенно усложняет задачи управления по сравнению с использованием векторов состояния, имеющих большую размерность. Восполнение дефицита информации осуществляется с помощью асимптотических наблюдателей.

Задача синтеза асимптотических наблюдателей для нелинейных систем представляется исключительно актуальной. Это связано с тем, что для широкого круга задач до сих пор не существует универсальной методологии, позволяющей гарантировано обеспечить асимптотическую сходимость оценки, формируемой наблюдателем, к реальному состоянию объекта. Это определяет необходимость выполнения специализированной адаптации известных подходов к работе с конкретными нелинейными системами. В частности, представляет существенный интерес формирование условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия для уравнений ошибки наблюдения.

Одним из широко рассматриваемых нелинейных объектов, требующих специального подхода к синтезу асимптотического наблюдателя, является двухзвенный робот-манипулятор с одним активным звеном. В современных публикациях такие механизмы именуют термином «Pendubot»: их используют для демонстрации конкретных методов синтеза управлений с использованием асимптотических наблюдателей.

Особый интерес вызывают частные движения данного робота, определяемые его положениями равновесия, которые без управления не устойчивы. Наиболее просто проблема решается с построением стабилизирующих управлений по вектору состояния, что не всегда осуществимо на практике, причем существенную роль играет действие на систему различного рода возмущений.

В данной работе для построения нелинейного асимптотического наблюдателя предлагается применить модальный подход с учетом техники работы с липшицевыми нелинейностями. Особое внимание уделяется качеству процессов наблюдения и скорости их сходимости к реальным движениям объекта.

## Обзор литературы

Книга [1] посвящена рассмотрению современных подходов к моделированию, анализу и синтезу обратных связей для линейных управляемых систем, а также базовых вопросов синтеза асимптотических наблюдателей. В книге детально освещены аспекты программной реализации изучаемых вопросов в широко распространенной среде MATLAB-Simulink.

В монографии [2] рассмотрен ряд вопросов и проблем построения моделей оптимальных управляющих устройств для динамических объектов, функционирующих под воздействием внешней среды, и предложены алгоритмы синтеза управления, которые, в том числе, могут быть применены при проектировании наблюдающих устройств.

В работе [3] на базе результатов, полученных в [4], сформулированы достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия в уравнении ошибки наблюдения для нелинейных управляемых объектов специального класса. Эти условия в совокупности с методами, изложенными в работах [1], [2], могут быть положены в основу модального подхода к синтезу нелинейного асимптотического наблюдателя.

Работа [5] посвящена синтезу нелинейного наблюдателя для двухзвенного робота-манипулятора, однако, основным ее недостатком является подход, базирующийся на существенном упрощении математической модели рассматриваемого динамического объекта, что неизбежно ведет к неточностям восстановления информации о переменных состояния системы.

Вопросы синтеза различных асимптотических наблюдателей для двухзвенного робота-манипулятора широко освещаются в работе [6]. Однако, рассмотренные здесь наблюдатели имеют преимущественно линейную модель, что обеспечивает асимптотическую сходимость к движениям робота только в сравнительно узких окрестностях положений равновесия рассматриваемого объекта.

# 1. Содержательная постановка задачи

В данном разделе представлено описание работы и устройства двухзвенного робота-манипулятора, рассматриваемого в качестве нелинейного управляемого динамического объекта. Ниже на содержательном уровне представлены все требования, предъявляемые к данной механической системе, а также описано ее устройство.

Двухзвенный робот-манипулятор широко используется в научных и учебных публикациях [5, 6] как тестовый пример для демонстрации и тестирования различных подходов, связанных как с синтезом обратных связей, так и с синтезом асимптотических наблюдателей.

Рассматриваемый объект представляет собой вертикальную маятниковую систему, состоящую из двух звеньев, одно из которых активное, смонтировано на неподвижном основании и приводится в движение с помощью электродвигателя, а второе шарнирно соединено с первым звеном. Схематическое устройство рассматриваемого механизма показано на рис. 1.

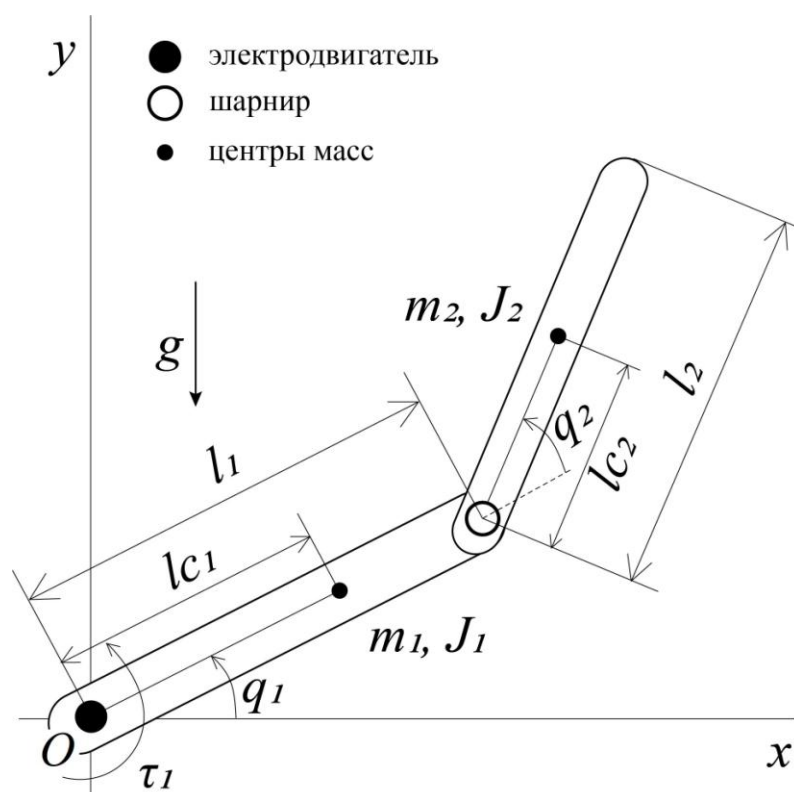


Рис. 1. Общая схема устройства двухзвенного робота-манипулятора.

Для описания состояния системы введем в рассмотрение неподвижную вертикальную прямоугольную систему координат  $Oxy$  (рис 1.). Ее начало совмещено с неподвижной точкой  $O$ , вокруг которой совершает вращательные движения первое звено. Положение робота в любой момент времени однозначно определяется двумя углами:  $q_1$  – угол отклонения первого звена от горизонтальной оси  $Ox$  и  $q_2$  – угол отклонения второго звена от направления первого. В качестве положительного направления отсчета углов принимается направление вращения против часовой стрелки.

В состав физических параметров робота входят: массы звеньев  $m_1$  и  $m_2$ , их длины  $l_1$  и  $l_2$ , расстояния до центров масс звеньев  $l_{c1}$  и  $l_{c2}$ , моменты инерции масс  $J_1$  и  $J_2$ , коэффициенты трения  $b_1$  и  $b_2$ , а также гравитационное ускорение  $g$ . Все числовые значения представляются в системе СИ.

Один из вариантов практической реализации робота показан на рис. 2.



Рис. 2. Вариант практической реализации двухзвенного робота-манипулятора.

С точки зрения механики, робот имеет четыре положения равновесия: неустойчивое «вверх-вверх», соответствующее крайнему верхнему положению; неустойчивое «вверх-вниз» (активное звено поднято вверх, второе звено опущено); неустойчивое «вниз-вверх», аналогичное предыдущему; и асимптотически устойчивое «вниз-вниз», соответствующее ситуации, когда робот находится в состоянии покоя.

С управленческой точки зрения представляют особый интерес положения «вверх-вверх» и «вниз-вверх», которые могут быть практически реализованы исключительно с помощью стабилизирующих управляющих воздействий.

Будем также считать, что на звеньях робота установлены измерительные датчики (сенсоры), которые в каждый момент времени регистрируют угловое положение робота в системе координат, то есть фиксируют текущие значения углов  $q_1$  и  $q_2$ .

Однако для синтеза законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость положений равновесия и желаемое качество динамических процессов, наличия такой информации не достаточно. В связи с этим возникает потребность в восстановлении дополнительной информации о текущих значениях угловых скоростей звеньев по известным измерениям углов.

С содержательной точки зрения, в работе рассматривается вопрос об аналитическом синтезе нелинейного наблюдателя, который использует измерения углов для асимптотического оценивания полного вектора состояния двухзвенного робота-манипулятора. В основу метода синтеза предлагается положить расширение границ асимптотической устойчивости оптимизацией выбора собственных значений (модальный подход) линейной части наблюдателя.



## 2. Математическая постановка задачи синтеза

В силу существенной нелинейности правой части уравнений динамики робота, а также с учетом допустимости значительных отклонений от положений равновесия, для асимптотического наблюдения за вектором состояния не достаточно использовать линейное приближение. Однако в настоящее время отсутствуют регулярные методы нелинейного синтеза, что определяет актуальность адаптации известных конструктивных подходов к конкретным практическим ситуациям.

В связи с этим предлагается использовать достаточные условия, предложенные в работах [3, 4], объединяя их с идеологией модального подхода, позволяющего сформировать простой численный метод расширения границ асимптотической устойчивости для синтезируемого нелинейного наблюдателя.

### 2.1. Математическая модель объекта управления

Все указанные ранее физические параметры робота сгруппируем в новый набор параметров, определяемых следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1, & \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2}, & \theta_5 &= m_2 l_{c2}. \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + J_2, & \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом указанных величин, исходная модель динамики манипулятора как объекта управления, описывается системой уравнений Лагранжа второго рода

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) = \tau, \quad (2)$$

где  $\tau = (u, 0)^T$  – вектор управляющих крутящих моментов, приложенных к звеньям,  $q = (q_1, q_2)^T$  – вектор угловых координат системы, а матрицы  $D(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $F(\dot{q})$ ,  $G(q)$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}
D(q) &= \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad F(\dot{q}) = \begin{pmatrix} b_1 \dot{q}_1 \\ b_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \\
C(q, \dot{q}) &= \theta_3 \sin(q_2) \begin{pmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
G(q) &= \begin{pmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Особо отметим, что матрица  $D(q)$  является симметричной и положительно определенной, поскольку

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1 + m_2 l_{c2}^2 + J_2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \geq \\
&\geq m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2 + m_2 (l_1 - l_{c2})^2 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(D(q)) &= \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(q_2) = \\
&= (m_1 l_{c1}^2 + J_1)(m_2 l_{c2}^2 + J_2) + m_2 l_1^2 J_2 + m_2^2 l_1^2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) > 0.
\end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства система уравнений (2) может быть разрешена относительно старших производных:

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)\tau - D^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} - D^{-1}(q)F(\dot{q}) - D^{-1}(q)G(q),$$

что представляется двумя скалярными уравнениями

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(q_2)} [\theta_2 u + \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \\
&\quad - \theta_2 \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_3 \theta_5 g \cos(q_2) \cos(q_1 + q_2) - \\
&\quad - \theta_2 b_1 \dot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) b_2 \dot{q}_2], \\
\ddot{q}_2 &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(q_2)} [-(\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) u - \theta_3 (\theta_1 + \theta_3 \cos(q_2)) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \\
&\quad - \theta_3 (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_4 (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) g \cos(q_1) - \\
&\quad - \theta_5 (\theta_1 + \theta_3 \cos(q_2)) g \cos(q_1 + q_2) + \\
&\quad + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) b_1 \dot{q}_1 - (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) b_2 \dot{q}_2].
\end{aligned} \tag{4}$$

Для приведения системы (4) к нормальной форме, введем в рассмотрение вспомогательный вектор  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T \in E^4$ .

Тогда в окончательном виде динамика двухзвенного роботоманипулятора представляется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u), \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u),
\end{aligned} \tag{5}$$

где функции  $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u)$  и  $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u)$  определяются выражениями для переменных  $\ddot{q}_1$  и  $\ddot{q}_2$  из уравнений (4) с соответствующей заменой переменных.

## 2.2. Постановка задачи синтеза наблюдателя

Прежде всего, рассмотрим особенности построения нелинейных асимптотических наблюдателей для управляемых динамических объектов специального вида. Пусть математической моделью таких объектов является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu + f(t, y, u) + g(t, x, u), \\
y &= Cx,
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^m$  – вектор управления,  $y \in R^k$  – выходная переменная. Все матрицы имеют постоянные компоненты, причем пару матриц  $\{A, C\}$  считаем наблюдаемой. Нелинейная функция  $f(t, y, u)$  такая, что ее значения всегда можно вычислить по измеряемым переменным  $u$  и  $y$ .

Будем считать, что нелинейная функция  $g(t, x, u)$  принадлежит классу глобально липшицевых по  $x$  функций с константой Липшица  $\lambda$ , т.е.

$$\|g(t, x^{(1)}, u) - g(t, x^{(2)}, u)\| \leq \lambda \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in U \subset R^m. \tag{7}$$

Наряду с рассматриваемым объектом (6) введем в рассмотрение нелинейный наблюдатель

$$\dot{z} = Az + Bu + f(t, y, u) + g(t, z, u) + L(y - Cz), \tag{8}$$

в котором матрица  $L$  подлежит выбору. Рассмотрим также уравнение для ошибки  $e(t) = x(t) - z(t)$  наблюдения, которое с очевидностью имеет нулевое положения равновесия:

$$\dot{e} = (A - LC)e + g(t, x, u) - g(t, z, u). \quad (9)$$

Выбор матрицы  $L$  должен обеспечивать асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы (8).

Справедливо следующее утверждение, основанное на результатах, приведенных в работах [3] и [4]:

**Теорема 1.** Пусть для заданной матрицы  $L$ , обеспечивающей гурвицевость матрицы  $A_0 = A - LC$  в (8), выполняется неравенство

$$\lambda_{mg} = \lambda_{mg}(L) = \frac{1}{2s_{\max}(P(L))} > \lambda, \quad (10)$$

где  $P$  – решение уравнения Ляпунова

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -E,$$

а  $s_{\max}(P)$  – наибольшее собственное число матрицы  $P$ . Тогда нулевое положение равновесия в (9) является глобально асимптотически устойчивым.

Важно отметить, если рассматриваемая функция  $g(t, x, u)$  является локально липшицевой в некоторой области  $G \subset R^n$ , то нулевое положение равновесия в уравнении для ошибки наблюдения (9) будет локально асимптотически устойчивым в указанной области.

Заметим также, что чем больше число  $\lambda_{mg}(L)$ , тем менее жесткие требования предъявляются к липшицевой функции  $g(t, x, u)$  для обеспечения асимптотической сходимости наблюдателя к реальному движению объекта.

Тем самым вполне естественно поставить задачу поиска величины

$$\lambda_{m0} = \sup_{L \in \Omega_L} \lambda_{mg}(L), \quad (11)$$

где  $\Omega_L$  – множество матриц  $L$  таких, для которых все собственные значения матрицы  $A_0 = A - LC$  расположены в открытой левой полуплоскости. Если точная верхняя граница  $\lambda_{m0}$  достигается на этом множестве, то соответствующая этой величине матрица  $L_0$  определяет наилучшие

коэффициенты наблюдателя в смысле расширения границ асимптотической устойчивости.

Однако заметим, что с практической точки зрения решение задачи (11) может оказаться неприемлемым в плане неудачного распределения спектра матрицы  $A_0$  в наблюдателе (8). В частности, собственные числа этой матрицы могут лежать слишком близко к мнимой оси.

В связи с отмеченным обстоятельством, при анализе и синтезе систем управления используется область [1, 7, 8], определяемая соотношением

$$C_{\Delta} = \left\{ s \in C^1 : \operatorname{Re}(s) \leq -\alpha, 0 \leq |\operatorname{Im}(s)| \leq (-\operatorname{Re}(s) - \alpha) \tan(\beta) \right\}$$

с заданными параметрами  $\alpha > 0$  и  $0 < \beta \leq \pi/2$ . Графическое представление этой области дано на рис. 3.

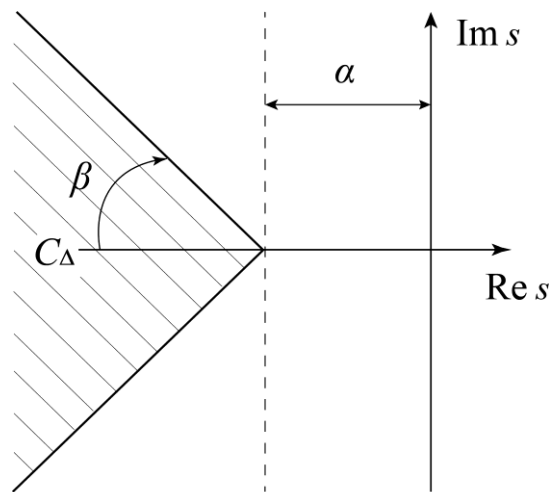


Рис. 3. Область  $C_{\Delta}$  расположения корней на комплексной плоскости.

С учетом данного замечания целесообразно перейти от оптимизационной задачи (11) к задаче поиска величины

$$\lambda_{m\Delta} = \sup_{L \in \Omega_{\Delta}} \lambda_{mg}(L), \quad (12)$$

где  $\Omega_{\Delta}$  – сужение множества  $\Omega_L$  с учетом расположения собственных чисел замкнутой системы в указанной области  $C_{\Delta}$ .

Заметим, что оптимизационная задача (12) относится к классу достаточно сложных задач нелинейного программирования. В связи с этим имеет смысл осуществить переход к конечномерной задаче на безусловный

экстремум через параметризацию множества  $\Omega_{\Delta}$   $n$ -мерными вещественными векторами.

В конечном итоге общая задача синтеза нелинейного асимптотического наблюдателя для двухзвенного робота-манипулятора представляется совокупностью трех последовательно решаемых локальных задач:

1. Задача приведения нелинейных уравнений динамики рассматриваемого динамического объекта в виду (6). При этом существенную роль играют выделение липшицевой нелинейности  $g(t, x, u)$ , нахождение констант Липшица и рассмотрение возможности упрощения исходной математической модели.

2. Оптимизационная задача (12) в рассматриваемом частном случае. Прежде всего, необходимо предложить методiku нахождения матрицы  $L_0$  с привлечением простых численных методов.

3. Задача исследования (анализа) полученного решения.

### 3. Методика решения задачи синтеза

В данном разделе представлены различные варианты преобразования математической модели робота и описан метод модальной настройки нелинейного асимптотического наблюдателя.

#### 3.1. Возможность упрощения уравнений динамики

Первая задача состоит в преобразовании математической модели робота (4) и приведения ее к виду уравнений (6). Возможны два подхода к решению этой задачи – упрощение правых частей уравнений, аналогичное предложенному в работе [5], с изменением динамики робота либо их преобразование с полным сохранением исходной динамики.

Прежде всего, воспользуемся первым подходом. Обратимся к уравнениям в нормальной форме (5) и будем считать, что, во-первых, вблизи положений равновесия угловые скорости  $x_2$ ,  $x_4$  и коэффициенты трения  $b_1$  и  $b_2$  достаточно малы, чтобы пренебречь такими величинами как  $x_2^2$ ,  $x_2x_4$ ,  $x_4^2$ ,  $b_1x_2$  и  $b_2x_4$ , а во-вторых, имеет место следующее приближенное равенство:

$$\mu_0 = \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \approx \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos(x_3)}.$$

В силу таких допущений, уравнения динамики манипулятора вблизи положений равновесия примут вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \mu_0[\theta_2 u - \theta_2 \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_3 \theta_5 g \cos(x_3) \cos(x_1 + x_3)], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \mu_0[-(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))u + \theta_4(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))g \cos(x_1) - \\ &\quad - \theta_5(\theta_1 + \theta_3 \cos(x_3))g \cos(x_1 + x_3)].\end{aligned}$$

С учетом того, что измерительные приборы, установленные на роботе, измеряют только текущие значения углов, полученная система представима в векторном виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + f(y, u), \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{13}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \theta_2 \\ 0 \\ -\mu_0 \theta_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и с нелинейной векторной функцией  $f(y, u) = (0, f_2(y), 0, f_4(y, u))^T$ .

Указанная функция имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \mu_0 g[-\theta_2 \theta_4 \cos(x_1) + \theta_3 \theta_5 \cos(x_3) \cos(x_1 + x_3)], \\ f_4(y, u) &= \mu_0 [-\theta_3 \cos(x_3) u + \theta_4 (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3)) g \cos(x_1) - \\ &\quad - \theta_5 (\theta_1 + \theta_3 \cos(x_3)) g \cos(x_1 + x_3)]. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что пара матриц  $\{A, C\}$  является наблюдаемой. Тем самым упрощенная математическая модель робота-манипулятора приведена к виду (6) с тем лишь отличием, что нелинейная липшицева функция  $g(t, x, u)$  как таковая отсутствует, поскольку все переменные в правой части уравнений (13) измеряются.

В силу данного замечания, необходимость в решении оптимизационной задачи (12) отпадает, а задача синтеза наблюдателя сводится исключительно к выбору такой матрицы  $L \in \Omega_L$ , которая будет обеспечивать гурвицевость матрицы замкнутой системы  $A_0 = A - LC$  с заданной степенью устойчивости.

Главным недостатком такого подхода к решению задачи синтеза является, с очевидностью, слишком узкая область применимости асимптотического наблюдателя вида

$$\dot{z} = Az + Bu + f(y, u) + L(y - Cz), \quad (14)$$

представляющая собой малые окрестности положений равновесия робота. Естественно, что при существенном выходе за пределы этой области сходимость к состоянию исходной (неупрощенной) модели не имеет места. Тем не менее, подобный подход вполне можно использовать для грубого анализа процесса наблюдения. С очевидностью, он дает лучший результат,



чем для простейшего линейного приближения.

### 3.2. Преобразование исходных уравнений динамики

Зададимся целью выделить линейную часть уравнений динамики робота-манипулятора. Для этого вновь рассмотрим уравнения в нормальной форме (5).

Прежде заметим, что функции  $\cos(x)$  и  $\sin(x)$  являются аналитическими в смысле вещественного анализа функциями и однозначно представляются степенными рядами

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dots\end{aligned}$$

Пользуясь этим фактом, отбросим нелинейные слагаемые и подставим линейные составляющие в уравнения (5). Получим следующую систему линейного приближения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} [-b_1\theta_2 x_2 + b_2(\theta_2 + \theta_3)x_4 + \theta_2 u + g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} [b_1(\theta_2 + \theta_3)x_2 - b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)x_4 - (\theta_2 + \theta_3)u + \\ &\quad + g(\theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 - \theta_1\theta_5 - \theta_3\theta_5)].\end{aligned}\tag{15}$$

Отсюда следует, что матрицы  $A$  и  $B$  выделенной линейной части из уравнений в нормальной форме (5) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_1\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & \frac{b_2(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & \frac{-b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ \frac{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ 0 \\ \frac{-\theta_2 - \theta_3}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ \frac{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{pmatrix}.$$

Однако, как можно заметить, в правую часть формул (15) также входят свободные слагаемые  $g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)$  и  $g(\theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 - \theta_1\theta_5 - \theta_3\theta_5)$ , которые, с очевидностью, будут относиться к нелинейным функциям  $f(t, y, u)$  и  $g(t, x, u)$  из математической модели (6). Следовательно, не будет выполняться условие

$$\lim_{\|(t, x, u)\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, y, u) + g(t, x, u)\|}{\|(t, x, u)\|} = 0. \quad (16)$$

Данные слагаемые возникают в силу того, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  в начальном положении  $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$  при нулевом управляющем воздействии робот стремится к нижнему асимптотически устойчивому положению равновесия.

В связи с этим имеет смысл перейти к системе в отклонениях от нижнего асимптотически устойчивого положения равновесия и уже полученную систему привести к требуемому виду (6). Положим  $\tilde{x}_1 = x_1 + \frac{\pi}{2}$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2$ ,  $\tilde{x}_3 = x_3$  и  $\tilde{x}_4 = x_4$ , но в дальнейшем для простоты изложения опустим волны над переменными. Тогда с учетом замены математическая модель робота примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_3)} [\theta_2 u + \theta_2\theta_3 \sin(x_3)(x_2 + x_4)^2 + \\ &\quad + \theta_3^2 \cos(x_3) \sin(x_3)x_2^2 + \theta_3\theta_5 g \cos(x_3) \sin(x_1 + x_3) - \\ &\quad - \theta_2\theta_4 g \sin(x_1) - \theta_2 b_1 x_2 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3)) b_2 x_4], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_3)} [-(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))u - \\ &\quad - \theta_3(\theta_1 + \theta_3 \cos(x_3)) \sin(x_3)x_2^2 - \theta_3(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3)) \sin(x_3)(x_2 + x_4)^2 + \\ &\quad + \theta_4(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3)) g \sin(x_1) - \theta_5(\theta_1 + \theta_3 \cos(x_3)) g \sin(x_1 + x_3) + \\ &\quad + (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3)) b_1 x_2 - (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_3)) b_2 x_4]. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, определять работа в такой системе координат естественней, ведь его нулевое положение теперь соответствует тому, что рассматриваемый объект находится в состоянии покоя.

Проведем аналогичные рассуждения по выделению линейной части из системы уравнений (17). Далее оставшуюся нелинейную составляющую разделим на функции  $f(y, u)$  и  $g(x)$  по следующему принципу: в первую из них входят слагаемые, содержащие только измеряемые переменные – значения углов  $x_1$  и  $x_3$  и управляющий крутящий момент  $u$ , а во вторую входят оставшиеся слагаемые. В силу такого преобразования математическая модель робота-манипулятора принимает вид (6):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + f(y, u) + g(x), \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь имеем следующие матрицы:

$$A = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & \mu_0^{-1} & 0 & 0 \\ a_{21} & -b_1\theta_2 & g\theta_3\theta_5 & b_2(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0^{-1} \\ a_{41} & b_1(\theta_2 + \theta_3) & -g(\theta_1\theta_5 + \theta_3\theta_5) & -b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3) \end{pmatrix},$$

где  $a_{21} = g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)$  и  $a_{41} = g(\theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 - \theta_1\theta_5 - \theta_3\theta_5)$ ,

$$B = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ -\theta_2 - \theta_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем нетрудно проверить, что пара матриц  $\{A, C\}$  является наблюдаемой.

Нелинейная функция  $f(y, u) = (0, f_2(y, u), 0, f_4(y, u))^T$ , значения которой всегда можем вычислить по измеряемым переменным  $u$  и  $y$ , имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} f_2(y, u) &= \mu(x_3)[\theta_2 u - \theta_2\theta_4 g \sin(x_1) + \theta_3\theta_5 g \cos(x_3) \sin(x_1 + x_3)] + \\ &+ \mu_0[-\theta_2 u + g(\theta_2\theta_4 - \theta_3\theta_5)x_1 - g\theta_3\theta_5 x_3], \end{aligned}$$

$$f_4(y, u) = \mu(x_3)[-(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))u + \theta_2\theta_4 g \sin(x_1) + \theta_3\theta_4 g \sin(x_1) \cos(x_3) - \\ - \theta_1\theta_5 g \sin(x_1 + x_3) - \theta_3\theta_5 g \cos(x_3) \sin(x_1 + x_3)] + \\ + \mu_0[(\theta_2 + \theta_3)u - g(\theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 - \theta_1\theta_5 - \theta_3\theta_5)x_1 + g(\theta_1\theta_5 + \theta_3\theta_5)x_3],$$

где для краткости обозначено  $\mu(x_3) = (\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_3))^{-1}$ .

Компоненты локально липшицевой, как будет показано далее, нелинейной функции  $g(x) = (0, g_2(x), 0, g_4(x))^T$  имеют вид:

$$g_2(x) = \mu(x_3)[\theta_2\theta_3 \sin(x_3)(x_2 + x_4)^2 + \theta_3^2 \cos(x_3) \sin(x_3)x_2^2 - \\ - b_1\theta_2x_2 + b_2(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))x_4] + \mu_0[b_1\theta_2x_2 - b_2(\theta_2 + \theta_3)x_4], \\ g_4(x) = \mu(x_3)[-\theta_1\theta_3 \sin(x_3)x_2^2 - \theta_3^2 \cos(x_3) \sin(x_3)x_2^2 - \\ - \theta_3^2 \cos(x_3) \sin(x_3)(x_2 + x_4)^2 - \theta_2\theta_3 \sin(x_3)(x_2 + x_4)^2 + \\ + b_1(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_3))x_2 - b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_3))x_4] + \\ + \mu_0[-b_1(\theta_2 + \theta_3)x_2 + b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)x_4]. \quad (19)$$

Как можно заметить, в правые части формул нелинейных функций  $f$  и  $g$  входят линейные слагаемые, однако они компенсируются линейными составляющими для остальных нелинейных компонент. В частности, приведем в качестве примера разложение функции  $g_2(x)$  в ряд Маклорена до третьего порядка:

$$g_2(x) = \mu_0(\theta_2\theta_3 + \theta_3^2)x_2^2x_3 + 2\mu_0\theta_2\theta_3x_2x_3x_4 + \mu_0(\theta_2\theta_3 + \theta_3^2)x_3x_4^2 + \\ + b_1\mu_0^2\theta_2\theta_3^2x_2x_3^2 - \frac{1}{2}b_2\mu_0^2(\theta_1\theta_2\theta_3 + 2\theta_2\theta_3 + \theta_3^2)x_3^2x_4 + \dots$$

Отметим также, что функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условию (16) при таком представлении математической модели робота.

### 3.3. Нахождение константы Липшица

В подавляющем большинстве робототехнических задач математические модели динамических объектов содержат тригонометрические нелинейности, которые являются глобально липшицевыми в силу ограниченности степени своего роста. Но также довольно часто они содержат и слагаемые, которые, напротив, глобально липшицевыми являться не могут, например,

квадратичные или кубические нелинейности. Однако, последние функции могут быть локально липшицевыми в замкнутых ограниченных областях.

Тем не менее, следует отметить, что нелинейности, которые в теории не являются глобально липшицевыми, моделируют реальные механические системы. Как правило, степени роста реальных функций существенно ограничены физическими свойствами объекта, что и делает их липшицевыми глобально.

Ключевую роль в математической модели (18) играет липшицевость нелинейной функции  $g(x)$ . Но, как можно заметить, в правые части формул (19) входят такие величины, как  $x_2^2$ ,  $x_2x_4$  и  $x_4^2$ , вследствие чего функция  $g(x)$  может быть не более чем локально липшицевой. Поэтому будем считать, что угловые скорости  $x_2$  и  $x_4$  ограничены по модулю числами  $h_2$  и  $h_4$  соответственно, т. е. вектор состояния принадлежит области

$$G = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^4 : |x_2| \leq h_2, |x_4| \leq h_4\}.$$

Так как функция  $g(x)$  имеет только две ненулевые компоненты  $g_2(x)$  и  $g_4(x)$ , константа Липшица для вектора  $g(x)$  представима в виде

$$\lambda = \sqrt{\lambda_{g_2}^2 + \lambda_{g_4}^2}.$$

Поскольку функции  $g_2(x)$  и  $g_4(x)$  являются непрерывно-дифференцируемыми в замкнутой области  $G$ , константы Липшица для них можно найти как решение оптимизационной задачи

$$\lambda_{g_i} = \max_{x \in G} \|\nabla g_i(x)\|, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Несмотря на громоздкие выражения для градиентов  $\nabla g_2(x)$  и  $\nabla g_4(x)$ , такая задача достаточно легко решается с использованием программной реализации различных численных методов нахождения экстремума функции многих переменных. В частности, можно использовать ППП Optimization Toolbox среды MATLAB. Такой подход к нахождению константы Липшица

для функции  $g(x)$  дает наиболее точные результаты при фиксированных численных параметрах  $h_2$  и  $h_4$ .

Заметим, что на практике в рассматриваемом частном варианте чаще всего наибольшие значения градиентов лежат на границе области  $G$ . Поэтому, в силу того, что параметры  $x_1$  и  $x_3$  в формулах (19) входят исключительно через гармонические функции, можно легко организовать перебор на конечной сетке  $0 \leq x_1 < 2\pi$  и  $0 \leq x_3 < 2\pi$ , полагая  $x_2 = \pm h_2$  и  $x_4 = \pm h_4$ .

Как правило, такой подход дает значение константы Липшица достаточно близкое к значению, найденному прошлым методом.

Однако также можно построить и оценки этой константы через оценивание промежуточных слагаемых, входящих в формулы (19). Введем следующие величины:

$$\lambda_\mu = \left| \mu'_{x_3} \left( \arccos \left( \frac{1}{2\theta_3} \sqrt{\sqrt{4\theta_1^2\theta_2^2 - 4\theta_1\theta_2\theta_3^2 + 9\theta_3^4} - 2\theta_1\theta_2 + 3\theta_3^2} \right) \right) \right|,$$

$$M_2 = \theta_2\theta_3(h_2 + h_4)^2 + \theta_3^2h_2^2 + b_1\theta_2h_2 + b_2(\theta_2 + \theta_3)h_4,$$

$$M_4 = (\theta_2\theta_3 + \theta_3^2)(h_2 + h_4)^2 + (\theta_1\theta_3 + \theta_3^2)h_2^2 + b_1(\theta_2 + \theta_3)h_2 + b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3^2)h_4,$$

$$B_1 = b_1\theta_2 + b_2(\theta_2 + \theta_3), \quad B_2 = b_1(\theta_2 + \theta_3) + b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3^2),$$

$$\lambda_2 = \theta_2\theta_3(h_2 + h_4)^2 + \theta_3^2h_2^2 + B_1,$$

$$\lambda_4 = \theta_1\theta_3h_2^2 + \theta_2\theta_3(h_2 + h_4)^2 + \theta_3^2((h_2 + h_4)^2 + h_2^2) + B_2.$$

С использованием указанных величин справедлива следующая оценка константы Липшица для функции  $g(x)$ :

$$\lambda \leq \sqrt{(\lambda_\mu M_2 + \lambda_2 \mu_0)^2 + (\lambda_\mu M_4 + \lambda_4 \mu_0)^2}$$

при  $h_2 \geq 2$  и  $h_2 + h_4 \geq \sqrt{8}$ .

При меньших значения параметров  $h_2$  и  $h_4$  оценка имеет аналогичную структуру с той лишь разницей, что

$$\lambda_2 = \sqrt{8}\theta_2\theta_3(h_2 + h_4) + 2\theta_3^2h_2 + B_1,$$

$$\lambda_4 = 2\theta_1\theta_3h_2 + \sqrt{8}\theta_2\theta_3(h_2 + h_4) + 2\theta_3^2(\sqrt{2}(h_2 + h_4) + h_2) + B_2.$$

Стоит отметить, что такие оценки носят достаточно грубый характер и их практическое применение целесообразно по большей части для определения таких чисел  $h_2$  и  $h_4$ , для которых значение константы Липшица будет не больше некоторой заданной величины.

### 3.4. Модальный метод настройки наблюдателя

С учетом изложенного выше рассматриваемый управляемый динамический объект удовлетворяет условиям, которым должна удовлетворять математическая модель, описанным в разделе 2.2 при постановке задачи синтеза наблюдателя, а именно:

- а) Уравнения динамики робота-манипулятора приведены к требуемому виду (18).
- б) Пара матриц  $\{A, C\}$  является наблюдаемой.
- в) Нелинейная функция  $f(y, u)$  может быть вычислена в любой момент времени по измеряемым переменным  $u$  и  $y$ .
- г) Нелинейная функция  $g(x)$  является локально липшицевой в области  $G$ .

Тем самым нелинейный асимптотический наблюдатель для робота-манипулятора может быть сформирован в виде (8), т.е.

$$\dot{z} = Az + Bu + f(y, u) + g(z) + L(y - Cz), \quad (21)$$

где матрица  $L$  находится как решение оптимизационной задачи (12)

$$\lambda_{m\Delta} = \sup_{L \in \Omega_\Delta} \lambda_{mg}(L).$$

Однако, как уже было отмечено ранее, оптимизационная задача (12) относится к классу достаточно сложных задач нелинейного программирования, в связи с чем имеет смысл осуществить переход к конечномерной задаче на безусловный экстремум через параметризацию множества  $\Omega_\Delta$   $n$ -мерными вещественными векторами [1, 2].

Для реализации этого подхода обратимся к нелинейной системе (6), но будем считать, что измеряемая переменная является скалярной величиной, то есть  $y \in R^1$ .

Характерной особенностью для данного частного случая (при условии наблюдаемости пары  $\{A, C\}$ ) является взаимно однозначное соответствие между коэффициентами матрицы  $L$  и расположением собственных чисел матрицы наблюдателя  $A_0 = A - LC$  на комплексной плоскости.

Используя эту особенность, можно перейти от максимизации величины  $\lambda_{mg}$  по коэффициентам наблюдателя к ее максимизации по распределению собственных чисел указанной матрицы в пределах рассматриваемой ранее области  $S_\Delta$  на комплексной плоскости. Справедлива следующая лемма [1, 2]:

**Лемма 1.** *Для любого вектора  $\gamma \in E^n$  корни полинома*

$$\Delta^*(s, \gamma) = \begin{cases} \tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n \text{ четное,} \\ (s + a_{n_d+1}(\gamma))\tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

*принадлежат области  $S_\Delta$  на комплексной плоскости, и обратно: если корни некоторого полинома  $\Delta(s)$  принадлежат данной области, то можно указать такой вектор  $\gamma \in E^n$ , что справедливо тождество  $\Delta(s) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$ , причем:*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^*(s, \gamma) &= \prod_{i=1}^d (s^2 + a_i^1(\gamma)s + a_i^0(\gamma)), \\ n_d &= [n/2], \quad \gamma = \{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{n_d 1}, \gamma_{n_d 2}, \gamma_{n_d 0}\}, \\ a_i^1(\gamma) &= 2\alpha + \gamma_{i1}^2 + 2|\gamma_{i2}| \cos \beta, \\ a_i^0(\gamma) &= \alpha^2 + \gamma_{i1}^2 \alpha + 2|\gamma_{i2}| \cos \beta + \gamma_{i2}^2, \quad i = \overline{1, n_d}, \\ a_{n_d+1}(\gamma) &= \gamma_{n_d 0}^2 + \alpha. \end{aligned} \tag{22}$$

Приведенная лемма определяет взаимно однозначное соответствие между векторами  $\gamma \in E^n$  и коэффициентами полинома  $\Delta^*(s, \gamma)$ , все корни которого лежат в области  $S_\Delta$  комплексной плоскости.



Зададим произвольный вектор  $\gamma \in E^n$  и по формулам (22) построим соответствующий ему полином  $\Delta^*(s, \gamma)$ . Потребуем, чтобы компоненты матрицы  $L$  были выбраны исходя из выполнения тождества

$$\Delta_0(s, L) \equiv \Delta^*(s, \gamma),$$

где  $\Delta_0(s, L)$  – характеристический полином матрицы  $A_0 = A - LC$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим систему линейных уравнений

$$HL = \chi(\gamma) \quad (23)$$

относительно неизвестных коэффициентов наблюдателя, где  $\chi(\gamma)$  –  $n$ -мерный вектор, составленный из коэффициентов полинома  $\Delta^*$  и свободных членов полученной системы. При этом матрица  $H$ , построенная на базе коэффициентов полинома  $\Delta_0(s, L)$ , в силу наблюдаемости пары  $\{A, C\}$  является невырожденной. Тем самым существует единственное решение системы (23):

$$L = L^*(\gamma) = H^{-1}\chi(\gamma).$$

При этом справедлива следующая теорема [1, 2].

**Теорема 2.** *Если в задаче (12) экстремум достигается при условии  $L = L_0 \in \Omega_\Delta$ , то в пространстве  $E^n$  найдется такая точка  $\gamma_0$ , что справедливо равенство*

$$L = L^*(\gamma_0),$$

причем

$$\gamma_0 = \arg \max_{\gamma \in E^n} \lambda_{mg}(H^{-1}\chi(\gamma)).$$

*Обратно: если найдена точка  $\gamma_0$ , определяемая данным условием, то матрица  $L_0 = L^*(\gamma_0) = H^{-1}\chi(\gamma_0)$  является решением задачи (12). Или, иными словами, задача (12) эквивалентна задаче на безусловный экстремум:*

$$\lambda_{mg}(H^{-1}\chi(\gamma)) \rightarrow \max_{\gamma \in E^n}. \quad (24)$$

На базе приведенных утверждений может быть построен следующий алгоритм максимизации величины  $\lambda_{mg}$  на множестве  $\Omega_\Delta$ :

1. Задать произвольный начальный вектор  $\gamma \in E^n$  и по формулам (22) построить полином  $\Delta^*(s, \gamma)$ .
2. На базе тождества  $\Delta_0(s, L) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$  сформировать СЛАУ  $HL = \chi(\gamma)$  и найти ее единственное решение  $L = L^*(\gamma) = H^{-1}\chi(\gamma)$ .
3. Для найденной матрицы  $L = L^*(\gamma)$  решить уравнение Ляпунова

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -E.$$

4. Найти наибольшее собственное число матрицы  $P$  и определить значение величины  $\lambda_{mg}$  по формуле

$$\lambda_{mg} = \lambda_{mg}(L) = \frac{1}{2s_{\max}(P(L))}.$$

5. С помощью численного метода нахождения экстремума задать новый вектор  $\gamma \in E^n$  и, повторяя шаги 3 и 4, максимизировать функцию  $\lambda_{mg}(H^{-1}\chi(\gamma))$ .
6. После нахождения точки  $\gamma_0 = \arg \max_{\gamma \in E^n} \lambda_{mg}(H^{-1}\chi(\gamma))$  сформировать матрицу  $L_0 = L^*(\gamma_0) = H^{-1}\chi(\gamma_0)$ , которая и принимается в качестве решения задачи (12).

Обратимся к рассмотрению математической модели робота-манипулятора (18) и применим построенный алгоритм для решения задачи синтеза нелинейного наблюдателя. Однако заметим, что здесь выходная переменная является не скалярной, а векторной величиной  $y \in R^2$  и соответственно матрица коэффициентов наблюдателя  $L$  имеет размерность  $4 \times 2$ . Тем не менее, предложенный подход легко обобщается и на случай с несколькими измеряемыми переменными.

Зададим произвольный вектор  $\gamma \in E^4$ , по формулам (22) построим соответствующий ему эталонный полином  $\Delta^*(s, \gamma)$  и потребуем выполнение тождества  $\Delta_0(s, L) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим, вообще говоря, нелинейную систему, состоящую из 4 уравнений и 8 неизвестных коэффициентов наблюдателя.

Чтобы перейти к линейной системе, разделим компоненты матрицы  $L$  на зависимые и независимые составляющие следующим образом:

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & p_1 \\ l_2 & p_2 \\ l_3 & p_3 \\ l_4 & p_4 \end{pmatrix} = (L_1, P),$$

где  $l_i$  – неизвестные коэффициенты наблюдателя, подлежащие нахождению, а  $p_i$  – варьируемые параметры,  $i = \overline{1,4}$ .

Пусть  $\eta_j$  – коэффициенты эталонного полинома,  $j = \overline{0,3}$ . Тогда с учетом разбиения, получим линейную систему относительно вектора  $L_1$

$$HL_1 = \chi(\gamma), \quad (25)$$

причем  $H = [H_1, H_2, H_3, H_4]$ , а именно

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ p_3 + (k_1 + k_4) \\ p_4 + p_3(k_1 + k_4) + k_5 + \Theta_2 \\ p_2k_2 + p_3k_5 + p_4k_1 + k_6 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_3 + k_4 \\ p_4 - p_1k_2 + p_3k_4 + \Theta_2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \\ -p_2 - p_1(k_1 + k_4) + \Theta_1 \\ -p_1k_5 - p_2k_4 - p_4k_3 - k_7 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_1 + k_3 \\ -p_2 - p_1k_1 + p_3k_3 + \Theta_1 \end{pmatrix},$$

$$\chi(\gamma) = \begin{pmatrix} \eta_3(\gamma) - p_3 - (k_1 + k_4) \\ \eta_2(\gamma) - p_4 - p_3(k_1 + k_4) - k_5 - \Theta_3 \\ \eta_1(\gamma) - p_1\Theta_5 - p_2k_2 - p_3(\Theta_4 + k_5) - p_4k_1 - k_6 - k_8 \\ \eta_0(\gamma) + p_1k_6 - p_2\Theta_5 - p_3k_8 - p_4\Theta_4 - \Theta_6 \end{pmatrix},$$

где использованы обозначения:

$$k_1 = b_1\theta_2\mu_0, \quad k_2 = b_1(\theta_2 + \theta_3)\mu_0, \quad k_3 = b_2(\theta_2 + \theta_3)\mu_0,$$

$$k_4 = b_2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)\mu_0, \quad k_5 = b_1b_2\mu_0, \quad k_6 = b_1g\theta_5\mu_0,$$

$$k_7 = b_2g\theta_5\mu_0, \quad k_8 = b_2g(\theta_4 + \theta_5)\mu_0,$$

$$\Theta_1 = g\theta_3\theta_5\mu_0, \quad \Theta_2 = g(\theta_1\theta_5 + \theta_3\theta_5)\mu_0,$$

$$\Theta_3 = g(\theta_1\theta_5 + \theta_2\theta_4)\mu_0, \quad \Theta_4 = g(\theta_2\theta_4 - \theta_3\theta_5)\mu_0,$$

$$\Theta_5 = g(\theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_4 - \theta_1\theta_5 - \theta_3\theta_5)\mu_0, \quad \Theta_6 = g^2\theta_4\theta_5\mu_0.$$

В силу наблюдаемости пары матриц  $\{A, C\}$  линейная система уравнений (25) является совместной и, тем самым, при любом фиксированном наборе параметров  $P$  и выбранном векторе  $\gamma$  имеет место единственное решение  $L_1 = L_1^*(\gamma)$ , на базе которого формируется матрица коэффициентов наблюдателя  $L$ .

Следовательно, указанное обстоятельство способствует практическому использованию построенного алгоритма с тем лишь замечанием, что вместо системы вида (23) формируется система (25). Другими словами, это позволяет перейти от исходной достаточно сложной задачи (12) к задаче (24) на безусловный экстремум. Кроме того, вектор параметров  $P$  является дополнительным фактором влияния на верхнюю границу величины  $\lambda_{mg}$ .

## 4. Практический пример для двухзвенного робота

В данном разделе приводятся результаты применения описанного подхода к синтезу нелинейного асимптотического наблюдателя для двухзвенного робота с конкретными наборами числовых параметров. Проведение всех необходимых вычислений и имитационного моделирования процессов наблюдения осуществляется в среде MATLAB с привлечением прикладного пакета Simulink.

### 4.1. Компьютерная модель системы

Рассмотрим двухзвенный робот-манипулятор с конкретными значениями физических параметров, сведенными в таблицу 1.

Таблица 1.

	Масса $m_i$ , кг.	Длина $l_i$ , м.	Расстояние до ЦМ $l_{ci}$ , м.	Момент инерции звена $J_i$ , кг×м <sup>2</sup>	Коэффициент трения $b_i$ , кг×м <sup>2</sup> /с
Первое звено	0.322	0.212	0.143	0.00513	0.0001
Второе звено	0.066	0.230	0.105	0.00151	0.0001

С учетом данных физических параметров получим следующие численные значения параметров  $\theta_1 - \theta_5$ , определяемые по формулам (1):

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0.01468, \quad \theta_2 = 0.00224, \quad \theta_3 = 0.00147, \\ \theta_4 = 0.06004, \quad \theta_5 = 0.00693. \end{aligned} \quad (26)$$

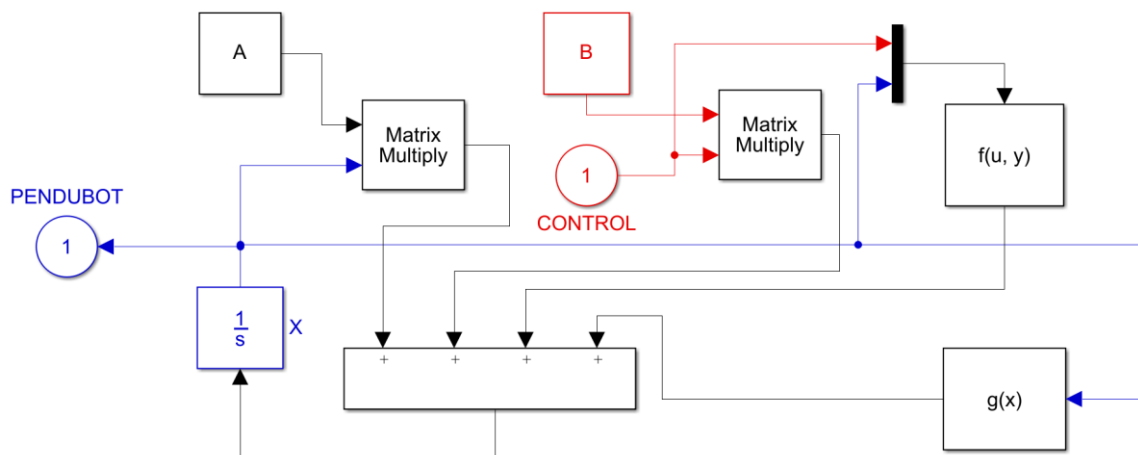


Рис. 4. Simulink-модель динамики двухзвенного робота.

Построение компьютерных моделей динамики робота в соответствии с уравнениями (13) и (18), а также соответствующих им нелинейных асимптотических наблюдателей в соответствии с уравнениями (14) и (21) осуществляется с применением прикладного пакета Simulink. Данные модели представлены на рис. 4 и рис. 5.

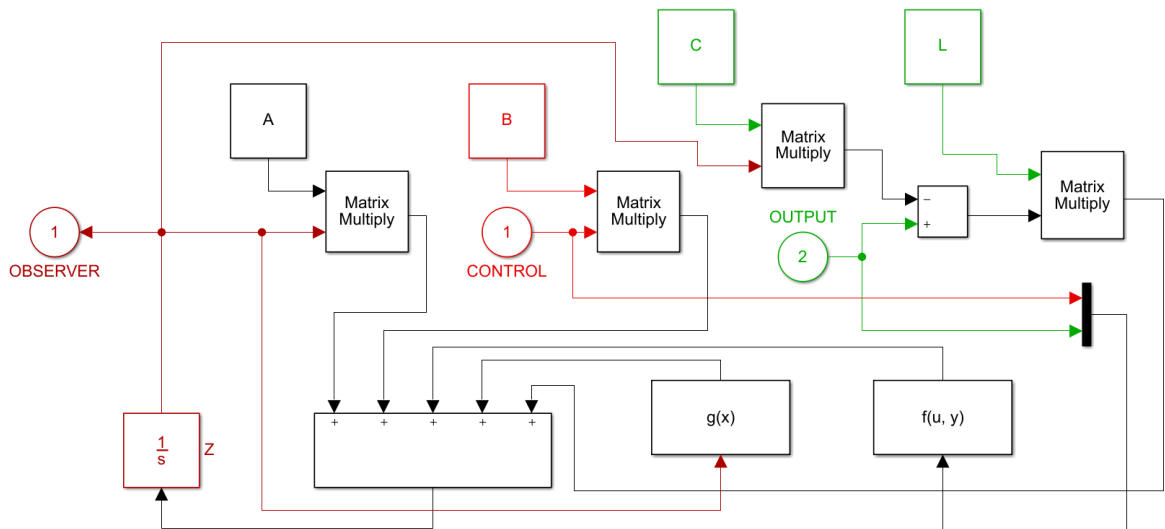


Рис. 5. Simulink-модель динамики асимптотического наблюдателя.

Блоки  $f(u, y)$  и  $g(x)$  построены на базе блоков «Interpreted MATLAB Function», в которых формируются соответствующие нелинейные функции. Однако важно заметить, что в случае с упрощенной моделью наблюдателя (14) функция  $g(x)$  тождественно нулевая.

Будем считать, что по выходу  $z$  нелинейного асимптотического наблюдателя реализуется некоторое управляющее воздействие по принципу обратной связи. В таком случае замкнутая данным управлением математическая модель робота будет иметь вид блок-схемы, представленной на рис. 6.

Здесь блоки подсистем «PENDUBOT EQUATIONS» и «ASYMPTOTIC OBSERVER» содержат в себе структуры, соответствующие представлению на рис. 4 и рис. 5.

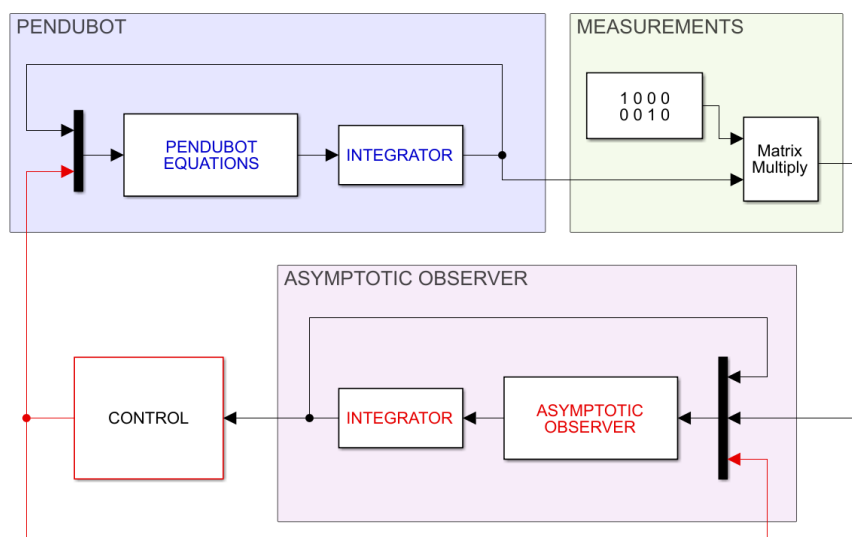


Рис. 6. Блок-схема Simulink-модели замкнутой системы.

## 4.2. Анализ упрощенной математической модели

Проведем сравнительное моделирование исходной системы (5) и упрощенной системы (13) при небольшом отклонении от нижнего асимптотически устойчивого положения равновесия робота, например, при начальных данных  $x_0 = (-\pi/2 + 0.1, 0, 0, 0)^T$  и при нулевом управлении.

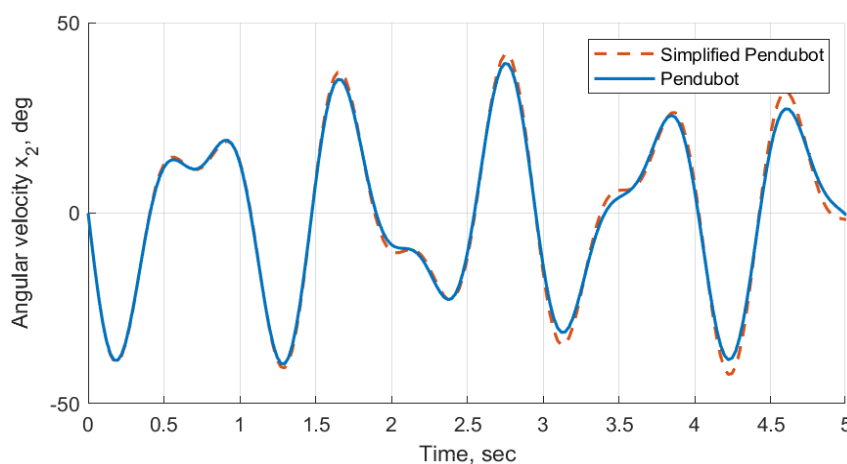


Рис. 7. Сравнение систем (5) и (13) по угловой скорости  $x_2$  при малом отклонении от положения «вниз-вниз».

Как можно заметить из представленных на рис. 7 графиков сравнения моделей (5) и (13) по угловой скорости  $x_2$ , частоты колебаний указанных процессов практически не различаются. Также стоит отметить качественную близость движений.

Однако картина существенно меняется при больших отклонениях робота от нижнего положения равновесия, что представлено на рис. 8.

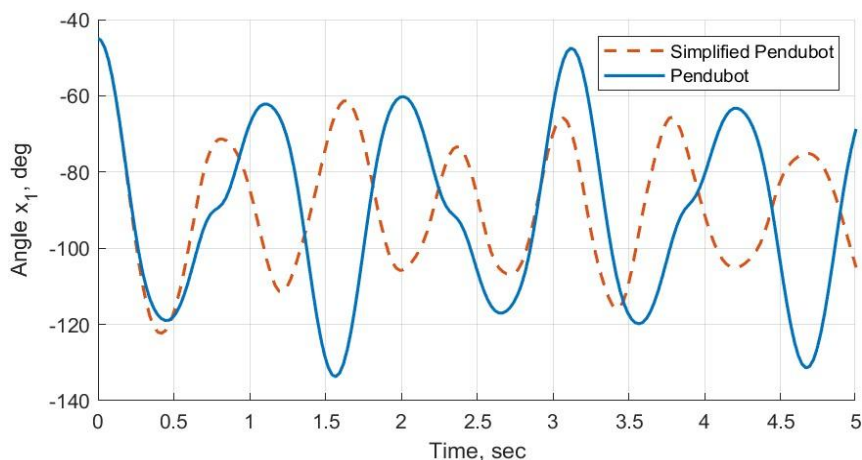


Рис. 8. Сравнение систем (5) и (13) по углу  $x_1$  при большом отклонении от положения «вниз-вниз».

Заметим, что упрощенный наблюдатель для неупрощенной модели дает достаточно неплохие результаты по восстановлению вектора фазовых переменных системы, что продемонстрировано на рис. 9 при начальных условиях  $x_0 = (-\pi/4, 0, 0, 0)^T$  и  $z_0 = (-\pi/2, 0, 0, 0)^T$ .

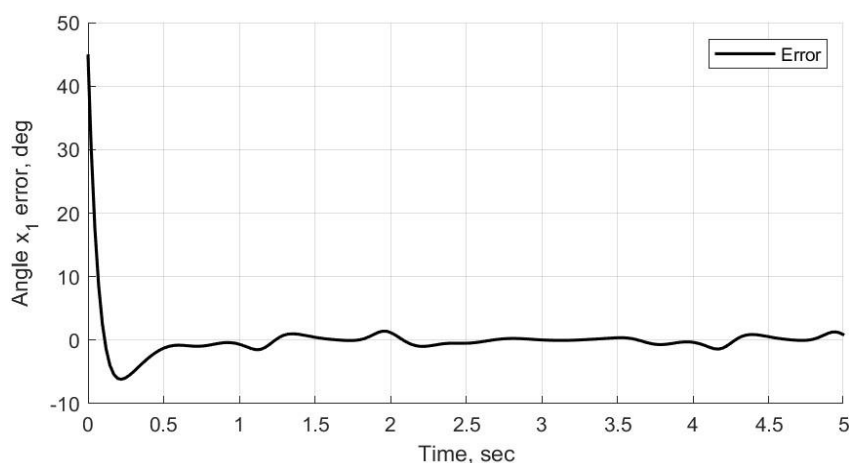


Рис. 9. Ошибка наблюдателя (14) для системы (5) по углу  $x_1$ .

Как можно видеть, ошибка наблюдения по углу  $x_1$  близка к нулевой, но таковой не является и в ряде случаев достигает до 3–4 градусов, что может оказать существенное влияние на процессы управления. Тем не менее, упрощенный наблюдатель вполне можно использовать для грубого оценивания вектора состояния робота.



### 4.3. Расчет асимптотического наблюдателя

Обратимся теперь к синтезу нелинейного асимптотического наблюдателя (21) для исходной неупрощенной системы, где матрица коэффициентов наблюдателя  $L$  может быть найдена как решение оптимизационной задачи (24) с применением предложенного в работе алгоритма.

Прежде всего, рассмотрим систему (25), которая в соответствии с численными значениями параметров (26) имеет вид

$$HL_1 = \chi(\gamma) \quad (27)$$

с правой частью

$$\chi(\gamma) = \begin{pmatrix} \eta_3(\gamma) - 0.072 - p_3 \\ \eta_2(\gamma) - 0.072p_3 - p_4 - 75.46 \\ \eta_1(\gamma) - 35.36p_1 - 0.012p_2 - 39.69p_3 - 0.0073p_4 - 2.362 \\ \eta_0(\gamma) + 0.222p_1 - 35.36p_2 - 2.14p_3 - 39.69p_4 - 1304.57 \end{pmatrix},$$

и матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.072 + p_3 & 1 & -p_1 & 0 \\ 0.072p_3 + p_4 + 35.77 & p_3 + 0.065 & 3.25 - 0.072p_1 - p_2 & 0.012 - p_1 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

причем:

$$h_1 = 0.012p_2 + 0.00033p_3 + 0.0073p_4 + 0.222,$$

$$h_2 = -0.012p_1 + 0.065p_3 + p_4 + 35.77,$$

$$h_3 = -0.00033p_1 + 0.065p_2 - 0.012p_4 - 0.222,$$

$$h_4 = -0.0073p_1 - p_2 + 0.012p_3 + 3.25.$$

Как уже было отмечено ранее, данная система имеет решение при любом численном наборе параметров  $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ , являющихся дополнительным фактором влияния на значение величины  $\lambda_{mg}$ .

Практика синтеза наблюдателей для двухзвенного робота при заданных параметрах (26) показывает, что наибольшие значения величины  $\lambda_{mg}$  при требуемой степени устойчивости замкнутой системы  $\alpha = 1$  достигаются, на-

пример, при использовании вектора  $P = (78, 57, 138, 96)^T$ . Однако, в общем вопрос выбора оптимального вектора  $P$  является самостоятельной задачей, решаемой для каждого конкретного набора физических параметров робота отдельно.

Тем самым, в ряде случаев выгоднее перейти от решения уравнений (23) и (25) к использованию функции «place» пакета прикладных программ Control System Toolbox среды MATLAB.

Существенной особенностью данной функции является то, что она основана на алгоритме, который для систем с несколькими входами (несколькими выходами в случае синтеза наблюдателей) оптимизирует выбор собственных чисел замкнутой системы. Это делается для получения оптимального (с точки зрения робастной устойчивости) решения с использованием дополнительной свободы в выборе коэффициентов наблюдателя.

Для применения на практике предложенного алгоритма максимизации величины  $\lambda_{mg}$  воспользуемся следующими тремя функциями:

- а) функцией «deltaPoly», ставящей в соответствие любому наперед заданному вектору  $\gamma \in E^n$  коэффициенты полинома  $\Delta^*(s, \gamma)$  по формулам (22);
- б) функцией «poleDelta», которая, используя функцию «deltaPoly», формирует систему уравнений  $\Delta_0(s, L) = \Delta^*(s, \gamma)$  (где  $\Delta_0(s, L)$  – характеристический полином замкнутой системы) и решает ее либо по формулам (23) и (25), либо с использованием функции «place», после чего находит величину  $\lambda_{mg}$ ;
- в) функцией «lmgOptimization», оптимизирующей методом Нелдера-Мида величину  $\lambda_{mg}$  по заданным матрицам  $A, C$  и параметрам устойчивости  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющим множество  $\Omega_\Delta$  и область  $S_\Delta$ .

Исходный код соответствующих программных функций на языке MATLAB приведен в Приложении А. Далее все вычисления осуществляются с привлечением этого набора функций.

#### 4.4. Результаты компьютерного моделирования

Для исследования полученных результатов будем менять требуемую степень устойчивости  $\alpha \in \{1, 5, 10, 25\}$  и для каждого конкретного ее значения решать задачу синтеза нелинейного асимптотического наблюдателя. Зафиксируем произвольным образом начальную точку  $\gamma \in E^4$ , например, с помощью встроенной функции «rand» среды MATLAB находим  $\gamma = (3.988, 0.896, 1.609, 2.419)$ . В дальнейшем будем начинать вычисления с данного значения  $\gamma$ . В процессе работы предложенного алгоритма получаем следующие результаты, сведенные в таблицу 2.

Таблица 2.

Степень устойчивости $\alpha$	1	5	10	25
Значение $\lambda_{mg}$ до оптимизации	0.3321	0.2241	0.1539	0.0595
Значение $\lambda_{m\Delta}$ после оптимизации	0.4999	0.2767	0.2001	0.07023
Собственные числа матрицы замкнутой системы $A_0$	-1 -1.7 -446 -446	-5 -5.3 -5.7 -393	-10 -10.1+3i -10.1-3i -13.6	-25.3 -26.2+7.6i -26.2-7.6i -35.9
Матрица $L_0$	$\begin{pmatrix} 447 & 0 \\ 411 & 3.3 \\ 0 & 447 \\ 35.6 & 415 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 212 & -177 \\ 913 & -814 \\ -210 & 196 \\ -824 & 758 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19.8 & 0 \\ 50.9 & 8.1 \\ -7.4 & 19.8 \\ -27.3 & 62.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 58.9 & 0 \\ 791 & 17.1 \\ -15.4 & 54.1 \\ -297 & 733 \end{pmatrix}$

Пользуясь формулами (20) вычисления константы Липшица для функции  $g(x)$ , подберем параметры  $h_2$  и  $h_4$  области липшицевости  $G$ , при которых гарантируется асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия в уравнении для ошибки наблюдения. Например, параметры

$h_2 = h_4 = 0.25$  с учетом значений (26) дают величину константы Липшица  $\lambda = 0.4766$ , следовательно, при степени устойчивости  $\alpha = 1$  и соответствующем ей значении  $\lambda_{m\Delta} = 0.4999$  обеспечивается асимптотическая сходимость наблюдателя к движениям робота в заданной области изменения переменных состояния.

Для больших степеней устойчивости соответствующие им значения  $\lambda_{m\Delta}$  меньше, что сужает область липшицевости  $G$  и вынуждает искать компромисс между величиной желаемой области  $G$  и качеством и скоростью сходимости наблюдателя.

С точки зрения механики параметры  $h_2$  и  $h_4$  определяют верхние границы модулей угловых скоростей  $x_2$  и  $x_4$ , то есть в рассмотренном выше случае угловые скорости не должны превышать  $0.25$  рад/с  $\approx 14$  град/с.

Такая ситуация, например, может соответствовать тому, что робот в начальный момент находится вблизи неустойчивого положения равновесия и стремится вернуться в нижнее асимптотически устойчивое. Этот факт позволяет использовать построенный асимптотический наблюдатель для стабилизации робота в неустойчивых положениях равновесия.

В качестве примера, в соответствие с блок-схемой, изображенной на рис. 6, замкнем систему стабилизирующим в верхнем неустойчивом положении равновесия регулятором  $u = Kz$ , где вектор-строка  $K$  ищется в виде решения задачи LQR-оптимизации, то есть из условия минимизации интегрального квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt.$$

Положив  $Q = \text{diag}\{10, 60, 5, 5\}$ ,  $R = 50$  и  $N = 0$ , воспользуемся функцией «lqr» ППП Control System Toolbox среды MATLAB, с помощью чего получаем  $K = (24, 5.8, 23.8, 4.3)$ .

Матрицу  $L$  возьмем из таблицы 2 для случая  $\alpha = 5$ , в качестве начального положения робота примем  $x_0 = (\pi, 0.2, 0.1, -0.2)^T$ , начального положе-

ния наблюдателя  $z_0 = (\pi, 0, 0, 0)^T$ . Результаты стабилизации робота по углу  $x_1$  представлены на рис. 10.

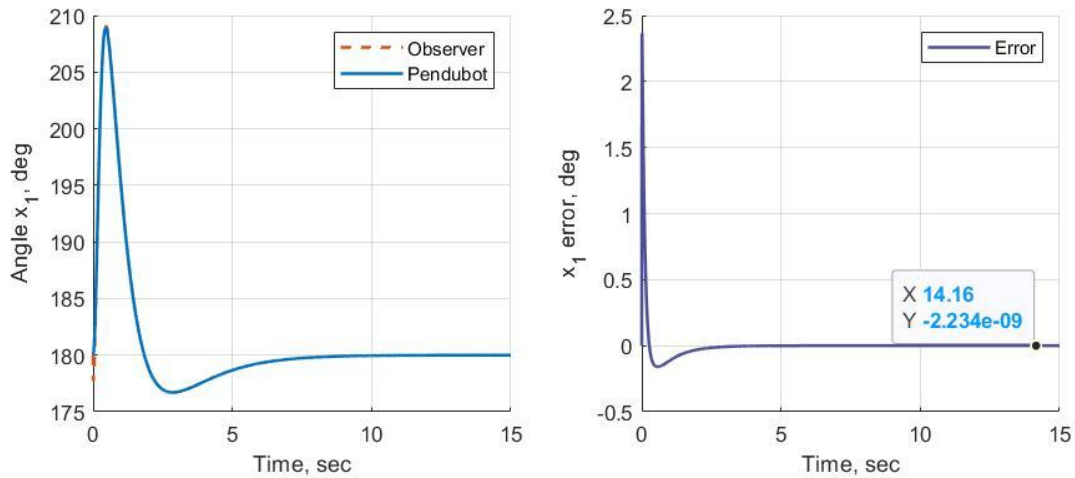


Рис. 10. Стабилизация робота в верхнем положении равновесия по углу  $x_1$  (слева) и ошибка оценивания по углу  $x_1$  (справа).

Как можно заметить, построенный асимптотический наблюдатель справляется с поставленной задачей и уже через 14 секунд после начала процесса оценивания ошибка наблюдения  $e(t) = x(t) - z(t)$  составляет менее  $2.3 \cdot 10^{-9}$  градусов.

Стоит заметить, что из невыполнения условия  $\lambda < \lambda_{m\Delta}$  не следует неустойчивость нулевого положения равновесия в уравнении для ошибки наблюдения (9), так как теорема 1 имеет достаточный характер.

Как показывает практика синтеза нелинейных асимптотических наблюдателей для двухзвенного робота-манипулятора, реальные области сходимости асимптотического наблюдателя, синтезированного по предложенному алгоритму, существенно больше областей  $G$ , определяемых подходящими параметрами  $h_2$  и  $h_4$ .

В качестве примера, проведем моделирование асимптотических наблюдателей для случаев  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 25$ , представленных в таблице 2. Будем считать, что начальные положения  $x_0 = (\pi/4, 0.2, 0, -0.2)^T$  и  $z_0 = (\pi/4, 0, 0, 0)^T$ , а управляющее воздействие отсутствует.

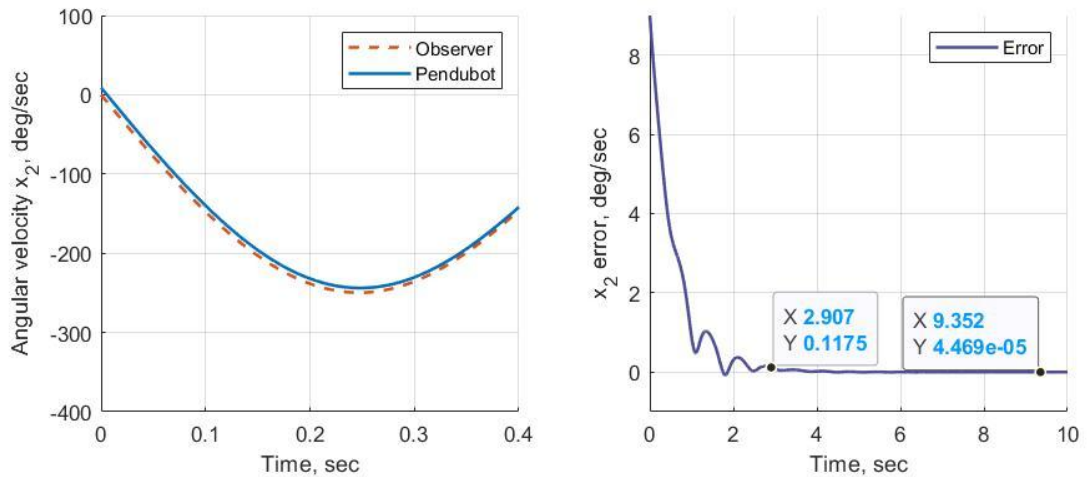


Рис. 11. Свободное движение робота и процесс оценивания по угловой скорости  $x_2$  (слева) и ошибка наблюдения (справа) для  $\alpha = 1$ .

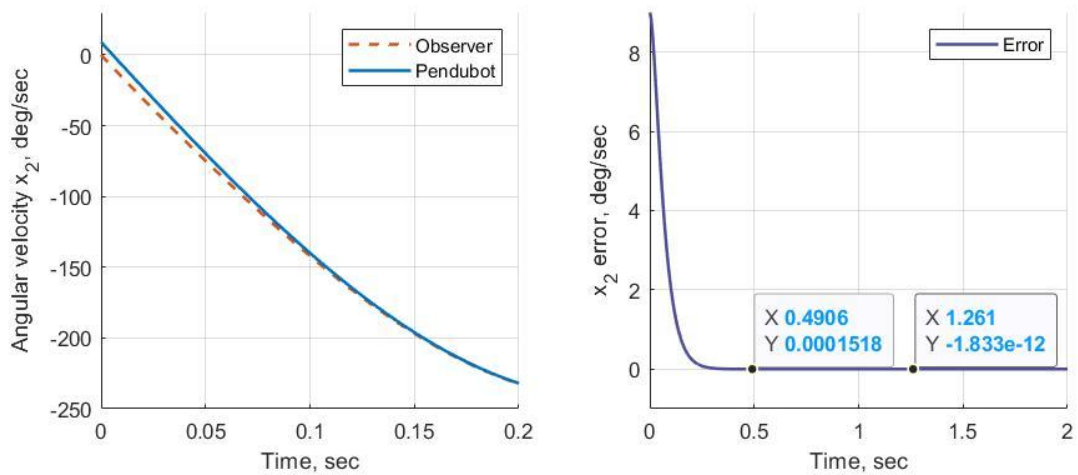


Рис. 12. Свободное движение робота и процесс оценивания по угловой скорости  $x_2$  (слева) и ошибка наблюдения (справа) для  $\alpha = 25$ .

Как можно заметить из представленных графиков, даже, несмотря на большие значения угловых скоростей робота и соответствующие им достаточно большие значения констант Липшица, асимптотические наблюдатели, синтезированные по предложенному алгоритму, достаточно точно осуществляют процесс восстановления вектора состояния для рассматриваемого объекта.

Более того, при требуемой степени устойчивости  $\alpha = 25$  ошибка оценивания уже через полторы секунды становится менее  $1.8 \cdot 10^{-12}$  град/с, что также отражает высокую эффективность рассмотренного алгоритма синтеза нелинейного асимптотического наблюдателя.

## Выводы

В ходе проделанной работы рассмотрены вопросы синтеза нелинейных асимптотических наблюдателей для нелинейных систем специального вида, в частности для двухзвенного робота-манипулятора с одним активным звеном. Особое внимание при этом уделено анализу липшицевости функций в уравнениях динамики, как характерной особенности систем данного класса. Методика решения поставленной задачи синтеза включает в себя два принципиально разных подхода.

Первый из них заключается в построении асимптотического наблюдателя на базе упрощенных уравнений динамики. Несмотря на то, что при этом восстановление вектора состояния является достаточно грубым, подобный асимптотический наблюдатель пригоден для использования вблизи положений равновесия робота.

Второй подход основывается на достаточных условиях асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия для ошибки наблюдения, существенную роль в которых играет липшицевость нелинейных составляющих математической модели робота. Предложенный метод модальной настройки наблюдателя позволяет свести задачу выбора матрицы коэффициентов к решению задачи на безусловный экстремум, в чем существенно выигрывает по отношению к известным подходам.

Для подтверждения работоспособности и эффективности предложенного алгоритма, выполнены практические расчеты и проведено имитационное моделирование динамики двухзвенного робота-манипулятора и соответствующего ему синтезированного асимптотического наблюдателя.

## Заключение

В процессе проведенного исследования получены следующие результаты, которые выносятся на защиту:

1. Поставлена задача синтеза нелинейного асимптотического наблюдателя для двухзвенного робота-манипулятора и разработан специализированный метод ее решения.
2. Сформирован имитационно-моделирующий комплекс в среде MATLAB с привлечением прикладного пакета Simulink для компьютерного моделирования рассматриваемых систем и проведения вычислительных экспериментов.
3. Проведено численное решение задачи синтеза для конкретного робота, подтвердившее работоспособность и эффективность предложенного подхода.



## Список литературы

1. Веремей Е.И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
2. Веремей Е.И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2016. 408 с.
3. Raghavan S., Hedrick J.K. Observer design for a class of nonlinear systems // International Journal of Control. 1994. Vol. 59. No 2. P. 515–528.
4. Thau F.E. Observing the state of nonlinear dynamic systems // International Journal of Control. 1973. Vol. 17. P. 471–479.
5. Ha Q., Nguyen A., Trinh H. Simultaneous state and input estimation with application to a two-link robotic system // The 5th Asian Control Conference. Melbourne. 2004. P. 322–328.
6. Humaidi A.J., Mohammed A.A. Performance comparison of different observers for Pendubot // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences. 2017. Vol. 34. No 1. P. 34–53.
7. Веремей Е.И., Ван Х., Сюэ Ю. Метод гарантирующей оптимизации динамики судна, движущегося в условиях волнения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. No 4. С. 351–361.
8. Veremey E.I. Special spectral approach to solutions of SISO LTI H<sub>∞</sub> optimization problems // International Journal of Automation and Computing. 2019. Vol. 16. P. 112–128.

## Приложение А

Ниже представлен исходный код для вспомогательных функций, используемых при численной реализации предложенного алгоритма минимизации величины  $\lambda_{mg}$  для построения оптимального (в плане расширения границ асимптотической устойчивости) наблюдателя.

### 1. Функция «deltaPoly»:

```
function pol = deltaPoly(gamma, alpha, beta)
% на вход подаются следующие параметры:
% n-мерный вещественный вектор gamma
% степень устойчивости alpha
% параметр устойчивости beta
if nargin == 1
    alpha = 1; beta = pi/2;
elseif nargin == 2
    beta = pi/2;
end
% размерность пространства
len = length(gamma);
% формирование коэффициентов
a1 = @(a,b,g) (2*a + g(1)^2 + 2*abs(g(2))*cos(b));
a2 = @(a,b,g) (a^2 + (g(1)^2)*a + 2*abs(g(2))*cos(b) + g(2)^2);
% начальный полином и кол-во его коэффициентов
pol = [1 a1(alpha,beta,gamma(1:2)) a2(alpha,beta,gamma(1:2))];
k = 3;
% процесс построения полинома
d = fix(len*0.5);
if d > 1
    for i = 2:d
        k = k + 2;
        % определение вспомогательных полиномов
        pol1 = zeros(1,k); pol2 = zeros(1,k); pol3 = zeros(1,k);
        pol1(1:k-2) = pol;
        pol2(2:k-1) = pol*a1(alpha,beta,gamma(k-2:k-1));
        pol3(3:k) = pol*a2(alpha,beta,gamma(k-2:k-1));
        % требуемый полином
        pol = pol1 + pol2 + pol3;
    end
end
if 2*d < len
    k = k + 1;
    pol1 = zeros(1,k); pol2 = zeros(1,k);
    a0 = gamma(len)^2 + alpha;
    pol1(1:k-1) = pol; pol2(2:k) = pol*a0;
    % требуемый полином
    pol = pol1 + pol2;
end
```

## 2. Функция «poleDelta» в варианте с использованием функции «place»:

```
function [lmg, L] = poleDelta(A, C, gamma, alpha, beta)
% назначение с.ч. для асимптотического наблюдателя
% через использование deltaPoly

if nargin == 3
    pol = deltaPoly(gamma);
elseif nargin == 4
    pol = deltaPoly(gamma, alpha);
elseif nargin == 5
    pol = deltaPoly(gamma, alpha, beta);
end
% сводим к задаче стабилизации и тем самым находим L*
p = roots(pol);
L = (place(A', C', p))';
% решаем матричное уравнение Ляпунова
A0 = A - L * C;
P = lyap(A0', eye(4));
% находим требуемую величину
lmg = 1 / (2 * max(eig(P)));
```

## 3. Функция «lmgOptimization»:

```
function [l0, L] = lmgOptimization(A, C, alpha, beta)
% нахождение оптимальной в плане расширения границ асимптотиче-
ской
% устойчивости матрицы коэффициентов наблюдателя L

% минимизируемая функция
func = @(gamma)poleDelta(A, C, gamma, alpha, beta);
% минимизируем методом Нелдера-Мида с использованием
% ППП Optimization Toolbox
y0 = rand(1, length(A(1, :))) / 4;
y_opt = fminsearch(@(y) (-func(y)), y0);
% оптимальные l0 и L
[l0, L] = poleDelta(A, C, y_opt, alpha, beta);
```